ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

В. К. Прилипко, Е. В. Хонинева

ФИЗИКА

Учебно-методическое пособие

Санкт-Петербург
2006

УДК 53
ББК 22.3
П76

Рецензенты:

доктор физико-математических наук, профессор *Н. А. Балошин*
(Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики)

Прилипко В. К., Хонинева Е. В.

П76 Физика: Учебно-методическое пособие / В. К. Прилипко, Е. В. Хонинева; ГУАП. – СПб., 2006. – 48 с.: ил.

Вторая часть пособия содержит задачи по основным разделам курса общей физики, не вошедшие в первую часть.
Каждой теме предпослан краткий обзор законов и, в ряде случаев, приводятся примеры решения типичных задач.
Предназначено для студентов технических специальностей.

УДК 53
ББК 22.3

1. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ. ПРИРОДА СВЕТА. РАСПРОСТРАНЕНИЕ СВЕТА

Ток смещения i_d может быть рассчитан по формуле

$$i_d = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt},$$

где *электрическая постоянная* СИ $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м; Φ_E – *поток вектора* напряженности электрического поля $\vec{E}$.

Скорость v ЭМВ может быть рассчитана по формуле

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где $c = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} \cong 3 \cdot 10^8$ м/с; μ, ε – *магнитная* и *электрическая проницаемости* среды, в которой распространяется ЭМВ; $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная СИ.

Энергия, переносимая ЭМВ в свободном пространстве, описывается *вектором Пойнтинга*

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B},$$

где E и B – мгновенные значения векторов электрического и магнитного поля.

Также известно, что ЭМВ переносят импульс, что приводит к *световому давлению*. Так для параллельного пучка света, полностью поглощаемого некоторой поверхностью (телом), теория Максвелла дает следующее выражение для импульса, приобретаемого телом, поглотившим энергию U:

$$p = \frac{U}{c},$$

где c – скорость света. Если свет полностью отражается поверхностью, то величина импульса увеличивается в 2 раза:

$$p = \frac{2U}{c}.$$

Движущиеся источники и наблюдатели. Скорость света в вакууме не зависит от того, движется источник света или покоится, движется приемник света или покоится. Это постулат теории относительности, который противоречит классическому закону сложения скоростей. Результат специальной теории относительности:

$$v = \frac{v' + u}{1 + \frac{v' u}{c^2}},$$

где v и v' – скорости светового импульса в неподвижной инерциальной системе отсчета и ИСО, движущейся относительно неподвижной со скоростью u.

Эффект Доплера в оптике. Если источник света удаляется от наблюдателя со скоростью u, то частота v', воспринимаемая неподвижным наблюдателем, отличается от частоты испускаемого света v. Разность указанных частот носит название доплеровского сдвига частоты. Связь частот дается формулой

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{u}{c}\right)^2}},$$

Примеры решения задач

1. Параллельный пучок света, поток энергии которого $S = 10$ Вт/см^2, падает в течение 1 часа на полностью отражающее плоское зеркало, площадь которого 1 см^2. Определить импульс, полученный зеркалом, и силу, действующую со стороны пучка на зеркало.

Рещение

Энергия, отраженная от зеркала за 1 час облучения, может быть рассчитана по формуле

$$U = \left(10\ \text{Вт/см}^2\right)\left(1\ \text{см}^2\right)\left(3600\ \text{с}\right) = 3{,}6 \cdot 10^4\ \text{Дж},$$

импульс, полученный зеркалом за все время облучения:

$$p = \frac{2U}{c} = \frac{2 \cdot 3{,}6 \cdot 10^4\ \text{Дж}}{3 \cdot 10^8\ \text{м/с}} = 2{,}4 \cdot 10^{-4}\ \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Из второго закона Ньютона средняя сила, действующая на зеркало, равняется средней скорости, с которой импульс передается зеркалу, т. е.

$$F=\frac{p}{t}=\frac{2{,}4\cdot10^{-4}\ \text{кг}\cdot\text{м/с}}{3600\ \text{с}}=\ 6{,}7\cdot10^{-8}\ \text{Н}.$$

2. Два электрона испущены радиоактивным атомом и движутся в противоположных направлениях. Скорости электронов в лабораторной системе отсчета имеют одинаковую величину 0,6 с (это соответствует кинетической энергии 130 кэВ). Какова относительная скорость электронов?

Решение

Классический закон сложения скоростей приводит к следующему результату для относительной скорости электронов:

$$v=v'+u=0{,}6c+0{,}6c=1{,}2c.$$

Формула теории относительности дает другой результат:

$$v=\frac{v'+u}{1+\frac{v'u}{c^2}}=\frac{0{,}6c+0{,}6c}{1+(0{,}6c)^2/c^2}=0{,}88c.$$

Совокупность косвенных экспериментальных данных свидетельствует в пользу последнего результата.

3. Сравнение длин волн излучения некоторых атомов, обнаруженного в галактическом излучении, с их излучением в земных условиях показывает, что галактическое излучение имеет длину волны, большую примерно на $0{,}4\ \%$. Какова радиальная скорость галактики относительно Земли? Приближается она или удаляется?

Решение

Если λ – длина волны источника на Земле, то

$$\lambda'=1{,}004\lambda.$$

Так как выполняется $\lambda'v'=\lambda v=c$, то это приводит для частот к соотношению: $v'=0{,}996v$. Подставляя это значение в формулу

$$\nu'=\nu\frac{1-\frac{u}{c}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}},$$

и решая относительно $\frac{u}{c}$, получим: $\frac{u}{c}=0{,}004$ или $u=1{,}2\cdot10^6$ м/с.

Уменьшение воспринимаемой частоты означает, что галактика расширяется.

Задачи

1. Плоский конденсатор с пластинами, имеющими форму дисков диметром 20 см, заряжен током i, как показано на рис. 1. Плотность тока смещения одинакова во всех точках между пластинами конденсатора и равняется 20 А/м^2. 1. Чему равняется индукция B магнитного поля между обкладками конденсатора на расстоянии 5 см от его оси? 2. Чему равняется $\frac{dE}{dt}$ в этом месте?

2. Доказать, что сила тока смещения в плоском конденсаторе может быть рассчитана по формуле

$$i_d = C\frac{dV}{dt},$$

где C – электроемкость; V – напряжение конденсатора.

3. Конденсатор состоит из двух плоских круглых пластин площадью А = 0,1 м^2, присоединенных к источнику напряжения $E = E_0 \sin \varpi t$, где E_0 = = 200 В, а ϖ = 100 рад/с. Максимальное значение тока смещения $i_d = 8{,}9 \cdot 10^{-6}$ А. Пренебрегая краевыми эффектами, найти: а) максимальное значение тока i; б) максимальное значение $\frac{d\Phi_E}{dt}$, где Φ_E – поток вектора E через область между пластинами; в) расстояние между пластинами; г) максимальное значение индукции B магнитного поля между пластинами конденсатора на расстоянии 0,1 м от центра.

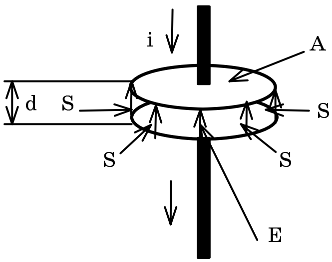

Рис. 1

4. Предположим, что установлена радиосвязь с гипотетическими инопланетянами, населяющими гипотетическую планету, обращающуюся вокруг ближайшей к Земле звезды α-Центавра, которая находится от нее на расстоянии 4,2 световых лет. Как долго ждать ответа на послание с Земли?

5. Электромагнитная волна с частотой 10 МГц переходит из среды с диэлектрической проницаемостью ε = 3 в вакуум. На сколько изменится (увеличится или уменьшится) длина волны?

6. Плоская электромагнитная волна описывается уравнением $E = E_{my}\cos(\varpi t - kx)$, где амплитуда волны E_{my} = 100 В/м, волновой вектор k = 0,5 м$^{-1}$.

Для моментов времени $t = 0$ и 1 мкс найти напряженность магнитного поля H в точке $x = 1$ м.

7. Электромагнитная волна занимает пространство между двумя параллельными бесконечными плоскостями AB и $A'B'$ (рис. 2). Изображенный участок электромагнитного поля движется со скоростью света c в направлении, перпендикулярном плоскости AB. Напряженность электрического поля волны E. Применяя закон электромагнитной индукции к прямоугольному контуру $baa'b'$, определить индукцию магнитного поля волны.

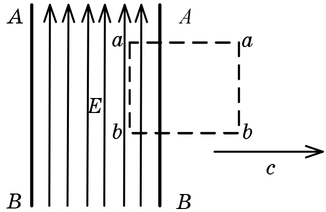

Рис. 2

8. Плоская электромагнитная волна имеет амплитуду электрического вектора

$$E_m = 10^{-4}\ \text{В/м}.$$

Найти амплитуду магнитного поля и интенсивность волны.

9. Две синусоидальные волны с одной поляризацией

$$E_1 \sin\left[\varpi\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_1\right] \text{ и } E_2 \sin\left[\varpi\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi_2\right]$$

накладываются друг на друга. 1. Чему равна амплитуда напряженности электрического поля результирующей волны? 2. Чему равна фаза этой волны?

10. В вакууме в направлении оси ox распространяется плоская электромагнитная волна $E = E_{my}\cos(\text{v}t - kx)$. Найти средний вектор Пойнтинга.

11. Излучение Солнца вблизи поверхности Земли имеет интенсивность 1400 Вт/м^2. Принимая Землю за плоский диск, ориентированный перпендикулярно солнечным лучам, а также то, что все падающее на Землю излучение поглощается, рассчитать силу светового давления. Сравнить эту силу с силой гравитационного притяжения Земли Солнцем.

12. Предполагается создать космический корабль, движущийся под действием силы светового давления солнечного излучения на большой парус, изготовленный из алюминиевой фольги. Каким должен быть размер этого паруса, чтобы преодолеть силу гравитационного притяжения Солнца? Предположим, что масса корабля с парусом 1500 кг, парус полностью отражает падающее на него излучение и ориентирован перпендикулярно к солнечным лучам. Масса Солнца $1{,}97 \cdot 10^{30}$ кг.

13. Небольшой космический корабль массой 1500 кг свободно движется в открытом космическом пространстве. С корабля посылается пучок света мощностью 10 кВт. Какую скорость приобретет корабль за сутки?

14. Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме, описывается следующими уравнениями для электрического и магнитного полей:

$$E_x = E_0 \sin(kz - \varpi t),\ B_y = \frac{E_0}{c} \sin(kz - \varpi t),\ E_y = E_z = B_x = B_z = 0.$$

Найти: а) направление распространения волны; б) среднюю мощность на единице поверхности; в) скорость передачи импульса волны полностью поглощающей поверхности A, перпендикулярной направлению распространения.

15. Период обращения Солнца вокруг своей оси 24,7 дня, его радиус $7{,}0 \cdot 10^8$ м. Чему равен доплеровский сдвиг частоты излучения с длиной волны 550 нм, приходящего с противоположных краев солнечного диска?

16. Покажать, что для медленных движений доплеровский сдвиг может быть приближенно вычислен по формуле

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{u}{c}.$$

2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

Отражение и преломление. Плоские волны и плоские поверхности

На рис. 1 изображена картина отражения и преломления света на плоской границе раздела прозрачных диэлектриков в терминах геометрической оптики.

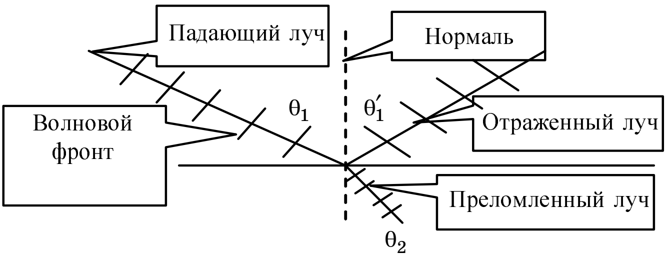

Рис. 1

Экспериментально установлено:

1) отраженный и преломленный лучи лежат в плоскости, проходящей через падающий луч и нормаль к границе раздела сред, восстановленную из точки, куда падает луч;

2) для отражения справедливо $\theta_1 = \theta_1'$

3) для преломления выполняется закон Снелла – Декарта

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = n_{21},$$

где n_{21} – *показатель преломления* среды 2 относительно среды 1.

Законы преломления и отражения света могут быть выведены из уравнений Максвелла. Выкладки при этом оказываются весьма сложными, но существует более простой подход, основанный на принципе Кристиана Гюйгенса (1678 г.). В основу положена идея, что свет – это волна (а не поток частиц). Эти волны распространяются в соответствии со следующим правилом: *все точки волнового фронта можно рассматривать как источники идентичных вторичных сферических волн. Положение волнового фронта спустя некоторое вре-*

мя t совпадает с поверхностью, огибающей указанные сферические волны.

Рассмотрим пучок лучей, выходящий из оптически плотной среды с показателем преломления n_2 в менее плотную среду с показателем преломления n_1. При увеличении угла падения до некоторого значения θ_C – *критического угла*, угол преломления становится равным 90°. С увеличение угла падения преломленный луч будет отсутствовать. Это явление называется *полным внутренним отражением*. Угол θ_C может быть найден из уравнения

$$\sin\theta_C = \frac{n_2}{n_1}.$$

Сферические волны, падающие на отражающие или преломляющие поверхности сферической формы

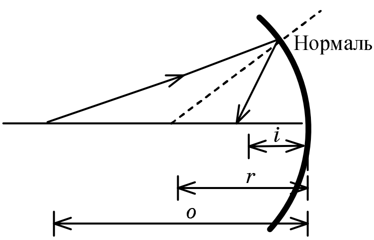

Рис. 2

На рис. 2 изображен ход луча, испущенного точечным источником O и отраженного *сферическим зеркалом*. Расчет показывает, что для малых углов α (так называемое параксиальное приближение) справедливо следующее соотношение между расстоянием o от зеркала до источника, расстоянием i от зеркала до изображения и радиусом r зеркала:

$$\frac{1}{o} + \frac{1}{i} = \frac{2}{r}.$$

Когда параллельный пучок падает на зеркало, то он собирается в точке на оси, называемой *фокальной точкой*.

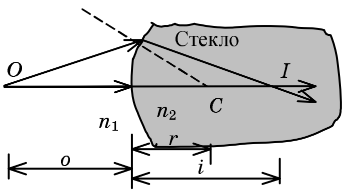

Рис. 3

Сферическая преломляющая поверхность, радиус кривизны которой r фокусирует свет от точечного источника в точку I, показана на рис. 3.

В параксиальном приближении выполняется следующее соотношение между показателями преломления сред и геометрическими расстояниями на рис. 3:

$$\frac{n_1}{o} + \frac{n_2}{i} = \frac{n_2 - n_1}{r}.$$

Приведенное выражение описывает также случай, когда преломляющая поверхность своей выпуклой частью направлена в противоположную изображенному на рисунке случаю сторону. В этом случае пучок становится расходящимся и возникает мнимое изображение источника. Учет этого обстоятельства осуществляется знаком «минус» перед r и i в вышеприведенной формуле.

Если источник света O располагается в оптически более плотной среде(на приведенном рисунке надо O разместить внутри стекла), то изображение также оказывается мнимым и в указанной формуле следует лишь поставить знак «минус» перед r.

Тонкие линзы. В параксиальном приближении с сохранением прежних обозначений формула тонкой линзы имеет следующий вид:

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f},$$

где параметр f – фокусное расстояние линзы, которое в свою очередь может быть вычислено по известным радиусам кривизны преломляющих поверхностей линзы r', r'':

$$\frac{1}{f}=(n-1)\left(\frac{1}{r'}-\frac{1}{r''}\right).$$

Радиусы кривизны r' и r'' относятся к первой и второй (по ходу луча) преломляющей поверхности соответственно. Каждая из указанных величин положительна, если соответствующий центр кривизны располагается справа от линзы (при условии, что свет падает на линзу слева).

Задачи

1. Точечный предмет расположен на расстоянии 10 см от плоского зеркала. Глаз наблюдателя (диметр зрачка 5 мм) на расстоянии 20 см Полагая, что глаз и предмет расположены на одной линии, перпендикулярной к поверхности зеркала, определить площадь зеркала, в пределах которой наблюдается отражение предмета 92,2 мм^2.

2. Короткий стержень длиной l лежит на оси сферического зеркала на расстоянии o от зеркала. Показать, что его изображение будет иметь длину l'. Показать, что выполняется соотношение

$$l'=l\left(\frac{f}{o-f}\right)^2.$$

3. Тонкая плоская полупрозрачная пластина расположена на расстоянии b от рассеивающего сферического зеркала. Точечный источ-

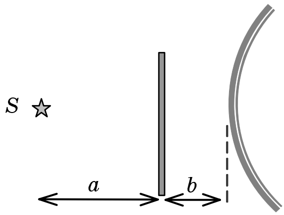

Рис. 4

ник света S расположен на расстоянии a от пластины (рис. 4) так, что его изображение, полученное от пластины, совпадает с изображением в зеркале. Найти расстояние от источника до пластины, полагая, что $b = 7{,}5$ см и фокусное расстояние зеркала $f = -30$ см.

4. В кювету на слой четыреххлористого углерода (показатель преломления 1,46), толщиной 4 см налит слой воды (показатель преломления 1,33). На какой глубине наблюдатель увидит дно кюветы? Наблюдение ведется перпендикулярно поверхности жидкости.

5. Узкий пучок света падает на стеклянную сферу перпендикулярно к ее поверхности. Определить положение изображения как функцию ее радиуса и показателя преломления ($n < 2$).

6. Линза изготовлена из стекла с показателем преломления 1,5. Одна сторона линзы – плоская, а другая – собирающая с радиусом кривизны 20 см. 1. Найти фокусное расстояние линзы. 2. Если объект расположен на расстоянии 40 см слева от линзы, где будет располагаться его изображение?

7. Объект расположен в центре кривизны симметричной собирающей линзы. 1. Какими будут знаки радиусов кривизны обеих преломляющих поверхностей? 2. Определить положение изображения как функцию радиуса кривизны r и показателя преломления n стекла. 3. Каким будет изображение: мнимым или действительным? 4. Построить ход лучей в линзе.

8. Светящийся объект и экран располагаются на расстоянии D друг от друга. 1. Показать, что собирающая линза с фокусным расстоянием f образует два действительных изображения в двух положениях линзы, отстоящих друг от друга на расстоянии $d = \sqrt{D(D-4f)}$. 2. Показать, что размеры изображений для этих двух положений относятся как $\left(\dfrac{D-d}{D+d}\right)^2$.

9. Уравнение тонкой линзы в форме

$$\frac{1}{o}+\frac{1}{i}=\frac{1}{f}$$

называется уравнением Гаусса. Получить другую форму этого уравнения – форму Ньютона $x \cdot x' = f^2$, где x – расстояние от объекта до первого фокуса линзы, а x' – расстояние от второго фокуса до изображения.

10. Объект в виде прямого стержня располагается от линзы на расстоянии, равном двойному фокусному расстоянию f_1. С другой стороны от линзы располагается собирающее сферическое зеркало с фокусным расстоянием f_2. Зеркало удалено от линзы на расстояние $2(f_1+f_2)$. 1. Найти расстояние до изображения и его относительный размер. 2. Построить ход лучей.

3. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА

Примеры решения задач

1. Установка для наблюдения двухлучевой интерференции (опыт Юнга, рис. 1) освещается светом ртутной лампы, прошедшим через светофильтр, выделяющий излучение с длиной волны 546 нм, щели расположены друг от друга на расстоянии 0,1 мм, а экран, на котором наблюдаются интерференционные полосы, на расстоянии 20 см

Под каким углом наблюдается первый минимум? Десятый максимум?

Решение

Положение *минимумов* интерференции дается уравнением

$$\sin\theta = \frac{(m+\frac{1}{2})\lambda}{d}.$$

Полагая для первого минимума $m = 0$, получаем $\sin\theta = 0{,}0027$. Для десятого максимума положим $m = 10$ и подставим в уравнение $d\sin\theta = m\lambda$, определяющее положение *максимумов* интерференции. Получим для θ значение 3,8°.

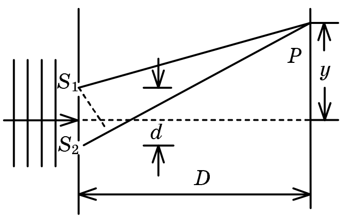

Рис. 1

Расстояние y от середины экрана до максимума порядка m можно рассчитать по формуле

$$y_m = m\frac{\lambda D}{d}.$$

Отсюда расстояние между соседними максимумами порядка m и $m+1$

$$\Delta y = y_{m+1} - y_m = \frac{\lambda D}{d} = 1{,}09 \text{ мм}.$$

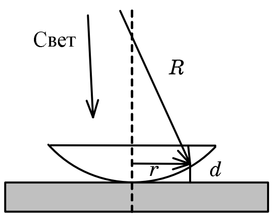

Рис. 2

2. Рис. 2 изображает установку по наблюдению полос равной толщины в схеме Ньютона. Параллельный пучок монохроматического света падает сверху на линзу, лежащую на плоской прозрачной пластине. Рассчитать радиусы светлых интерференционных полос в отраженном свете.

В воздушном зазоре толщиной d возникает отраженная от плоской пластины волна. При отражении возникает скачок фазы, равный 180°. Это приводит к тому, что условие интерференционного максимума приобретает следующий вид:

$$2d = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda, \ m = 0, \ 1, \ 2, \ \ldots.$$

Предполагается, что показатель преломления воздуха равен 1. Если зазор заполнен прозрачным диэлектриком с показателем преломления n, то d заменяется на nd. Из рисунка видно, что

$$d = R - \sqrt{R^2 - r^2} = R - R\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Если $r/R << 1$, то разложив подкоренное выражение в степенной ряд и оставив только два первых члена ряда, получим

$$d = R - R\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \ldots\right] \cong \frac{r^2}{2R}.$$

Комбинируя полученное выражение с условием интерференционного максимума, получаем

$$r = \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda R} \quad m = 0, \ 1, \ 2, \ldots.$$

Это формула для расчета радиусов светлых интерференционных колец. Если облучение производится не монохроматическим, а, например, белым светом, то каждая монохроматическая составляющая создаст свой набор колец (цветных) и эти наборы перекроются.

Задачи

1. Методом векторных диаграмм найти сумму трех однонаправленных колебаний:

$$y_1 = 10\mathrm{sim}\varpi t; \ y_2 = 15\mathrm{sim}(\varpi t + 30°); \ y_3 = 5\mathrm{sim}(\varpi t - 45°).$$

2. В опыте Юнга расстояние между щелями в 100 раз больше длины волны проходящего через них света. 1. Чему равно угловое расстояние между первым и вторым максимумами? 2. Каким будет расстояние между указанными максимумами, если экран находится от щели на расстоянии 50 см?

3. Монохроматическое излучение с длиной волны λ проходит через узкую щель S в непрозрачном экране I. За щелью вплотную располагается линза, а за линзой – плоское зеркало. Плоскость зеркала располагается перпендикулярно экрану I. Оптическая ось линзы лежит в плоскости зеркала. Расстояние от щели до зеркала h. Второй экран II располагается в фокальной плоскости линзы. Найти условия возникновения максимумов и минимумов интерференционной картины в переменных: угол θ, λ и L.

4. На рис. 3 S_1 и S_2 – два точечных когерентных источника излучения с длиной волны 1 м. Разность фаз колебаний источников равняется нулю. Расстояние d между источниками 4 м. Найти: а) положения 1-, 2- и 3-го максимумов сигнала детектора движущегося вдоль оси ox; б) равняется или нет нулю интенсивность сигнала в первом минимуме?

Рис. 3

5. Тонкая пленка ацетона (показатель преломления 1,25) налита на поверхность толстой стеклянной пластины (показатель преломления 1,5). Плоские световые волны падают на ее поверхность. Наблюдение за отраженным светом обнаруживает интерференционное ослабление света с длиной волны 600 нм и усиление света с длиной волны 700 нм. Какова толщина пленки ацетона?

6. Свет с длиной волны 630 нм падает нормально на прозрачную тонкую пленку с показателем преломления 1,5, имеющую форму клина. На длине клина укладывается 10 светлых и 9 темных интерференционных полос. На сколько изменяется толщина клина в указанной области?

7. Протяженный источник света с длиной волны 680 нм освещает нормально две стеклянные пластины длиной 12 см, касающиеся друг друга на одном конце и разделенные на другом конце проволочкой диаметром 0,048 мм (рис. 4). Сколько светлых интерференционных полос будет наблюдаться на расстоянии 12 см?

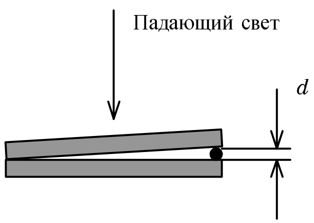

Рис. 4

8. Воздушный промежуток между линзой и плоской пластиной заполнили некоторой жидкостью. При этом диаметр десятого кольца в установке по наблюдению колец Ньютона изменяется от 1,4 см до 1,27 см. Найти показатель преломления жидкости.

9. В интерферометре Майкельсона одно из зеркал переместилось на 0,233 мм. При этом было насчитано прохождение 792 колец. Какова длина световой волны?

10. Тонкая пленка с показателем преломления $n = 1{,}4$ вводится в одно из плеч интерферометра Майкельсона. Установка освещается светом натриевой лампы с длиной волны 589 нм. При этом наблюдается прохождение 7 колец. Какова толщина пленки?

4. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Если световая волна – плоская или сферическая – падает на круглое отверстие в непрозрачном экране, то в результате *дифракции Френеля* за экраном *на оси* отверстия интенсивность прошедшего света будет изменяться от максимальной до минимальной. Для суждения о том, какой будет интенсивность света, *для данной точки на оси* определяется число зон Френеля, помещающихся в отверстии в экране. Если это число четное, то интенсивность будет минимальной (близкой к нулю), а если нечетное, то максимальной (и даже большей, чем в отсутствие экрана!). Следующие формулы позволяют определить радиусы зон Френеля. Так для сферической волны радиус n-й зоны:

$$r_n = \sqrt{\frac{ab}{a+b} k\lambda},$$

где a – расстояние от источника света до отверстия в экране; b – расстояние от отверстия в экране до точки на оси, в которой наблюдается дифракция; k – номер зоны Френеля; λ – длина волны.

Для плоской волны формула упрощается: $r_n = \sqrt{bk\lambda}$. Аналогичный эффект наблюдается, если вместо экрана на пути света располагается непрозрачный круг того же диаметра, что и у отверстия в экране.

Дифракция на щели. Положение дифракционного минимума порядка m дается формулой

$$d \text{sim}\theta = m\lambda,$$

где d – ширина щели; λ – длина волны; θ – угол дифракции.

Распределение интенсивности I в дифракционной картине от одной щели:

$$I_\theta = I_m \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)}{\left(\frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}\right)^2} \right),$$

где I_m – интенсивность центрального дифракционного максимума.

Дифракция на отверстии. В этом случае положение первого дифракционного минимума дается выражением

$$\sin\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{d}.$$

Здесь d – диаметр отверстия. Это выражение определяет принципиальное ограничение, накладываемое дифракцией на возможность оптического исследования объектов, имеющих малые угловые размеры.

Дифракционная решетка – прибор для разложения излучения на монохроматические составляющие, принципиальную основу которого составляют регулярно расположенные на расстоянии порядка длины волны света щели. Основное уравнение дифракционной решетки позволяет рассчитать угловое положение дифракционного максимума m-го порядка $d\sin\theta = m\lambda$. Здесь θ – угол дифракции; d – расстояние между соседними щелями решетки (так называемый *период решетки*). Число m принимает значения $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Задачи

1. Точечный источник света с длиной волны 0,55 мкм расположен на расстоянии 2 м от круглого отверстия в непрозрачном экране. Диаметр отверстия 2 мм. Найти расстояние от отверстия до точки наблюдения, для которой число зон Френеля в отверстии равняется пяти.

2. Свет от далекой звезды с длиной волны 0,5 мкм падает на Землю (радиус Земли приблизительно равен 6400 км). На каком наименьшем расстоянии от Земли (в области геометрической тени) можно наблюдать значительное увеличение света от звезды?

3. В опыте по дифракции света на щели расстояние между первым и пятым дифракционным максимумом на экране, отстоящем от щели на расстоянии 40 см, равно 0,35 мм. Длина волны излучения 550 нм. Найти ширину щели.

4. Плоская волна (590 нм) падает на щель шириной 0,4 мм. Собирающая линза ($f = +70$ см) помещается за щелью и фокусирует прошедший свет на экран. Каким будет расстояние между центральным максимумом и вторым минимумом?

5. Определить относительные интенсивности побочных максимумов в опыте по дифракции света на щели.

6. Какой будет угловая полуширина дифрагированного пучка, если ширина щели равна: а) одной; б) пяти; в) десяти длинам волн?

7. Расстояние между фарами приближающегося автомобиля 140 см. На каком максимальном удалении глаз различит их? Предположить, что диаметр зрачка 5 мм, а длина волны излучения 550 нм. Также предположить, что разрешение определяется только дифракцией.

8. Орбита спутника-шпиона пролегает на высоте 200 км над поверхностью Земли. Объектив телескопа имеет фокусное расстояние $f = 2{,}4$ м, что позволяет разрешать объекты на Земле, размеры которых превосходят 0,36 м (т. е. легко обнаруживать автомобиль). Определить эффективный диаметр линзы объектива. Длина волны регистрируемого света 550 нм.

9. Дифракционная решетка состоит из щелей шириной по 300 нм с расстоянием между ними 900 нм. Решетка освещается плоской монохроматической волной с длиной волны 600 нм. Угол падения равен нулю. 1. Сколько будет наблюдаться дифракционных максимумов? 2. Какова угловая ширина линий спектра, если решетка имеет 1000 щелей? (Угловая ширина определяется как угол между двумя соседними дифракционными минимумами).

10. Диапазон длин волн излучения, относящегося к видимому свету, простирается от длины волны 430 нм до 680 нм. Каким должен быть период дифракционной решетки, чтобы дифракционный спектр первого порядка располагался в пределах угла 20°?

5. КВАНТОВАЯ ПРИРОДА СВЕТА

Тепловое излучение. Излучение нагретых тел активно исследовалось во второй половине 19 века. Теория теплового излучения, базирующаяся на основных положениях термодинамики, статистической физики Больцмана и электромагнитной теории Максвелла, во многом успешно описывала явление, но некоторые противоречия привели в конце концов к радикальному изменению в подходах и к созданию *теории квант* (со временем – квантов) Планка(1900 г.). В соответствии с теорией Планка электромагнитное излучение поглощается или излучается телами скачкообразно, порциями. Так величина минимальной порции энергии – *квант энергии*

$$\varepsilon = \hbar\varpi,$$

где ϖ – частота излучения; $\hbar$ – *постоянная Планка*, равная $1{,}055\cdot$ $\cdot 10^{-34}$ Дж·с. Квантование энергии, введенное Планком, оказалось универсальным свойством микрочастиц, что привело в дальнейшем к созданию *квантовой механики* микрочастиц.

Энергия, излучаемая за 1 секунду с 1 м^2 поверхности нагретого до температуры T тела, так называемая *излучательность* – R, подчиняется закону *Стефана – Больцмана*

$$R = a\sigma T^4,$$

где a – коэффициент черноты; $\sigma = 5{,}67\cdot 10^{-8}\ \dfrac{\text{Вт}}{\text{м}^2\text{К}^4}$ – постоянная Стефана – Больцмана. Если тело поглощает все падающее на него излучение, то коэффициент черноты равен единице и говорят, что это – *абсолютно черное тело*. Планк вывел формулу, описывающую распределение теплового излучения по длинам волн. Это физическая величина – *спектральная плотность излучательности* $r_{\lambda,T}$:

$$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi\hbar c^3}{\lambda^5}\cdot\frac{1}{\left(\exp\left(\dfrac{2\pi\hbar c}{\lambda k_{\text{Б}} T}\right) - 1\right)},$$

где c – скорость света в вакууме; λ – длина волны; $k_{\text{Б}}$ – постоянная Больцмана, равная $1{,}38\cdot 10^{-23}$ Дж/К.

Внешний фотоэффект – явление испускания электронов из поверхности металла под действием света. Закономерности фотоэффекта невозможно объяснить, оставаясь в рамках классической физики. А. Эйнштейн в 1905 г., основываясь на идее квантов Планка, предположил, что оптическое излучение представляет поток частиц – фотонов, энергия которых равняется $\varepsilon = \hbar\varpi$. Фотоэффект объясняется как результат «попадания» фотона в электрон проводимости в металле. Последний, поглотив энергию фотона, имеет возможность выйти за пределы металла, если энергия, сообщенная ему фотоном, достаточна для преодоления потенциального барьера, высота которого есть так называемая *работа выхода электронов* $A_{\text{вых}}$. Избыток энергии фотона над работой выхода проявляет себя в максимально возможной кинетической энергии $E_{\text{к}\max} = \dfrac{mv_{\max}^2}{2}$. Эти величины входят в формулу Эйнштейна для фотоэффекта:

$$\hbar\varpi = A_{\text{вых}} + \frac{mv_{\max}}{2}.$$

Эффект Комптона. Заключается в изменении длины волны излучения при его рассеянии на свободных электронах. Изменение (как правило, увеличение) длины волны – $\Delta\lambda$ связано с углом θ, под которым наблюдается рассеянное излучение, выражением

$$\Delta\lambda = (\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}\left(1-\cos\theta\right),$$

где m_0 – масса покоя электрона; c – скорость света в вакууме.

Величина $\lambda_{\text{К}} = \dfrac{2\pi\hbar}{m_0 c}$ носит название *комптоновской длины волны* для электрона.

Пример решения задачи

X-лучи с длиной волны 0,1 нм рассеиваются на образце из твердого углерода. Рассеянное излучение наблюдается под углом 90° к падающему пучку. Чему равен комптоновский сдвиг длины волны излучения? Какую кинетическую энергию приобретает электрон?

Решение

Комптоновский сдвиг волны

$$\Delta\lambda = (\lambda_2 - \lambda_1) = \frac{2\pi\hbar}{m_0 c}\left(1-\cos\theta\right).$$

После подстановки данных получим

$$\Delta\lambda = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}}{(9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^{8}}\left(1 - \cos 90^{\circ}\right) = 2{,}43 \cdot 10^{-3} \text{ нм.}$$

Для вычисления кинетической энергии воспользуемся законом сохранения энергии в процессе столкновения изначально покоящегося электрона с фотоном, энергия которого $\frac{2\pi\hbar c}{\lambda}$. В результате упругого соударения электрон приобретает кинетическую энергию K, а энергия фотона уменьшается до значения $\frac{2\pi\hbar c}{\lambda + \Delta\lambda}$:

$$\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{2\pi\hbar c}{\lambda + \Delta\lambda} + K.$$

Отсюда для K получим

$$K = \frac{2\pi\hbar c \Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)} = 4{,}73 \cdot 10^{-17} \text{ Дж} = 295 \text{ эВ.}$$

Можно показать, что начальная энергия фотона в рассматриваемом случае равняется 12400 эВ, так что фотон теряет в столкновении 2,3% энергии. Если бы энергия фотона была в 10 раз больше, то, как показывает расчет, потеря энергии возросла также в 10 раз, то есть достигла 23%. Это вытекает из того факта, что $\Delta\lambda$ не зависит от начальной длины волны λ. Таким образом, более энергичные X-лучи с меньшей длиной волны изменяют длину волны в большей мере и, соответственно, обладают большим процентом потери энергии.

Задачи

1. Какая мощность излучается нихромовой проволокой длиной 1 м, диаметром 1,5 мм при температуре 800 °C, если коэффициент черноты нихрома равен 0,92?

2. Печь с температурой внутренних стенок 227 °C находится в комнате, температура в которой 27 °C. В печи имеется отверстие площадью 5 см^2. Какая результирующая тепловая мощность поступает из печи в комнату? (Подсказка: рассматривайте как печь, так и комнату, как нагретые полости).

3. Вывести закон Стефана – Больцмана из формулы Планка, основывая свой вывод на том, что

$$R = \int_0^{\infty} r_{\lambda,T}\, d\lambda.$$

4. Длина волны, $\lambda_{\max}$, на которой спектральная плотность излучательности $r_{\lambda,T}$ тела, нагретого до температуры T, максимальна в соответствии *с законом* смещения *Вина*:

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T},$$

где постоянная $b = 2{,}898 \cdot 10^{-3}$ мК. Доказать, что указанный закон является следствием формулы Планка.

5. В полости, стенки которой находятся при температуре 4000К сделано отверстие диаметром 5 мм. 1. С какой скоростью энергия видимого излучения (диапазон длин волн 0,4–0,7 мкм) выходит из отверстия? 2. Какую долю всего теплового излучения она составляет? Решить задачу аналитически или графически.

6. Допустим, что атомы газа, имеющие размер 10^{-8} см, облучаются световым поток мощностью 10^{-5}Вт от точечного источника, расположенного на расстоянии 5 м. Энергия связи внешних электронов 2 эВ. Какова должна быть продолжительность облучения для вырывания электрона из атома (т. е. для фотоэффекта)?

7. Солнечное излучение падает на Землю со скоростью 2 кал/см^2·с. Сколько фотонов падает на еденицу поверхности в единицу времени, если длина волны излучения 550 нм?

8. Каковы: а) частота; б) длина волны; в) импульс фотонов, энергия которых равняется энергии покоя электрона?

9. Фотоны падают на поверхность натрия, имеющего работу выхода 2,2 эВ. Фототок прекращается при задерживающем напряжении 5 В. Какова длина волны фотонов?

10. 1. Найти задерживающее напряжение для металла, имеющего работу выхода 1,8 эВ для излучения с длиной волны 400 нм. 2. Какова максимальная скорость фотоэлектронов?

11. Показать, рассматривая столкновение между фотоном и свободным электроном в рамках релятивистской механики, невозможность полной передачи энергии от фотона к электрону. Иными словами, фотоэффект не может возникнуть на свободных электронах, последние должны быть связаны в твердом теле или в атоме.

12. Фотоны с длиной волны $0{,}024 \cdot 10^{-8}$ см сталкиваются со свободными электронами. 1. Найти длину волны фотона, рассеянного под углом 30°. 2. Проделать тоже самое для рассеяния под углом 120°.

13. Фотон с длиной волны 0,2 нм испытывает комптоновское рассеяние, и его частота изменяется на 0,01 %. 1. На какой угол рассеялся фотон? 2. Сколько энергии получил электрон?

14. Рассчитать в процентах изменение энергии фотона в комптоновском рассеянии на угол 90° для излучения: а) в микроволновом диапазоне с длиной волны 3 см; б) в видимом диапазоне спектра с длиной волны 500 нм; в) в рентгеновском диапазоне с длиной волны 0,1 нм; г) для гамма излучения с энергией фотона 1 МэВ. Каково ваше заключение о важности комптоновского рассеяния в различных диапазонах спектра?

15. Фотон испытывает «лобовое» столкновение с покоящимся свободным электроном и отскакивает назад. Если электрон удаляется со скоростью βc, где $\beta \ll 1$ (например, 10^{-3}), показать, что отношение кинетической энергии электрона после рассеяния к энергии фотона также равняется β.

6. ТЕОРИЯ БОРА АТОМА ВОДОРОДА И ВОДОРОДОПОДОБНЫХ ИОНОВ

Теория Бора является кульминацией так называемой *старой* квантовой теории, основанной на открытии Планка. Большой экспериментальный материал по *оптическим спектрам* атомов, в том числе по водороду и водородоподобным ионам (He^+, Li^{++}), был обобщен в виде эмпирической связи между частотой $\varpi = 2\pi v$ линий спектра и постоянной *Ридберга* R, равной

$$\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \frac{me^4}{2\hbar^3}.$$

Эта связь дается формулой Бальмера:

$$\varpi = RZ^2\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right).$$

Здесь Z – порядковый номер водородоподобного иона. По Бору, атом водорода может находиться в одном из некоторых стационарных состояний, в которых он не излучает. Излучение возникает в момент перехода атома из одного состояния с энергией E_K в другое с меньшей энергией E_J. Энергия испускаемого кванта $2\pi\hbar\nu$ связана с указанными энергиями *правилом частот Бора*: $2\pi\hbar\nu = E_K - E_J$. Атом состоит из массивного ядра и электрона, обращающегося вокруг него по круговой орбите. Для объяснения устойчивости атома Бор ввел так называемое *квантовое условие* – момент импульса l электрона в атоме квантуется:

$$l = mvr = n\hbar,$$

где m – масса электрона; v – его скорость; r – радиус орбиты электрона; n = 1, 2, 3, ... Теория Бора приводит к следующему выражению для энергии электрона:

$$E_n = -\frac{me^4}{8\varepsilon_0(2\pi\hbar)^2}\frac{1}{n^2}.$$

Для радиуса орбиты электрона

$$r = n^2 \frac{(2\pi\hbar)^2 \varepsilon_0}{\pi m e^2}.$$

Скорость электрона может быть рассчитана по формуле

$$\upsilon = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m r}}.$$

Задачи

1. Линиям рентгеновского спектра золота соответствуют фотоны с длиной волны 0,00185 нм. Если считать, что эта энергия возникает в результате перехода атома с уровня энергии 13,7 эВ на другой ниже расположенный уровень, то какова энергия этого уровня?

2. По Бору, атом водорода может находиться в одном из некоторых стационарных состояний, в которых он не излучает. Излучение возникает в момент перехода атома из одного состояния с энергией E_K в другое с меньшей энергией E_J. Энергия испускаемого кванта $2\pi\hbar\nu$. Каковы: а) энергия; б) импульс; в) длина волны фотона, испытавшего переход с уровня $n = 3$ на уровень с $n = 1$ атома водорода?

3. Для основного состояния атома водорода по теории Бора рассчитать: а) квантовое число; б) радиус орбиты; в) момент количества движения; г) импульс; д) кинетическую; е) потенциальную и ж) полную энергию.

4. Атом водорода возбужден из состояния с $n = 1$ в состояние с $n = 4$. 1. Рассчитать и изобразить на диаграмме уровней энергии возможные значения энергий фотонов, которые могут быть испущены атомом при переходе обратно в состояние с $n = 1$. 2. Рассчитать скорость отдачи атома водорода, считая, что он исходно покоился при переходе из состояния с $n = 4$ в состояние с $n = 1$ в одном квантовом скачке.

5. Пользуясь теорией Бора, рассчитать энергию, необходимую для удаления электрона из основного состояния однократно ионизованного атома гелия.

6. Применить теорию Бора к позитронию – атому, состоящему из двух частиц с массой, равной массе электрона, и заряженных положительным и отрицательным зарядами электрона. Эти частицы обращаются вокруг их центра масс, который расположен посередине расстояния между ними. 1. Какое соотношение имеет место между их спектром и спектром атома водорода? 2. Чему равен радиус орбиты для основного состояния позитрония? (Подсказка: рассматривайте проблему исходя из основных принципов, потому что у «атома» нет ядра, обе частицы вращаются вокруг точки, лежащей посередине между ними).

7. Допустим, что атом может быть создан из электрона и нейтрона, связанными силами гравитационного притяжения. Рассчитать радиус этого атома в основном состоянии, используя модель Бора, в которой кулоновская сила притяжения заменена на силу гравитационного притяжения.

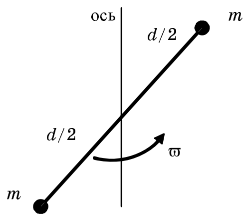

Рис. 1

8. Двухатомная молекула газа состоит из двух одинаковых атомов массой m каждый, расстояние между которыми неизменно и равно d, как показано на рис. 1. Считая, что момент импульса квантуется, как в теории атома Бора, определить: а) возможные угловые скорости; б) возможные значения вращательных энергий молекулы. Показать это на диаграмме уровней.

9. Для электрона, обращающегося по круговой орбите с частотой v_0, классическая теория предсказывает, что он должен излучать энергию не только на этой частоте, но и на кратных частотах: $2v_0$, $3v_0$, $4v_0$ и т. д. Показать, что этот результат следует из теории Бора в предельном случае больших квантовых чисел n.

10. Определить круговою частоту ω обращения электрона на n-й круговой боровской орбите водородоподобного иона. Вычислить эту величину для иона He^+ при $n = 2$.

7. ВОЛНЫ ДЕ БРОЙЛЯ. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

В 1924 г. Луи де Бройль предположил существование *волн материи*, физическая природа которых была неясна. Длина волны связана с импульсом частицы p соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}.$$

Реальность волн де Бройля была доказана в опыте Дэвиссона–Джермера по дифракции электронов на кристалле никеля. В этом опыте электроны обнаружили чисто волновую способность к дифракции: пучок электронов падает на грань указанного кристалла и рассеивается на нем, причем рассеянные электроны будут распространяться в виде нескольких (дифрагированных) пучков под углами θ к поверхности кристалла, удовлетворяющими *уравнению Брэгга*: $m\lambda = 2d\sin\theta$, где $m = 1, 2, 3, \ldots$; d – расстояние между атомными плоскостями в кристалле.

Смысл волн де Бройля был понят позже в связи с введением в теорию волновой функции Ψ-частицы, описывающей возмущение волн материи. Физический смысл имеет не сама волновая функция, а квадрат ее модуля $|\Psi|^2$ в данной точке пространства. Точнее, $|\Psi|^2 dv$ есть вероятность того, что частица в данный момент времени находится в элементе объема dv в окрестности данной точки пространства. Уравнение, которому удовлетворяет волновая функция частицы – уравнение Шредингера (1926 г.), является основным уравнением *волновой механики* – одного из вариантов квантовомеханического описания микромира.

Задача о частице в ящике. В том случае, если движение частицы ограничено некоторой областью пространства (частица в ящике с жесткими стенками), то возможные значения ее энергии квантуются.

$$E = n^2 \frac{(2\pi\hbar)^2}{8ml^2},$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$ Волновые функции частицы (в простейшем случае одномерного движения вдоль оси ox) в этом случае имеют вид

$$\Psi = A\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $n = 1, 2, ...$ Вероятность того, что частица находится между двумя плоскостями, проходящими через точки x и $x+dx$ в соответствии с физическим смыслом волновой функции, дается выражением

$$\Psi^2 dx = A^2 \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx,$$

где A – *нормировочная постоянная*, определяемая из физически естественного условия, что вероятность того, что частица находится где-то в пределах ящика равняется 1:

$$\int_0^l \Psi^2 dx = 1.$$

Движение микрочастиц не может описываться формулами классической физики. Это обстоятельство находит выражение в *соотношении неопределенностей* Вернера Гейзенберга (1927 г.). Так, для координаты x и импульса p_x частицы имеет место соотношение

$$\Delta p_X \Delta x \geq \hbar,$$

где символ Δ обозначает неопределенность соответствующей физической величины. Соотношение неопределенностей указывает предел, за которым теряет смысл понятие траектории частицы, (а следовательно, и классическое описание движения) и этот предел есть постоянная Планка $\hbar$.

Пример решения задачи

Электрон имеет скорость 300 м/с с точностью в 0,01%. Каков принципиальный предел в точности определения его местонахождения? Проделать тоже самое вычисление для пули массой 50 г.

Решение

Импульс электрона

$$p = mv = 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot 300\cdot 10^3 \text{Н}\cdot\text{с} = 2{,}7\cdot 10^{-28} \text{Н}\cdot\text{с}.$$

Отсюда, неопределенность его импульса

$$\Delta p = 2{,}7\cdot 10^{-28}\cdot 0{,}0001 = 2{,}7\cdot 10^{-32} \text{ Н}\cdot\text{с}.$$

Минимальная неопределенность его положения, как это следует из соотношения Гейзенберга:

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{2{,}7 \cdot 10^{-32}} = 0{,}39 \text{ см}.$$

Для пули получим следующие значения. Импульс $p = 15$ Н·с. Неопределенность импульса – $1{,}5 \cdot 10^{-3}$ Н·с. Минимальная неопределенность координаты

$$\Delta x = \frac{\hbar}{\Delta p} = \frac{1{,}05 \cdot 10^{-34}}{1{,}5 \cdot 10^{-3}} = 4{,}4 \cdot 10^{-13} \text{м}.$$

Полученное значение лежит далеко за пределами экспериментальных возможностей, т. е. для такого объекта чисто квантовое соотношение неопределенностей не проявляет себя сколько-нибудь заметным образом.

Задачи

1. Атомы натрия ускоряются разностью потенциалов 300 В. 1. Какой импульс приобретают они? 2. Какова их длина волны де Бройля?

2. С какой скоростью должен двигаться протон, чтобы длина волны де Бройля протона равнялась 10^{-13}м, и какую разность потенциалов он должен пройти, чтобы приобрести указанную скорость?

3. Электрон и фотон имеют длину волны 0,2 нм. Чему равны их импульсы и энергии?

4. Построить график зависимости длины волны де Бройля от кинетической энергии: а) электронов; б) протонов. Ограничьтесь областью значений энергии, в которой справедлива классическая механика. Удобным критерием может служить то обстоятельство, что максимальная кинетическая энергия частиц не должна превышать 5% от их энергии покоя m_0c^2.

5. Максимальная разрешающая способность микроскопа определяется длиной волны излучения, т. е. наименьший размер различаемых деталей изображения равняется длине волны регистрируемого излучения. Предположим, что мы вознамерились посмотреть «вовнутрь» атома. Размеры атома порядка 0,1 нм. 1. Если использовать для наблюдения электронный микроскоп, то какую энергию (в электрон-вольтах) должны иметь электроны? 2. Если использовать оптический микроскоп, то какую энергию должны иметь фотоны?

6. Кристаллический спектрометр нейтронов использует кристалл бериллия с межплоскостным расстоянием $0{,}7323 \cdot 10^{-10}$ м. Каким будет брэгговский угол дифракции первого порядка для нейтронов с кинетической энергией 4 эВ?

7. Найти расстояние между самыми низкими уровнями энергии атомов аргона, помещенных в ящик со стороной 20 см. Сравнить полученный результат с тепловой энергией указанных атомов при температуре 300К? При какой температуре расстояние между уровнями энергии атомов аргона равняется их тепловой энергии?

8. Найти приближенно возможную наименьшую энергию электрона, заключенного в атомное ядро размером $1{,}4 \cdot 10^{-14}$ м? Сравнить полученный результат с несколькими МэВ энергии связи протона с нейтроном в атомном ядре и сделать вывод о том, насколько возможным является нахождение электрона в ядре.

9. Частица заключена между твердыми стенками, расстояние между которыми λ. Какова вероятность обнаружить частицу на расстоянии $\lambda/3$ от одной из стенок: а) для $n = 1$; б) для $n = 2$; в) для $n = 3$; г) в классической физике?

10. Неопределенность положения электрона в атоме порядка 0,01 нм. Какова соответствующая неопределенность импульса электрона?

11. Показать, что если неопределенность положения частицы равняется ее длине волны де Бройля, то неопределенность скорости частицы равняется ее скорости.

12. Исходя из соотношения неопределенности $\Delta p_X \Delta x \geq 2\pi\hbar$ показать, что, если L – компонента момента импульса вдоль линии, перпендикулярной к оси x, а φ – азимутальный угол, то справедливо соотношение неопределенностей

$$\Delta L \Delta\varphi \geq 2\pi\hbar.$$

8. КВАНТОВАЯ СТАТИСТИКА ФЕРМИ–ДИРАКА

При описании поведения системы микрочастиц возникают особенности, обусловленные *принципом тождественности* – одинаковые частицы, из которых состоит система, принципиально неразличимы. В соответствии с теорией, развитой В. Паули, системы одинаковых частиц, обладающие полуцелым спином, например электроны ($s = 1/2$), подчиняются *статистике Ферми – Дирака*(называются *фермионами*). К ним относятся, помимо электронов, протоны, нейтроны, нейтрино и т.д. Для системы фермионов выполняется *принцип Паули*: в системе тождественных фермионов не может быть более одной частицы, находящейся в одном квантовом состоянии.

Аналитически вид статистики определяется функцией распределения. Так, для фермионов функция распределение Ферми – Дирака имеет вид

$$w(E) = \frac{1}{\exp\left(\dfrac{E - E_F}{k_B T}\right) + 1},$$

где $w(E)$ – вероятность того, что в состоянии теплового равновесия идеального электронного газа при температуре T состояние с энергией E занято электроном; k_B – постоянная Стефана – Больцмана; T – абсолютная температура; E_F – энергия Ферми, которая представляет собой энергию электронов на высшем из заполненных уровней энергии.

Распределение по энергиям E свободных электронов в металле вблизи $T = 0$ дается выражением:

$$dn = \left(\frac{\sqrt{2}m^{\frac{3}{2}}}{\pi^2 \hbar^3}\right)\sqrt{E}dE,$$

где dn – концентрация свободных электронов с энергиями E, $E+dE$. Энергия E отсчитывается от дна зоны проводимости.

Энергия E_F Ферми электронов при $T = 0\text{K}$

$$E_F = \left(\hbar^2 / 2m\right)\left(3\pi^2 n\right)^{\frac{2}{3}},$$

где n – концентрация свободных электронов в металле.

Примеры решения задач

Сравнение классического распределения Максвелла – Больцмана и квантового распределения Ферми – Дирака

1. Наиболее вероятная энергия электронов в разряде, возникающем в смеси паров неона и натрия, равна 1 эВ. Вычислить температуру электронов и оценить относительную вероятность того, что кинетическая энергия электрона достаточна, чтобы ионизовать в результате столкновения: а) атом натрия; б) атом неона. Энергия ионизации натрия 5,1 эВ, неона 21,6 эВ.

Решение

Существенное отличие классического распределения Максвелла – Больцмана

$$w(E) = \exp - \left(\frac{E}{k_B T} \right)$$

от распределения по энергиям Ферми – Дирака

$$w(E) = \frac{1}{\exp\left(\frac{E - E_F}{k_B T} \right) + 1}$$

заключается в том, что первое может быть использовано для описания поведения свободных электронов в газовом разряде и для свободных молекул (атомов) газа, тогда как второе распределение позволяет рассматривать *квантовые состояния* и требуется при описании поведения свободных электронов в металле.

Таким образом, поскольку в данной задаче рассматриваются электроны, возникшие как результат ионизации в смеси газов, то уместно оценить вероятность $\omega(E)$ того, что энергия E электрона достаточна для ионизации атома натрия (неона) с помощью функции распределения Больцмана

$$\omega(E) = \exp-(E/k_B T).$$

Температуру электронов T_e можно определить из соотношения $E = kT_e/2$.

Отсюда следует, что искомое значение T_e численно равно

$$T_e = 2E/k = 2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}/(1{,}38 \cdot 10^{-23}) = 23{,}2 \cdot 10^3 \text{K}.$$

Для натрия по условию значение энергии $E_{N\alpha} = 5{,}1$ эВ. Следовательно, для электронов с температурой $T_e = 23{,}2 \cdot 10^3$ К вероятность обнаружить электрон с энергией, достаточной для ионизации атома натрия:

$$\omega_{N\alpha}(E_{N\alpha}) = \exp(-E_{N\alpha}/(kT_e) = \exp(-5{,}1 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}/$$
$$/(1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 23{,}2 \cdot 10^3) = \exp(-2{,}55) = 7{,}81 \cdot 10^{-2}.$$

Это означает, что из каждых 10^4 электронов 781 электрон способен ионизовать 781 атом натрия.

Вероятность ионизации атомов неона соответственно

$$\omega_{N\varepsilon}(E_{N\varepsilon}) = \exp(-E_{N\varepsilon}/(kT_e) = \exp(-21{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}/$$
$$/(1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 23{,}2 \cdot 10^3) = \exp(-10{,}8) = 2{,}04 \cdot 10^{-5},$$

т. е. из каждых 10^7 электронов 204 электрона могут ионизовать 204 атома неона.

Функция распределения Ферми – Дирака

2. Определить температуру, при которой в твердом проводнике вероятность найти электрон с энергией 0,5 эВ над уровнем Ферми равна 2% .

Решение

Статистику Максвелла – Больцмана нельзя применять к свободным носителям заряда в твердом теле. Энергия свободных электронов, или электронов проводимости, определяется числом свободных энергетических уровней и принципом Паули. Для электронов проводимости (или «дырок») надо использовать функцию распределения Ферми – Дирака

$$\omega(E) = [\exp[(E - E_F)/(kT)] + 1]^{-1}.$$

Здесь $\omega(E)$ – вероятность того, что электрон занимает энергетический уровень E, расположенный выше или ниже уровня Ферми E_F.

Подставляя значение функции $\omega(E) = 0{,}02$ (т. е. 2% по условию задачи) в соответствующее выражение, получаем

$$0{,}02 = [\exp[0{,}5 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}/(1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot \mathrm{T})] + 1]^{-1}$$

или $50 = \exp[5{,}8 \cdot 10^3/T] + 1$; $\exp[5{,}8 \cdot 10^3/T] = 49$; $5{,}8 \cdot 10^3/T = \ln 49$, откуда находим искомое значение температуры $T = 5{,}8 \cdot 10^3/\ln 49 = 1490\mathrm{K}$.

Энергия Ферми

3. Вычислить, на какой высоте (в электрон-вольтах) от дна зоны проводимости находится уровень Ферми E_F в одновалентном натрии, который содержит $2{,}53 \cdot 10^{28}$ атомов/м^3. Принять, что плотность D энергетических уровней в зоне проводимости (определяемая, как dn/dE) определяется соотношением

$$D = 2^{1/2} m_e^{3/2} \pi E^{1/2} h^{-3},$$

где $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг; $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж·с.

Решение

Энергетические уровни в одиночном изолированном атоме являются строго дискретными. При наличии рядом соседних атомов будут иметь место обменные взаимодействия, в результате которых энергетические уровни атома сдвигаются и образуют энергетические зоны. В случае металлов ширина запрещенной зоны, если она вообще существует (например, в меди ее нет), чрезвычайно мала. Поэтому для перехода электрона из валентной зоны в зону проводимости требуется незначительное количество энергии. Кроме того, в металле очень мало разрешенных энергетических уровней (а именно, нижних) занято электронами. Эти немногие электроны легко переходят на свободные, более высокие энергетические уровни и начинают участвовать в процессе электропроводности.

Число энергетических уровней в единице объема по условию задачи определяется выражением

$$D(E) = 2^{1/2} m_e^{3/2} \pi E^{1/2} \mathrm{h}^{-3}.$$

Для нахождения числа свободных электронов в металле (одновалентном натрии), подчиняющихся статистике Ферми – Дирака, умножим это выражение на функцию Ферми – Дирака

$$N(E)dE = 2^{1/2} m_e^{3/2} \pi h^{-3} [\exp[E - E_F/(kT)] + 1]^{-1} E^{1/2} dE. \qquad (1)$$

При $T = 0$К функция распределения Ферми – Дирака $\exp[E - E_F/ /(kT) + 1]^{-1}$ равна 1. Поэтому число электронов, заполняющих все состояния до уровня Ферми, дается интегралом

$$\int_0^{E_F} N(E)dE.$$

Интегрируя уравнение (1), находим

$$N(E) = 2^{3/2} m_e^{3/2} \pi h^{-3} E_F^{3/2}/3,$$

откуда после преобразований получаем

$$E_F = [3N(E)/(8\pi)]^{2/3} h^2/(2m_e).$$

Для заданного (в условии задачи) числа электронов получаем

$$E_F = [3 \cdot 2{,}53 \cdot 10^{28}/(8\pi)]^{2/3} h^2/(2m_e) \text{ Дж.}$$

Подстановка значений констант позволяет найти уровень Ферми (верхний энергетический уровень при температуре 0К) $E_F = 3{,}14$ эВ.

Задачи

1. Найти относительное число электронов, энергия которых отличается от энергии Ферми не более, чем на одну сотую долю E_F, если температура металла равняется 0К.

2. Сколько процентов свободных электронов в металле при $T = 0$К имеет кинетическую энергию, превышающую половину максимальной энергии?

3. Найти число свободных электронов, приходящихся на один атом натрия при $T = 0$К, если $E = 3{,}07$ эВ. Плотность натрия считать известной.

4. До какой температуры надо было бы нагреть классический электронный газ, чтобы средняя энергия его электронов оказалась равной средней энергии свободных электронов в меди при $T = 0$К? Считать, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон.

5. Ширина запрещенной зоны чистого полупроводника 1 эВ. Вычислить вероятность заполнения электроном уровня вблизи дна зоны проводимости при температурах 0 и 290К соответственно. Показать и обосновать, будет ли увеличиваться эта вероятность при указанных температурах, если на полупроводник действует электромагнитное излучение с длиной волны: а) 1,0 мкм; б) 2,0 мкм.

6. Зная распределение $dn(E)$ электронов в металле по энергиям, установить вид распределения по импульсам $dn(p)$. Какой вид имеет указанное распределение при $E = 0$К?

7. Определить максимальную скорость электронов при $T = 0$К, если энергия Ферми данного металла равна 4,5 эВ.

8. Пусть уровень Ферми полупроводника находится на 0,3 эВ ниже дна зоны проводимости. 1. Какова вероятность того, что при комнатной температуре энергетические уровни, расположенные на расстоянии $3kT$ выше зоны проводимости, заняты электронами? 2. Какова вероятность того, что энергетический уровень у потолка валентной зоны содержит «дырки», если ширина запрещенной зоны 1,1 эВ?

9. В чистом германии ширина запрещенной зоны 0,72 эВ. На сколько надо повысить температуру по сравнению с 300К, чтобы число электронов проводимости увеличилось в 2 раза?

10. Исходя из соотношения неопределенности «координата – импульс» доказать, что при $T = 0$К энергия уровня, соответствующая максимуму кривой распределения Ферми – Дирака, определяется выражением

$$E = [3N/\pi]^{2/3}h^2/(8m).$$

9. ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

Радиус ядра

$$r = r_0 A^{1/3},$$

где $r_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ м; A–массовое число (число нуклонов в ядре).

Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{св} = [Zm_p + (A - Z)m_n - m_я]c^2 = [Zm_H + (A - Z)m_n - m]c^2,$$

где m_p, m_n, $m_я$ – массы протона, нейтрона и ядра соответственно; Z – зарядовое число ядра (число протонов в ядре); A – массовое число; m_H–масса атома водорода ($_1{}^1$H); m – масса атома.

Дефект массы ядра

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m_я = [Zm_H + (A - Z)m_n] - m.$$

Удельная энергия связи (энергия связи $E_{св}$, отнесенная к одному нуклону)

$$\delta E_{св} = E_{св}/A.$$

Число ядер, распавшихся за промежуток времени от t до $t + dt$:

$$dN = -\lambda N dt,$$

где N – число нераспавшихся ядер к моменту времени t; λ – постоянная радиоактивного распада.

Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 \exp(-\lambda t),$$

где N – число нераспавшихся ядер к моменту времени t; N_0 – начальное число нераспавшихся ядер (в момент времени t_0); λ – постоянная радиоактивного распада.

Связь периода полураспада $T_{1/2}$ и постоянной радиоактивного распада

$$T_{1/2} = (\ln 2)/\lambda.$$

Связь среднего времени жизни τ радиоактивного ядра и постоянной λ радиоактивного распада

$$\tau = 1/\lambda.$$

Активность нуклида

$$A = |dN/dt|.$$

Правила смещения:
для α-распада

$$ {}_{Z}^{A}X > {}_{Z-2}^{A-4}Y + {}_{2}^{4}\mathrm{He}, $$

для β⁻-распада

$$ {}_{Z}^{A}X > {}_{Z+1}^{A}Y + {}_{-1}^{0}\mathrm{He}, $$

для β⁺-распада

$$ {}_{Z}^{A}X > {}_{Z-1}^{A}Y + {}_{+1}^{0}\mathrm{He}. $$

Символическая запись ядерной реакции

$$ {}_{Z}^{A}X + a > {}_{Z'}^{A'}Y + b, $$

где ${}_{Z}^{A}X$ и ${}_{Z'}^{A'}Y$ – исходное и конечное ядра соответственно с зарядовыми числами Z и Z' и массовыми числами A и A'; a и b – соответственно бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы.

Энергия ядерной реакции

$$ Q = c^2[(m_1+m_2)-(m_3+m_4)], $$
$$ Q = (\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)-(\mathrm{T}_3+\mathrm{T}_4), $$

где m_1 и m_2 – массы покоя ядра-мишени и бомбардирующей частицы; (m_3+m_4) – суммы масс покоя ядер и продуктов реакции. Если $Q > 0$ – экзотермическая реакция, $Q < 0$ – эндотермическая реакция. T_1, T_2, T_3, T_4 – кинетические энергии ядра-мишени, бомбардирующей частицы, испускаемой частицы и ядра продукта обмена соответственно.

Скорость нарастания цепной реакции

$$ dN/dt = N(k-1)/T, $$

где N – число нейтронов в момент времени t; T – среднее время жизни одного поколения; k – коэффициент размножения нейтронов.

Число нейтронов в момент времени t при цепной реакции

$$ N = N_0 \exp[(k-1)t/T], $$

где N_0 – число нейтронов в начальный момент времени.

Примеры решения задач

Строение атомных ядер. Нуклоны

1. Определить плотность ядерного вещества, если в ядре с массовым числом A все нуклоны плотно упакованы в пределах его радиуса. Ответ выразить в числе нуклонов в 1 см^3.

Решение

Плотность ядерного вещества ρ можно рассчитать как число нуклонов, заключенных в единичном объеме V. Так как число нуклонов показывает массовое число A, то для искомой величины имеем $\rho = A/V$.

Объем ядра сферической формы будет $V = 4/3\pi\rho^3$.

Подставляя в основную формулу известное выражение для радиуса атомного ядра $r = r_0 A^{1/3}$, где $r_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ м, и учитывая объем ядра, получаем

$$\rho = A/(4/3\pi r_0^3 A) = 3/(4\pi r_0^3) = 8{,}7 \cdot 10^{37}\ \text{см}^{-3}.$$

Дефект массы и энергия связи ядра

2. Термоядерная реакция ${}_1^2H + {}_2^3He > {}_2^4He + {}_1^1H$ идет с выделением энергии $E_1 = 18{,}4$ МэВ. Какая энергия E_2 выделится в реакции ${}_2^3He + {}_2^3He > {}_2^4He + 2{}_1^1H$, если дефект масс ядра ${}_2^3He$ на $\Delta m = 0{,}006$ а.е.м. больше, чем у ядра ${}_1^2H$? 1 а.е.м. =1,66·10–27 кг. Одной атомной единице массы (1 а.е.м.) соответствует энергия 931,5 МэВ.

Решение

Поскольку в данных реакциях дефект масс Δm отличается только у изотопов ${}_2^3He$ и ${}_1^2H$, и он известен, то во второй реакции выделится энергия $E_2 = E_1 - \Delta mc^2$.

Докажем это равенство. В левых частях символических записей двух данных реакций совершается работа по разделению ядер на свободные нуклоны, поэтому энергия поглощается, а в правых частях– из отдельных частиц – протонов и нейтронов – образуется ядро ${}_2^4He$, и остаются «лишние» свободные протоны. Последние из упомянутых сами не выделяют энергию, а уносят часть выделенной в ходе реакции энергии из E_1 или E_2 в виде кинетической.

При образовании ядра ${}_2^4He$ энергии выделяется больше, чем поглощалось при разделении ядер (см левые части соотношений) на величины E_1 или E_2 соответственно:

$$E_{св}({}_1^2H) + E_{св}({}_2^3He) = E_{св}({}_2^4He) - E_1, \quad (1)$$

$$E_{св}({}_2^3He) + E_{св}({}_2^3He) = E_{св}({}_2^4He) - E_2, \quad (2)$$

$$E_{св}({}_2^3He) = E_{св}({}_1^2He) + \Delta mc^2. \quad (3)$$

Подставим выражение для $E_{св}({}_2^3He)$ в уравнение (2):

$$E_{св}({}_1^2H) + E_{св}({}_2^3He) = E_{св}({}_2^4He) - E_1, \quad (4)$$

$$E_{св}({}_1^2H) + E_{св}({}_2^3He) + ?mc^2 = E_{св}({}_2^4He) - E_2, \quad (5)$$

Теперь вычтем из последнего уравнения (5) уравнение (4) и получим

$$\mathrm{D}mc^2 = -(E_2) - (E_1).$$

Отсюда, окончательно имеем

$$E_2 = E_1 - \Delta mc^2.$$

$$E_1 = 18{,}4\ \text{МэВ} = 29{,}44 \cdot 10^{-13}\ \text{Дж}.$$

$$\Delta m = 0{,}006 \cdot 1{,}66^{-27}\ \text{кг} = 9{,}96 \cdot 10^{-30}\ \text{кг}.$$

$$E_2 = 29{,}44 \cdot 10^{-13} - 9{,}96 \cdot 10^{-30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 = \\ = 20{,}476 \cdot 10^{-13}\ \text{Дж} = 12{,}8\ \text{МэВ}.$$

Задачи

1. Для объяснения ядерных сил японский физик Юкава предположил существование частицы с отличной от нуля массой покоя – мезона. Найти соотношение между радиусом действия ядерных сил и массой мезона, воспользовавшись принципом неопределенности, и оценить массу мезона.

2. Ядро ${}_{14}{}^{27}\text{Si}$ переходит в «зеркальное» ядро ${}_{13}{}^{27}\text{Al}$ путем позитронного распада. Максимальная энергия позитронов 3,48 МэВ. Предполагая, что радиус ядра определяется выражением $r_0A^{1/3}$, где A – массовое число, оценить значение параметра r_0.

3. Считая радиус атомного ядра $R = 1{,}4 \cdot 10^{-15}A^{1/3}$ м, где A – массовое число, определить плотность ядерного вещества, выраженную в числе нуклонов в 1 м^3 или в кг/м^3. Рассчитать массу 1 см^3 вещества, состоящего из одних ядер.

4. Найти наименьшую энергию γ-кванта, необходимую для осуществления следующей реакции:

$${}_1{}^2\text{H}+\gamma > {}_1{}^1\text{H}+{}_0{}^1n.$$

5. Какую долю полной энергии, освобождаемой при распаде радона ${}_{86}{}^{222}\text{Rn}$, уносит α-частица?

6. При аннигиляции медленно движущихся электрона и позитрона образуются два γ-кванта. 1.Под каким углом друг к другу они разлетаются? 2. Какова частота возникающего излучения?

7. Определить массу изотопа ${}_7{}^{15}\text{N}$, если изменение массы при образовании его ядра составляет $0{,}2058 \cdot 10^{-27}$ кг.

8. При исследовании деревянных остатков древнего корабля было установлено, что активность радиоактивного изотопа углерода ${}_6{}^{14}\text{C}$ со времени постройки судна уменьшилась на 29,3% . Оценить возраст древнего корабля. Период полураспада ${}_6{}^{14}\text{C}$ составляет 5700 лет.

9. В 1907 году М. Склодовская–Кюри подарила парижскому радиевому институту 1 г радия. Сколько радия останется к 2007 году от подаренного количества? Период полураспада радия 1600 лет.

10. Определить энергию, выделяющуюся в результате β^+-распада магния ${}_{12}{}^{23}\text{Mg}$:

$$_{12}^{23}Mg > {}_{11}^{23}Na + {}_{1}^{0}\varepsilon + {}_{0}^{0}n.$$

Массы нейтральных атомов магния и натрия равны $3{,}8184 \cdot 10^{-26}$ и $3{,}8177 \cdot 10^{-26}$ кг соответственно.

10. ЭЛЕМЕНТЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Преобразования Лоренца для координат и времени:

$$x' = x - vt/(1-v^2/c^2)^{1/2},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

$$t' = (t - vx/c^2)/(1-v^2/c^2)^{1/2},$$

при предположении, что система отсчета K' движется со скоростью v' в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y и z' и z попарно параллельны, c – скорость распространения света в вакууме.

Релятивистское замедление хода часов

$$\tau' = \tau/(1-v^2/c^2)^{1/2},$$

где τ – промежуток времени между двумя событиями, отсчитанный часами, движущимися вместе с телом; τ' – промежуток времени между теми же событиями, отсчитанный покоящимися часами.

Релятивистское (лоренцовское) сокращение длины

$$l = l_0(1-v^2/c^2)^{1/2},$$

l_0 – длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой стержень покоится (собственная длина); l – длина стержня, измеренная в системе отсчета, относительно которой он движется со скоростью v.

Релятивистский закон сложения скоростей:

$$u_x' = (u_x - v)/(1 - vu_x/c^2),$$

$$u_y' = u_y(1-v^2/c^2)^{1/2}/(1 - vu_x/c^2),$$

$$u_z' = u_z(1-v^2/c^2)^{1/2}/(1 - vu_x/c^2),$$

где предполагается, что система отсчета K' движется со скоростью v' в положительном направлении оси x системы отсчета K, причем оси x' и x совпадают, а оси y' и y и z' и z попарно параллельны.

Интервал s_{12} между событиями (инвариантная величина)

$$s_{12}{}^2 = c^2 t_{12} - l_{12}{}^2 = \mathrm{inv},$$

где t_{12} – промежуток времени между событиями 1 и 2; l_{12} – расстояние между точками, где произошли события.

Масса релятивистской частицы и релятивистский импульс:

$$m = m_0/(1-v^2/c^2)^{1/2};$$

$$p = m_0 v/(1-v^2/c^2)^{1/2},$$

где m_0 – масса покоя.

Основной закон релятивистской динамики

$$F = dp/dt,$$

где p – релятивистский импульс частицы.

Полная E и кинетическая T энергия релятивистской частицы:

$$E = mc^2 = m_0 c^2 + T,$$

$$T = (m - m_0)c^2.$$

Связь между энергией и импульсом p релятивистской частицы:

$$E^2 = m_0 c^4 + p^2 c^2;$$

$$pc = (T(T + 2m_0 c^2)^{1/2}.$$

Примеры решения задач

1. Кинетическая энергия частицы оказалась равной ее энергии покоя. Определить скорость частицы.

Решение

Кинетическая энергия релятивистской частицы равна разности ее полной энергии и энергии покоя

$$T = E - E_0, \qquad (1)$$

где $E = m_0 c^2/(1-v^2/c^2)^{1/2}$, и по условию задачи имеем равенство

$$T = E_0 = m_0 c^2.$$

Подставив последние выражения в формулу (1), получаем следующие соотношения:

$$T = m_0 c^2[1/(1-v^2/c^2)^{1/2} - 1];$$

$$m_0 c^2 = m_0 c^2[1/(1-v^2/c^2)^{1/2} - 1];$$

$$1 = 1/(1-v^2/c^2)^{1/2} - 1;$$

$$1/(1-v^2/c^2)^{1/2} = 2;$$

$$1 - v^2/c^2 = 1/4;$$

$$v^2/c^2 = 3/4.$$

Отсюда следует, что искомая скорость релятивистской частицы численно равна

$$v = c(3/4)^{1/2} = 0{,}866\ c.$$

2. Определить зависимость скорости частицы (масса покоя частицы m_0), если движение релятивистское и одномерное, а сила, действующая на частицу, постоянна.

Решение

Основной закон релятивистской динамики $F = dp/dt$. Отсюда следует, что $dp = Fdt$,

Интегрируя обе части равенства, получаем выражение для релятивистского импульса частицы

$$p = \int_0^t Fdt = Ft.$$

По определению,

$$p = m_0 v/(1 - v^2/c^2)^{1/2}.$$

Решая совместно последние два равенства, можно найти скорость частицы как функцию времени:

$$m_0 v/(1 - v^2/c^2)^{1/2} = Ft;$$

$$m_0 v = Ft(1 - v^2/c^2)^{1/2};$$

$$m_0^2 v^2 = F^2 t^2 (1 - v^2/c^2);$$

$$m_0^2 v^2 = F^2 t^2 - F^2 t^2 v^2/c^2;$$

$$m_0^2 v^2 + F^2 t^2 v^2/c^2 = F^2 t^2;$$

$$v^2 (m_0^2 + F^2 t^2/c^2) = F^2 t^2;$$

$$v^2 = F^2 t^2/(m_0^2 + F^2 t^2/c^2),$$

где F, m_0 и c – константы, t – переменная величина.

Таким образом, зависимость релятивистской скорости частицы от времени исходя из условий задачи:

$$v(t) = Ft/(m_0^2 + F^2 t^2/c^2)^{1/2}.$$

Задачи

1. Определить скорость ионизированного атома, вылетевшего из ускорителя, если он испустил фотон в направлении своего движения, скорость которого оказалась равной скорости света в вакууме.

2. Во сколько раз уменьшатся продольные размеры электрона, если он пройдет ускоряющую разность потенциалов, равную 512 кВ?

3. Определить собственную длину стержня, если в лабораторной системе отсчета его длина составляет 1,5 м; скорость в 2 раза меньше скорости света в вакууме, а угол между стержнем и направлением движения 30°.

4. Во сколько раз больше станет время жизни нестабильной частицы, регистрируемое по часам неподвижного наблюдателя, если она начнет движение со скоростью, всего на 10% меньшей скорости света?

5. Какую скорость имеет частица, совершающая релятивистское движение, если известно, что ее импульс в 3 раза превышает классический импульс?

6. Найти относительную скорость движения физического тела, при которой релятивистское сокращение его линейных размеров составит 10% .

7. Определить, на сколько процентов полная энергия релятивистской частицы больше ее энергии покоя, если скорость частицы составляет 3/4 от скорости света в вакууме.

8. Определить релятивистский импульс и кинетическую энергию частицы, если ее скорость составляет 3/4 от скорости света в вакууме.

9. Какое расстояние пролетел π-мезон в некоторой системе отсчета, если его время жизни в ней составило величину 4,4 мкс, в 2 раза большую его собственного времени жизни?

10. Какую работу нужно совершить, чтобы увеличить скорость протона от $0{,}6c$ до $0{,}8c$? (c – скорость света в вакууме).

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Прилипко Виктор Константинович
Хонинева Елена Владимировна

ФИЗИКА

Учебно-методическое пособие

Редактор *А. В. Подчепаева*
Верстальщик *И. С. Чернышев*

Сдано в набор 25.09.06. Подписано к печати 25.11.06.
Формат 60x84 1/16. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 2,8.
Уч. -изд. л. 3,0. Тираж 200 экз. Заказ №

Редакционно-издательский центр ГУАП
190000, Санкт-Петербург, Б. Морская ул., 67