Дистанционный курс
“Математический анализ для заочников” 3 семестр
Контрольная работу по тематическому модулю-2
“Дифференциальное исчисление функции одной переменной”
(в скобках указаны баллы за задание)

Задание 1. Найти производную y' для функции $y=f(x)$, пользуясь таблицей производных основных элементарных функций и правилами дифференцирования функций. Упростить полученную производную (**2 балла**).

Задание 2. Продифференцировать функцию $y=f(x)$, пользуясь теоремой о производной сложной функции. Упростить (по возможности) полученную производную (**2 балла**).

Задание 3. Продифференцировать функцию $y=f(x)$, пользуясь теоремой о производной сложной функции (**2 балла**).

Задание 4. Продифференцировать функцию $y=y(x)$, пользуясь правилом логарифмического дифференцирования (**2 балла**).

Задание 5. Продифференцировать функцию $y=y(x)$ (максимально упростить полученную производную) (**2 балла**).

Задание 6. Найти первую, вторую, третью, четвертую производные для функции $y=f(x)$ (**2 балла**).

Задание 7 (Применение дифференциала функции в приближенных вычислениях).
1) Линеаризовать функцию $y=f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле

$$y=f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

Вычислить приближенно значение функции $y=f(x)$ в заданной точке x;
2) представить функцию $y=f(x)$ приближенно вблизи точки x_0 квадратичной функцией по формуле $y=f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2$.

Пользуясь полученной формулой, вычислить приближенно значение функции $y=f(x)$ в точке x. Полученный результат сравнить с результатом пункта 2) данной задачи (**3 балла**).

Задание 8. Дана функция $f(x)$ и точка x_0. Разложить функцию $f(x)$ по формуле Тейлора в окрестности указанной точки x_0 до четвертого порядка производной включительно (**3 балла**).

Всего за контрольную работу **18 баллов**

Вариант 1

1 $y=\frac{1+x^2}{1-x^2}$; $f(x)=\frac{1}{2}x^2\ln(x)-\frac{x^2}{4}-\ln(x)\,x+x$

2 $y=\ln(\arcsin x)$; $y=\frac{5x-6}{\sqrt{x^2+3x-1}}$

3 $y=\left(3^{ctg^2 x}+\ln(sinx)\right)^3$

4 $y=\left(x^2+1\right)^{\ln x}$

5 $y=x\cdot\arcsin(1/x)+\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

6 $y=4^x+\ln(x-2)^3$

7 $y=e^{x(1-x)}+\sqrt{2x-1},\quad x_0=1,\ x=1{,}1$

8 $y=2x-x^2-2\cos(x-1),\quad x_0=1$

Вариант 2

1 $y=\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; $f(x)=-\cos(x)\,x^2+2\cos(x)+2\sin(x)\,x$

2 $y=\log_2(\sin x)$; $y=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-1}}$

3 $y=\frac{3}{4}\left(3^{\arccos\sqrt{x}}-\sqrt{2x^2+1}\right)^4$

4 $y=(ctg\,x)^{sinx}$

5 $y=\left(\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{2\sqrt{x-1}}$

6 $y=3^{-x}-\frac{1}{3x+1}$

7 $y=\sqrt{(1+x)^3}+\sin x,\quad x_0=0,\ x=-0{,}2$

8 $y=4x-x^2-2\cos(x-2),\ x_0=2$

Вариант 3

1 $y=\dfrac{e^x-x}{e^x+x}$, $f(x)=-x^2\cos(x)+3\cos(x)+2\sin(x)\,x$

2 $y=\sqrt{\ln x}$; $y=\dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2-3x}}$

3 $y=\dfrac{1}{3}\left(3^{\arcsin\sqrt{x}}+x\cdot\sqrt{x+1}\right)^3$

4 $y=\left(x^2\right)^{\ln x}$

5 $y=\dfrac{1}{\ln 4}\cdot\ln\left(\dfrac{1+2^x}{1-2^x}\right)$

6 $y=\sin(2x-1)+\log_3(2-3x)$

7 $y=\sqrt{3x^2-6x-5}$, $x_0=7$, $x=6{,}85$

8 $y=6e^{x-2}-x^3+3x^2-6x$, $x_0=2$

Вариант 4

1 $y=\dfrac{x}{\arcsin x+\arccos x}$, $y=x^3\cdot\ln x$

2 $y=e^{\sqrt{x}}$, $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+1}}$

3 $y=2^{arc\cos\sqrt{1-x^2}}+6\ln\sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$

4 $y=(x)^{\ln 2x}$

5 $y=x^2\cdot arctg\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x^2-1}$

6 $y=e^{2x+1}+x^4+2x^3-2x^2$

7 $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}-e^{2x-3}$, $x_0=1{,}5$, $x=1{,}52$

8 $y=2\ln(x+1)-2x+x^2+1$, $x_0=0$

Вариант 5

1 $y=\dfrac{x^2-2}{x^2+2}$, $y=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x$

2 $y=4^{\sin\sqrt{x}}$; $y=\dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2-4x+2}}$

3 $y=\dfrac{1}{5}\left(3^{arctg\,2x}+\ln\left(1+2x^2\right)\right)^5$

4 $y=\left(2^x+1\right)^{\sqrt{x}}$

5 $y=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\ln\left(1+\sin x\right)-\ln\cos x$

6 $y=\ln\left(x+3\right)^2+4^{-x}$

7 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}+\sin^2(2x),\quad x_0=0,\ x=0{,}13$

8 $y=2x-x^2-2\cos\left(x-1\right),\quad x_0=1$

Вариант 6

1 $y=x^3\cdot tgx$, $y=\dfrac{x-1}{\left(x+2\right)^2}$

2 $y=\ln\left(\ln x\right)+e^{tgx}$; $y=2^{\sqrt{2x-x^2}}$

3 $y=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{\sin\left(\ln^2 x\right)}+\cos^2 x\right)^3$

4 $y=\left(x+\ln x\right)^{1/x}$

5 $y=\dfrac{2}{\ln 2}\cdot\left(\sqrt{2^x-1}-\mathrm{arctg}\sqrt{2^x-1}\right)$

6 $y=\dfrac{4x-1}{4x+2}-\cos^2 x$

7 $y=\sqrt[3]{\cos^2\left(x-3\right)},\quad x_0=3,\ x=3{,}01$

8 $y=\cos^2\left(x+1\right)+x^2+2x,\quad x_0=-1$

Вариант 7

1 $y=\frac{1}{2}e^{x}\left(\sin x-\cos x\right),\ \ y=\frac{\arcsin x+1}{\arccos x+1}$

2 $y=\ln\left(tgx\right);\ \ y=\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-8}}$

3 $y=\frac{1}{4}\left(e^{arctg3x}+x^2\cdot\ln^2 x\right)^4$

4 $y=\left(\ln x\right)^{\sin x}$

5 $y = x\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+3}\right)-\sqrt{x^2+3}$

6 $y=\sqrt{x-4}+\log_2\left(x-4\right)$

7 $y=\sqrt[3]{4+2x}+\frac{2}{x-1},\quad x_0=2,\ x=1{,}95$

8 $y=2\ln x+x^2-4x+3,\quad x_0=1$

Вариант 8

1 $y=\frac{\arcsin x}{\arccos x},\quad \mathrm{f}(x):=-x^2\cos(x)+2\cos(x)+2x\sin(x)$

2 $y=arctg\left(\ln x\right);\quad y=\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x}}$

3 $y=\frac{1}{4}\left(\ln^2\left(tg\sqrt{x}\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)^4$

4 $y=\left(tgx\right)^{x}$

5 $y=\frac{e^{2x}\left(2\sin 3x-3\cos 3x\right)}{13}$

6 $y=e^{x}\cdot\left(2x^2+3x+1\right)$

7 $y=\ln\left(1-2x\right),\quad x=0,\ x=-0{,}01$

8 $y=1-2x-x^2-2\cos\left(x+1\right),\quad x_0=-1$

Вариант 9

1 $y=\dfrac{arctgx}{arcctgx}$, $y=\left(1+x^2\right)\cdot arctgx-x+\dfrac{x^2-1}{x}$

2 $y=\arcsin\left(x^4\right)$; $y=\ln\left(x\sqrt{x^2+3}\right)$

3 $y=\dfrac{1}{3}\left(\sin^2\left(\sqrt{x}\right)+\ln\cos x\right)^3$

4 $y=\left(\sin^2 x\right)^{3x}$

5 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\cdot arctgx$

6 $y=\sin^2\left(2x\right)+\dfrac{2x+1}{2x-1}$

7 $y=\sqrt{x^3+4x+4}$, $x_0=1$, $x=1{,}1$

8 $y=x^2+6x+8-2e^{x+2}$, $x_0=-2$

Вариант 10

1 $y=e^x\cdot x^3-e^x\cdot\left(3x^2-2\right)$, $y=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$

2 $y=\sin^3 x$; $y=3^{\ln\left(\ln x\right)}$

3 $y=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{\ln 5}\cdot 5^{sin^2 x}-arctg^2\sqrt{x}\right)^3$

4 $y=\left(x^3+2x\right)^{\sin x}$

5 $y=\dfrac{\ln x}{1+x^2}-\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x^2}{1+x^2}$

6 $y=\cos^2\left(3x\right)+\dfrac{1}{4}\ln\left(x+3\right)^4$

7 $y=\sqrt{5x^2+4x-1}$, $x_0=5$, $x=5{,}11$

8 $y=4x+x^2-2e^{x+1}$, $x_0=-1$

Вариант 11

1 $y=\frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x\cdot x^4$; $y=x^2\ln x-\frac{1}{2}x^2$

2 $y=tg\left(\sqrt{x}\right)$; $y=\sin^2(\ln x)$

3 $y=\left(\sin(\ln x)-\arcsin^2\sqrt{1-4x}\right)^4$

4 $y=(x+2)^{\ln x}$

5 $y=x+\frac{1}{1+e^x}-\ln\left(1+e^x\right)$

6 $y=\frac{3x+2}{2x+1}-\sqrt[3]{x^2}$

7 $y=e^{2x+4}+\sqrt[3]{x-6}$, $x_0=-2$, $x=-1{,}96$

8 $y=(x+1)\cdot\sin(x+1)-2x-x^2$, $x_0=-1$

Вариант 12

1 $y=e^x(\sin x-\cos x)$, $y=\frac{e^x-x}{e^x+x}$

2 $y=\frac{1}{3}tg^3x$; $y=\frac{3x-8}{\sqrt{x^2+3x-4}}$

3 $y=\sqrt{3^{\cos^2 x}\cdot\sin x-\ln^2 x}$

4 $y=(\sin x)^{\cos x}$

5 $y=x\sqrt{4-x^2}+\arcsin(x/2)$

6 $y=\ln(2x-3)-\frac{3}{(x-2)^3}+e^{2x}$

7 $y=\sqrt{x^3+2x+4}$, $x_0=2$, $x=2{,}11$

8 $y=6e^{x-1}-3x-x^3$, $x_0=1$

Вариант 13

1 $y=\dfrac{\sin x-1}{\sin x+1},\ \ y=x\ln^3 x-3x\ln^2 x+6x\ln x-6x$

2 $y=ctg\left(\ln x\right);\quad y=\sin\left(\sqrt{x^2+2}\right)$

3 $y=\left(2\ln\sqrt{2x^2+1}+\sin^3\left(x^2\right)\right)^4$

4 $y=\left(x^2+1\right)^{arctg\,x}$

5 $y=\ln\left(tg\left(x/2\right)\right)-\dfrac{x}{\sin x}$

6 $y=-\sin^2 x+\log_3\left(2x-3\right)$

7 $y=\sqrt[3]{3x^2+8x-16},\ x_0=4,\ x=4{,}2$

8 $y=2x+x^2-\left(x+1\right)\ln\left(2+x\right),\quad x_0=-1$

Вариант 14

1 $y=e^x\cdot\left(\arcsin x+\arccos x\right),\ \ y=x\ln^2 x-2x\ln x+2x$

2 $y=\dfrac{1}{5}\sin^5 x;\quad y=\sqrt{e^{x^2+1}}$

3 $y=\sqrt{\left(4^{tg\,2x}-\log_2 x\right)^5}$

4 $y=\left(1-x^2\right)^{\arcsin\sqrt{x}}$

5 $y=\dfrac{2^x\left(\sin x+\cos x\cdot\ln 2\right)}{1+\ln^2 2}$

6 $y=\left(3x-5\right)^3+\dfrac{4x+3}{4x-3}$

7 $y=\sqrt[5]{x^4+10x-4},\ x_0=2,\ x=1{,}99$

8 $y=\sin^2\left(x+1\right)-2x-x^2,\quad x_0=-1$

Вариант 15

1 $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; $y=\dfrac{1}{3}x^3\ln x-\dfrac{1}{9}x^3+x\ln x-x$

2 $y=\dfrac{1}{3}\sin\left(x^3\right)$; $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)$ (последнюю производную упростить)

3 $y=\left(2^{\arcsin x}+x\cdot\arccos\sqrt{x}\right)^4$

4 $y=\left(\cos x\right)^{x^2}$

5 $y=\dfrac{7^x\left(3\sin 3x+\cos 3x\cdot\ln 7\right)}{9+\ln^2 7}$

6 $y=e^x\cdot\left(x-2x^2-x^3\right)$

7 $y=\sqrt[4]{4x^2+12}$, $x_0=1$, $x=1{,}11$

8 $y=x^2+4x+\cos^2\left(x+2\right)$, $x_0=-2$

Вариант 16

1 $y=x\cdot\left(e^x+1\right)$, $y=\sqrt{x^3}\cdot\ln x-\ln^2 x$

2 $y=\cos\left(x^2\right)$; $y=\sin\sqrt{x^2-x}$

3 $y=\dfrac{1}{4}\left(\arcsin\left(\sqrt{1-9x^2}\right)+\ln^3\left(\sin\sqrt{x}\right)\right)^4$

4 $y=\left(\cos 2x\right)^{x+3}$

5 $y=arctg\left(\dfrac{x^2-1}{x}\right)$

6 $y=\ln\left(3x-3\right)^2-\dfrac{5x+2}{5x-2}$

7 $y=\sqrt{x^2+10x+8}$, $x_0=4$, $x=4{,}02$

8 $y=x^2+2\ln\left(x+2\right)$, $x_0=-1$

Вариант 17

1 $y=\frac{2}{3}x^{3/2}\cdot\sin x,\ \ y=\frac{2\sin x+3\cos x}{2\sin x-3\cos x}$

2 $y=\ln^2(tgx);\quad y=\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x}}$

3 $y=\frac{1}{5}\left(2^{\sin\sqrt{x}}-x\cdot\arcsin\sqrt{1-x}\right)^5$

4 $y=\left(\sqrt{\sin x}\right)^{tgx}$

5 $y=\ln\left(x^2-1\right)-\frac{1}{x^2-1}$

6 $y=\sin^2(x/2)-\ln(\sin x)$

7 $y=\frac{1}{\sqrt{x^2+7}}-\sin^2(2x-6),\quad x_0=3,\ x=2{,}99$

8 $y=4x-x^2+(x-2)\sin(x-2),\quad x_0=2$

Вариант 18

1 $y=\frac{2}{5}x^{5/2}\cdot\cos x,\ \ y=\frac{\ln x+1}{\ln x-1}$

2 $y=tg(\sin x);\quad y=\arcsin\left(\ln^3 x\right)$

3 $y=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos 4x}-x^2\cdot e^{-4x}\right)^2$

4 $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^{\cos x}$

5 $y=\frac{1}{3}(x-2)\sqrt{x+1}+\ln\left(\sqrt{x+1}+1\right)$

6 $y=4^{-3x}+\sqrt{x-2}$

7 $y=\sqrt[3]{x^2+2x}-1,\ \ x_0=2,\ \ x=2{,}22$

8 $y=6e^x-x^3-3x^2-6x-5,\quad x_0=0$

Вариант 19

1 $y=\frac{3}{4}x^{4/3}\cdot\sin x,\ \ y=\frac{1}{3}x^3\ln x-\frac{1}{9}x^3+x\ln x-x$

2 $y=\ln(\ln x);\quad y=4^{\arccos^2(3x)}$

3 $y=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-x^2\cdot\log_2 x\right)^3$

4 $y=\left(\sin\sqrt{x}\right)^x$

5 $y=\ln\left(2x+2\sqrt{x^2+x}+1\right)$

6 $y=5^{-x}-\ln(\cos x)$

7 $y=\sqrt[3]{x^3+x+1},\ x_0=0,\ x=0{,}15$

8 $y=x^2-2x-2e^{x-2},\ \ x_0=2$

Вариант 20

1 $y=x\cdot\left(\sqrt{x}-1\right)^2,\ \ y=\frac{\sin x-2}{\sin x+2}$

2 $y=\log_2(\ln x);\quad y=e^{\arcsin\sqrt{1-2x}}$

3 $y=\frac{1}{3}\left(x\cdot\ln^2 x-\frac{x}{e^x}\right)^3$

4 $y=(\sin x)^{\sin x}$

5 $y=\ln\left(\cos\sqrt{x}\right)+\sqrt{x}\cdot tg\sqrt{x}$

6 $y=\sin(2x)+\frac{3x-1}{2x+1}$

7 $y=\sin^2(2x-2)-\frac{1}{(x+1)^2},x_0=1,\ x=1{,}05$

8 $y=\sin^2(x+2)-x^2-4x-4,\quad x_0=-2$