

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
“МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ  
РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ”

# **МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**III СЕМЕСТР**

**КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ  
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ФАКУЛЬТЕТА  
КИБЕРНЕТИКИ**

МОСКВА 2013

Составители: Н.В.Белецкая, М.И.Джигоева, В.В.Кирюшин,  
А.В.Митин, Д.А.Хрычев, А.Л.Шелепин

Редактор Ю.И.Худак

Контрольные задания являются типовыми расчетами по разделам математического анализа, вошедшим в программу III-го семестра дневного отделения: теории рядов и уравнениям математической физики. Типовые расчеты выполняются студентами в письменном виде и сдаются преподавателю до начала зачетной сессии. Приведенные в пособии вопросы к зачетам и экзаменам могут быть уточнены и дополнены лектором. При составлении контрольных заданий за основу были взяты типовые расчеты, разработанные коллективом кафедры высшей математики.

Печатаются по решению редакционно-издательского совета университета.

Рецензенты: А.О.Смирнов  
А.В.Шатина

© МИРЭА, 2013

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

III семестр

Контрольные задания по теме: "РЯДЫ"

ЗАДАЧА 1(а,б). Исследовать на сходимость числовые ряды.

| №   | а)  | б)   |
|-----|---|--|
| 1.  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} \arcsin \frac{\pi}{2n}$                         | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3 4^{3n}}$  |
| 2.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n (e^{\operatorname{tg} 1/n} - 1)$                                  | $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\sqrt{n} + 2}{\sqrt{n} + 3} \right)^{n^{3/2}}$               |
| 3.  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 + 3 \cdot (-1)^n}{2^{n+3}}$  | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^2}$  |
| 4.  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{(n^2 + 1)\sqrt{n+2}} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$   |
| 5.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n^2 + 2) \ln \frac{n^2 + 1}{n^2}$                                  | $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$                                   |
| 6.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$              | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)\sqrt{\ln(n+2)}}$   |
| 7.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin \frac{n}{2^n}$  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{3^n n!}$  |
| 8.  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} \sqrt{n+2}}{n \sqrt[3]{n^2+3}}$          | $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n+1} \left( \frac{n+2}{n+3} \right)^{n^2}$                             |
| 9.  | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n \operatorname{tg} \frac{n+2}{n^2+2}$                              | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)}$   |
| 10. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt[5]{\frac{3n^2+4}{n^2+5n+1}}$                                  | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 6 \cdot 11 \cdots (5n-4)}$ |
| 11. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n \sin(1/n)}{\sqrt[4]{n}}$                                      | $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$                                |

| №   | a)   | б)  |
|-----|--|---|
| 12. | $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^n$                       | $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\sqrt{n}}$   |
| 13. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n^2 + 2}}$                               | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdots (4n - 3)}{1 \cdot 6 \cdots (5n - 4)}$                   |
| 14. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \left( \frac{n + 1}{3n + 2} \right)^n$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n^2 + 5}{n^2 + 6} \right)^{n^2}$                                  |
| 15. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n 3^n \sin \frac{\pi}{7^n}$                                | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n + 2)}{n + 2}$  |
| 16. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi/4n)}{\sqrt[5]{2n^5 - 1}}$                        | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n + 4)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n + 2)}$ |
| 17. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + n}$   | $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{n - 1}{n + 1} \right)^{n^2 + 4n + 5}$                             |
| 18. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 (1 - e^{\sin \frac{1}{n^2}})$                        | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt{\ln^3 n + 1}}$  |
| 19. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 3^n}{3^n}$   | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 6 \cdots (3n)}{(n + 1)!} \arcsin \frac{1}{2^n}$                  |
| 20. | $\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} - 1) \sin \frac{1}{\sqrt{n + 1}}$              | $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{2n - 1}{2n + 1} \right)^{n(n-1)}$                                 |
| 21. | $\sum_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^3$                   | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \sqrt{\ln \ln n}}$  |
| 22. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n}{2^n}$            | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{n!} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^n}$                          |
| 23. | $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{(\sqrt{n} + 1)^3}{n^3 + 3n + 2}$                  | $\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{3n + 1}{3n + 2} \right)^{n^2/2}$                                  |
| 24. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n + 3}$  | $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln(n^n) \ln^3 n}$  |

| №   | а)  | б)  |
|-----|---|---|
| 25. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2+1}}$            | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{2n}(n!)^3}{(3n)!}$                                      |
| 26. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(e^{n^2+1} - 1)^{3/2}}$                 | $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n^2+5}$                        |
| 27. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3+3n^2+5}{n\sqrt[5]{n^6+n^4+1}}$         | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{n+1}}{(n+1) \ln^2(n+1)}$        |
| 28. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n n^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2+2}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!7^n}{n^n}$   |
| 29. | $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[3]{n+1}}{n(\sqrt{n}+2)}$  | $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-n^2}$                              |
| 30. | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+2}}{(e^{n^2+3} - 1)}$           | $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{(n+3)\sqrt{\ln^3(n+3)}}$ |

ЗАДАЧА 2. Исследовать знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$$

на абсолютную и условную сходимость.

| № | $a_n$                     | №  | $a_n$                                     | №  | $a_n$                        |
|---|---------------------------|----|---|----|------------------------------|
| 1 | $\frac{\sin(1/4^n)}{n}$   | 11 | $\sin^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$               | 21 | $\frac{2 + \ln n}{\sqrt{n}}$ |
| 2 | $\frac{\cos^2(n^2)}{n^3}$ | 12 | $\frac{1+n}{n^2+2}$                       | 22 | $\frac{(1+2n)^2}{(2n-1)^3}$  |
| 3 | $\frac{n}{3^n}$           | 13 | $\operatorname{tg} \frac{\pi}{4\sqrt{n}}$ | 23 | $\frac{2n+1}{n^2+n}$         |
| 4 | $\sin \frac{\pi}{2n}$     | 14 | $\frac{\cos(1/n)}{n^4}$                   | 24 | $\frac{\ln n}{n}$            |

| №  | $a_n$                        | №  | $a_n$                              | №  | $a_n$                              |
|----|------------------------------|----|------------------------------------|----|------------------------------------|
| 5  | $\frac{n^n}{(2n+1)^n}$       | 15 | $\frac{n+1}{2n^2-1}$               | 25 | $\sqrt{\frac{n^2+1}{n^4+1}}$       |
| 6  | $\sin \frac{\pi}{3\sqrt{n}}$ | 16 | $\frac{2n-1}{4^n}$                 | 26 | $\frac{n}{6n-5}$                   |
| 7  | $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$      | 17 | $\frac{1}{2n-\sqrt{n}}$            | 27 | $\operatorname{tg} \frac{1}{3n-1}$ |
| 8  | $\frac{1}{\ln(n+1)}$         | 18 | $\sqrt{\frac{2+n^2}{3+n^3}}$       | 28 | $\frac{n}{(2n-1)!}$                |
| 9  | $\frac{1}{2n+\sqrt{n}}$      | 19 | $\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$            | 29 | $\ln \frac{n+1}{n}$                |
| 10 | $\frac{(2n+1)}{n(2n-1)}$     | 20 | $\frac{1}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{n}}$ | 30 | $\frac{1}{(2n-1)\sqrt{n}}$         |

ЗАДАЧА 3. Найти интервал сходимости степенного ряда. Исследовать поведение ряда на концах интервала сходимости.

1.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(-2)^n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2} (x-1)^n$
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n^2+2n+3}} (x-5)^n$
3.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n \ln n} (x+1)^n$
4.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n} \operatorname{tg} \frac{1}{n} (x+2)^n$
5.  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \sin \frac{\pi}{n} (x+1)^n$
6.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1} \sqrt{n^2+4n+1}} (x+4)^n$
7.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{3^{n/2} n \ln n} (x-1)^n$
8.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} (x-1)^n$
9.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{n^2 \sqrt[3]{n} + 1} (x+7)^n$
10.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{(-2)^n} \sin \frac{1}{n^2} (x-2)^n$

11.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n\sqrt{n} + 1)}{(2n\sqrt{n} + 3)2^n} x^n$
12.  $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n \frac{n + 3}{n^3 + 2n^2 + 1} (x - 6)^n$
13.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n \sqrt{n}} \operatorname{tg} \frac{1}{n} (x + 2)^n$
14.  $\sum_{n=2}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} (x + 1)^n$
15.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \sqrt[3]{n^2 + 2}} (x + 5)^n$
16.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} (x - 4)^n$
17.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \ln \frac{n + 1}{n} (x - 3)^n$
18.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2 + 3n)}{n^3 \sqrt[3]{n} + 1} x^n$
19.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^n n \ln^2 n} (x - 3)^n$
20.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n \sqrt[3]{n(n + 1)(n + 2)}} x^n$
21.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n} \sin \frac{1}{n} (x + 1)^n$
22.  $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2 3^n} x^n$
23.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 + 1}{3^n(3n^4 + 5)} (x + 6)^n$
24.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(-2)^n \sqrt{n(n + 2)}} (x - 1)^n$
25.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(-2)^n} \arcsin \frac{1}{n} (x - 2)^n$
26.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{\pi}{\sqrt{n}} (x - 2)^n$
27.  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n - 1}{2n}\right)^{3n} (x - 1)^n$
28.  $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{3^n + 1}{3^n} (x - 8)^n$
29.  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x - 3)^n}{\sin \frac{1}{n}}$
30.  $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n + 1} - \sqrt[3]{n})(x - 5)^n$

ЗАДАЧА 4(а,б). Разложить функцию  $f(x)$  в ряд Тейлора по степеням  $(x - x_0)$ . Указать область сходимости полученного ряда. Найти  $f^{(k)}(x_0)$ , если  $k = 100 + \mathbb{N}^\circ$  варианта.

| $\mathbb{N}^\circ$ | а)<br>$f(x)$ | $x_0$ | б)<br>$f(x)$               | $x_0$ |
|--------------------|--------------|-------|----------------------------|-------|
| 1.                 | $xe^x$       | 1     | $\frac{1}{(x + 2)(x + 3)}$ | 1     |
| 2.                 | $xe^{x-3}$   | 2     | $\frac{x}{x^2 - 3x + 2}$   | 0     |

|     | a)   |       | б)                                |       |
|-----|--|-------|-----------------------------------|-------|
| №   | $f(x)$   | $x_0$ | $f(x)$                            | $x_0$ |
| 3.  | $x \sin x$                                     | -1    | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 12x + 40}}$ | 6     |
| 4.  | $(1 - x)e^{3x}$                                | -3    | $\ln(1 + x - 2x^2)$               | 0     |
| 5.  | $\sin(x + 2)$                                  | -1    | $\ln(x^2 + 5x + 6)$               | 0     |
| 6.  | $\int_0^x e^{-t^2} dt$                         | 0     | $\frac{1}{(x - 2)(x - 3)}$        | 4     |
| 7.  | $\cos(x + 2)$                                  | -1    | $\frac{1}{x^2 - 5x + 6}$          | 0     |
| 8.  | $xe^{x+2}$                                     | 1     | $\frac{2x}{(x + 3)(x + 1)}$       | 0     |
| 9.  | $\sin^2 3x$                                    | -6    | $\ln(2 - 3x + x^2)$               | 0     |
| 10. | $\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt$                 | 0     | $\frac{x}{2 - 3x + x^2}$          | 0     |
| 11. | $\operatorname{ch} x$                          | -2    | $\frac{x + 1}{x^2 - x}$           | -1    |
| 12. | $\sin 3x \sin 5x$                              | 0     | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 10x + 29}}$ | 5     |
| 13. | $x \cos 2x$                                    | -2    | $\ln(-9 + 9x - 2x^2)$             | 2     |
| 14. | $\int_0^x \frac{\operatorname{arctg} t}{t} dt$ | 0     | $\frac{2x}{(x - 3)(x - 4)}$       | 1     |
| 15. | $\cos(x + 2)$                                  | -1    | $\frac{x^2}{x^2 + x}$             | -3    |
| 16. | $\sin 2x \cos 3x$                              | 0     | $\frac{x}{(x - 2)^2}$             | 3     |
| 17. | $3^{2x}$                                       | -2    | $\frac{5x + 4}{(x + 2)(x + 4)}$   | 3     |



|     | a)  |       | б)                                    |       |
|-----|---|-------|---------------------------------------|-------|
| №   | $f(x)$  | $x_0$ | $f(x)$                                | $x_0$ |
| 18. | $\sin x \cos^2 x$                               | 0     | $\frac{x^2}{2 + 3x + x^2}$            | 1     |
| 19. | $\sin(2x + 1)$                                  | 2     | $\frac{1}{(x - 2)(x + 3)}$            | 5     |
| 20. | $\int_0^x t^2 \operatorname{sh} t dt$           | 0     | $\ln(2 + 3x + x^2)$                   | 1     |
| 21. | $\cos(x - \frac{\pi}{4})$                       | 1     | $\frac{x^3}{(x + 2)(x + 3)}$          | 2     |
| 22. | $\sin^3 x$                                      | 0     | $\frac{x - 3}{x^2 + 3x - 10}$         | -1    |
| 23. | $e^{3x-1}$                                      | 3     | $\ln(x^2 + 5x + 6)$                   | 3     |
| 24. | $\int_0^x \frac{1 - \operatorname{ch} t}{t} dt$ | 0     | $\frac{x + 2}{x^3 - x}$               | 2     |
| 25. | $x \cos^2 x$                                    | 2     | $\frac{1 - 3x}{(x + 4)(x + 6)}$       | 2     |
| 26. | $\frac{1}{x^2}$                                 | 1     | $\frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 18}}$      | 3     |
| 27. | $\cos x \cos 3x$                                | 0     | $\ln \frac{2 + x^2}{1 - x}$           | 0     |
| 28. | $\frac{1}{(x + 2)^2}$                           | -1    | $\ln \frac{3 + x^2}{\sqrt{1 - 2x^2}}$ | 0     |
| 29. | $\operatorname{arctg} \frac{1 - x}{1 + x}$      | 0     | $\frac{x^2}{(x + 1)(x + 2)}$          | 1     |
| 30. | $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 + t^4}}$            | 0     | $\frac{x^2}{(x - 2)(x + 3)}$          | -2    |

ЗАДАЧА 5. Используя признак Вейерштрасса, доказать равномерную сходимость функционального ряда на указанном промежутке.

- |  |                               |   |                                   |
|--|-------------------------------|---|-----------------------------------|
| 1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{x^n}$ | $[-3, -2]$                    | 2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(x + 1/n)^n}$                          | $[2, 3]$                          |
| 3. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n + (-1)^n}{n(n-1)} \cdot \sin \frac{x}{\sqrt{n}}$ | $[-2, 2]$                     | 4. $\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x^n}{n^3}\right)$             | $[0, 1]$                          |
| 5. $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(1-x\sqrt{n})^2}$                                    | $[1, 2]$                      | 6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!} \cdot \sin \frac{\pi x^n}{2^n}$    | $[0, \frac{1}{2}]$                |
| 7. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{2^n + x^n + 1}$                             | $[0, 5]$                      | 8. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{x+1} \cos(nx)}{\sqrt[3]{n^5+1}}$      | $[0, 2]$                          |
| 9. $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n!}$  | $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ | 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2 (x-3)^{n^2}}{2^{n^2}}$              | $[2, 3]$                          |
| 11. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$                                   | $[-3, -2]$                    | 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{tg}^n x}{n(n+1)}$ | $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$ |
| 13. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(x + \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) x^{n-1}$          | $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  | 14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n^2}}{x^{n^2}}$                         | $[4, 5]$                          |
| 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1/n}{(x-1)^{2n}}$                        | $[-2, -1]$                    | 16. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{n}\right)^n$        | $[3, 5]$                          |
| 17. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1) \sin^2(nx)}{n\sqrt{n+1}}$                   | $[-3, 0]$                     | 18. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(x-4)^{n^2}}$                     | $[1, 2]$                          |
| 19. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{x+1}{n \ln^2(n+1)}\right)$          | $[0, 3]$                      | 20. $\sum_{n=2}^{\infty} \sin^n \frac{x \ln n}{x-n}$                      | $[0, 1]$                          |
| 21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{x^{2n}}$                              | $[\frac{3}{2}, 3]$            | 22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi-x) \cos^2(nx)}{\sqrt[4]{n^7+1}}$      | $[0, \pi]$                        |

$$\begin{array}{ll}
23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\ln^n(x-1)} & [4, 5] \\
24. \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \sqrt{x+1} e^{-n/x} & [\frac{1}{2}, 2] \\
25. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 (\sqrt{2} + \sin(nx))^n}{3^n} & (-\infty, +\infty) \\
26. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^7 x^2} & (-\infty, +\infty) \\
27. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\sqrt{n+x}} & [0, 1] \\
28. \sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx} & [0, +\infty) \\
29. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{x} e^{-\frac{n^2}{x}} & (0, 9] \\
30. \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n}) & [-2, 2]
\end{array}$$

### ЗАДАЧА 6.

а) Разложить функцию  $y = f(x)$ , заданную на полупериоде  $(0, l)$ , в ряд Фурье по косинусам. Построить графики второй, третьей, десятой частичных сумм. Написать равенство Парсеваля для полученного ряда. Сумму какого числового ряда можно отыскать с помощью полученного равенства?

б) Разложить функцию  $y = f(x)$ , заданную на полупериоде  $(0, l)$ , в ряд Фурье по синусам. Построить графики второй, третьей, десятой частичных сумм. Указать тип сходимости полученного ряда.

в) Разложить функцию  $y = f(x)$  в ряд Фурье, продолжая ее на полупериод  $(-l, 0)$  функцией, равной 0. Построить графики второй, четвертой, десятой частичных сумм. Указать тип сходимости полученного ряда.

|    |                 |            |     |                 |            |
|----|-----------------|------------|-----|-----------------|------------|
| 1. | $y = 2x - 1$    | $(0, 1)$   | 2.  | $y = 3x - 2$    | $(0, 4)$   |
| 3. | $y = e^{2x}$    | $(0, 1)$   | 4.  | $y = 4 - 2x$    | $(0, 4)$   |
| 5. | $y = 2x^2 + 1$  | $(0, \pi)$ | 6.  | $y = \sin(x/2)$ | $(0, \pi)$ |
| 7. | $y = 3x - 3$    | $(0, 2)$   | 8.  | $y = 2 - 4x$    | $(0, 1)$   |
| 9. | $y = \cos(x/2)$ | $(0, \pi)$ | 10. | $y = 1 - x^2$   | $(0, \pi)$ |

|     |                               |            |     |                 |            |
|-----|-------------------------------|------------|-----|-----------------|------------|
| 11. | $y = 2x - 3$                  | $(0, 3)$   | 12. | $y = e^x$       | $(0, 1)$   |
| 13. | $y = 6 - 4x$                  | $(0, 3)$   | 14. | $y = x - 2$     | $(0, 4)$   |
| 15. | $y = 3 \sin(x/3)$             | $(0, \pi)$ | 16. | $y = x - 2$     | $(0, 2)$   |
| 17. | $y = 1 - x$                   | $(0, 2)$   | 18. | $y = \cos(x/3)$ | $(0, \pi)$ |
| 19. | $y = 2x + 1/2$                | $(0, 3)$   | 20. | $y = 2 - x$     | $(0, 2)$   |
| 21. | $y = 5 - 4x$                  | $(0, 3)$   | 22. | $y = e^{x/2}$   | $(0, 2)$   |
| 23. | $y = 5x - 3$                  | $(0, 5)$   | 24. | $y = x^2 + 1$   | $(0, \pi)$ |
| 25. | $y = \operatorname{ch}(2x/3)$ | $(0, 3)$   | 26. | $y = 2x^2 + 3$  | $(0, \pi)$ |
| 27. | $y = 1 - x$                   | $(0, 1)$   | 28. | $y = 3 - x$     | $(0, 3)$   |
| 29. | $y = \operatorname{sh} x$     | $(0, 2)$   | 30. | $y = e^{-x}$    | $(0, 1)$   |

ЗАДАЧА 7. Методом Фурье найти решение уравнения колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

длины  $l = 2$ , закрепленной на концах:  $u(0, t) = u(2, t) = 0$  и удовлетворяющей следующим начальным условиям:

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \varphi(x).$$

| №  | $f(x)$  | $\varphi(x)$                      |
|----|---|-----------------------------------|
| 1. | $\begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$      | 0                                 |
| 2. | 0   | $2x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$ |
| 3. | $\begin{cases} -2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(x - 2), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ | 0                                 |
| 4. | 0   | $x^2 - 2x, \quad 0 \leq x \leq 2$ |

- |     |  |   |
|-----|--|---|
| 5.  | $\begin{cases} x/3, & 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)/3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ | 0   |
| 6.  | 0  | $4x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$  |
| 7.  | $\begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$    | 0   |
| 8.  | 0  | $x^2/4 - x/2, \quad 0 \leq x \leq 2$  |
| 9.  | $\begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(2-x), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$   | 0   |
| 10. | 0  | $8x - 4x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$  |
| 11. | $x^2/2 - x, \quad 0 \leq x \leq 2$   | 0   |
| 12. | 0  | $\begin{cases} -3x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 3(x-2), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$     |
| 13. | $3x^2 - 6x, \quad 0 \leq x \leq 2$   | 0   |
| 14. | 0  | $\begin{cases} x/5, & 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)/5, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$    |
| 15. | $4x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 2$   | 0   |
| 16. | 0  | $\begin{cases} -2x/3, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(x-2)/3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ |
| 17. | $-x^2/2 + x, \quad 0 \leq x \leq 2$  | 0   |
| 18. | 0  | $\begin{cases} 5x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 5(2-x), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$      |
| 19. | $x/2 - x^2/4, \quad 0 \leq x \leq 2$   | 0   |
| 20. | 0  | $\begin{cases} -x/2, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-2)/2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$   |

$$\begin{array}{ll}
21. & \begin{cases} x/3, & 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)/3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} & 0 \\
22. & 0 & 4x - 2x^2, \quad 0 \leq x \leq 2 \\
23. & \begin{cases} -x, & 0 \leq x \leq 1 \\ x - 2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} & 0 \\
24. & 0 & x^2/4 - x/2, \quad 0 \leq x \leq 2 \\
25. & \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2(2-x), & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} & 0 \\
26. & 0 & \begin{cases} -x/2, & 0 \leq x \leq 1 \\ (2-x)/2, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} \\
27. & 2x - x^2, \quad 0 \leq x \leq 2 & 0 \\
28. & 0 & x^2/2 - x, \quad 0 \leq x \leq 2 \\
29. & \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases} & 0 \\
30. & 0 & \begin{cases} -x/3, & 0 \leq x \leq 1 \\ (x-2)/3, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}
\end{array}$$

ЗАДАЧА 8. Найти приближенное решение задачи Коши

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x); \quad y(0) = 0; \quad y'(0) = 0.$$

Решение задачи Коши ищется в виде степенного ряда  $\sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k$ , коэффициенты которого вычисляются последовательно. Ограничиваясь суммой  $\sum_{k=0}^N C_k x^k$ , содержащей  $N + 1$  член ряда, получаем приближенное решение. Оценка погрешности этого решения в работе облегчается тем, что получающиеся степенные ряды – знако-чередующиеся. Требуется, чтобы эта погрешность не превосходила 0,001 при  $x \in [0, x_0]$ .

|         |                             |               |
|---------|-----------------------------|---------------|
| 1, 16.  | $y'' + xy' + 2y = x$        | $x_0 = 0, 5$  |
| 2, 17.  | $y'' + x^2y' + 2xy = 1$     | $x_0 = 0, 5$  |
| 3, 18.  | $y'' + x^2y' + 3xy = 3x$    | $x_0 = 0, 5$  |
| 4, 19.  | $y'' + x^2y' + xy = 6x^2$   | $x_0 = 0, 75$ |
| 5, 20.  | $y'' + x^2y' + 2xy = x^3$   | $x_0 = 1$     |
| 6, 21.  | $y'' + x^2y' + 5xy = x$     | $x_0 = 1$     |
| 7, 22.  | $y'' + x^2y' + 2xy = 4x^2$  | $x_0 = 0, 75$ |
| 8, 23.  | $y'' + x^3y' + 3x^2y = 1$   | $x_0 = 0, 5$  |
| 9, 24.  | $y'' + x^3y' + 3x^2y = 3x$  | $x_0 = 0, 75$ |
| 10, 25. | $y'' + x^3y' + 4x^2y = 1$   | $x_0 = 0, 5$  |
| 11, 26. | $y'' + x^3y' + 4x^2y = 2x$  | $x_0 = 0, 75$ |
| 12, 27. | $y'' + x^3y' + x^2y = 4x^2$ | $x_0 = 1$     |
| 13, 28. | $y'' + x^3y' + 2x^2y = x$   | $x_0 = 0, 5$  |
| 14, 29. | $y'' + x^2y' + 2xy = x^2$   | $x_0 = 0, 75$ |
| 15, 30. | $y'' + xy' + y + x = 0$     | $x_0 = 0, 75$ |

ЗАДАЧА 9. Приблизительно вычислить определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Для вычисления интеграла функцию  $f(x)$  разлагают на отрезке интегрирования в степенной ряд, который интегрируют почленно. Ограничившись несколькими первыми слагаемыми полученного таким образом числового ряда, имеем приближенное значение интеграла. В работе погрешность приближения не должна превышать 0,0001, и оценка этой погрешности упрощается по тем же причинам, что и в задаче 8.

- |   |   |   |
|---|---|---|
| 1. $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$         | 2. $\int_0^{0,1} \frac{\sin x}{x} dx$                 | 3. $\int_0^{0,1} \frac{1-e^x}{x} dx$                          |
| 4. $\int_{0,1}^{0,2} \frac{e^{-x}}{x^3} dx$     | 5. $\int_0^{0,5} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx$ | 6. $\int_0^{0,8} x^{10} \sin x dx$                            |
| 7. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$              | 8. $\int_0^{0,5} \frac{dx}{4+x^3}$                    | 9. $\int_0^{0,5} \sqrt[3]{1+x^3} dx$                          |
| 10. $\int_0^1 e^{-x^2} dx$                      | 11. $\int_0^1 \cos \sqrt{x} dx$                       | 12. $\int_0^{0,25} \ln(1+\sqrt{x}) dx$                        |
| 13. $\int_0^{1/3} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx$    | 14. $\int_0^{0,3} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$         | 15. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$                    |
| 16. $\int_0^{0,8} \ln(1+x^2) dx$                | 17. $\int_0^{0,6} \frac{dx}{1+x\sqrt{x}}$             | 18. $\int_0^1 x^8 \cos x dx$                                  |
| 19. $\int_{0,2}^{0,3} \frac{e^{-x}}{x^4} dx$    | 20. $\int_0^{0,5} e^{-2\sqrt{x}} dx$                  | 21. $\int_0^{0,25} \frac{1-e^{2x}}{\sqrt{x}} dx$              |
| 22. $\int_2^4 \frac{dx}{1+x^3}$                 | 23. $\int_0^{0,2} \frac{\sin \sqrt{x}}{x} dx$         | 24. $\int_0^{0,4} \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{x}} dx$ |
| 25. $\int_0^{0,4} \frac{\sin x \sqrt{x}}{x} dx$ | 26. $\int_0^{0,2} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$            | 27. $\int_0^{0,3} \cos x \sqrt{x} dx$                         |
| 28. $\int_0^{0,2} \frac{e^x-1}{\sqrt{x}} dx$    | 29. $\int_0^{0,25} \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$  | 30. $\int_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$                    |

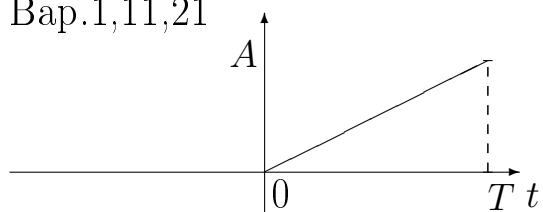
ЗАДАЧА 10\*. (по усмотрению преподавателя)

а) Найти преобразование Фурье (спектральную плотность  $S(u)$ ) следующих функций (сигналов).

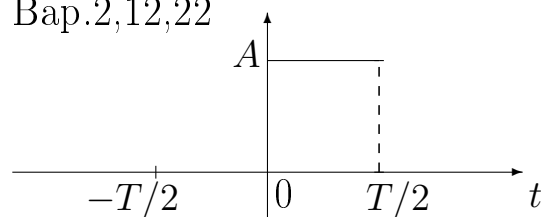
б) Продолжить периодически функцию (сигнал) с интервала  $[0, T]$  (или  $[-T/2, T/2]$ , см. рисунок) на всю числовую прямую, разложить в ряд Фурье. Построить графики второй и третьей частичных сумм.



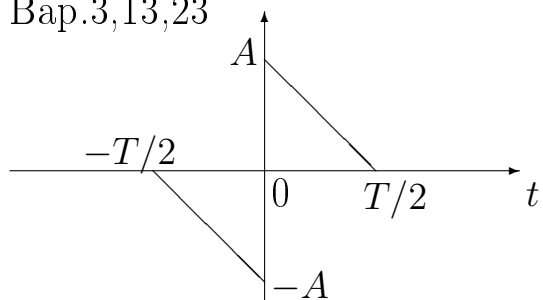
Bap.1,11,21



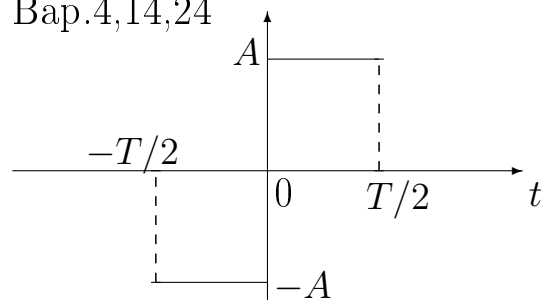
Bap.2,12,22



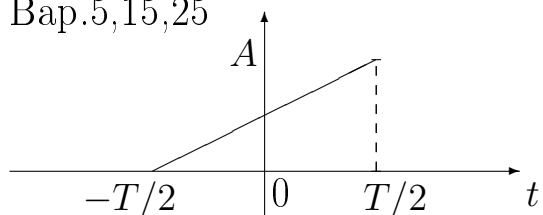
Bap.3,13,23



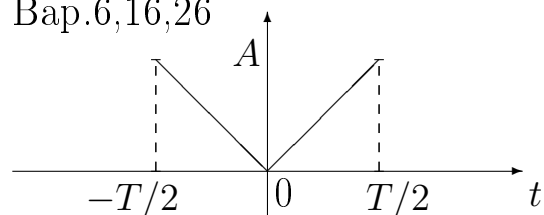
Bap.4,14,24



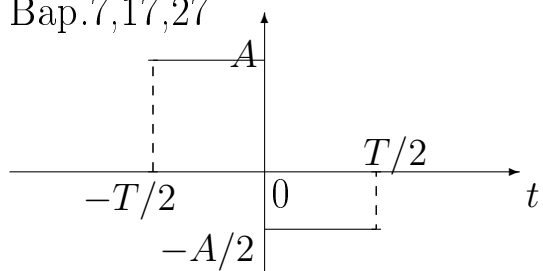
Bap.5,15,25



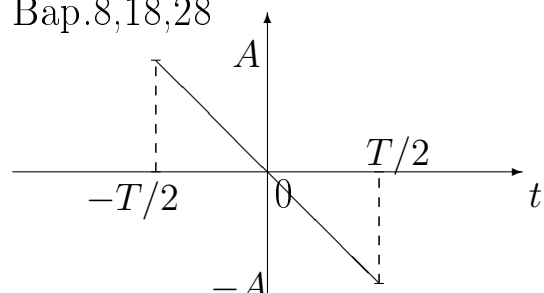
Bap.6,16,26



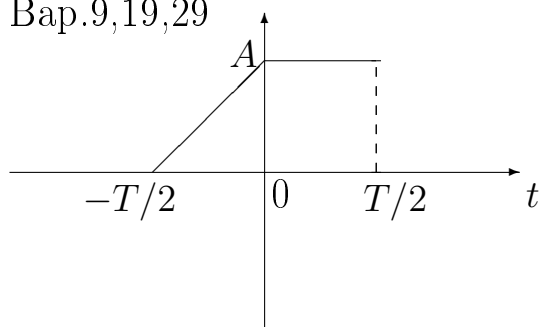
Bap.7,17,27



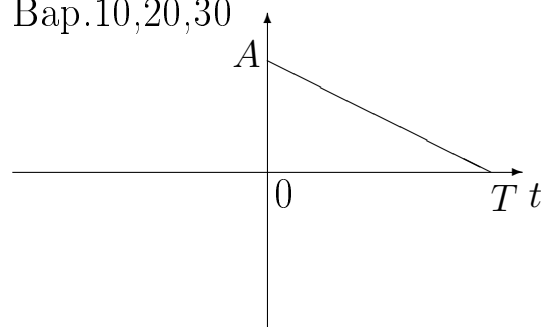
Bap.8,18,28



Bap.9,19,29



Bap.10,20,30



## ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ (ЗАЧЕТУ)

1. Числовой ряд, его сходимость. Примеры сходящихся и расходящихся рядов: геометрическая прогрессия, гармонический ряд и другие.
2. Необходимый признак сходимости числового ряда.
3. Критерий сходимости рядов с положительными членами.
4. Признак сравнения положительных рядов, его предельная форма.
5. Признаки Даламбера и Коши сходимости рядов с положительными членами.
6. Интегральный признак Коши сходимости рядов с положительными членами. Сходимость рядов вида  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ .
7. Признак сходимости знакочередующегося ряда, оценка остатка.
8. Сходимость ряда из абсолютных величин членов знакопеременного ряда как достаточное условие сходимости самого ряда. Абсолютная и условная сходимость.
9. Свойства абсолютно сходящихся рядов: перестановка членов, перемножение рядов. Перестановка членов неабсолютно сходящегося ряда.
10. Функциональный ряд, его область сходимости. Равномерная сходимость. Примеры.
11. Равномерная сходимость функционального ряда. Признак Вейерштрасса.
12. Непрерывность суммы функционального ряда.
13. Теорема о почленном интегрировании функциональных рядов.
14. Теорема о почленном дифференцировании функциональных рядов.
15. Степенной ряд. Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда. Поведение ряда на концах интервала сходимости.
16. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность сум-

мы степенного ряда.

17. Теоремы о почленном интегрировании и дифференцировании степенных рядов. Бесконечная гладкость суммы степенного ряда.

18. Необходимое условие разложимости функции в степенной ряд. Единственность разложения. Ряды Тейлора и Маклорена.

19. Критерий разложимости функции в степенной ряд.

20. Достаточное условие разложимости функции в степенной ряд.

21. Применение степенных рядов к решению дифференциальных уравнений, к приближенным вычислениям, к раскрытию неопределенностей.

22. Ряды Тейлора для основных элементарных функций:  $e^x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\alpha$ .

23. Ортогональные и ортонормированные системы функций. Норма функции. Примеры ортогональных систем.

24. Ряд Фурье по ортогональной системе. Коэффициенты ряда Фурье.

25. Приближение функции в среднем. Сходимость в среднем ряда Фурье.

26. Экстремальное свойство коэффициентов Фурье. Его геометрическая интерпретация.

27. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Полнота и замкнутость ортогональной системы функций.

28. Интеграл Фурье в вещественной и комплексной форме. Преобразование Фурье.

29. Постановка краевых задач для уравнения колебаний струны.

30. Решение задачи Коши для уравнения свободных колебаний бесконечной струны методом Даламбера. Его физический смысл.

31. Постановка краевых задач для уравнения теплопроводности.

32. Уравнение Лапласа. Гармонические функции и их свойства. Постановка краевых задач для уравнения Лапласа.

Вопросы к зачетам и экзаменам могут быть уточнены и дополнены лектором.

Контрольные задания напечатаны в авторской редакции

Подписано в печать .07.2013. Формат 60×84 1/16.

Бумага офсетная. Печать офсетная.

Усл.печ.л. 1,16. Усл.кр.-отт. 4,64. Уч.-изд.л. 1,25.

Тираж 130 экз. С

Федеральное государственное бюджетное образовательное

учреждение высшего профессионального образования

“Московский государственный технический университет

радиотехники, электроники и автоматики”

119454, Москва, просп. Вернадского, 78