

Г. Л. КОТКИН, В. Г. СЕРБО

# СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Издание третье, исправленное и дополненное



*РХД*

Москва • Ижевск

2001

Интернет-магазин

**MATHESIS**

<http://shop.rcd.ru>

- **ф и з и к а**
- **м а т е м а т и к а**
- **б и о л о г и я**
- **т е х н и к а**

***Внимание!***

**Новые проекты издательства РХД**

- Электронная библиотека на компакт-дисках  
<http://shop.rcd.ru/cdbooks>
  - Эксклюзивные книги — специально для Вас любая книга может быть отпечатана в одном экземпляре  
<http://shop.rcd.ru/exclusive>
- 

**Коткин Г. Л., Сербо В. Г.**

Сборник задач по классической механике. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001, 352 стр.

В настоящее издание включены новые задачи из числа использованных в преподавании на физическом факультете Новосибирского государственного университета, а также задачи, добавленные в изданиях на испанском и французском языках.

По охватываемому материалу сборник соответствует книгам «Механика» Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшица и «Классическая механика» Г. Голдстейна.

Для студентов, аспирантов и преподавателей, — физиков и математиков.

**ISBN 5-93972-058-7**

© Г. Л. Коткин, В. Г. Сербо, 2001

© НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001

<http://rcd.ru>

# Оглавление

<b>Предисловие ко второму изданию</b> . . . . .		4
<b>Из предисловия к первому изданию</b> . . . . .		4
	<b>Задачи</b>	<b>Ответы и решения</b>
§ 1. Интегрирование уравнений движения систем с одной степенью свободы . . . . .	5	70
§ 2. Движение частиц в полях . . . . .	7	81
§ 3. Сечение рассеяния в заданном поле. Столкновение частиц . . . . .	13	125
§ 4. Уравнения движения. Законы сохранения . . . . .	16	140
§ 5. Малые колебания систем с одной степенью свободы . . . . .	23	157
§ 6. Малые колебания систем с несколькими степенями свободы . . . . .	27	172
§ 7. Колебания линейных цепочек . . . . .	39	226
§ 8. Нелинейные колебания . . . . .	42	245
§ 9. Движение твердого тела. Неинерциальные системы отсчета . . . . .	45	258
§ 10. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона . . . . .	51	282
§ 11. Канонические преобразования . . . . .	56	293
§ 12. Уравнение Гамильтона – Якоби . . . . .	62	311
§ 13. Адиабатические инварианты . . . . .	65	327
<b>Литература</b> . . . . .		345

## Предисловие ко второму изданию

Настоящее издание существенно дополнено и переработано. Наибольшей переработке подверглись §§ 6 и 9. В § 6 для исследования колебаний сложных систем более широко используются свойства симметрии и методы теории возмущений. Значительно расширен § 9 (о движении твердого тела).

Мы рады случаю выразить глубокую благодарность редактору английского перевода задачника профессору Д. тер Хаару, многочисленные замечания которого способствовали устранению ряда неточностей и опечаток.

Мы признательны А. В. Михайлову за полезные обсуждения некоторых новых задач.

## Из предисловия к первому изданию

Предлагаемый сборник задач предназначен для студентов-физиков. По охватываемому материалу он примерно соответствует книгам «Механика» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица и «Классическая механика» Г. Голдстейна.

Мы надеемся, что чтение сборника будет интересным не только для студентов, изучающих механику, но и для лиц, знающих ее. Порядок расположения задач в основном такой же, как и в курсе Ландау и Лифшица, за тем исключением, что систематическое использование уравнений Лагранжа начинается здесь с § 4. Задачи же первых трех параграфов можно решать, используя лишь уравнения Ньютона и законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. За редкими исключениями обозначения в сборнике совпадают с обозначениями «Механики» Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица и часто даже специально не оговариваются. В задачах об электрических цепях используется Международная система единиц СИ, а в задачах о движении частиц в электромагнитных полях — гауссова система.

Мы глубоко благодарны Ю. И. Кулакову за постоянную помощь. Нам особо хотелось бы подчеркнуть его роль в составлении и обсуждении большого числа задач. Мы считаем приятным долгом поблагодарить И. Ф. Гинзбурга за целый ряд полезных советов и указаний, которые были нами приняты к сведению. Мы весьма благодарны В. Д. Кривченкову, живое участие и советы которого укрепили нас в решимости довести до конца эту работу,



# Задачи

## § 1. Интегрирование уравнений движения систем с одной степенью свободы

1.1. Определить закон движения частицы в поле  $U(x)$ :

а)  $U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x})$  (потенциал Морза, рис. 1, а);

б)  $U(x) = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}$  (рис. 1, б);

в)  $U(x) = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x$  (рис. 1, в).

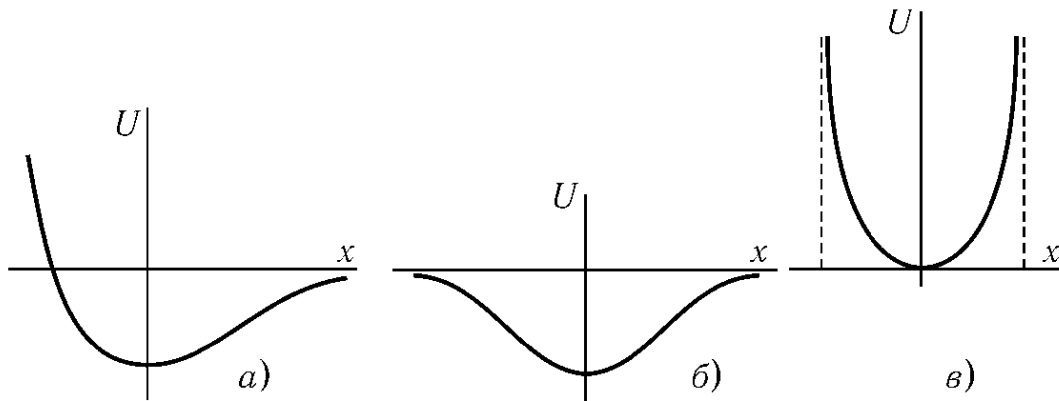


Рис. 1

1.2. Найти закон движения частицы в поле  $U(x) = -Ax^4$ , если энергия ее равна нулю.

1.3. Определить приближенно закон движения частицы в поле  $U(x)$  вблизи точки остановки  $x = a$  (рис. 2).

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться разложением  $U(x)$  в ряд Тейлора вблизи точки  $x = a$ . Рассмотреть случаи  $U'(a) \neq 0$  и  $U'(a) = 0$ ,  $U''(a) \neq 0$ .

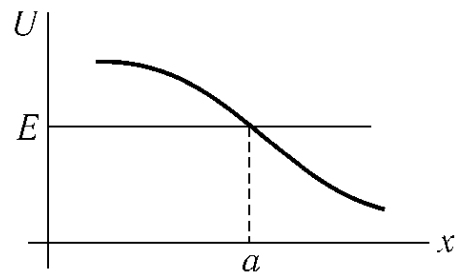


Рис. 2

1.4. Определить, по какому закону обращается в бесконечность период движения частицы в поле, изображенном на рис. 3, при приближении энергии  $E$  к  $U_m$ .

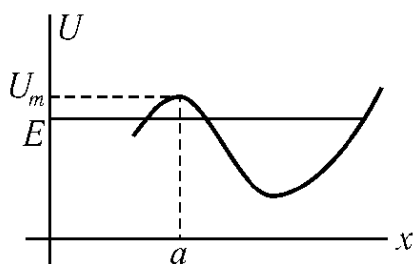


Рис. 3

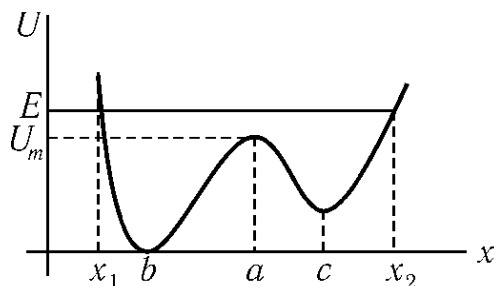


Рис. 4

**1.5.** а) Оценить период движения частицы в поле  $U(x)$  (рис. 4), если ее энергия близка к  $U_m$  (т.е.  $E - U_m \ll U_m - U_{\min}$ ).

б) Определить, в течение какой части периода частица находится на участке от  $x$  до  $x + dx$ .

в) Определить, в течение какой части периода частица имеет импульс  $m\dot{x}$  в интервале от  $p$  до  $p + dp$ .

г) На плоскости  $x, p = m\dot{x}$  изобразить качественно линии  $E(x, p) = \text{const}$  для случаев  $E < U_m$ ,  $E = U_m$ ,  $E > U_m$ .

**1.6.** Частица массы  $m$  может двигаться по окружности радиуса  $l$  в вертикальной плоскости в поле тяжести (математический маятник). Найти закон ее движения, если кинетическая энергия в нижней точке  $E$  равна  $2mgl$ .

Оценить период обращения маятника в случае, когда  $E - 2mgl \ll 2mgl$ .

**1.7.** Определить закон движения математического маятника при произвольном значении энергии.

УКАЗАНИЕ. Зависимость угла отклонения маятника от времени выражается через эллиптические функции (см., например, [1], стр. 150).

**1.8.** Определить изменение закона движения частицы на участке, не содержащем точек остановки, вызванное добавлением к полю  $U(x)$  малой добавки  $\delta U(x)$ .

Исследовать применимость полученных результатов вблизи точки остановки.

**1.9.** Найти изменение закона движения частицы, вызванное добавлением к полю  $U(x)$  малой добавки  $\delta U(x)$ :

а)  $U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}$ ,  $\delta U(x) = \frac{m\alpha x^3}{3}$ ;

$$\text{б) } U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad \delta U(x) = \frac{m\beta x^4}{4}.$$

**1.10.** Определить изменение периода финитного движения частицы, вызванное добавлением к полю  $U(x)$  малой добавки  $\delta U(x)$ .

**1.11.** Найти изменение периода движения частицы, вызванное добавлением к полю  $U(x)$  малой добавки  $\delta U(x)$ .

$$\text{а) } U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2} \text{ (гармонический осциллятор), } \delta U(x) = \frac{m\beta x^4}{4};$$

$$\text{б) } U(x) = \frac{m\omega^2 x^2}{2}, \quad \delta U(x) = \frac{m\alpha x^3}{3};$$

$$\text{в) } U(x) = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}), \quad \delta U(x) = -Ve^{\alpha x} \quad (V \ll A).$$

**1.12.** Частица движется в поле  $U(x) = \frac{U_0}{\text{ch}^2 \alpha x}$  с энергией  $E > U_0$ .

Найти время задержки частицы при движении от  $x = -\infty$  до  $x = +\infty$  по сравнению со временем свободного движения с той же энергией.

## § 2. Движение частиц в полях

**2.1.** Описать качественно характер движения частицы в поле  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^3}$  при различных значениях момента импульса и энергии.

**2.2.** Найти траектории и законы движения частицы в поле

$$U = \begin{cases} -V & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R \end{cases}$$

(рис. 5, «сферическая прямоугольная потенциальная яма») при различных значениях момента и энергии.

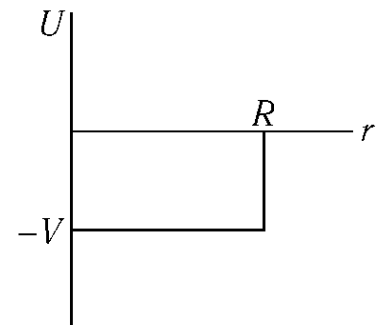


Рис. 5

**2.3.** Определить траекторию частицы в поле  $U(r) = \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$ . Выразить изменение направления ее скорости при рассеянии через энергию и момент.

**2.4.** Определить траекторию частицы в поле  $U(r) = \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$ . Найти время падения частицы в центр поля с расстояния  $r$ . Сколько оборотов вокруг центра сделает при этом частица?

**2.5.** Определить траекторию частицы в поле  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{r^2}$ . Найти угловое расстояние  $\Delta\varphi$  между двумя последовательными прохождениями перигелия (точки  $r = r_{\min}$ ), период радиальных колебаний  $T_r$  и период обращения  $T_\varphi$ . При каком условии траектория окажется замкнутой?

**2.6.** Определить траекторию частицы в поле  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}$ .

**2.7.** При каких значениях момента импульса  $M$  возможно финитное движение частицы в поле  $U(r)$ ?

а)  $U(r) = -\frac{\alpha e^{-\kappa r}}{r}$ ;    б)  $U(r) = -V e^{-\kappa^2 r^2}$ .

**2.8.** Частица падает в центр поля  $U(r) = -\alpha r^{-n}$  с конечного расстояния. Будет ли число оборотов вокруг центра, сделанных при этом частицей, конечным? Будет ли конечным время падения? Найти уравнение траектории для малых  $r$ .

**2.9.** Частица в поле  $U(r)$  уходит на бесконечность с расстояния  $r \neq 0$ . Будет ли число оборотов, сделанных ею вокруг центра, конечным?

а)  $U = \alpha r^{-n}$ ;    б)  $U(r) = -\alpha r^{-n}$ .

**2.10.** Определить время падения частицы с расстояния  $R$  в центр поля  $U(r) = -\alpha/r$ , рассматривая траекторию как вырожденный эллипс. Начальная скорость частицы равна нулю.

**2.11.** Определить наименьшее расстояние между частицами, если первая из них налетает из бесконечности со скоростью  $v$  и прицельным параметром  $\rho$  на вторую, первоначально покоившуюся. Массы частиц  $m_1$ ,  $m_2$ , закон взаимодействия  $U(r) = \alpha/r^n$ .

**2.12.** В системе центра масс определить траектории финитного движения двух частиц, массы которых  $m_1$  и  $m_2$ , а закон взаимодействия  $U(r) = -\alpha/r$ .

**2.13.** Определить положение фокуса пучка частиц, близких к оси пучка, при рассеянии в центральном поле  $U(r)$ , предполагая, что частица, летящая вдоль оси, поворачивает назад.

**2.14.** Найти область, недостижимую для пучка частиц, летящих из бесконечности со скоростью  $v$  параллельно оси  $z$  и рассеиваемых полем  $U(r) = \alpha/r$ .

**2.15.** Найти область, недостижимую для частиц, вылетающих со скоростью  $v$  в различных направлениях из одной точки  $A$  в поле  $U(r) = -\alpha/r$ .

**2.16.** Найти траекторию частицы в поле  $U(r) = -\alpha/r$ , используя интеграл движения  $\mathbf{A} = [\mathbf{v}\mathbf{M}] - \frac{\alpha\mathbf{r}}{r}$ .

**2.17.** Определить изменение зависимости периода  $T$  радиальных колебаний точки в центральном поле  $U(r)$  от энергии и момента, вызванное изменением поля на малую величину  $\delta U(r)$ .

**2.18.** Показать, что траектория частицы в поле  $U(r) = -\alpha e^{-r/D}/r$  при условии  $r_{\max} \ll D$  представляет собой медленно прецессирующий эллипс, и найти угловую скорость его прецессии.

**2.19.** Найти скорость прецессии орбиты в поле  $U(r) = -\alpha/r^{1+\varepsilon}$ , где  $|\varepsilon| \ll 1$ .

**2.20 а.** Найти угловую скорость прецессии орбиты частицы в поле  $U = \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \frac{\beta}{r^4}$  при  $\beta \ll m\omega^2 a^6, m\omega^2 b^6$ , где  $a$  и  $b$  — параметры невозмущенной траектории:

$$\left(\frac{r \cos \varphi}{a}\right)^2 + \left(\frac{r \sin \varphi}{b}\right)^2 = 1.$$

**2.20 б.** Частица скользит по поверхности гладкого параболоида вращения, ось которого направлена вертикально вверх:  $z = (x^2 + y^2)/(2l)$ . Найти угловую скорость прецессии орбиты. Наибольшее и наименьшее расстояния частицы от оси  $z$  равны  $a$  и  $b$ , причем  $a \ll l$ .

**2.21.** Исследовать движение системы Земля–Луна в поле Солнца. Учесть, что масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а расстояние от Земли до Луны  $a = 380$  тысяч км много меньше среднего расстояния до Солнца  $R = 150$  миллионов км.

а) Принимая для простоты, что плоскость орбиты Луны совпадает с плоскостью орбиты Земли, показать, что потенциальная энергия системы Земля–Луна в поле Солнца, усредненная за месяц, имеет вид

$$U(R) = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\beta}{R^3},$$

где  $R$  — расстояние от Солнца до центра масс системы Земля–Луна. Определить происходящее из-за этого смещение перигелия за сто лет.

б) Плоскость орбиты Луны составляет с плоскостью орбиты Земли угол  $\theta = 5^\circ$ . Определить связанную с этим среднюю скорость прецессии плоскости орбиты Луны.

**2.22.** Определить угловую скорость прецессии орбиты в поле  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U(r)$ , если эксцентриситет орбиты  $e \ll 1$ , полагая

$$\delta U(r) = \delta U(a) + (r - a)\delta U'(a) + \frac{1}{2}(r - a)^2\delta U''(a),$$

где  $a = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2}$  — средний радиус орбиты.

**2.23.** Определить угловую скорость прецессии орбиты частицы в поле  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \delta U(r)$  ( $\delta U(r)$  — малая добавка) с точностью до второго порядка включительно по  $\delta U(r)$ .

**2.24.** Найти уравнение траектории частицы, движущейся в поле  $U(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{\gamma}{r^3}$ , рассматривая  $\frac{\gamma}{r^3}$  как малую добавку к кулоновскому полю.

**2.25.** Показать, что задача о движении двух заряженных частиц в однородном электрическом поле  $\mathcal{E}$  сводится к задачам о движении центра масс и о движении частицы в заданном поле.

**2.26.** При каком условии разделяются задачи о движении центра масс и об относительном движении для двух заряженных частиц в однородном магнитном поле?

Векторный потенциал магнитного поля удобно выбрать в виде

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} [\mathcal{H} \mathbf{r}].$$

**2.27.** Выразить кинетическую энергию, импульс и момент импульса системы  $N$  частиц через координаты Якоби:

$$\xi_n = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + \dots + m_n \mathbf{r}_n}{m_1 + \dots + m_n} - \mathbf{r}_{n+1} \quad (n = 1, \dots, N-1),$$

$$\xi_N = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + \dots + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + \dots + m_N}.$$

**2.28.** На первоначально покоившуюся частицу налетает частица такой же массы  $m$ , имевшая на бесконечности скорость  $v$  и взаимодействующая с первой по закону  $U(r) = \alpha/r^n$ . Удар центральный. Найти точку остановки налетевшей частицы.

**2.29.** Доказать, что для заряженной частицы в однородном магнитном поле  $\mathcal{H}$  интегралом движения является  $M\mathcal{H} + \frac{e}{2c}[\mathbf{r}\mathcal{H}]^2$ , где  $M = m[\mathbf{r}\mathbf{v}]$ .

**2.30.** Найти траекторию и закон движения заряженной частицы в магнитном поле  $\mathcal{H} = g\mathbf{r}/r^3$  (поле магнитного монополя).

Подобный вид имеет магнитное поле тонкого длинного соленоида вне его в точках, удаленных от его торца на расстояние, большое по сравнению с диаметром соленоида, но малое по сравнению с его длиной.

**2.31.** Описать качественно характер движения и вид траектории заряженной частицы в поле магнитного диполя  $\mathbf{m}$ , движущейся в плоскости, перпендикулярной к вектору  $\mathbf{m}$ . Векторный потенциал магнитного диполя  $\mathbf{A} = [\mathbf{m}\mathbf{r}]/r^3$ .

**2.32.** а) Описать качественно движение заряженной частицы в поле  $U = \frac{1}{2}m\lambda r^2$ , где  $r$  — расстояние от оси  $z$  (поле равномерно заряженного цилиндра), при наличии однородного магнитного поля  $\mathcal{H}$ , параллельного оси  $z$ .

б) Найти закон движения и траекторию заряженной частицы, движущейся в поле  $U = \alpha/r^2$  в плоскости, перпендикулярной постоянному однородному магнитному полю  $\mathcal{H}$ .

**2.33.** Заряженная частица движется в кулоновском поле  $U(r) = -\alpha/r$  в плоскости, перпендикулярной к однородному магнитному полю  $\mathcal{H}$ . Описать траекторию частицы. Исследовать случай, когда  $\mathcal{H}$  мало, и случай, когда поле  $U(r)$  является малым возмущением.

**2.34.** Найти законы движения двух одинаковых заряженных частиц в однородном магнитном поле  $\mathcal{H}$  в случае, когда траектории их лежат в одной плоскости, перпендикулярной к  $\mathcal{H}$ , а энергию их взаимодействия  $U(r) = e^2/r$  можно считать малой поправкой.

**2.35.** Показать, что в поле  $U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r} - \mathbf{F}\mathbf{r}$  сохраняется величина  $\mathbf{F}[\mathbf{v}\mathbf{M}] - \frac{\alpha\mathbf{F}\mathbf{r}}{r} + \frac{1}{2}[\mathbf{F}\mathbf{r}]^2$ . Истолковать этот интеграл движения при очень малых  $\mathbf{F}$ .

**2.36.** Исследовать влияние малой добавки  $\delta U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}\mathbf{r}$  к кулоновскому полю на финитное движение частицы.

а) Найти среднюю (за период) скорость изменения момента импульса.

б) Определить зависимость от времени момента импульса, размеров и ориентации орбиты, если сила  $\mathbf{F}$  лежит в плоскости орбиты.

в) Тот же вопрос при произвольной ориентации силы.

УКАЗАНИЕ. Составить и решить усредненные по периоду уравнения движения для векторов  $\mathbf{M} = m[\mathbf{r}\mathbf{v}]$  и  $\mathbf{A} = [\mathbf{v}\mathbf{M}] - \frac{\alpha\mathbf{r}}{r}$ .

**2.37.** Найти систематическое изменение траектории финитного движения заряженной частицы в поле  $U(r) = -\alpha/r$  под влиянием слабых постоянных однородных электрического и магнитного полей  $\mathcal{E}$  и  $\mathcal{H}$ .

а) Ограничиться случаем, когда магнитное поле перпендикулярно плоскости орбиты, а электрическое поле лежит в ней.

б) Рассмотреть общий случай.

**2.38 а.** Найти систематическое изменение эллиптической орбиты частицы в поле  $U(r) = -\alpha/r$  под влиянием малой добавки  $\delta U = \beta r^2(3 \cos^2 \theta - 1)$ . (Таково, например, усредненное за месяц поле тяготения Луны в околоземном пространстве — поле «приливных сил».) Ограничиться случаем, когда плоскость орбиты проходит через ось  $z$ .

**2.38 б.** Принимая, что орбита Луны в поле Земли представляет собой эллипс, лежащий в плоскости орбиты Земли, определить систематическое изменение орбиты Луны под влиянием добавки к потенциальной энергии

$$\delta U(r, t) = -\frac{m\Omega^2}{2}r^2(3 \cos^2 \chi - 1),$$

где  $m$  — масса Луны,  $\Omega$  — угловая скорость обращения Земли вокруг Солнца,  $\chi$  — угол между направлениями от Земли к Солнцу и к Луне (между  $R(t)$  и  $z$  — см. задачу 2.21).

**2.39.** Найти систематическое смещение траектории финитного движения частицы, движущейся в поле  $U = -\alpha/r$  и в поле магнитного диполя  $\mathbf{m}$ , если влияние магнитного диполя можно рассматривать как малое возмущение. Векторный потенциал выбрать в виде  $\frac{[\mathbf{m}\mathbf{r}]}{r^3}$ .



**2.40.** Определить среднюю скорость прецессии орбиты частицы в поле  $U(r) = -\alpha/r$  под действием малой добавочной силы  $\mathbf{F} = \beta \ddot{\mathbf{v}}$  (такой вид имеет сила торможения излучением, в этом случае  $\beta = \frac{2}{3} \frac{q^2}{c^3}$ , где  $q$  — заряд частицы, — см. [2], § 75).

### § 3. Сечение рассеяния в заданном поле. Столкновение частиц

**3.1.** Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц, скорость которых до рассеяния параллельна оси  $z$ , на гладкой упругой поверхности вращения  $\rho(z)$ :

- а)  $\rho = b \sin \frac{z}{a}, \quad 0 \leq z \leq \pi a;$
- б)  $\rho = Az^n, \quad 0 < n < 1;$
- в)  $\rho = b - \frac{a^2}{z}, \quad \frac{a^2}{b} \leq z < \infty.$

**3.2.** Найти поверхность вращения, сечение упругого рассеяния на которой совпадает с резерфордовским.

**3.3.** Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц сферическим «потенциальным горбом»:

$$U(r) = \begin{cases} V & \text{при } r < a, \\ 0 & \text{при } r > a. \end{cases}$$

**3.4.** Найти сечение падения частиц в центр поля:

$$\text{а) } U = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{r^2}, \quad \text{б) } U = \frac{\beta}{r^2} - \frac{\gamma}{r^4}.$$

**3.5.** Найти сечение падения частиц на шарик радиуса  $R$ , находящийся в центре поля  $U(r)$ :

$$\text{а) } U = -\frac{\alpha}{r^n}, \quad n \geq 2; \quad \text{б) } U = \frac{\beta}{r^2} - \frac{\gamma}{r^4}.$$

**3.6.** Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц в поле  $U(r)$ :

$$\text{а) } U(r) = \begin{cases} \frac{\alpha}{r} - \frac{\alpha}{R} & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R; \end{cases}$$

$$\text{б) } U(r) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2(r^2 - R^2) & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases}$$

**3.7.** Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния быстрых частиц ( $E \gg V$ ) в поле  $U(r)$ :

$$\text{а) } U(r) = V \ln\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right);$$

$$\text{б) } U(r) = \begin{cases} V\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) & \text{при } r < R, \\ 0 & \text{при } r > R. \end{cases}$$

**3.8.** Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц на малые углы в поле  $U(r) = \frac{\beta}{r^4} - \frac{\alpha}{r^2}$ .

**3.9.** Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния частиц в поле  $U = -\alpha/r^2$ .

**3.10.** Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния быстрых частиц ( $E \gg V$ ) в поле  $U(r)$ . Исследовать подробнее предельные случаи, когда угол отклонения близок к своему минимальному или максимальному значению:

$$\text{а) } U(r) = Ve^{-\kappa^2 r^2}; \quad \text{б) } U(r) = \frac{V}{1 + \kappa^2 r^2}.$$

**3.11.** Поток частиц, скорости которых первоначально параллельны оси  $z$ , рассеивается на неподвижном эллипсоиде

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния, если эллипсоид:

а) гладкий упругий, б) гладкий неупругий, в) шероховатый упругий.

**3.12.** Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния на малые углы в нецентральной поле  $U(\mathbf{r})$ :

$$\text{а) } U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{ar}}{r^2}; \quad \text{б) } U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{ar}}{r^3}.$$

**3.13.** Найти поправку к дифференциальному эффективному сечению рассеяния частиц в поле  $U(r)$ , вызванную изменением поля на малую величину  $\delta U(r)$ :

$$\text{а) } U(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \delta U(r) = \frac{\beta}{r^2};$$

$$\text{б) } U(r) = \frac{\alpha}{r}, \quad \delta U(r) = \frac{\gamma}{r^3};$$

$$\text{в) } U(r) = \frac{\beta}{r^2}, \quad \delta U(r) = \frac{\gamma}{r^3}.$$

**3.14.** Определить усредненное по времени дифференциальное эффективное сечение рассеяния как функцию приобретаемой частицами энергии при рассеянии в поле  $U(r, t) = (V_1 + V_2 \sin \omega t) e^{-\kappa^2 r^2}$  быстрых частиц ( $E \gg V_{1,2}$ ).

**3.15.** Частица, летящая со скоростью  $V$ , распадается на две одинаковые частицы. Определить распределение по углу разлета распадных частиц (угол между направлениями вылета обеих частиц). Распад в системе центра масс изотропен, скорость распадных частиц в с. ц. м. равна  $v_0$ .

**3.16.** Найти распределение распадных частиц по энергиям в лабораторной системе, если в системе центра масс угловое распределение имеет вид  $\frac{3}{8\pi} \sin^2 \theta_0 d\theta_0$ , где  $\theta_0$  — угол между скоростью  $V$  первичной частицы и направлением вылета распадной частицы в с. ц. м. Скорость распадных частиц в с. ц. м.  $v_0$ .

**3.17.** Электрон, имевший на бесконечности скорость  $v$ , налетает на другой электрон, первоначально неподвижный (прицельный параметр  $\rho$ ). Найти скорости электронов после рассеяния.

**3.18.** Определить интервал значений, которые может иметь угол между направлениями скоростей после столкновения движущейся частицы (масса  $m_1$ ) с первоначально покоившейся (масса  $m_2$ ).

**3.19.** Найти дифференциальное эффективное сечение рассеяния гладких неупругих шариков на таких же шариках, первоначально покоившихся.

**3.20.** Найти закон, по которому изменяется интенсивность пучка частиц при прохождении им области, заполненной поглощающими центрами. Плотность распределения центров  $n$ , сечение поглощения  $\sigma$ .

**3.21.** Найти число актов реакции, происходящих в объеме  $dV$  за время  $dt$  при столкновении двух пучков частиц со скоростями  $v_1, v_2$  и плотностями  $n_1, n_2$ . Сечение реакции равно  $\sigma$ .

**3.22.** Частица массы  $M$  движется в области, заполненной частицами, первоначально неподвижными, массы которых равны  $m \ll M$ . Сечение рассеяния частиц  $m$  на частице  $M$  есть  $d\sigma = f(\theta) d\theta$ . Столкновения упругие. Найти:

- а) «силу трения», действующую на частицу  $M$ ;
- б) средний квадрат угла отклонения  $\Theta$  частицы  $M$ .

## § 4. Уравнения движения. Законы сохранения

**4.1.** Частица в поле  $U(x) = -Fx$  за время  $\tau$  перемещается из точки  $x = 0$  в точку  $x = a$ . Найти закон движения частицы, предполагая, что он имеет вид  $x(t) = At^2 + Bt + C$ , и подбирая параметры  $A, B, C$  так, чтобы действие имело наименьшее значение.

**4.2.** Частица движется в плоскости  $xOy$  в поле

$$U(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ V & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

перемещаясь за время  $\tau$  из точки  $(-a, 0)$  в точку  $(a, a)$ . Найти закон движения частицы, предполагая, что он имеет вид

$$\begin{aligned} x_{1,2}(t) &= A_{1,2}t + B_{1,2}, \\ y_{1,2}(t) &= C_{1,2}t + D_{1,2}. \end{aligned}$$

Значки 1, 2 относятся к левой ( $x < 0$ ) и правой ( $x > 0$ ) полуплоскостям.

**4.3.** С помощью непосредственного вычисления доказать ковариантность уравнений Лагранжа относительно преобразований координат

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_s, t), \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

**4.4.** Каким образом должна преобразовываться функция Лагранжа при переходе к новым координатам и «времени»

$$q_i = q_i(Q_1, Q_2, \dots, Q_s, \tau), \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad t = t(Q_1, Q_2, \dots, Q_s, \tau),$$

чтобы уравнения Лагранжа сохранили свой вид?

**4.5.** Записать функцию Лагранжа и уравнения движения частицы в поле  $U(x)$ , введя «местное время»  $\tau = t - \lambda x$ .

**4.6.** Как преобразуется функция Лагранжа

$$L = -\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$$

при переходе к координатам  $q$  и «времени»  $\tau$ :

$$\begin{aligned}x &= q \operatorname{ch} \lambda + \tau \operatorname{sh} \lambda, \\t &= q \operatorname{sh} \lambda + \tau \operatorname{ch} \lambda?\end{aligned}$$

**4.7.** Найти законы преобразования энергии и обобщенных импульсов при преобразовании координат

$$q_i = f_i(Q_1, \dots, Q_s, t), \quad i = 1, \dots, s.$$

**4.8.** Найти законы преобразования энергии и обобщенных импульсов, сопряженных полярным и декартовым координатам, при переходе к системе отсчета, вращающейся вокруг оси  $z$ :

$$\begin{aligned}\text{а) } \varphi &= \varphi' + \Omega t, \quad r = r'; \\ \text{б) } x &= x' \cos \Omega t - y' \sin \Omega t, \quad y = x' \sin \Omega t + y' \cos \Omega t.\end{aligned}$$

**4.9.** Найти законы преобразования энергии и импульсов при переходе к системе отсчета, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$ . Функцию Лагранжа  $L'$  в движущейся системе выбрать в виде

а)  $L'_1 = L(\mathbf{r}' + \mathbf{V}t, \dot{\mathbf{r}}' + \mathbf{V}, t)$ , где  $L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$  — функция Лагранжа в неподвижной системе;

б)  $L'_2 = \frac{m\mathbf{V}'^2}{2} - U(\mathbf{r}' + \mathbf{V}t, t)$ . Здесь  $L'_2$  отличается от  $L'_1$  на полную производную по времени от функции

$$\mathbf{V}m\mathbf{r}' + \frac{m}{2}\mathbf{V}^2t.$$

**4.10.** Пусть бесконечно малое преобразование координат и времени имеет вид

$$\begin{aligned}q'_i &= q_i + \varepsilon \Psi_i(q, t), \\t' &= t + \varepsilon X(q, t), \quad \varepsilon \rightarrow 0,\end{aligned}$$

и пусть при этом преобразовании сохраняется вид действия:

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt = \int_{t'_1}^{t'_2} L\left(q', \frac{dq'}{dt'}, t'\right) dt'.$$

Доказать, что величина

$$\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i X - \Psi_i) - LX$$

является интегралом движения.

**4.11.** Обобщить теорему предыдущей задачи на случай, когда вид действия при преобразовании координат и времени меняется следующим образом:

$$\int_{t_1}^{t_2} L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) dt = \int_{t'_1}^{t'_2} \left\{ L\left(q', \frac{dq'}{dt'}, t'\right) + \varepsilon \frac{df(q', t')}{dt'} \right\} dt'.$$

**4.12.** Найти интегралы движения, если вид действия не меняется при:  
а) пространственном сдвиге, б) повороте, в) сдвиге начала отсчета времени, г) винтовом сдвиге, д) преобразовании задачи 4.6.

**4.13.** Найти интегралы движения для частицы, движущейся:

- а) в однородном поле  $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}\mathbf{r}$ ;  
б) в поле  $U(\mathbf{r})$ , где  $U(\mathbf{r})$  — однородная функция:

$$U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n U(\mathbf{r})$$

(уточнить, при каком  $n$  преобразование подобия не меняет вид действия);

в) в поле бегущей волны  $U(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r} - \mathbf{V}t)$ , где  $\mathbf{V}$  — постоянный вектор;

г) в магнитном поле, заданном векторным потенциалом  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ , где  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — однородная функция.

д) в электромагнитном поле, вращающемся с постоянной угловой скоростью  $\Omega$  вокруг оси  $z$ .

**4.14.** Найти интеграл движения, отвечающий преобразованию Галилея.

УКАЗАНИЕ. Использовать результат задачи 4.11.

**4.15.** Найти интегралы движения для частицы в однородном постоянном магнитном поле  $\mathcal{H}$ , если векторный потенциал задан в виде:

- а)  $\mathbf{A} = \frac{1}{2}[\mathcal{H}\mathbf{r}]$ ; б)  $A_x = A_z = 0, A_y = x\mathcal{H}$ .

**4.16.** Найти интегралы движения для частицы в поле:

а) магнитного диполя  $\mathbf{A} = [\mathbf{m}\mathbf{r}]/r^3$ ,  $\mathbf{m} = \text{const}$ ;

б)  $A_\varphi = \mu/r$ ,  $A_r = A_z = 0$ .

**4.17.** Составить уравнения движения системы, функция Лагранжа которой:

а)  $L(x, \dot{x}) = e^{-x^2 - \dot{x}^2} + 2\dot{x}e^{-x^2} \int_0^{\dot{x}} e^{-y^2} dy$ ;

б)  $L(x, \dot{x}, t) = \frac{1}{2}e^{\alpha t}(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$ .

**4.18.** а) Записать компоненты вектора ускорения частицы в сферической системе координат.

б) Найти составляющие ускорения в ортогональной системе координат  $q_i$ , если элемент длины задан соотношением

$$ds^2 = h_1^2 dq_1^2 + h_2^2 dq_2^2 + h_3^2 dq_3^2,$$

где  $h_i(q_1, q_2, q_3)$  — коэффициенты Ламэ.

**4.19.** Записать уравнения движения частицы в произвольных координатах  $q_i$ , связанных с декартовыми координатами  $x_i$  соотношениями:

а)  $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ;

б)  $x_i = x_i(q_1, q_2, q_3, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

**4.20.** Показать, что функция Лагранжа [31]

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) - \frac{eg}{c}\dot{\varphi} \cos \theta$$

описывает движение заряженной частицы в магнитном поле  $\mathcal{H} = g\mathbf{r}/r^3$  (см. задачу 2.30). Найти интегралы движения.

**4.21.** Проверить, что функции Лагранжа

$$L_1 = \frac{\mathcal{L}\dot{q}_1^2}{2} - Uq_1, \quad L_2 = -\frac{q_2^2}{2C} + Uq_2$$

приводят к правильным «уравнениям движения» для  $q_1$  и  $q_2$  и правильным значениям энергии. Здесь  $\dot{q}_1 = I$  — ток, идущий по индуктивности  $\mathcal{L}$  в направлении от  $A$  к  $B$  (рис. 6, а),  $q_2$  — заряд на верхней пластине конденсатора (рис. 6, б), а  $U$  — напряжение между точками  $A$  и  $B$  ( $U = \varphi_B - \varphi_A$ ).

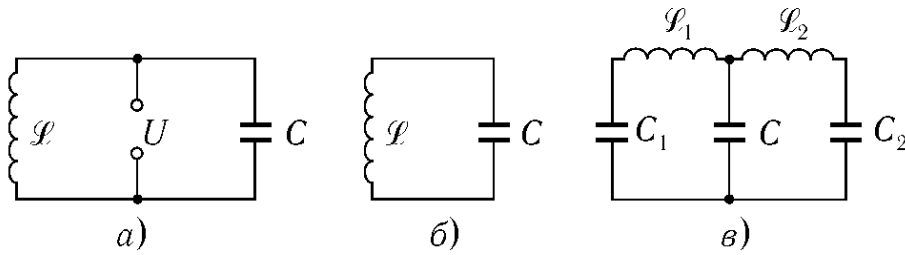


Рис. 7

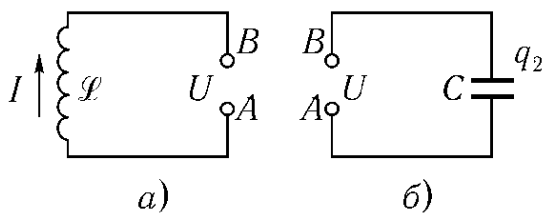


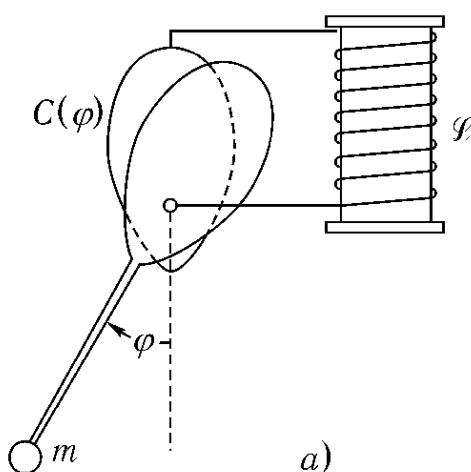
Рис. 6

**4.22.** Используя аддитивность функции Лагранжа и результат предыдущей задачи, составить функции Лагранжа и уравнения Лагранжа для цепей, изображенных на рис. 7 (а, б и в).

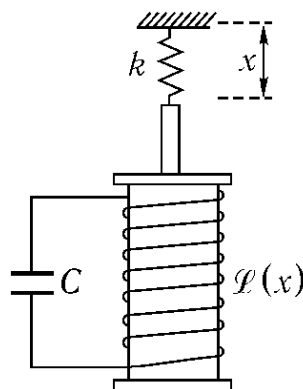
**4.23.** Найти функции Лагранжа следующих систем:

а) цепь с переменным конденсатором, подвижные пластины которого соединены с маятником  $m$  (рис. 8, а). Зависимость емкости от угла поворота  $C(\varphi)$  известна, массой пластин конденсатора пренебречь;

б) сердечник на пружинке жесткости  $k$ , втягиваемый внутрь соленоида, индуктивность которого есть заданная функция смещения сердечника  $\mathcal{L}(x)$  (рис. 8, б).



а)



б)

Рис. 8

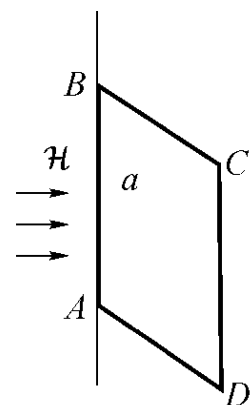


Рис. 9

**4.24.** Квадратная идеально проводящая рамка может вращаться вокруг закрепленной стороны  $AB = a$  (рис. 9). Рамка находится в постоянном однородном магнитном поле  $\mathcal{H}$ , перпендикулярном к оси  $AB$ . Индуктив-



ность рамки  $\mathcal{L}$ , масса стороны  $CD$  равна  $m$ , массами других сторон можно пренебречь.

Описать качественно характер движения рамки.

**4.25.** Пользуясь методом неопределенных множителей Лагранжа, получить уравнения движения частицы в поле тяжести, если она может двигаться по заданной кривой:

- а) параболы, лежащей в вертикальной плоскости;
- б) окружности радиуса  $r = l$ , расположенной в вертикальной плоскости.

Выразить силы реакции связи.

**4.26.** Частица движется в поле тяжести вдоль прямой, равномерно вращающейся в вертикальной плоскости. Составить уравнения движения частицы и найти момент силы реакции.

**4.27.** Влияние связей и трения на движение системы можно описать, вводя в уравнения движения обобщенные силы реакции связей и трения:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = R_i. \quad (1)$$

- а) Как изменяется со временем энергия системы?
- б) Как должны преобразовываться силы  $R_i$  при переходе к новым обобщенным координатам

$$q_i = q_i(Q_1, \dots, Q_s, t),$$

чтобы уравнения движения сохраняли вид (1)?

**4.28.** Пусть уравнения связей имеют вид

$$\dot{q}_\beta = \sum_{n=r+1}^s b_{\beta n} \dot{q}_n, \quad \beta = 1, \dots, r,$$

причем функция Лагранжа  $L(q_{r+1}, \dots, q_s, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_s, t)$  и коэффициенты  $b_{\beta n}$  не зависят от координат  $q_\beta$ .

Показать, что уравнения движения могут быть представлены в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_n} + \sum_{\beta=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \sum_{m=r+1}^s \left( \frac{\partial b_{\beta m}}{\partial q_n} - \frac{\partial b_{\beta n}}{\partial q_m} \right) \dot{q}_m = 0,$$

где  $\tilde{L}(q_{r+1}, \dots, q_s, \dot{q}_{r+1}, \dots, \dot{q}_s, t)$  — функция, получаемая исключением скоростей  $\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_r$  из  $L$  с помощью уравнений связей.

**4.29.** Струну можно представить как предельный случай системы  $N$  частиц (рис. 10), соединенных упругой нитью, при  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ ,  $Na = \text{const}$ . Функция Лагранжа дискретной системы имеет вид

$$L(q_1, q_2, \dots, q_N, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_N, t) = \sum_{n=1}^{N+1} L_n(q_n, q_n - q_{n-1}, \dot{q}_n, t),$$

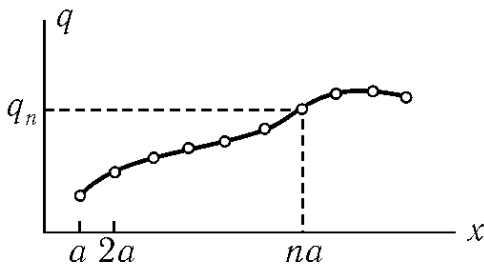


Рис. 10

где  $q_n$  — отклонение  $n$ -й частицы от положения равновесия.

а) Получить уравнение движения непрерывной системы как предельный случай уравнений Лагранжа дискретной системы.

б) Получить выражение энергии непрерывной системы как предел выражения энергии дискретной системы.

УКАЗАНИЕ. Ввести координату точки струны  $x$ , а также величины, получаемые при предельном переходе  $a \rightarrow 0$ ,  $n = x/a \rightarrow \infty$ :

$$q(x, t) = \lim q_n(t), \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \lim \frac{q_n(t) - q_{n-1}(t)}{a},$$

$$\mathcal{L}\left(x, q, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial t}, t\right) = \lim \frac{L_n(q_n, q_n - q_{n-1}, \dot{q}_n, t)}{a}.$$

**4.30.** Заряженная частица движется в потенциальном поле  $U(\mathbf{r})$  и в постоянном магнитном поле  $\mathcal{H}$ , причем  $U(\mathbf{r})$  и  $\mathcal{H}(\mathbf{r})$  являются однородными функциями координат степени  $k$  и  $n$  соответственно, т.е.  $U(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^k U(\mathbf{r})$ ,  $\mathcal{H}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^n \mathcal{H}(\mathbf{r})$ . Вывести для данной системы принцип подобия, уточнив, при каком значении  $n$  он имеет место.

**4.31.** Обобщить теорему вириала для системы заряженных частиц в однородном магнитном поле  $\mathcal{H}$ . Потенциальная энергия системы  $U$  является однородной функцией координат  $U(\alpha\mathbf{r}_1, \dots, \alpha\mathbf{r}_s) = \alpha^k U(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s)$ , а движение системы происходит в ограниченной области пространства и с ограниченными скоростями.

**4.32.** Три одинаковых частицы движутся по одной прямой и попарно взаимодействуют друг с другом по закону  $U_{ik} = U(x_i - x_k)$ , где  $x_i$  — коор-

дината  $i$ -й частицы. Проверить, что кроме очевидных интегралов движения

$$P = m(\dot{x}_1 + \dot{x}_2 + \dot{x}_3),$$

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + U_{12} + U_{23} + U_{31}$$

существует дополнительный интеграл движения [28]

$$A = m\dot{x}_1\dot{x}_2\dot{x}_3 - \dot{x}_1U_{23} - \dot{x}_2U_{31} - \dot{x}_3U_{21}$$

в случае, если функция  $U(x)$  имеет вид:

$$\text{а) } U(x) = \frac{g^2}{x^2}, \quad \text{б) } U(x) = \frac{g^2 a^2}{\text{sh}^2 ax}.$$

**4.33.** Рассмотреть столкновение трех частиц, описанных в предыдущей задаче. Пусть  $x_1 > x_2 > x_3$  и при  $t \rightarrow -\infty$  расстояния между частицами бесконечно велики, а их скорости  $v_i = \dot{x}_i$  ( $t = -\infty$ ) таковы, что  $v_3 > v_2 > v_1$ . Найти  $v'_i = \dot{x}_i$  ( $t = +\infty$ ).

## § 5. Малые колебания систем с одной степенью свободы

**5.1.** Найти частоту  $\omega$  малых колебаний частицы в поле  $U(x)$ :

$$\text{а) } U(x) = V \cos \alpha x - Fx; \quad \text{б) } U(x) = V(\alpha^2 x^2 - \sin^2 \alpha x).$$

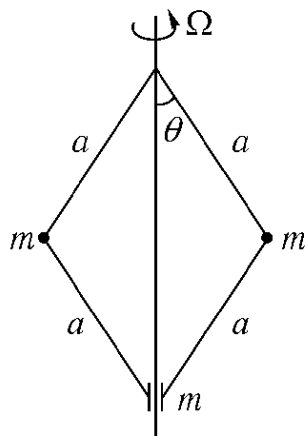


Рис. 11

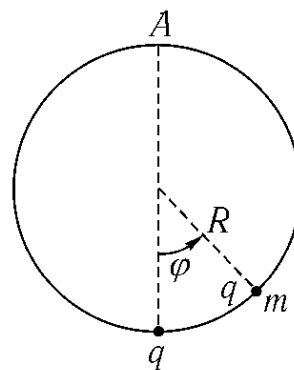


Рис. 12

**5.2.** Найти частоту малых колебаний системы, изображенной на рис. 11. Система вращается в поле тяжести вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\Omega$ .

**5.3.** Частица массы  $m$ , несущая заряд  $q$ , может двигаться в поле тяжести по вертикальной окружности радиуса  $R$ . В нижней части окружности закреплен заряд  $q$ . Найти положение равновесия и частоту малых колебаний частицы (рис. 12).

**5.4.** Найти закон движения частицы в центральном поле  $U(r) = -\alpha/r^n$  ( $0 < n < 2$ ) по траектории, близкой к окружности.

**5.5.** Найти частоту малых колебаний сферического маятника (частица массы  $m$  подвешена на нити длины  $l$ ), при которых угол отклонения нити от вертикали  $\theta$  осциллирует вблизи значения  $\theta_0$ .

**5.6.** Найти поправку к частоте малых колебаний двухатомной молекулы, вызванную наличием у нее момента импульса  $M$ .

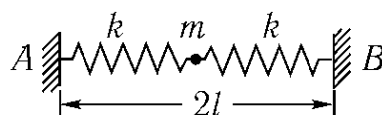


Рис. 13

**5.7.** Найти свободные колебания системы (рис. 13), если частица может двигаться:

а) вдоль прямой  $AB$ ;

б) перпендикулярно  $AB$ .

Как зависит частота от натяжения пружинок в положении равновесия?

**5.8.** Найти свободные колебания системы (рис. 14), если она находится в однородном поле тяжести и частица может двигаться только вертикально.

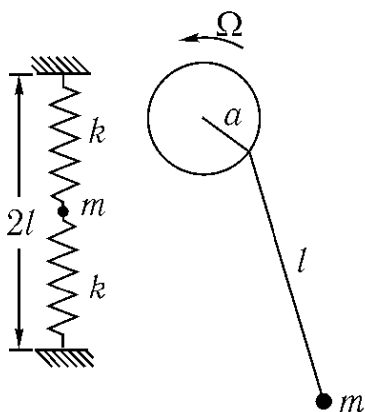


Рис. 14

Рис. 15

**5.9.** Найти установившиеся малые колебания плоского маятника, точка подвеса которого равномерно движется по окружности радиуса  $a$  с частотой  $\Omega$  (рис. 15). Длина маятника  $l$  ( $l \gg a$ ).

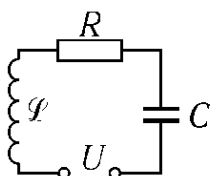


Рис. 16

**5.10.** Найти установившиеся колебания напряжения на конденсаторе и ток в контуре с источником напряжения  $U(t) = U_0 \sin \omega t$  (рис. 16).

**5.11.** Найти закон движения осциллятора с трением, первоначально покоившегося, под действием силы  $F(t) = F \cos \gamma t$ .

**5.12.** Определить энергию  $E$ , приобретенную осциллятором под действием силы  $F(t) = Fe^{-(t/\tau)^2}$  за все время ее действия, если при  $t = -\infty$ :

- а) осциллятор покоился;
- б) амплитуда колебаний была равна  $a$ .

**5.13.** Найти движение под действием силы  $F(t)$ :

- а) неустойчивой системы, описываемой уравнением

$$\ddot{x} - \mu^2 x = \frac{1}{m} F(t);$$

- б) осциллятора с трением

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F(t).$$

**5.14.** Найти дифференциальное эффективное сечение возбуждения изотропного осциллятора до энергии  $\varepsilon$  быстрой частицей ( $E \gg V$ ), взаимодействующей с ним по закону

$$U(r) = Ve^{-\kappa^2 r^2}.$$

Начальная энергия осциллятора равна нулю.

**5.15.** Осциллятор может колебаться только вдоль оси  $z$ . Найти дифференциальное эффективное сечение возбуждения осциллятора до энергии  $\varepsilon$  быстрой частицей, взаимодействующей с ним по закону  $U(r) = Ve^{-\kappa^2 r^2}$ . Скорость частицы  $v_\infty$  параллельна оси  $z$ , ее энергия  $E \gg V$ . Начальная энергия осциллятора  $\varepsilon_0$ .

**5.16.** На гармонический осциллятор действует сила  $F(t)$ , причем  $F(-\infty) = 0$ ,  $F(+\infty) = F_0$ . Найти энергию  $E(+\infty)$ , приобретенную осциллятором за все время действия силы, и амплитуду колебаний его при  $t \rightarrow +\infty$ , если при  $t \rightarrow -\infty$  осциллятор покоился.

**5.17.** Найти энергию, приобретенную осциллятором под действием силы

$$F(t) = \begin{cases} \frac{F_0}{2} e^{\lambda t} & \text{при } t < 0, \\ \frac{F_0}{2} (2 - e^{-\lambda t}) & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Энергия осциллятора при  $t \rightarrow -\infty$  равна  $E_0$ .

**5.18.** Оценить изменение амплитуды колебаний осциллятора, если сила  $F(t)$  включается медленно и плавно за большой промежуток времени  $\tau$ , такой что  $\omega\tau \gg 1$ . При  $t < 0$  сила  $F(t) = 0$ , при  $t > \tau$  сила  $F(t) = F_0$ , при  $0 < t < \tau$  справедлива оценка  $F^{(k)} \sim F_0/\tau^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n+1$ ); причем  $F^{(s)}(0) = F^{(s)}(\tau) = 0$  ( $s = 1, 2, \dots, n-1$ ), а  $n$ -я производная силы при  $t = 0$  и  $t = \tau$  испытывает скачок.

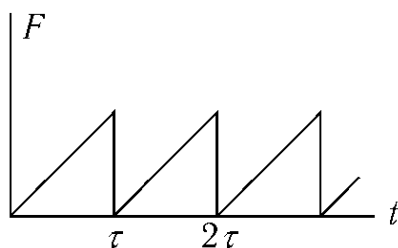


Рис. 17

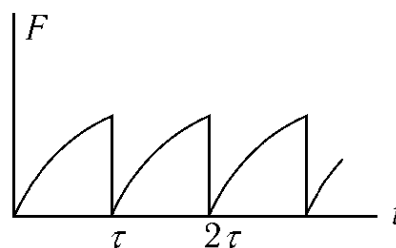


Рис. 18

**5.19.** Найти установившиеся колебания осциллятора под действием периодической силы  $F(t)$ :

а)  $F(t) = F \cdot (t/\tau - n)$  при  $n\tau \leq t < (n+1)\tau$  (рис. 17);

б)  $F(t) = F \cdot (1 - e^{-\lambda t'})$ ,  $t' = t - n\tau$  при  $n\tau \leq t < (n+1)\tau$  (рис. 18).

Оценить время установления колебаний, если декремент затухания равен  $\delta$ .

в) Найти установившийся ток в контуре (см. рис. 16) с источником пилообразного напряжения  $U(t) = (t/\tau - n)V$  при  $n\tau \leq t < (n+1)\tau$ .

**5.20.** На осциллятор с трением (собственная частота  $\omega_0$ , сила трения  $f_{\text{тр}} = -2\lambda m\dot{x}$ ) действует вынуждающая сила  $F(t)$ .

а) Найти среднюю работу  $A$  этой силы при установившихся колебаниях, если  $F(t) = f_1 \cos \omega t + f_2 \cos 2\omega t$ .

б) То же для  $F(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\omega t}$ ,  $a_{-n} = a_n^*$ .

в) Найти среднюю за большой промежуток времени работу силы  $F(t) = f_1 \cos \omega_1 t + f_2 \cos \omega_2 t$  при установившихся колебаниях.

г) Найти полную работу силы  $F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\omega) e^{i\omega t} d\omega$ ,  $\psi(-\omega) = \psi^*(\omega)$ , если осциллятор при  $t \rightarrow -\infty$  покоился.

**5.21.** Гармонический осциллятор находится в поле бегущей волны, которая действует на него с силой  $F(x, t) = f(t - x/V)$ , где  $x$  — отклонение

осциллятора от положения равновесия,  $V$  — скорость волны. Предполагая  $x$  достаточно малым, найти связь между переданными осциллятору энергией  $\Delta E$  и импульсом

$$\Delta p = \int_{-\infty}^{\infty} F(x(t), t) dt,$$

ограничившись приближением, квадратичным по  $F$ , и считая  $f(\pm\infty)=0$ .

## § 6. Малые колебания систем с несколькими степенями свободы

В задачах 6.1–6.21 с помощью общих методов рассматриваются свободные и вынужденные колебания относительно несложных систем (с двумя-тремя степенями свободы). В задачах 6.18–6.21 приведены системы с вырожденными собственными частотами.

Для исследования более сложных систем полезно использовать ортогональность собственных колебаний и свойства симметрии системы. Соответствующие теоремы приведены в задачах 6.22 и 6.39, а иллюстрации их применения, например, в задачах 6.26–6.33 и 6.40–6.45, 6.47, а также в задачах о колебаниях молекул 6.46, 6.48–6.52.

Влияние малого изменения системы на ее движение можно исследовать с помощью метода последовательных приближений — теории возмущений. Общей форме теории возмущений в задачах о малых колебаниях посвящена задача 6.34, конкретным примерам — задачи 6.35, 6.37, 6.41, 6.42, 6.50 б. Полезно отметить, что подобным же образом строится теория возмущений в квантовой механике.

В задачах 6.36–6.38 изучаются колебания систем, в которых действуют «гироскопические» силы (см. также задачи 9.24–9.27).

**6.1.** Найти свободные колебания системы, изображенной на рис. 19, при которых частицы движутся вертикально. Найти нормальные координаты и выразить через них функцию Лагранжа.

**6.2.** Найти установившиеся колебания системы, описанной в предыдущей задаче, если точка подвеса движется в вертикальном направлении по закону  $a(t)$ , где

а)  $a(t) = a \cos \gamma t$ ,

б)  $a(t) = a \left( \frac{t}{\tau} - n \right)$  при  $n\tau \leq t < (n+1)\tau$ .

**6.3 а.** Найти свободные малые колебания плоского двойного маятника (рис. 20 а).



Рис. 19

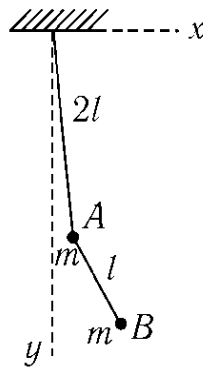


Рис. 20 а

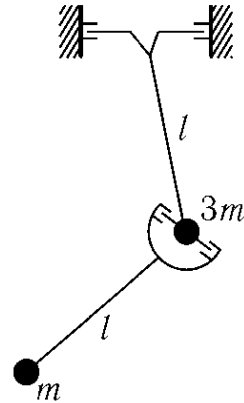


Рис. 20 б

**6.3 б.** Найти нормальные колебания для двойного маятника (рис. 20б), у которого угол между плоскостями колебаний верхней частицы с массой  $3m$  и нижней частицы с массой  $m$  равен  $60^\circ$ . Длина каждого стержня равна  $l$ , их массами пренебречь.

**6.4.** Найти свободные колебания системы, функция Лагранжа которой

$$L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2}{2}.$$

Как выглядит траектория точки с декартовыми координатами  $(x, y)$ ?

**6.5.** Найти нормальные колебания системы, функция Лагранжа которой:

$$\text{а) } L = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{2} - \frac{\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2}{2} + \alpha xy;$$

$$\text{б) } L = \frac{m_1 \dot{x}^2 + m_2 \dot{y}^2}{2} + \beta \dot{x} \dot{y} - \frac{x^2 + y^2}{2}.$$

**6.6.** Найти нормальные колебания в системах связанных контуров:  
а) рис. 21, а; б) рис. 21, б.

**6.7.** Найти нормальные колебания системы частиц, соединенных пружинками (рис. 22). Частицы могут двигаться только вдоль прямой  $AB$ . Найти свободные колебания системы.

**6.8.** Найти свободные колебания системы (рис. 23), если в начальный момент:

а) одна из частиц имеет скорость  $v$ , скорость другой и отклонения обеих частиц от положения равновесия равны нулю;



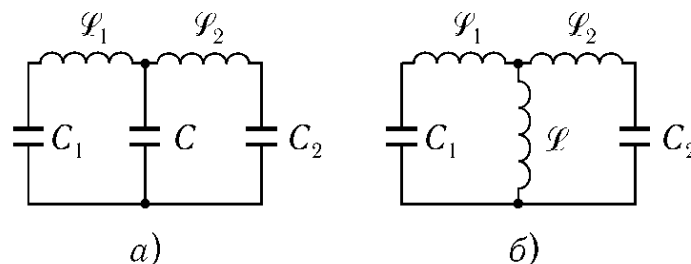


Рис. 21

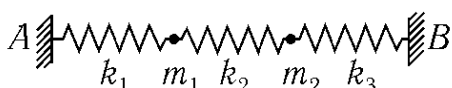


Рис. 22

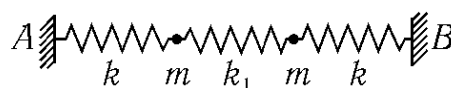


Рис. 23

б) одна из частиц отклонена от положения равновесия на расстояние  $a$ , отклонение другой и скорости обеих равны нулю.

Частицы могут двигаться только вдоль прямой  $AB$ .

**6.9.** Определить поток энергии от одной частицы к другой, используя условия предыдущей задачи.

**6.10.** Найти свободные колебания системы (см. рис. 23), если на каждую из частиц действует сила трения, пропорциональная ее скорости.

**6.11.** Найти свободные малые колебания двойного маятника (рис. 24), если в начальный момент верхний маятник вертикален, нижний отклонен на угол  $\beta \ll 1$ , а скорости их равны нулю. Массы маятников  $M$  и  $m$ , причем  $M \gg m$ .

**6.12.** Найти установившиеся колебания системы (см. рис. 23), если точка  $A$ , в которой закреплен левый конец пружины, движется по закону  $a \cos \gamma t$  в направлении прямой  $AB$ .

**6.13.** Найти установившиеся колебания системы двух частиц на кольце<sup>1</sup> (рис. 25, а), если точка  $A$  движется по кольцу по закону  $a \cos \gamma t$ . Исследовать зависимость амплитуд колебаний от частоты вынуждающей силы.

**6.14.** Три частицы, каждая массы  $m$ , связанные пружинками, могут двигаться по кольцу (рис. 25, б). Найти установившиеся колебания системы, если точка  $A$  движется по кольцу по закону  $a \cos \gamma t$ .

<sup>1</sup> В этой и подобных задачах кольцо предполагается гладким и неподвижным.

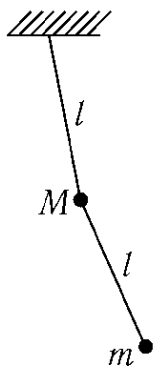


Рис. 24

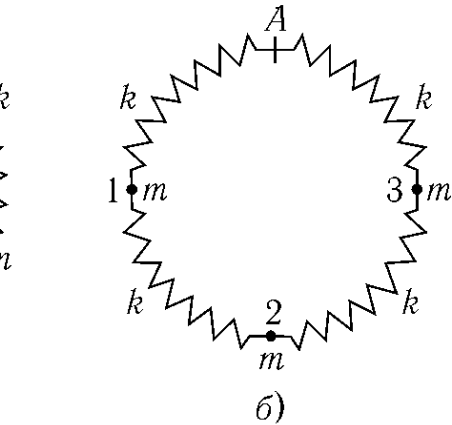
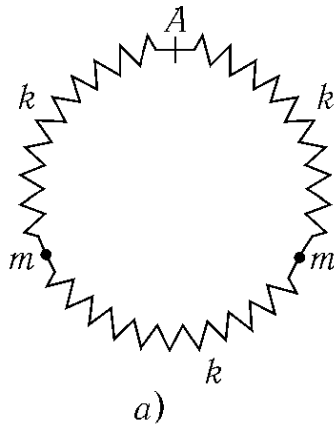


Рис. 25

**6.15.** Найти установившиеся колебания системы, изображенной на рис. 23, если точка  $A$  движется по закону  $a \cos \gamma t$ . На частицы действует сила трения, пропорциональная скорости.

**6.16.** Найти движение системы рис. 22, если в начальный момент частицы покоились в положениях равновесия, а точка  $A$  движется по закону  $a \cos \gamma t$ . Массы частиц равны ( $m_1 = m_2 = m$ ).

**6.17.** Найти установившиеся колебания частицы (рис. 26) под действием однородного переменного поля  $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(t)\mathbf{r}$ , где вектор  $\mathbf{F}(t)$  лежит в плоскости рисунка, в случаях:

а)  $\mathbf{F}(t) = \mathbf{F}_0 \cos \gamma t$ ,

б)  $\mathbf{F}(t)$  вращается с частотой  $\gamma$ , оставаясь постоянным по величине.

**6.18.** Найти нормальные колебания трех одинаковых частиц, связанных одинаковыми пружинками и могущих двигаться по кольцу (рис. 27).

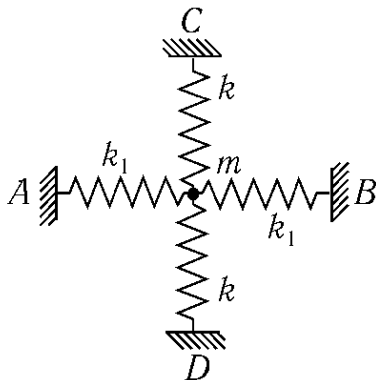


Рис. 26

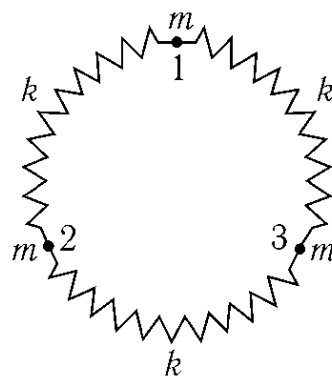


Рис. 27

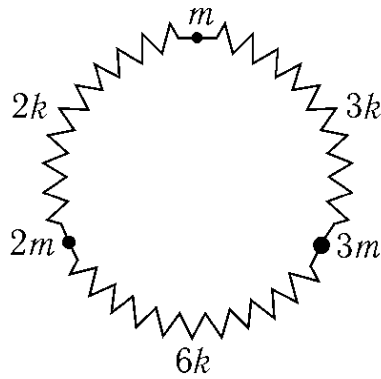


Рис. 28

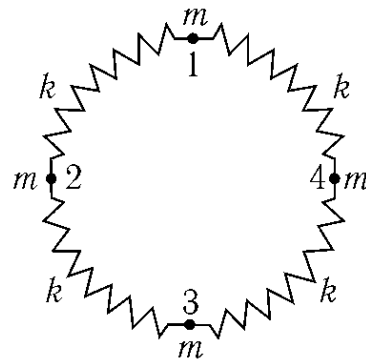


Рис. 29

Определить нормальные координаты, приводящие функцию Лагранжа к диагональному виду.

**6.19.** Найти свободные колебания системы, рассмотренной в предыдущей задаче, если в начальный момент одна из частиц отклонена из положения равновесия. Начальные скорости равны нулю.

**6.20.** Найти нормальные колебания системы трех частиц, которые могут двигаться по кольцу (рис. 28).

**6.21.** Найти нормальные координаты системы четырех частиц на кольце (рис. 29).

**6.22.** Пусть нормальные колебания системы, описываемой функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j),$$

имеют вид

$$x_i^{(l)}(t) = A_i^{(l)} \cos(\omega_l t + \varphi_l).$$

Доказать, что амплитуды, соответствующие колебаниям с различными частотами  $\omega_l$  и  $\omega_s$ , удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{i,j} A_i^{(s)} m_{ij} A_j^{(l)} = \sum_{i,j} A_i^{(s)} k_{ij} A_j^{(l)} = 0.$$

**6.23.** На систему, описываемую функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j),$$

наложена линейная связь

$$\sum_i a_i x_i = 0, \quad a_i = \text{const.}$$

Пусть все собственные частоты системы без связи различны  $\Omega_1 < \Omega_2 < \dots < \Omega_N$ . Доказать, что все собственные частоты системы со связью  $\omega_l$  лежат в промежутках между  $\Omega_l$ :

$$\Omega_1 \leq \omega_1 \leq \Omega_2 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_{N-1} \leq \Omega_N.$$

**6.24.** Установившиеся колебания системы, описываемой функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j) + \sum_i x_i f_i \cos \gamma t,$$

можно представить в виде  $x_i(t) = \sum_l \lambda^{(l)} A_i^{(l)} \cos \gamma t$ . (Почему?) (Обозначения задачи 6.22.)

Выразить коэффициенты  $\lambda^{(l)}$  через  $f_i$  и  $A_i^{(l)}$ .

Исследовать зависимость  $\lambda^{(l)}$  от  $\gamma$ .

Показать, что если для  $s$ -го нормального колебания  $\sum_i f_i A_i^{(s)} = 0$ , то  $\lambda^{(s)} = 0$ .

**6.25.** Система частиц, связанных пружинками, может совершать малые колебания. Пусть к одной из них — частице  $A$  — вдоль направления  $x$  приложена сила  $F = F_0 \cos \gamma t$ , а другая — частица  $B$  — при этом совершает установившиеся колебания, при которых проекция ее отклонения на направление  $x'$  имеет вид  $x'_B = C \cos \gamma t$ .

Показать, что при действии силы  $F$  на частицу  $B$  вдоль оси  $x'$  возникают такие колебания частицы  $A$ , что  $x_A = C \cos \gamma t$  (теорема взаимности).

**6.26.** Найти нормальные колебания системы частиц, которые могут двигаться по кольцу (рис. 30).

**6.27.** Найти нормальные колебания системы четырех частиц на кольце (рис. 31).

**6.28.** а) Найти нормальные колебания системы, изображенной на рис. 32. Все частицы и пружинки одинаковы. Натяжение пружинок в положении равновесия  $f = kl$ , где  $l$  — равновесное расстояние между частицами.

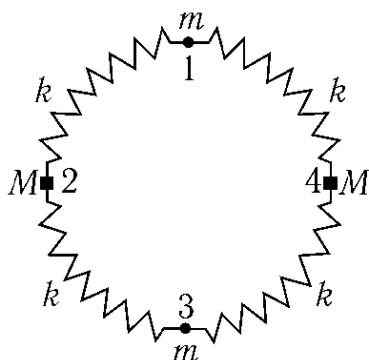


Рис. 30

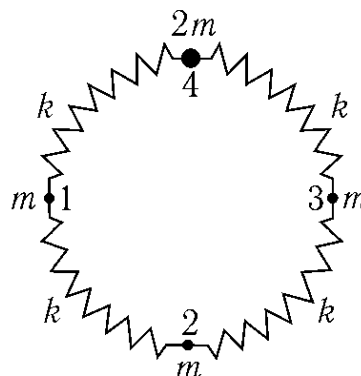


Рис. 31

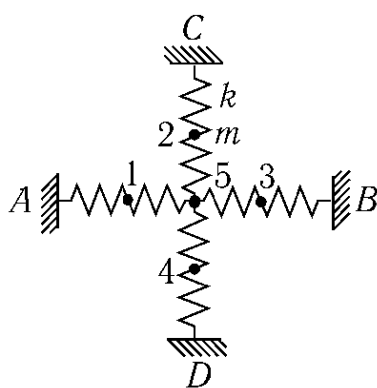


Рис. 32

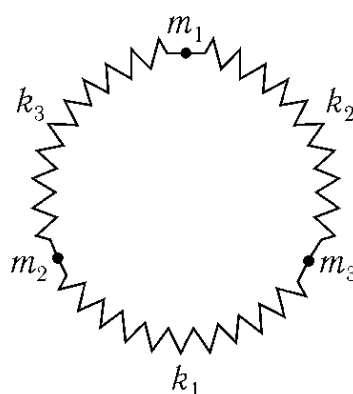


Рис. 33

УКАЗАНИЕ. Некоторые из нормальных колебаний очевидны. Определение остальных можно упростить, используя соотношения задачи 6.22.

б) Найти нормальные колебания системы четырех одинаковых частиц, изображенных на рис. 32 (пятая частица отсутствует, а пружинки в этом месте соединены). Коэффициенты жесткости и натяжения всех пружин одинаковы.

**6.29.** Три частицы, имеющие различные массы  $m_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ), могут двигаться по кольцу (рис. 33). При каких значениях коэффициентов жесткости пружин  $k_i$  в данной системе наступит вырождение частот?

**6.30.** Какие из нормальных колебаний системы рис. 27 мало изменяются при малом изменении системы, состоящем в следующем:

- а) жесткость пружины 1–2 изменена на малую величину  $\delta k$ ;
- б) к частице 3 добавлен малый перегрузок  $\delta m$ ;
- в) к частице 1 добавлен перегрузок  $\delta m_1$ , а к частице 2 —  $\delta m_2$ ?

**6.31.** Для случаев а) и б) предыдущей задачи описать свободные колебания, если в начальный момент частицы 1 и 3 смещены навстречу друг другу на одинаковые расстояния. Начальные скорости частиц равны нулю.

**6.32.** Система рис. 29 имеет вырожденные частоты, поэтому ее нормальные колебания не определены однозначно. Даже малое изменение масс частиц или жесткостей пружинок может привести к *снятию вырождения*.

Найти нормальные колебания системы рис. 29, близкие к нормальным колебаниям системы, которая получится, если:

- а) к первой и второй частицам добавить одинаковые перегрузки;
- б) изменить одинаково жесткость пружинок 1–2 и 3–4;
- в) добавить перегрузок к первой частице.

**6.33.** Частицы 1 и 3 системы, описанной в задаче 6.32 б, в начальный момент отклонены от положения равновесия на одинаковое расстояние навстречу друг другу; начальные скорости всех частиц равны нулю. Описать свободные колебания системы.

**6.34.** Определить, насколько изменяются собственные частоты системы, описываемой функцией Лагранжа

$$L_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j)$$

при небольшом ее изменении:

$$\delta L = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\delta m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \delta k_{ij} x_i x_j).$$

Все собственные частоты исходной системы невырождены.

**6.35.** Найти изменение собственных частот системы рис. 31, если к первой частице добавлен малый перегрузок  $\delta m$ , так что  $\varepsilon = \delta m/m \ll 1$ .

**6.36.** Определить свободные колебания анизотропного заряженного осциллятора с потенциальной энергией

$$U(\mathbf{r}) = \frac{m}{2} (\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)$$

в однородном магнитном поле  $\mathcal{H}$ , параллельном оси  $z$ . Рассмотреть, в частности, подробнее предельные случаи:

- а)  $|\omega_{\mathcal{H}}| \ll |\omega_1 - \omega_2|$ ,

$$\text{б) } |\omega_{\mathcal{H}}| \gg \omega_{1,2},$$

$$\text{в) } \omega_1 = \omega_2 \gg |\omega_{\mathcal{H}}|$$

(здесь  $\omega_{\mathcal{H}} = e\mathcal{H}/mc$ ).

**6.37.** Определить свободные колебания анизотропного гармонического осциллятора с потенциальной энергией

$$U(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)$$

в слабом магнитном поле  $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_x, 0, \mathcal{H}_z)$ , рассматривая влияние магнитного поля как малое возмущение.

**6.38.** Математический маятник является частью электрической цепи (рис. 34). Перпендикулярно к плоскости рисунка приложено постоянное однородное магнитное поле  $\mathcal{H}$ . Найти нормальные колебания системы.

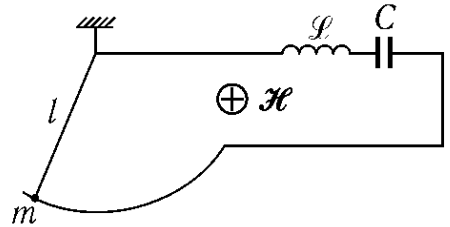


Рис. 34

**6.39.** Пусть система, совершающая малые колебания (а следовательно, и ее функция Лагранжа  $L(x, \dot{x})$ ) не изменяет своего вида при замене

$$x_i \rightarrow \sum_j S_{ij} x_j; \quad \dot{x}_i \rightarrow \sum_j S_{ij} \dot{x}_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, N,$$

причем постоянные коэффициенты  $S_{ij} = S_{ji}$  удовлетворяют условию<sup>1</sup>

$$\sum_j S_{ij} S_{jk} = \delta_{ik}.$$

Доказать, что:

а) если нормальное колебание  $x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi)$  невырожденное, то амплитуды  $A_i$  симметричны или антисимметричны относительно данного преобразования, т. е. или  $\sum_j S_{ij} A_j = +A_i$ , или  $\sum_j S_{ij} A_j = -A_i$ ;

б) если частота вырождена, то можно выбрать нормальные колебания симметричными или антисимметричными;

<sup>1</sup>Это условие означает, что при двукратном преобразовании система возвращается в исходное состояние. Таким свойством обладают, например, отражения относительно плоскости симметрии системы или повороты на  $180^\circ$  относительно оси симметрии.

в) если на систему действует внешняя сила, симметричная (антисимметричная) относительно данного преобразования, то антисимметричные (симметричные) нормальные колебания не возбуждаются. (Это один из примеров так называемых правил отбора.)

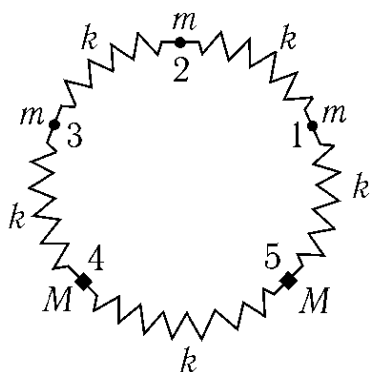


Рис. 35

**6.40.** Используя соображения симметрии, найти нормальные колебания системы рис. 35.

**6.41.** Описать свободные колебания системы (см. рис. 32), если в начальный момент частицы 1 и 4 смещены навстречу друг другу на одинаковые расстояния в горизонтальном направлении, а начальные скорости всех частиц равны нулю. Натяжение пружинок  $f = kl_1$ ;  $l - l_1 \ll l$ , где  $l$  — равновесное расстояние между частицами (ср. с задачей 6.31).

**6.42.** Найти поправки к частотам нормальных колебаний системы четырех частиц на кольце (рис. 29), возникающие при малых изменениях масс — на  $\delta m_1$  для первой и на  $\delta m_2$  для второй частицы.

**6.43 а.** Используя соображения симметрии, определить векторы нормальных колебаний системы частиц (рис. 36 а). Все массы частиц и пружинок одинаковы.

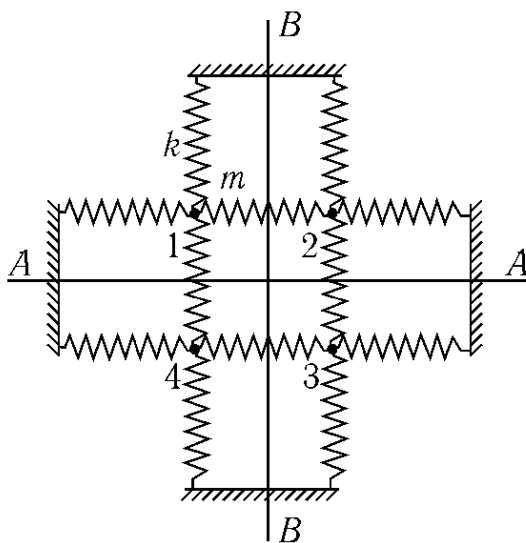


Рис. 36 а

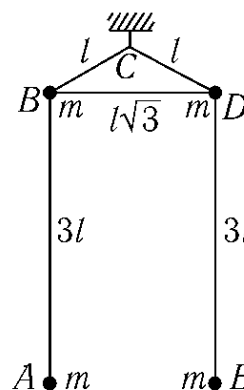


Рис. 36 б



**6.43 б.** Найти собственные колебания «весов» рис. 36 б. Подвес жесткой рамки  $BCD$  осуществлен с помощью короткой гибкой нити, допускающей любые повороты рамки вокруг точки  $C$ . Длины стержней  $BC = CL = l$ ,  $BD = l\sqrt{3}$ , длины нитей  $AB = DE = 3l$ . В точках  $A, B, D, E$  закреплены одинаковые грузики. Массы стержней и нитей не учитывать.

**6.44.** Найти нормальные колебания системы восьми масс, прикрепленных пружинками к неподвижной рамке (рис. 37). Жесткости  $k$ , натяжения  $f$  и длины  $l$  всех пружинки одинаковы.

**6.45.** Рамка, изображенная на рис. 37, колеблется вдоль направления  $AA'$  по закону  $a \cos \gamma t$ . При каких значениях частоты  $\gamma$  возможна резонансная раскачка колебаний?

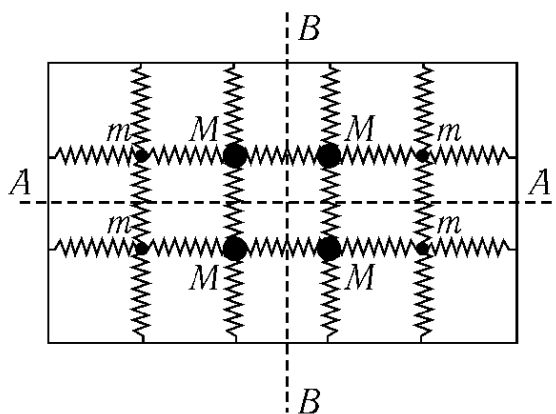


Рис. 37

**6.46.** Найти нормальные колебания линейной симметричной молекулы ацетилена  $C_2H_2$  (рис. 38), предполагая, что потенциальная энергия молекулы зависит как от расстояния между соседними атомами, так и от углов  $HCC$ .

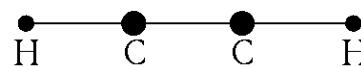


Рис. 38

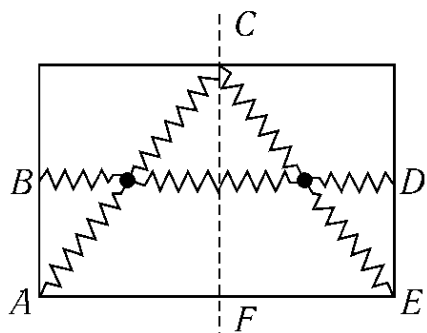


Рис. 39

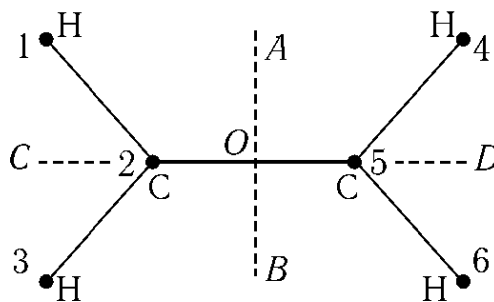


Рис. 40

**6.47.** Две одинаковые частицы прикреплены пружинками к неподвижной рамке (рис. 39). Система симметрична относительно оси  $CF$ . Какие сведения о нормальных колебаниях можно получить, не зная жесткостей и натяжении пружинки?

**6.48.** Классифицировать собственные колебания молекулы этилена  $C_2H_4$  по их свойствам симметрии относительно осей  $AB$  и  $CD$  (рис. 40). В положении равновесия все атомы молекулы расположены в одной плоскости.

**6.49.** Найти нормальные колебания молекулы, имеющей форму равностороннего треугольника. Считать, что потенциальная энергия зависит только от расстояний между атомами (все атомы одинаковы). Момент с точностью до малых первого порядка включительно по амплитуде колебаний равен нулю.

**6.50.** Молекула  $AB_3$  имеет форму правильного треугольника, в центре которого находится атом  $A$ , а в вершинах — атомы  $B$  (такова, например, молекула хлорида бора  $BCl_3$ ).

а) Используя соображения симметрии, определить кратность вырождения собственных частот молекулы.

б) Определить, насколько изменятся частоты колебаний, оставляющих молекулу равносторонним треугольником, и колебаний, выводящих атомы из плоскости, если один из атомов  $B$  (его масса  $m$ ) заменить его изотопом, близким по массе ( $m + \delta m$ ). Масса атома  $A$  равна  $m_A$ .

**6.51.** Используя соображения симметрии, определить кратность вырождения различных собственных частот «молекулы», состоящей из четырех одинаковых «атомов» и имеющей в положении равновесия форму правильного тетраэдра.

**6.52.** Молекула метана  $CH_4$  имеет форму правильного тетраэдра, в вершинах которого расположены атомы водорода, а в центре — атом углерода.

а) Определить кратности вырождения собственных частот молекулы.

б) На скольких различных частотах происходит резонансное возбуждение собственных колебаний молекулы  $CH_4$ , если на нее действует однородное переменное электрическое поле? (Речь идет фактически об электромагнитных волнах инфракрасного диапазона, длина волны которых на несколько порядков больше размеров молекулы.) Учесть, что атомы водорода и углерода имеют заряды противоположных знаков.

Как зависит амплитуда колебаний атома углерода от ориентации молекулы по отношению к электрическому полю?

## § 7. Колебания линейных цепочек

Рассматриваемые в задачах этого параграфа цепочки частиц, соединенных пружинками, представляют собой простейшие модели, используемые в теории твердого тела (см., например, [18]). Электрические аналоги таких цепочек — искусственные линии, находящие применение в радиотехнике (см., например, [16]).

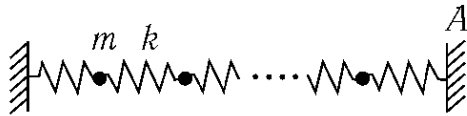


Рис. 41

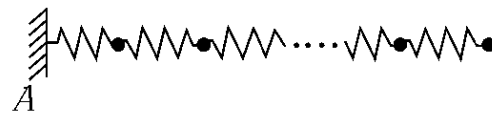


Рис. 42 а

**7.1.** Определить нормальные колебания системы  $N$  одинаковых частиц массы  $m$ , связанных одинаковыми пружинками жесткости  $k$  и могущих двигаться по прямой (рис. 41).

УКАЗАНИЕ. Удобно искать нормальные колебания в виде суперпозиции бегущих волн.

**7.2 а.** То же для системы (рис. 42 а), один из концов которой свободен.

**7.2 б.** Определить нормальные колебания системы  $N$  плоских маятников, подвешенных друг к другу (рис. 42 б). Массы всех маятников одинаковы, длины равны  $Nl$ ,  $(N-1)l$ , ...,  $2l$ ,  $l$ , считая сверху.

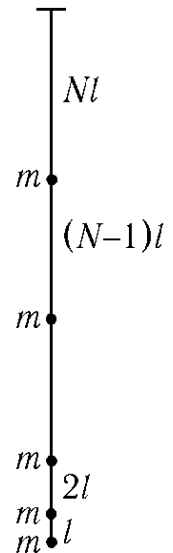


Рис. 42 б

**7.3.** Найти свободные колебания  $N$  частиц, соединенных пружинками и могущих двигаться по кольцу (рис. 43). Массы всех частиц и жесткости пружинок одинаковы. Пусть движение представляет собой бегущую по кольцу волну. Проверить, что поток энергии равен произведению линейной плотности энергии на групповую скорость.

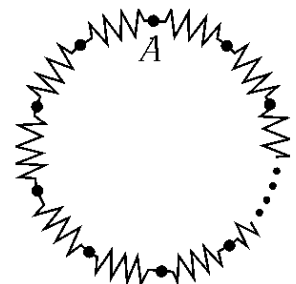


Рис. 43

**7.4.** Определить свободные колебания системы частиц, могущих двигаться по прямой:

а)  $2N$  частиц с массами  $m$  и  $M$ , соединенных одинаковыми пружинками жесткости  $k$  (рис. 44);

б)  $2N$  частиц с массами  $m$ , соединенных пружинками жесткости  $k$  и  $K$  (рис. 45);

в)  $2N + 1$  частиц с массами  $m$ , соединенных пружинками жесткости  $k$  и  $K$  (рис. 46). См. указание к задаче 7.1.



Рис. 44



Рис. 45

**7.5.** а) Найти установившиеся колебания системы, описанной в задаче 7.1, если точка  $A$  движется по закону  $a \cos \gamma t$  (рис. 41).

б) То же для системы, изображенной на рис. 42.

**7.6.** То же для системы рис. 44.

**7.7.** Найти нормальные колебания системы частиц, могущих двигаться по прямой и соединенных пружинками, если

а)  $m_i = m \neq m_N, i = 1, 2, \dots, N - 1$ , жесткости пружинок одинаковы (рис. 47); исследовать случаи  $m_N \gg m$  и  $m_N \ll m$ ;

б)  $k_i = k \neq k_{N+1}, i = 1, 2, \dots, N$ , все частицы одинаковы (рис. 48); исследовать случаи  $k_{N+1} \gg k$  и  $k_{N+1} \ll k$ .

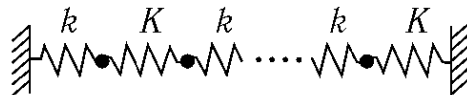


Рис. 46

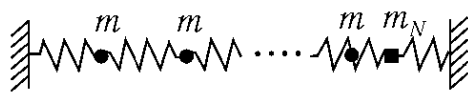


Рис. 47

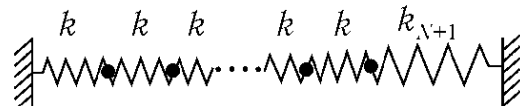


Рис. 48

**7.8.** а)  $N$  маятников связаны пружинками и могут двигаться лишь в вертикальной плоскости, проходящей через горизонтальную линию подвеса (рис. 49). Найти нормальные колебания системы, если все маятники и пружинки одинаковы и в положении равновесия длина пружинки равна расстоянию между точками подвеса соседних маятников.

б) Найти вынужденные колебания системы рис. 49, если на последнюю

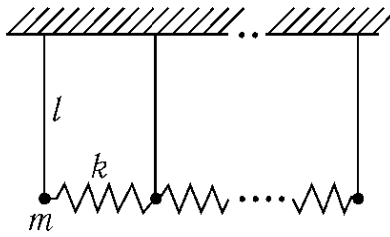


Рис. 49

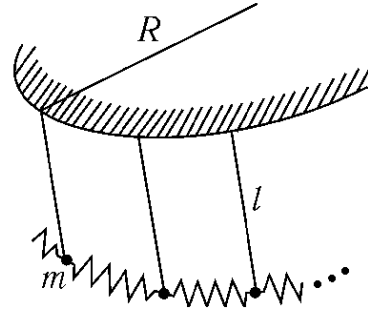


Рис. 50

частицу действует вынуждающая сила  $F(t) = F \sin \gamma t$  параллельно линии подвеса.

в)  $2N$  одинаковых маятников связаны одинаковыми пружинками и могут двигаться лишь в вертикальных плоскостях, перпендикулярных круговой линии подвеса (рис. 50). Расстояние между соседними точками подвеса равно  $a$ . Длина каждой из пружин в нерастянутом состоянии равна  $b$ . Исследовать, как зависит устойчивость малых колебаний вблизи вертикали от значения параметра  $b - a$ . Радиус окружности линии подвеса  $R$  считать достаточно большим, так чтобы малыми величинами  $l/R$ ,  $a/R$ ,  $b/R$  можно было пренебречь.

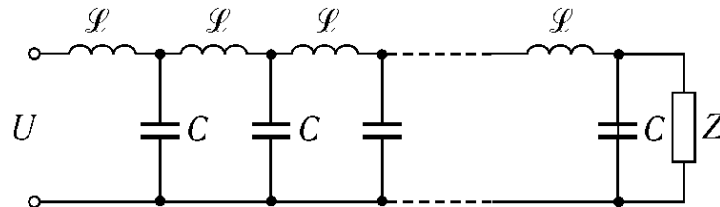


Рис. 51

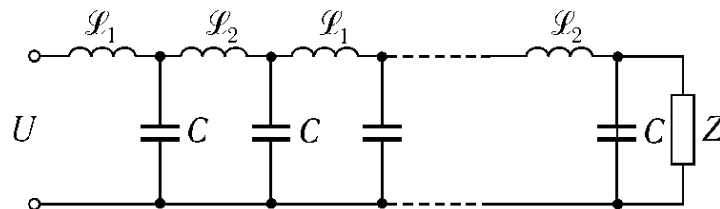


Рис. 52

**7.9.** а) К одному концу искусственной линии рис. 51 подключен источник переменного напряжения  $U \cos \gamma t$ . Какую цепочку  $Z$  из сопротивления  $R$  и индуктивности  $\mathcal{L}_0$  (или емкости?) следует подключить к другому концу линии, чтобы колебания в линии представляли собой бегущую волну,

т. е. чтобы напряжение на каждом из конденсаторов отличалось от напряжения на соседнем только определенным сдвигом фазы?

б) То же для искусственной линии рис. 52.

**7.10.** Упругий стержень можно представить как предельный случай системы  $N$  частиц (см. рис. 41) при условии  $N \rightarrow \infty$ ,  $a \rightarrow 0$ , причем  $Nm = \text{const}$  и  $Na = \text{const}$ , где  $m$  — масса частицы,  $a$  — расстояние между соседними частицами в положении равновесия. Получить уравнения колебаний стержня как предел уравнений движения дискретной системы.

УКАЗАНИЕ. Ввести координату точки стержня  $\xi = na$ , а также величины, получаемые при предельном переходе  $a \rightarrow 0$

$$x(\xi, t) = \lim x_n(t),$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \lim \frac{x_n(t) - x_{n-1}(t)}{a}.$$

**7.11.** Получить уравнение колебаний стержня предыдущей задачи с учетом первой не исчезающей поправки, связанной с конечностью расстояния  $a$  между соседними частицами.

## § 8. Нелинейные колебания

**8.1.** Определить искажение гармонического колебания осциллятора, вызванное наличием ангармонических поправок к потенциальной энергии:

а)  $\delta U(x) = \frac{m\beta x^4}{4}$ ;    б)  $\delta U(x) = \frac{m\alpha x^3}{3}$ .

**8.2.** Определить искажение гармонического колебания осциллятора, вызванное ангармонической поправкой к кинетической энергии

$$\delta T = \frac{m\gamma x \dot{x}^2}{2}.$$

**8.3.** Найти ангармонические поправки к колебаниям маятника, точка подвеса которого движется по окружности (рис. 15).

**8.4.** Найти колебания осциллятора под действием силы  $f_1 \cos \omega_1 t + f_2 \cos \omega_2 t$  с учетом ангармонической поправки  $\delta U(x) = \frac{m\alpha x^3}{3}$ .

**8.5.** Маятник представляет собой грузик массы  $m$ , подвешенный на пружинке жесткости  $k$ . Длина ненапряженной пружинки  $l_0$ . Найти ангармонические поправки к колебаниям маятника.

Воспользоваться декартовыми координатами отклонения грузика от положения равновесия.

**8.6.** Найти амплитуду установившихся колебаний ангармонического осциллятора

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x + \beta x^3 = f \cos \omega t$$

а) в области резонанса  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ ;

б) в области резонанса на утроенной частоте вынуждающей силы  $|3\omega - \omega_0| \ll \omega_0$ .

**8.7.** а) Определить амплитуду и фазу установившегося колебания осциллятора при параметрическом резонансе:

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos 2\omega t)x + \beta x^3 = 0$$

$$(h \ll 1, \quad |\omega - \omega_0| \ll \omega_0, \quad \beta x^2 \ll \omega_0^2).$$

б) Определить амплитуду третьей гармоники установившегося колебания.

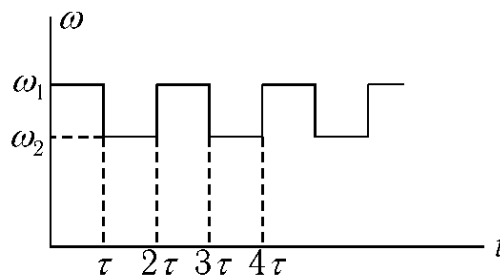


Рис. 53

**8.8.** Определить колебание осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos 2\omega t)x = 0 \quad (h \ll 1, \quad |\omega - \omega_0| \ll \omega_0)$$

а) в области неустойчивости относительно параметрического резонанса;

б) вблизи области неустойчивости.

**8.9.** Частота гармонического осциллятора  $\omega(t)$  меняется по закону, изображенному на рис. 53. Найти области неустойчивости относительно параметрического резонанса.

**8.10.** Определить, как изменяются со временем амплитуды слабо связанных осцилляторов, функция Лагранжа которых

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega^2 x^2 - 4\omega^2 y^2 + 2\alpha x^2 y).$$

**8.11.** Найти частоту малых свободных колебаний маятника, точка подвеса которого совершает вертикальные колебания с большой частотой  $\gamma$  ( $\gamma \gg \sqrt{g/l}$ ).

**8.12.** Определить эффективную потенциальную энергию:

а) частицы массы  $m$ , находящейся в поле

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{a} \cos \omega t|} - \frac{\alpha}{|\mathbf{r} + \mathbf{a} \cos \omega t|} \quad (r \gg a);$$

б) осциллятора, находящегося в поле

$$U(\mathbf{r}) = 2\alpha \frac{\mathbf{a} \mathbf{r} \cos \omega t}{r^3}.$$

**8.13.** Определить движение быстрой частицы, влетающей в поле  $U = A(x^2 - y^2) \sin kz$  под малым углом к оси  $z$  ( $k^2 E \gg A$ ).

**8.14.** Определить скорость смещения центра орбиты заряженной частицы в слабо неоднородном магнитном поле  $\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_y = 0$ ,  $\mathcal{H}_z = \mathcal{H}(x)$ , причем

$$\varepsilon = \frac{\mathcal{H}'(x)}{\mathcal{H}(x)} r \ll 1, \quad r = \frac{m v c}{e \mathcal{H}(x)},$$

где  $r$  — радиус орбиты.

**8.15.** Задача представляет собой механическую модель фазовых переходов второго рода.

Железный шарик массы  $m$  может колебаться вдоль оси  $y$  на пружинке, потенциальная энергия которой имеет вид  $U(y) = -Cy^2 + By^4$ .<sup>1</sup> С помощью

---

<sup>1</sup>Такова, например, потенциальная энергия системы, изображенной на рис. 13, если шарик может двигаться лишь в направлении оси  $y$ , перпендикулярной к линии  $AB$ , и длина нерастянутой пружинки  $l_0$  больше  $l$ . В этом случае при  $|y| \ll l$  имеем

$$C = k(l_0 - l)/l, \quad B = kl_0/4l^3.$$



электромагнита возбуждают колебания шарика по закону  $y_0 \cos \gamma t$ , причем  $\gamma$  много больше частоты его собственных колебаний<sup>1</sup>.

Найти частоту малых собственных колебаний шарика в зависимости от параметра  $T = y_0^2$ .

## § 9. Движение твердого тела. Неинерциальные системы отсчета

**9.1.** В вершинах квадрата со стороной  $2a$  расположены массы  $m$  и  $M$  (рис. 54, а). Найти компоненты тензора инерции относительно:

- осей  $x, y, z$ ;
- осей  $x', y'$ , совпадающих с диагоналями квадрата, и  $z$ .

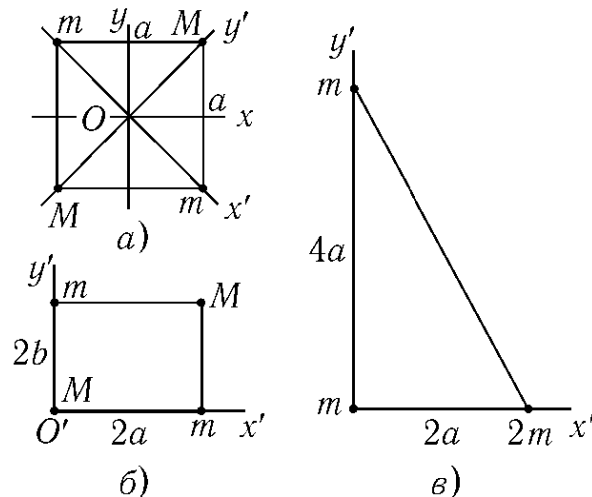


Рис. 54

**9.2.** Найти главные оси инерции и главные моменты инерции следующих систем:

- массы  $m$  и  $M$  расположены в вершинах прямоугольника со сторонами  $2a$  и  $2b$  (рис. 54, б).
- массы  $m$  и  $2m$  расположены в вершинах прямоугольного треугольника с катетами  $2a$  и  $4a$  (рис. 54, в).

<sup>1</sup>При действии высокочастотной силы  $f(t) = -(y_0 \gamma^2 / m) \cos \gamma t$  в пределе  $\gamma \rightarrow \infty$  амплитуда вынужденных колебаний стремится к  $y_0$ , поправки к амплитуде и высшие гармоники имеют малость  $\sim \gamma^{-2}$ .

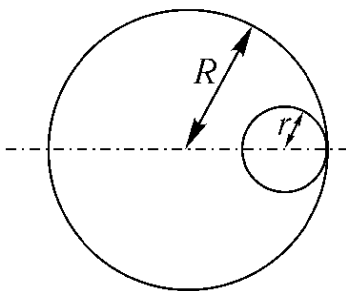


Рис. 55

**9.3.** Выразить момент инерции  $I_n$  относительно оси, параллельной единичному вектору  $\mathbf{n}$  и проходящей через центр инерции тела, через компоненты тензора инерции.

**9.4.** Найти главные моменты инерции шара радиуса  $R$ , имеющего внутри полость в форме шара радиуса  $r$  (рис. 55).

**9.5.** Выразить компоненты тензора квадрупольного момента масс

$$D_{ik} = \int (3x_i x_k - r^2 \delta_{ik}) \rho dV$$

( $\rho$  — плотность) через компоненты тензора инерции  $I_{ik}$ .

**9.6.** Найти частоту малых колебаний однородного полушара, находящегося на гладкой горизонтальной поверхности в поле тяжести.

**9.7.** На покоившуюся гантельку, состоящую из пары касающихся одинаковых шариков, налетает третий такой же. Скорость его  $\mathbf{V}$  перпендикулярна линии центров гантельки и направлена к центру одного из ее шариков. Найти скорость шарика и гантельки после столкновения. Удар упругий.

**9.8.** Какова станет продолжительность суток, когда они сравняются (за счет действия приливных сил) с месяцем (т. е. период обращения Земли вокруг оси станет равным периоду обращения Луны вокруг Земли). Принять для простоты, что ось вращения Земли перпендикулярна плоскости орбит Земли и Луны. Для численных оценок считать Землю однородным шаром радиусом  $a = 6,4$  тыс. км и массой  $M$ , в 81 раз большей массы Луны  $m$ ; расстояние от Земли до Луны  $R = 380$  тыс. км.

**9.9.** Два одинаковых однородных шара, вращающихся с одинаковыми по величине угловыми скоростями  $\omega$ , медленно сблизившись, жестко состыковываются друг с другом. Определить движение образовавшегося тела. Найти, какая часть начальной кинетической энергии переходит в тепло. До состыковки угловые скорости шаров были направлены:

- а) перпендикулярно линии центров и параллельно друг другу;
- б) одна — вдоль линии центров, другая — перпендикулярно.

**9.10 а.** Однородный шар радиуса  $r$  и массы  $m$  катится, не проскальзывая, по горизонтальной плоскости со скоростью  $v$ . В момент, когда он касается другого такого же шара, лежавшего неподвижно, шары жестко скрепляются (рис. 56 а). Плоскость абсолютно гладкая (после скрепления шары свободно скользят по ней).

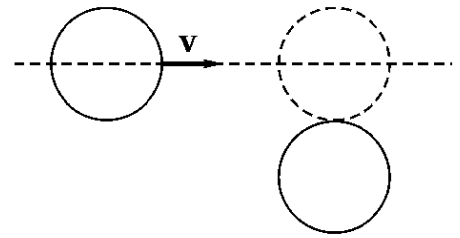


Рис. 56 а

С какими силами действуют на плоскость шары? Ускорение свободного падения достаточно велико, так что шары все время касаются плоскости.

**9.10 б.** В двух противоположных вершинах  $A$  и  $C'$  однородного прямоугольного параллелепипеда находятся шаровые шарниры, так что он может свободно вращаться вокруг диагонали  $AC'$  (рис. 56 б). Найти силы, действующие на шарниры при вращении параллелепипеда с угловой скоростью  $\Omega$ .

**9.11.** На однородный эллипсоид вращения (полуоси  $a = b$ ,  $c$ ) налетает частица, движущаяся параллельно оси  $Oy$  со скоростью  $v$  и прицельными параметрами  $\rho_1$ ,  $\rho_2$  (рис. 57), и прилипает к нему. Описать движение эллипсоида, предполагая, что его масса много больше массы налетающей частицы.

**9.12.** Гирокомпас представляет собой быстро вращающийся диск, ось которого может свободно поворачиваться в горизонтальной плоскости (рис. 58). Исследовать движение гирокомпаса на широте  $\alpha$ . Угловая скорость вращения Земли  $\Omega$ .

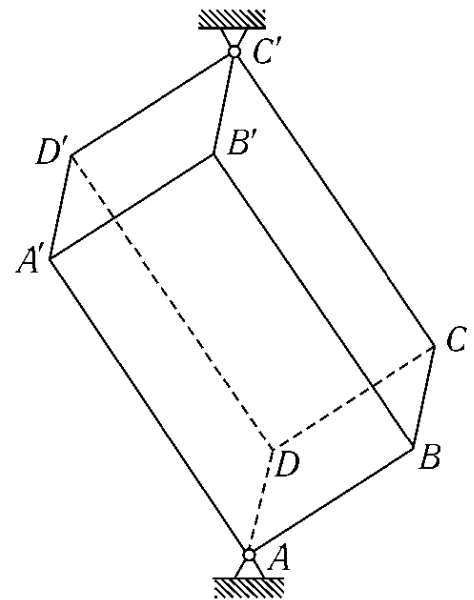


Рис. 56 б

**9.13.** Волчок с неподвижной точкой опоры  $O$ , вращавшийся с угловой скоростью  $\Omega$  вокруг своей оси (скорость прецессии считаем малой), касается горизонтальной плоскости краем диска (рис. 59).

Найти угловую скорость волчка, когда проскальзывание диска прекратится. В момент касания нутаций не было.

**9.14.** В поле тяготения неподвижной точечной массы  $M$  движется однородное тело массы  $m$ , имеющее форму эллипсоида вращения. Найти функцию Лагранжа системы, выбрав в качестве переменных сферические

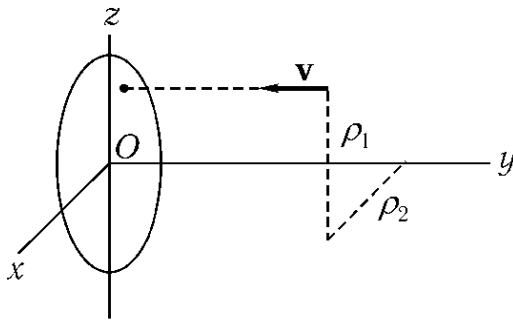


Рис. 57

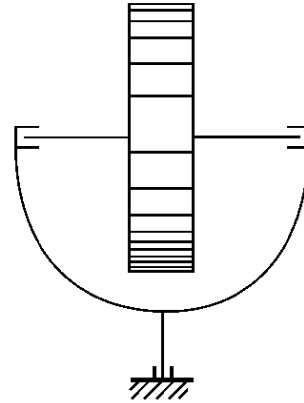


Рис. 58

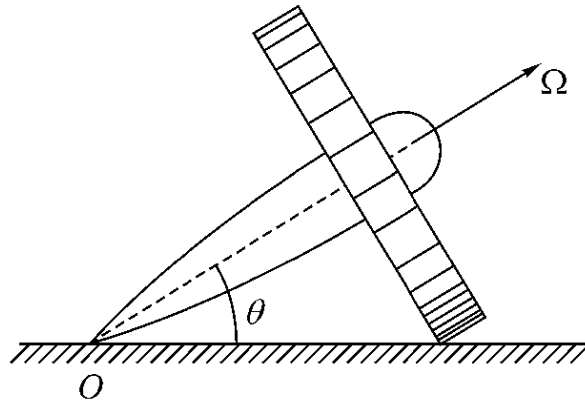


Рис. 59

координаты центра тяжести и углы Эйлера. Размеры тела малы по сравнению с расстоянием до центра поля.

УКАЗАНИЕ. Потенциальная энергия системы приближенно равна

$$U(\mathbf{R}) = m\varphi(R) + \frac{1}{6} \sum_{i,k=1}^3 D_{ik} \frac{\partial^2 \varphi(R)}{\partial X_i \partial X_k},$$

где  $\mathbf{R} = (X_1, X_2, X_3)$  — радиус-вектор центра эллипсоида,  $D_{ik}$  — тензор квадрупольного момента масс (см. задачу 9.5),  $\varphi(R) = -\gamma M/R$  — потенциал поля тяготения (ср. [2], § 42).

**9.15.** Определить угловую скорость прецессии земной оси под влиянием притяжения Солнца и Луны. Наклон земной оси к плоскости орбит Земли и Луны равен  $67^\circ$ . Для простоты Землю считать однородным эллипсоидом вращения, полярная полуось которого  $c$  меньше экваториальной полуоси  $a$ , причем  $\frac{a-c}{a} \approx \frac{1}{300}$ .

**9.16.** Составить уравнения движения для проекций момента на подвижные оси координат, выбранные по осям инерции. Проинтегрировать эти уравнения для свободного движения симметрического волчка.

**9.17.** Исследовать устойчивость вращения ассиметрического волчка относительно главных осей инерции с помощью уравнений Эйлера.

**9.18.** Однородный шар радиуса  $a$  движется по внутренней поверхности вертикального цилиндра радиуса  $b$ , не проскальзывая. Найти закон движения шара.

**9.19.** а) Плоский симметричный относительно своей оси диск катится по гладкой горизонтальной плоскости (трение отсутствует). Определить закон движения диска (в квадратурах).

Исследовать подробнее закон движения в следующих случаях.

Определить, при каких условиях угол наклона диска к плоскости остается постоянным.

Диск катится так, что его ось сохраняет определенное (горизонтальное) направление. Определить, при какой угловой скорости вращения вокруг этой оси такое движение устойчиво.

б) Диск катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости. Найти уравнения движения и ответить на те же вопросы, что и в пункте а).

в) То же для диска, который катится по горизонтальной плоскости, не проскальзывая и не проворачиваясь вокруг вертикальной оси<sup>1</sup>.

г) Находящийся на наклонной плоскости диск вращается без проскальзывания вокруг своего диаметра, перпендикулярного этой плоскости. Найти смещение диска за большое время. Наклонная плоскость составляет малый угол  $\alpha$  с горизонтальной.

**9.20.** а) Найти в квадратурах закон движения неоднородного шара, который движется без трения по горизонтальной плоскости. Распределение плотности симметрично относительно оси, проходящей через центр масс и геометрический центр шара.

Исследовать влияние малых сил трения на движение шара в случае, когда в отсутствие трения шар двигался бы так, что угол между осью симметрии и вертикалью был бы постоянным.

---

<sup>1</sup>Это означает, что сцепление диска с плоскостью в «точке» соприкосновения таково, что площадка в месте контакта не скользит по плоскости и не проворачивается. Потерями энергии на трение качения пренебречь.

б) Найти уравнения движения описанного шара, если он катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости.

**9.21.** Найти отклонения к востоку и к югу от вертикали свободно падающего с высоты  $h$  тела. Начальная скорость тела равна нулю.

**9.22.<sup>1</sup>** Сосуд, частично заполненный постепенно затвердевающей эпоксидной смолой, приводят во вращение с угловой скоростью  $\omega_2$  вокруг оси  $AB$ , которая в свою очередь вращается вокруг неподвижной оси  $CD$  с угловой скоростью  $\omega_1$  (рис. 60). Какую форму примет, затвердев, поверхность смолы?

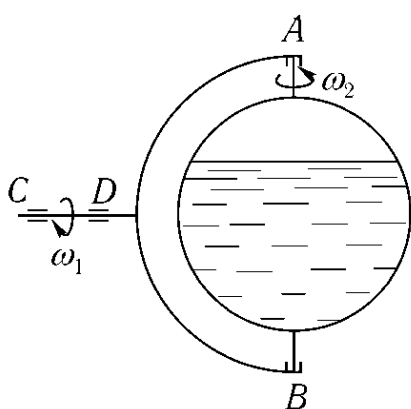


Рис. 60

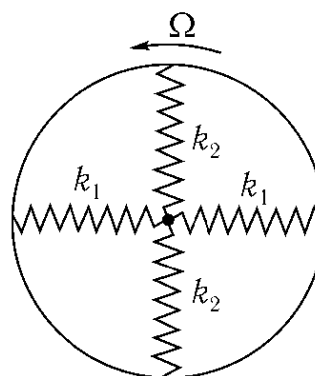


Рис. 61

**9.23.** Частица движется в центральном поле  $U(r)$ . Найти уравнение траектории и закон движения в системе координат, равномерно вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ , параллельной моменту импульса  $M$ .

**9.24.** Найти малые колебания частицы  $m$ , прикрепленной пружинками жесткости  $k_1$  и  $k_2$  к рамке, вращающейся в своей плоскости с угловой скоростью  $\Omega$  (рис. 61). Частица может двигаться в плоскости рамки.

**9.25.** Гладкий параболоид  $2z = \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}$  вращается вокруг вертикальной оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ . При каком значении  $\omega$  нижнее положение неустойчиво для частицы, находящейся внутри параболоида? Ускорение силы тяжести  $g = (0, 0, -g)$ .

<sup>1</sup>Задача В. С. Кузьмина и М. П. Перельройзена.

**9.26.** Рамка с частицей массы  $m$ , закрепленной на пружинках (длины которых  $l$ , коэффициенты жесткости  $k$  и натяжения при неподвижной рамке  $f$ ) вращается с угловой скоростью  $\gamma$  вокруг оси  $z$ , смещенной на расстояние  $a$  от центра рамки (рис. 62).

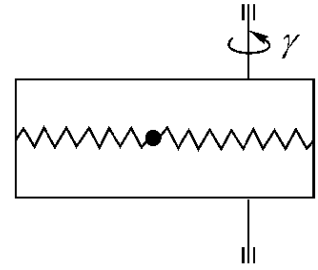


Рис. 62

Определить равновесное расстояние частицы от оси и исследовать его устойчивость.

Рассмотреть следующие случаи:

- а) частица может двигаться только вдоль пружин;
- б) возможны любые смещения частицы.

**9.27.** Две звезды движутся по окружностям вокруг их центра масс. В системе отсчета, в которой звезды неподвижны, найти такие точки, в которых помещенное там легкое тело также остается неподвижным. Исследовать устойчивость этих «положений равновесия». (Ограничиться точками, не лежащими на прямой, соединяющей звезды.)

**9.28.** Определить нормальные колебания трехатомной молекулы, описанной в задаче 6.49, если ее момент импульса  $M$  не равен нулю. Угловая скорость вращения молекулы  $\Omega \ll \sqrt{k/m}$ ; здесь  $k$  — коэффициент жесткости связи. Момент импульса перпендикулярен к плоскости молекулы.

## § 10. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона

**10.1.** Пусть функция Гамильтона  $H$  системы частиц не изменяется при бесконечно малом переносе (повороте). Вывести отсюда закон сохранения импульса (момента импульса).

**10.2.** Найти функцию Гамильтона свободно движущегося симметрического волчка, выбрав в качестве координат эйлеровы углы  $\theta, \varphi, \psi$ .

**10.3.** Определить функцию Гамильтона ангармонического осциллятора, функция Лагранжа которого

$$L = \frac{\dot{x}^2}{2} - \frac{\omega^2 x^2}{2} - \alpha x^3 + \beta x \dot{x}^2.$$

**10.4 а.** Найти закон движения частицы, функция Гамильтона которой

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \lambda \left( \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} \right)^2.$$

**10.4 б.** То же для  $H(x, p) = A\sqrt{p} - xF$ .

**10.5.** Найти уравнения движения частицы, функция Гамильтона которой  $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{c|\mathbf{p}|}{n(\mathbf{r})}$  (луч света).

Найти траекторию, если  $n(\mathbf{r}) = ax$ .

**10.6.** Найти функцию Лагранжа, если функция Гамильтона равна

а)  $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \mathbf{p}\mathbf{a}$  ( $\mathbf{a} = \text{const}$ ); б)  $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = \frac{c|\mathbf{p}|}{n(\mathbf{r})}$ .

**10.7.** Найти закон движения заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле  $\mathcal{H}$ , решая уравнения Гамильтона. Векторный потенциал выбрать в виде

$$A_y = \mathcal{H}x, \quad A_x = A_z = 0.$$

**10.8.** Исследовать качественно движение заряженной частицы в неоднородном магнитном поле, описываемом векторным потенциалом  $\mathbf{A} = (0, \hbar x^2, 0)$ . Сравнить с дрейфовым приближением.

**10.9.** Показать, что задача о движении двух частиц с противоположными зарядами ( $e$  и  $-e$ ) в однородном магнитном поле приводится к задаче о движении одной частицы в заданных потенциальном и магнитном полях [30].

В задачах 10.9–10.13 идет речь о движении электронов в металле или полупроводнике. Электроны в твердом теле представляют собой систему частиц, взаимодействующих как друг с другом, так и с ионами, образующими кристаллическую решетку. Их движение описывается квантовой механикой. В теории твердого тела часто удается привести задачу о движении многих взаимодействующих частиц, составляющих тело, к задачам о движении отдельных свободных частиц (называемых квазичастицами — электронами или дырками в зависимости от знака заряда), имеющих, однако, сложную зависимость энергии от импульса  $\varepsilon(\mathbf{p})$  («закон дисперсии»)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Например, для дырок в кристаллах германия и кремния

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \left[ Ap^2 \pm \sqrt{B^2 p^4 + C^2 (p_x^2 p_y^2 + p_x^2 p_z^2 + p_y^2 p_z^2)} \right],$$

где оси координат выбраны в соответствии с симметрией кристаллов,  $m$  — масса электрона, а константы  $A$ ,  $B$ ,  $C$  имеют следующие значения:

	$A$	$B$	$C$
Ge	−13,1	8,3	12,5
Si	−4,0	1,1	4,1



Во многих случаях оказывается возможным рассматривать движение квазичастиц с помощью классической механики. Функция  $\varepsilon(\mathbf{p})$  является периодической функцией с периодом, равным периоду так называемой обратной решетки<sup>2</sup>. В остальном рассматриваемые далее зависимости  $\varepsilon(\mathbf{p})$  можно считать произвольными.

**10.10.** Известно, что  $\varepsilon(\mathbf{p})$  является периодической функцией  $\mathbf{p}$  с периодом, равным периоду обратной решетки, умноженным на  $2\pi\hbar$  (например, для кубической решетки с периодом  $a$  период  $\varepsilon(\mathbf{p})$  равен  $2\pi\hbar/a$ ).

Определить закон движения электрона в однородном электрическом поле  $\mathcal{E}$ .

УКАЗАНИЕ К ЗАДАЧАМ 10.11 – 10.13. В этих задачах удобно, кроме обобщенного импульса  $\mathbf{P}$ , ввести кинематический импульс  $\mathbf{p} = \mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ , где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал магнитного поля.

**10.11.** Полагая функцию Гамильтона

$$H(\mathbf{P}, \mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\mathbf{A}) + e\varphi,$$

получить уравнения движения (заряд электрона  $e < 0$ ).

**10.12.** а) Найти интегралы движения электрона в твердом теле в однородном магнитном поле. Как выглядит «траектория» в импульсном пространстве?

б) Доказать, что проекция траектории электрона в однородном магнитном поле на плоскость, перпендикулярную к  $\mathcal{H}$ , в обычном пространстве получается из траектории в импульсном пространстве поворотом и изменением масштаба.

**10.13.** Выразить период обращения электрона в однородном магнитном поле через площадь  $S(E, p_{\mathcal{H}})$  сечения поверхности в  $\varepsilon(\mathbf{p}) = E$  в импульсном пространстве плоскостью  $p_{\mathcal{H}} = \mathbf{p} \frac{\mathcal{H}}{\mathcal{H}} = \text{const}$ .

**10.14.** Вычислить скобки Пуассона:

- а)  $\{M_i, x_j\}, \{M_i, p_j\}, \{M_i, M_j\}$ ;
- б)  $\{\mathbf{a}\mathbf{p}, \mathbf{b}\mathbf{r}\}, \{\mathbf{a}\mathbf{M}, \mathbf{b}\mathbf{r}\}, \{\mathbf{a}\mathbf{M}, \mathbf{b}\mathbf{M}\}$ ;
- в)  $\{\mathbf{M}, \mathbf{r}\mathbf{p}\}, \{\mathbf{p}, r^n\}, \{\mathbf{p}, (\mathbf{a}\mathbf{r})^2\}$ .

Здесь  $x_i, p_i, M_i$  — декартовы компоненты векторов,  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  — постоянные векторы.

---

<sup>2</sup>Например, для кристалла, решетка которого обладает в направлении оси  $x$  наименьшим периодом  $a$ , имеем  $\varepsilon(p_x, p_y, p_z) = \varepsilon\left(p_x + \frac{2\pi\hbar}{a}, p_y, p_z\right)$ , где  $\hbar$  — постоянная Планка.

**10.15.** Вычислить  $\{A_i, A_j\}$ , где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4}(x^2 + p_x^2 - y^2 - p_y^2), & A_2 &= \frac{1}{2}(xy + p_x p_y), \\ A_3 &= \frac{1}{2}(xp_y - yp_x), & A_4 &= x^2 + y^2 + p_x^2 + p_y^2. \end{aligned}$$

**10.16.** Вычислить  $\{M_i, \Lambda_{jk}\}$ ,  $\{\Lambda_{jk}, \Lambda_{il}\}$ , где  $\Lambda_{ik} = x_i x_k + p_i p_k$ .

**10.17.** Показать, что  $\{M_z, \varphi\} = 0$ , где  $\varphi$  — любая скалярная функция координат и импульсов частицы.

Показать, что  $\{M_z, \mathbf{f}\} = [\mathbf{n}\mathbf{f}]$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор в направлении оси  $z$ , а  $\mathbf{f}$  — векторная функция координат и импульсов частицы, т. е.  $\mathbf{f} = \mathbf{r}\varphi_1 + \mathbf{p}\varphi_2 + [\mathbf{r}\mathbf{p}]\varphi_3$  и  $\varphi_i = \varphi_i(r^2, p^2, (\mathbf{r}\mathbf{p}))$ .

**10.18.** Вычислить скобки Пуассона  $\{\mathbf{f}, \mathbf{a}\mathbf{M}\}$ ,  $\{\mathbf{f}\mathbf{M}, \mathbf{l}\mathbf{M}\}$ , где  $\mathbf{a} = \text{const}$ , а  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{l}$  — векторные функции  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$ .

**10.19.** Найти  $\{M_\zeta, M_\xi\}$ , где  $M_\zeta, M_\xi$  — проекции момента импульса на оси  $\zeta, \xi$  декартовых координат, жестко связанных с вращающимся твердым телом.

**10.20.** Составить уравнения движения проекции  $M_\alpha$  момента импульса на оси, связанные со свободно вращающимся телом. Функция Гамильтона

$$H = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (I^{-1})_{\alpha\beta} M_\alpha M_\beta.$$

**10.21.** В этой задаче рассматривается модель электронного и ядерного парамагнитного резонанса (см. [18], гл. IX). Функция Гамильтона намагниченного шара в однородном магнитном поле  $\mathcal{H}$  имеет вид

$$H = \frac{M^2}{2I} - \gamma \mathbf{M} \mathcal{H},$$

где  $I$  — момент инерции шара,  $\gamma$  — гиромагнитное отношение.

Составить уравнения движения вектора момента импульса  $\mathbf{M}$  и найти закон его движения в случаях:

а)  $\mathcal{H} = (0, 0, \mathcal{H}_0)$ ;

б)  $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1 \cos \omega t, \mathcal{H}_1 \sin \omega t, \mathcal{H}_0)$  и в начальный момент  $\mathbf{M} = (0, 0, M_0)$ .

**10.22.** Найти  $\{v_i, v_j\}$  для частицы в магнитном поле.

**10.23.** Доказать, что значение любой функции координат и импульсов системы  $f(p(t), q(t))$  выражается через значения  $p$  и  $q$  в момент  $t = 0$  формулой

$$f(p(t), q(t)) = f + \frac{t}{1!} \{H, f\} + \frac{t^2}{2!} \{H, \{H, f\}\} + \dots,$$

где

$$f = f(p(0), q(0)), \quad \text{а} \quad H = H(p(0), q(0))$$

— функция Гамильтона. (Ряд предполагается сходящимся.)

Вычислить с помощью этой формулы  $p(t), q(t), p^2(t), q^2(t)$  для:

- а) частицы в однородном поле;
- б) осциллятора.

**10.24.** Доказать равенства

- а)  $\{f(p_1, q_1), \Phi(\varphi(p_1, q_1), p_2, q_2, \dots)\} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \{f, \varphi\};$
- б)  $\{f(p_1, q_1, p_2, q_2), \Phi(\varphi(p_1, q_1, p_2, q_2), p_3, q_3, \dots)\} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \{f, \varphi\};$
- в)  $\{f(p, q), \Phi(\varphi_1(p, q), \varphi_2(p, q), \dots)\} = \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i} \{f, \varphi_i\}.$

**10.25.** а) Пусть функция Гамильтона зависит от переменных  $q_1, p_1$  лишь через посредство функции  $f(q_1, p_1)$

$$H = H(f(q_1, p_1), q_2, p_2, \dots, q_N, p_N).$$

Доказать, что  $f(q_1, p_1)$  есть интеграл движения.

б) Найти интегралы движения частицы в поле  $U = \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^3}$  (использовать сферические координаты).

**10.26.** Как известно, для частицы в поле  $U = -\alpha/r$  существует интеграл движения

$$\mathbf{A} = [\mathbf{v}, \mathbf{M}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r}.$$

а) Вычислить скобки Пуассона  $\{A_i, A_j\}, \{A_i, M_j\}.$

б) В случае финитного движения ( $E < 0$ ) для векторов  $\mathbf{J}_{1,2} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{M} \pm \sqrt{\frac{m}{-2H}} \mathbf{A} \right)$  вычислить скобки Пуассона

$$\{H, \mathbf{J}_{1,2}\}, \quad \{J_{1i}, J_{2j}\}, \quad \{J_{1i}, J_{1j}\}, \quad \{J_{2i}, J_{2j}\}$$

и сравнить их со скобками Пуассона для компонент момента импульса  $\mathbf{M}$ . Выразить функцию Гамильтона  $H$  через  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$ .

## § 11. Канонические преобразования

**11.1.** Найти каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией:

$$а) F(q, Q, t) = \frac{1}{2}m\omega(t)q^2 \operatorname{ctg} Q.$$

Записать уравнения движения в переменных  $Q$  и  $P$  для гармонического осциллятора с частотой  $\omega(t)$ .

$$б) F(q, Q, t) = \frac{1}{2}m\omega \left[ q - \frac{F(t)}{m\omega^2} \right]^2 \operatorname{ctg} Q.$$

Записать уравнения движения в переменных  $Q$  и  $P$  для гармонического осциллятора, на который действует внешняя сила  $F(t)$ .

**11.2.** Найти производящую функцию вида  $\Psi(p, Q)$ , приводящую к тому же каноническому преобразованию, что и  $F(q, P) = q^2 e^P$ .

**11.3.** Какому условию должна удовлетворять функция  $\Phi(q, P)$ , чтобы ее можно было использовать в качестве производящей функции канонического преобразования?

Рассмотреть, в частности, пример

$$\Phi(q, P) = q^2 + P^2.$$

**11.4.** Показать, что для системы с одной степенью свободы поворот в фазовом пространстве  $(q, p)$  является каноническим преобразованием.

**11.5.** Рассматриваются малые колебания ангармонического осциллятора, функция Гамильтона которого

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 + \beta x p^2$$

и  $|\alpha x| \ll \omega^2$ ,  $|\beta x| \ll 1$ . В каноническом преобразовании, задаваемом производящей функцией  $\Phi = xP + ax^2P + bP^3$ , подобрать параметры  $a$  и  $b$  так, чтобы новая функция Гамильтона с точностью до членов первого порядка по  $\alpha\omega^{-2}Q$ ,  $\beta Q$  включительно не содержала ангармонических членов, и найти  $x(t)$ .

**11.6.** В каноническом преобразовании, задаваемом производящей функцией  $\Phi = xP + ax^3P + bxP^3$ , подобрать параметры  $a$  и  $b$  так, чтобы малые колебания ангармонического осциллятора  $H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega_0^2 x^2}{2} + \beta x^4$

в новых переменных  $Q, P$  сводились к гармоническим. Членами второго порядка по  $\beta\omega^{-2}Q^2$  в новой функции Гамильтона пренебречь.

**11.7.** Показать, что преобразование

$$\begin{aligned}x &= X \cos \lambda + \frac{P_y}{m\omega} \sin \lambda, & y &= Y \cos \lambda + \frac{P_x}{m\omega} \sin \lambda, \\p_y &= -m\omega X \sin \lambda + P_y \cos \lambda, & p_x &= -m\omega Y \sin \lambda + P_x \cos \lambda\end{aligned}$$

является каноническим. Найти новую функцию Гамильтона,  $H'(P, Q)$ , если

$$H(p, q) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$$

(ср. с задачей 11.17). Описать движение двумерного осциллятора при  $Y = P_y = 0$ .

**11.8.** Используя преобразование предыдущей задачи, привести функцию Гамильтона изотропного гармонического осциллятора в магнитном поле, заданном векторным потенциалом  $\mathbf{A} = (0, \mathcal{H}x, 0)$ , к сумме квадратов и найти закон его движения.

**11.9.** С помощью канонического преобразования привести к диагональному виду функцию Гамильтона анизотропного заряженного осциллятора с потенциальной энергией  $U(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)$ , находящегося в однородном постоянном магнитном поле, заданное векторным потенциалом  $\mathbf{A} = (0, \mathcal{H}x, 0)$ .

**11.10.** Применяя каноническое преобразование задачи 11.7 к парам нормальных координат, соответствующих стоячим волнам системы частиц на кольце (см. задачу 7.3), получить координаты, соответствующих бегущим волнам.

**11.11.** Показать, что преобразование

$$\begin{aligned}x &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2), \\p_x &= \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(\sqrt{2P_1} \sin Q_1 - Q_2), \\y &= \frac{1}{\sqrt{m\omega}}(\sqrt{2P_1} \cos Q_1 + Q_2), \\p_y &= \frac{\sqrt{m\omega}}{2}(-\sqrt{2P_1} \sin Q_1 + P_2)\end{aligned}$$

является каноническим. Найти уравнения Гамильтона частицы в магнитном поле, заданном векторным потенциалом  $\mathbf{A} = \left(-\frac{1}{2}y\mathcal{H}, \frac{1}{2}x\mathcal{H}, 0\right)$  в новых переменных. Здесь  $\omega = \frac{e\mathcal{H}}{mc}$ .

**11.12.** Каков смысл канонического преобразования, задаваемого производящей функцией  $\Phi(q, P) = \alpha qP$ ?

**11.13.** Показать, что градиентное преобразование потенциалов электромагнитного поля является каноническим преобразованием для координат и импульсов заряженных частиц, и найти соответствующую производящую функцию.

**11.14.** Как известно, замена функции Лагранжа  $L(q, \dot{q}, t)$  на

$$L'(q, \dot{q}, t) = L(q, \dot{q}, t) + \frac{df(q, t)}{dt},$$

где  $f(q, t)$  — произвольная функция, не изменяет уравнений Лагранжа. Показать, что это преобразование является каноническим, и найти его производящую функцию.

**11.15.** Найти производящую функцию канонического преобразования, состоящего в переходе от  $q(t), p(t)$  к  $Q(t) = q(t + \tau), P(t) = p(t + \tau)$ ,  $\tau = \text{const}$  для:

- а) свободного движения,
- б) движения в однородном поле,  $U(q) = -Fq$ ;
- в) осциллятора.

**11.16.** Выяснить смысл канонических преобразований, задаваемых производящими функциями:

- а)  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \delta\mathbf{aP}$ ;
- б)  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \delta\varphi[\mathbf{rP}]$ ;
- в)  $\Phi(q, P, t) = qP + \delta\tau H(q, P, t)$ ;
- г)  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \delta\alpha(\mathbf{r}^2 + \mathbf{P}^2)$ ,

где  $\mathbf{r}$  — декартовы координаты, а  $\delta\mathbf{a}$ ,  $\delta\varphi$ ,  $\delta\tau$ ,  $\delta\alpha$  — бесконечно малые параметры.

**11.17.** Показать, что каноническое преобразование, задаваемое производящей функцией

$$\Phi(x, y, P_x, P_y) = xP_x + yP_y + \varepsilon(xy + P_xP_y),$$

где  $\varepsilon \rightarrow 0$ , представляет собой поворот в фазовом пространстве.

**11.18.** Указать производящие функции для бесконечно малых канонических преобразований, представляющих собой:

- а) винтовое движение;
- б) преобразование Галилея;
- в) переход к вращающейся системе отсчета.

**11.19.** Каноническое преобразование задано производящей функцией  $\Phi(q, P) = qP + \lambda W(q, P)$ , где  $\lambda \rightarrow 0$ .

Для произвольной функции  $f(q, p)$  найти с точностью до первого порядка малости изменение ее величины, связанное с изменением аргументов

$$\delta f(q, p) = f(Q, P) - f(q, p).$$

**11.20.** Найти  $\{H, \mathbf{r}\mathbf{p}\}$ , где функция Гамильтона  $H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\mathbf{a}\mathbf{r}}{r^3}$ , и получить, исходя из результата, интеграл уравнений движения. Для вычисления удобно воспользоваться результатами предыдущей задачи и задачи 11.12.

**11.21.** Найти изменение вида зависимости  $M, \mathbf{p}^2, \mathbf{p}\mathbf{r}, H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  от  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{p}$  при преобразованиях задачи 11.16.

**11.22.** Показать, что результат последовательного выполнения двух бесконечно малых канонических преобразований, заданных производящими функциями

$$\Phi_i(q, P) = qP + \lambda_i W_i(q, P), \quad \lambda_i \rightarrow 0, \quad i = 1, 2,$$

не зависит от порядка их выполнения (с точностью до второго порядка малости включительно), если

$$\{W_1(q, p), W_2(q, p)\} = 0.$$

**11.23.** Найти каноническое преобразование, представляющее собой результат последовательного выполнения бесконечно большого числа  $N$  бесконечно малых канонических преобразований, заданных функцией

$$\Phi(q, P) = qP + \frac{\lambda}{N} W(q, P), \quad \lambda = \text{const}, \quad N \rightarrow \infty;$$

$$\text{а) } W(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = [\mathbf{r}\mathbf{P}]\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} = \text{const}; \quad \text{б) } W(x, y, P_x, P_y) = A_i,$$

где  $A_i$  определены в задаче 10.15.

УКАЗАНИЕ. Составить и решить для конкретных  $W$  дифференциальные уравнения для  $Q(\lambda), P(\lambda)$ .

**11.24.** а) Как изменяются со временем объем, объем в импульсном пространстве и фазовый объем, занимаемые группой свободно движущихся вдоль оси  $x$  частиц? В начальный момент координаты частиц заключены в интервале  $x_0 < x < x_0 + \Delta x_0$ , а импульсы — в интервале  $p_0 < p < p_0 + \Delta p_0$ .

б) Тот же вопрос для частиц, движущихся вдоль оси  $x$  между двумя стенками. Соударения со стенками абсолютно упругие. Друг с другом частицы не взаимодействуют.

в) Тот же вопрос для группы гармонических осцилляторов.

г) Тот же вопрос для группы гармонических осцилляторов с трением.

д) Тот же вопрос для группы ангармонических осцилляторов.

е) Будем описывать распределение частиц в фазовом пространстве в момент  $t$  функцией распределения  $w(x, p, t)$  такой, что число частиц с координатами в интервале от  $x$  до  $x + dx$  и импульсами в интервале от  $p$  до  $p + dp$  есть  $w(x, p, t) dx dp$ . Определить функции распределения группы свободных частиц и группы гармонических осцилляторов, если в начальный момент

$$w(x, p, 0) = \frac{1}{2\pi\Delta p_0\Delta x_0} \exp\left\{-\frac{(x - X_0)^2}{2\Delta x_0^2} - \frac{(p - P_0)^2}{2\Delta p_0^2}\right\}.$$

**11.25.** Введем переменную

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}.$$

а) Найти скобки Пуассона  $\{a^*, a\}$ . Выразить через  $a$  и  $a^*$  функцию Гамильтона гармонического осциллятора

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}.$$

б) Показать, что  $Q = a$  и  $P = ia^*$  — канонические переменные. Найти новую функцию Гамильтона  $H'_0(Q, P)$ .

в) Для осциллятора с ангармонической добавкой к потенциальной энергии  $\delta U = \frac{1}{4}m\beta x^4$  усреднить функцию Гамильтона  $H'(Q, P)$  по периоду быстрых осцилляций  $2\pi/\omega$ .

Используя усредненную функцию Гамильтона, найти медленные изменения переменных  $Q$  и  $P$ .



г) Исследовать закон изменения амплитуды колебаний осциллятора под действием нелинейной резонансной силы

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} + m^2 \omega^2 \alpha x^4 \cos 4\omega t.$$

**11.26.** Исследовать изменение амплитуды колебаний системы трех осцилляторов со слабой нелинейной связью:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2 + \alpha xyz),$$

если  $|\omega_1 - \omega_2 - \omega_3| \ll \omega_1$ ,  $|\alpha x| \ll \omega_1^2$ . Рассмотреть подробнее случаи, когда в начальный момент  $|y| \ll |x|$ ,  $z = 0$ ,  $\dot{y} = \dot{z} = 0$ .

Воспользоваться тем же методом, что и в предыдущей задаче.

**11.27.** Функция Гамильтона ангармонического осциллятора, испытывающего параметрическое воздействие, имеет вид

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(1 + h \cos 2\gamma t)x^2 + \frac{m\beta x^4}{4}.$$

Введем канонические переменные

$$a = \frac{m\omega x + ip}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\gamma t}, \quad P = ia^*.$$

а) Найти новую функцию Гамильтона  $H'(a, P, t)$  и усреднить ее по периоду быстрых осцилляции  $2\pi/\gamma$ .

б) Исследовать изменение амплитуды колебаний в области резонанса  $|\gamma - \omega| \ll h\omega$ ,  $h \ll 1$ , если в начальный момент величина  $a$  близка к нулю.

**11.28.** а) Проверить, что преобразование

$$\begin{aligned} x &= Q \cos \gamma t + \frac{1}{m\omega} P \sin \gamma t, \\ p &= -m\omega Q \sin \gamma t + P \cos \gamma t \end{aligned}$$

является каноническим. Получить новую функцию Гамильтона  $H'(Q, P, t)$  для осциллятора с параметрическим возбуждением:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}(1 - h \cos 2\gamma t).$$

б) Усреднить  $H'(Q, P, t)$  по периоду  $2\pi/\gamma$  и исследовать качественно движение точки на фазовой плоскости  $Q, P$ . Принять  $h \ll 1$ ,  $\varepsilon = 1 - \gamma/\omega \ll 1$ .

**11.29.** а) Рассматривается движение двух слабо связанных осцилляторов

$$H = H_0 + V, \quad H_0 = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2),$$

$$V = m\beta xy \sin(\omega_1 - \omega_2)t, \quad \beta \ll \omega_1^2 \sim \omega_2^2.$$

В плоскости  $x, p_x/m\omega_1$  перейдем к системе координат  $X, P_x/m\omega_1$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega_1$  по часовой стрелке; аналогичное преобразование сделаем и для переменных  $y, p_y/m\omega_2$ . Показать, что  $X, Y, P_x, P_y$  — канонические переменные.

Найти новую функцию Гамильтона  $H'(X, Y, P_x, P_y, t)$ , усреднить ее по времени  $t_{\text{уср}}$  такому, что

$$\frac{1}{\omega_{1,2}} \ll t_{\text{уср}} \ll \frac{\omega_{1,2}}{\beta},$$

и исследовать изменение амплитуд колебаний по  $x$  и  $y$  со временем за время  $t \lesssim \omega_{1,2}/\beta$ .

б) То же для  $V = m\beta xy \sin(\omega_1 + \omega_2)t$ .

## § 12. Уравнение Гамильтона–Якоби

**12.1.** Найти траекторию и закон движения частицы в поле  $U(\mathbf{r})$  с помощью уравнения Гамильтона–Якоби:

а)  $U(\mathbf{r}) = -Fx$ ;

б)  $U(\mathbf{r}) = \frac{m\omega_1^2 x^2}{2} + \frac{m\omega_2^2 y^2}{2}$ .

**12.2.** Определить траекторию и закон движения частицы, рассеиваемой в поле  $U(\mathbf{r}) = \mathbf{a}\mathbf{r}/r^3$ . Траекторию выразить через квадратуры, а при  $E\rho^2 \gg a$  — и аналитически. Скорость частиц до рассеяния направлена противоположно вектору  $\mathbf{a}$ .

**12.3.** Найти сечение рассеяния на малые углы частиц, скорость которых до рассеяния направлена противоположно оси  $z$ , в поле  $U(\mathbf{r})$ :

а)  $U(\mathbf{r}) = \frac{a \cos \theta}{r^2}$ ; б)  $U(\mathbf{r}) = \frac{b \cos^2 \theta}{r^2}$ ; в)  $U(\mathbf{r}) = \frac{b(\theta)}{r^2}$ .

**12.4.** Найти сечение падения частиц в центр поля  $U(\mathbf{r})$ :

$$\text{а) } U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{ar}}{r^3}; \quad \text{б) } U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{ar}}{r^3} + \frac{\lambda}{r};$$

$$\text{в) } U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{ar}}{r^3} - \frac{\gamma}{r^4}; \quad \text{г) } U(\mathbf{r}) = \frac{b(\theta)}{r^2}.$$

Усреднить сечение, предполагая все направления  $\mathbf{a}$  равновероятными.

**12.5.** Найти сечение падения частиц на шарик радиуса  $R$ , являющийся центром поля  $U(\mathbf{r}) = \mathbf{ar}/r^3$ .

**12.6.** Определить траектории и законы движения частиц, рассеиваемых и падающих в центр поля  $U(\mathbf{r})$ . Траекторию выразить через квадратуры, а при  $E\rho^2 \gg a$  — и аналитически.

Для первого поля найти аналитическое выражение траектории частицы падающей в центр при  $E\rho^2 \ll a$ . Скорость частиц до рассеяния параллельна оси  $z$ .

$$\text{а) } U(\mathbf{r}) = \frac{a \cos \theta}{r^2}; \quad \text{б) } U(\mathbf{r}) = -\frac{a(1 + \sin \theta)}{r^2}.$$

**12.7.** Найти траекторию и закон движения частицы, падающей в центр поля  $U(\mathbf{r}) = \mathbf{ar}/r^3$ . На бесконечности частица летит вдоль прямой  $y = \rho$ ,  $x = -z \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\rho$  — прицельный параметр (вектор  $\mathbf{a}$  параллелен оси  $z$ , начальные сферические координаты частицы  $r = \infty$ ,  $\theta = \pi - \alpha$ ,  $\varphi = 0$ ). Траекторию выразить через квадратуры, а при  $\alpha^2 < \frac{2E\rho^2}{a} \ll 1$  — и аналитически.

**12.8.** а) Определить траекторию (выразить через квадратуры) финитного движения частицы в поле  $U(\mathbf{r}) = \frac{a \cos \theta}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$  при  $M_z = 0$ .

$$\text{б) То же для поля } U(\mathbf{r}) = \frac{a \cos \theta}{r^2} + \frac{\gamma}{r^4}.$$

**12.9.** При каком условии траектория, найденная в предыдущей задаче, окажется замкнутой?

**12.10.** Описать качественно характер движения частицы и вид траекторий в поле

$$U(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{ar}}{r^3} - \frac{\alpha}{r}.$$

**12.11.** При каких значениях момента импульса  $M_z$  частицы возможно финитное движение в поле  $U(\mathbf{r})$ ?

а)  $U(\mathbf{r}) = \frac{\gamma}{r^4} - \frac{b \cos^2 \theta}{r^2}$ ; б)  $U(\mathbf{r}) = \frac{b \cos^2 \theta}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$ .

Как выглядит при этом траектория?

**12.12.** Найти уравнение траектории и закон движения частицы в поле  $U(\mathbf{r})$  в параболических координатах:

а)  $U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r}$ ; б)  $U(\mathbf{r}) = -\frac{\alpha}{r} - \mathbf{F}\mathbf{r}$ .

В случае б) ограничиться рассмотрением финитного движения, траекторию и закон движения выразить в квадратурах.

**12.13.** Внутри гладкого упругого эллипсоида вращения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

движется частица, вылетевшая из начала координат под углом  $\alpha$  к оси  $z$ . Найти области эллипсоида, недоступные для частицы.

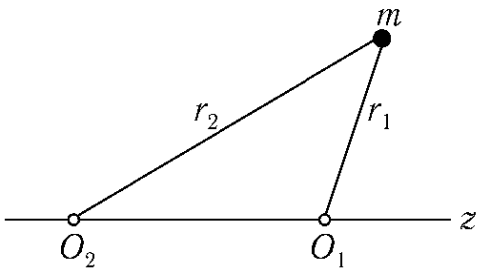


Рис. 63

**12.14.** Найти траекторию частицы (выразить через квадратуры) в поле двух кулоновских центров  $U(\mathbf{r}) = \frac{\alpha}{r_1} - \frac{\alpha}{r_2}$  (рис. 63), если скорость частицы на бесконечности параллельна оси  $O_2O_1z$ . Описать движение частицы, «падающей» на «диполь», образованный данными центрами.

**12.15.** Короткая магнитная линза образована полем, определяемым векторным потенциалом  $A_\varphi = \frac{1}{2}r\mathcal{H}_z(z)$ ,  $A_r = A_z = 0$  ( $\mathcal{H}_z(z)$  отлично от нуля в области  $|z| < a$ ). Из точки  $(0, 0, z_0)$  на линзу падает пучок электронов, близких к оси  $z$ . Найти точку  $(0, 0, z_1)$ , где пучок будет сфокусирован. Предполагается, что  $z_0, z_1 \gg a$ .

УКАЗАНИЕ. Интеграл уравнения Гамильтона – Якоби искать в виде разложения по степеням  $r$

$$S(r, \varphi, z, t) = -Et + p_\varphi \varphi + f(z) + r\psi(z) + \frac{r^2}{2}\sigma(z) + \dots$$

**12.16.** Магнитная линза образована полем, определяемым векторным потенциалом  $A_\varphi = \frac{1}{2}r\mathcal{H}_z(z)$ ,  $A_r = A_z = 0$ , где  $\mathcal{H}_z(z) = \frac{\mathcal{H}}{1 + \kappa^2 z^2}$ . Из точки  $(0, 0, z_0)$  на линзу падает пучок электронов, близких к оси  $z$ . Найти точки, в которых он будет сфокусирован.

УКАЗАНИЕ. Полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби искать в виде разложения по  $t$ .

**12.17.** Каким образом можно найти действие как функцию координат и времени, зная полный интеграл уравнения Гамильтона – Якоби?

**12.18.** Сформулировать и доказать теорему об интегрировании уравнений движения с помощью полного интеграла уравнения

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(-\frac{\partial S}{\partial p}, p, t\right) = 0,$$

где  $H(q, p, t)$  — функция Гамильтона. (Уравнение Гамильтона – Якоби в  $p$ -представлении.)

**12.19.** С помощью уравнения Гамильтона – Якоби в  $p$ -представлении найти траекторию и закон движения частицы в однородном поле.

## § 13. Адиабатические инварианты

**13.1.** На нити, пропущенной через колечко  $A$  (рис. 64), подвешена частица массы  $m$ . Определить среднюю силу, действующую на колечко  $A$  со стороны нити при малых колебаниях маятника. Найти изменение энергии маятника при медленном вертикальном перемещении колечка.

**13.2.** Частица движется в прямоугольной потенциальной яме ширины  $l$ . Найти, как изменяется энергия частицы при медленном изменении  $l$ , рассматривая столкновения частицы со «стенкой» ямы.

**13.3.** Шарик, находящийся в лифте, подскакивает над упругой плитой. Как изменяется максимальная высота, на которую поднимается шарик, когда ускорение лифта медленно изменяется? Как меняется высота, если плита медленно поднимается?

**13.4.** Как изменяется энергия частицы в поле  $U$  при медленном изменении параметров поля?

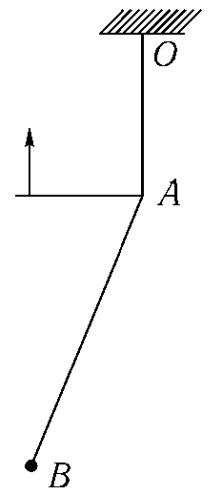


Рис. 64

$$\begin{array}{ll} \text{а) } U = A(e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}); & \text{б) } U = -\frac{U_0}{\operatorname{ch}^2 \alpha x}; \\ \text{в) } U = U_0 \operatorname{tg}^2 \alpha x; & \text{г) } U = A|x|^n. \end{array}$$

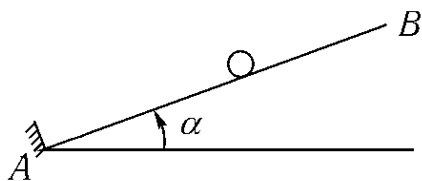


Рис. 65

УКАЗАНИЕ. Может оказаться удобным использовать формулу ([1], § 49),

$$T = 2\pi \frac{\partial I}{\partial E}.$$

**13.5.** Частица движется по наклонной плоскости  $AB$  (рис. 65), упруго отражаясь от стенки в точке  $A$ . Найти, как изменяется максимальная высота подъема частицы при медленном изменении угла  $\alpha$ .

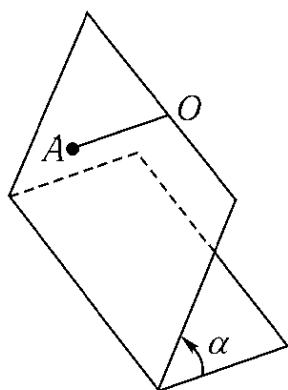


Рис. 66

**13.6.** Как изменяется амплитуда колебаний маятника  $OA$  (рис. 66), находящегося в наклонной плоскости, при медленном изменении угла  $\alpha$ ?

**13.7.** Найти адиабатический инвариант для математического маятника, не предполагая колебания малыми.

**13.8.** Вдоль прямой  $OA$  (рис. 67) могут двигаться две частицы, представляющие собой упругие шарики малого радиуса, массы которых соответственно  $m$  и  $M$ , причем  $m \ll M$ . В точке  $O$  частица  $m$  отражается от упругой стенки. Предполагая, что в начальный момент скорость легкой частицы гораздо больше скорости тяжелой, определить закон движения тяжелой частицы, усредненный по «периоду» движения легкой.

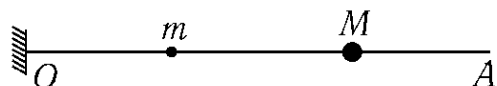


Рис. 67

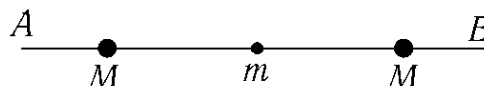


Рис. 68

**13.9.** В этой задаче рассматривается модель иона  $H_2^+$ . Две частицы массы  $M$  и находящаяся между ними частица массы  $m \ll M$  могут двигаться только вдоль прямой  $AB$  (рис. 68). Легкая частица притягивается к каждой из тяжелых с постоянными силами  $f$ , а при столкновениях отражается упруго. Определить частоту малых колебаний расстояния между тяжелыми частицами (усреднив по движению легкой).

**13.10.** Решить методом последовательных приближений уравнения задачи 11.1а для  $P$  и  $Q$  в случае, когда частота изменяется медленно ( $|\dot{\omega}| \ll \omega^2$ ,  $|\ddot{\omega}| \ll |\dot{\omega}|\omega$ ), с точностью до первого порядка по  $\dot{\omega}/\omega^2$  включительно.

В чем преимущество переменных  $P, Q$  перед  $p, q$  в этом случае?

**13.11.** Убедиться, что  $q = \omega^{-1/2} \exp(i \int \omega dt)$  удовлетворяет уравнению  $\ddot{q} + \omega^2(t)q = 0$  с точностью до первого порядка по  $\dot{\omega}/\omega^2$  включительно.

**13.12.** На осциллятор действует сила  $F(t)$ . Найти зависимость адиабатического инварианта  $I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq$  от времени.

**13.13.** Найти связь между объемом и давлением «газа», состоящего из частиц, которые движутся параллельно ребрам внутри куба, размер которого медленно изменяется.

**13.14.** Частица движется внутри упругого параллелепипеда. Как изменяется энергия частиц, если:

- а) размеры параллелепипеда медленно изменяются,
- б) параллелепипед медленно поворачивается?

**13.15.** Частица движется в сфере с упругими стенками, радиус которой медленно изменяется. Как изменяется при этом энергия частицы и угол, под которым она налетает на стенку?

**13.16.** Как изменяется энергия и траектория частицы, совершающей финитное движение в поле  $U(\mathbf{r})$  при медленном изменении коэффициента  $\gamma$ ?

- а)  $U = -\gamma r^{-n}$  ( $0 < n < 2$ );    б)  $U = \frac{\mathbf{ar}}{r^3} + \frac{\gamma}{r^4}$ .

**13.17.** Найти изменение энергии частицы в центральном поле при медленном «включении» малой добавки к полю  $\delta U(r)$ .

**13.18.** Найти зависимость от времени энергии системы двух связанных осцилляторов, функция Лагранжа которой имеет вид

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega_1^2 x^2 - \omega_2^2 y^2 + 2\alpha xy)$$

при медленном изменении  $\omega_1$ . Как изменяется траектория точки  $(x, y)$ ?

**13.19.** Пусть связь осцилляторов в предыдущей задаче мала:  $\alpha \ll \omega_{1,2}^2$ . Показать, что адиабатические инварианты, вычисленные в пренебрежении связью, сохраняются вдали от области вырождения ( $\omega_1 = \omega_2$ ) и резко изменяются при медленном прохождении этой области.

**13.20.** В какой области  $\omega_1(t)$  будут сильно меняться адиабатические инварианты осцилляторов, если связь имеет вид  $\delta U = \beta x^2 y$ ?

**13.21.** Определить минимальное расстояние, на которое приблизится к ребру двугранного угла  $\alpha$  частица, упруго отражающаяся от его граней. На расстоянии  $l$  от ребра угол падения частицы на грань равен  $\varphi_0$ .

Задачу решить двумя способами: методом отражений (точно) и с помощью адиабатического инварианта в случае малых  $\alpha$  и  $\varphi_0$ .

**13.22.** Определить границы области, в которой движется между двумя упругими поверхностями  $y = 0$  и  $y = \frac{a \operatorname{ch} \alpha x}{\operatorname{ch} 2\alpha x}$  частица, вылетевшая из начала координат под углом  $\varphi$  к оси  $y$  в плоскости  $xy$  ( $\alpha, \varphi \ll 1$ ), и период колебаний вдоль оси  $x$ .

**13.23.** Как изменятся радиус и положение центра орбиты заряженной частицы при движении в однородном магнитном поле, медленно изменяющемся по величине? Векторный потенциал выбрать в виде

а)  $\mathbf{A} = (0, \mathcal{H}x, 0)$ ; б)  $A_r = A_z = 0, A_\varphi = \frac{1}{2}\mathcal{H}r$ .

Объяснить, почему результат зависит от выбора  $\mathbf{A}$ .

**13.24.** Вычислить адиабатические инварианты для заряженного осциллятора в однородном магнитном поле.

**13.25.** а) Определить адиабатические инварианты для заряженного анизотропного гармонического осциллятора с потенциальной энергией  $U(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2)$  в однородном магнитном поле  $\mathcal{H}$ , параллельном оси  $z$ . Векторный потенциал выбрать в виде  $\mathbf{A} = (0, \mathcal{H}x, 0)$ .

б) Пусть вначале  $\mathcal{H} = 0$  и траектория осциллятора заполняет прямоугольник  $|x| \leq a, |y| \leq b$ . Каким станет его движение, если магнитное поле медленно возрастает до большой величины (такой, что  $\omega_{\mathcal{H}} = e\mathcal{H}/mc \gg \omega_{1,2}$ )?

в) Пусть магнитное поле слабое ( $\omega_{\mathcal{H}} \ll \omega_1 - \omega_2$ ) и вначале осциллятор колеблется почти вдоль оси  $x$ . Каким станет его движение, если величина  $\omega_1$ , медленно уменьшаясь, достигнет значения  $\omega'_1 < \omega_2$  такого, что  $\omega_{\mathcal{H}} \ll \omega_2 - \omega'_1$ ?

**13.26.** Частица совершает финитное движение в плоскости, перпендикулярной магнитному диполу  $\mathbf{m}$ . Как меняется энергия частицы при медленном изменении величины  $\mathbf{m}$ ?

**13.27.** Найти период колебаний электрона вдоль оси в магнитной ловушке. Магнитное поле ловушки симметрично относительно оси  $z$ , причем  $\mathcal{H}_\varphi = 0, \mathcal{H}_z = \mathcal{H}_z(z), \mathcal{H}_r = -\frac{r}{2}\mathcal{H}'_z(z)$ .



а)  $\mathcal{H}_z(z) = \mathcal{H}_0 \left( 1 + \lambda \operatorname{th}^2 \frac{z}{a} \right);$

б)  $\mathcal{H}_z(z) = \mathcal{H}_0 \left( 1 + \frac{z^2}{a^2} \right).$

**13.28.** Как изменяются энергия электрона и период его колебаний вдоль оси  $z$  в магнитной ловушке, описанной в предыдущей задаче при медленном изменении параметров поля  $\mathcal{H}_0$ ,  $\lambda$ ,  $a$ ?

**13.29.** Найти изменение энергии частицы в центральном поле  $U(\mathbf{r})$  при медленном включении слабого однородного магнитного поля  $\mathcal{H}$ .

**13.30.** Как известно, при наличии вырождения движения увеличивается число однозначных интегралов движения. Указать интегралы движения в поле

$$U = \frac{m\omega^2}{2}(x^2 + 4y^2).$$

**13.31.** Найти переменные действие–угол для следующих систем:

а) осциллятор;

б) частица в поле  $U(x) = \begin{cases} \infty & \text{при } x < 0, \\ xF & \text{при } x > 0. \end{cases}$

**13.32.** Для частицы в периодическом поле

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } na < x < \left(n + \frac{1}{2}\right)a, \\ V & \text{при } \left(n + \frac{1}{2}\right)a < x < (n+1)a, \end{cases} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

в случае  $E > V$  провести каноническое преобразование с производящей функцией

$$S(x, P) = \int_0^x \sqrt{2m|E - U(x)|} dx,$$

где  $E(P)$  выражается из равенства

$$P = \int_0^a \sqrt{2m|E - U(x)|} dx.$$

# Ответы и решения

## § 1. Интегрирование уравнений движения с одной степенью свободы

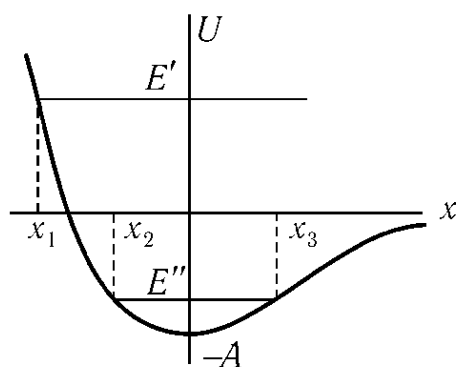


Рис. 69

1.1. а) По начальным значениям  $x(0)$  и  $\dot{x}(0)$  определяется энергия частицы  $E$ . Дальнейшее ее движение находится из закона сохранения энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E. \quad (1)$$

При  $E \geq 0$  частица может двигаться в области  $x \geq x_1$  — движение инфинитно ( $E = E'$  на рис. 69). При  $E < 0$  ( $E = E''$ ) частица движется в области  $x_2 \leq x \leq x_3$ , движение финитно. Точки поворота определяются из формулы (1)  $U(x_i) = E$ :

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\sqrt{A(A+E)} - A}{E} & \text{при } E > 0, \\ x_1 = -\frac{\ln 2}{\alpha} & \text{при } E = 0, \\ x_{2,3} = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{A \mp \sqrt{A(A-|E|)}}{|E|} & \text{при } E < 0. \end{array} \right. \quad (2)$$

Из (1) получаем

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x(0)}^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (3)$$

Отсюда

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{A - \sqrt{A(A - |E|)} \cos(\alpha t \sqrt{2|E|/m} + C)}{|E|} \quad \text{при } E < 0, \quad (4)$$

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[ \frac{1}{2} + \frac{A\alpha^2}{m} (t + C)^2 \right] \quad \text{при } E = 0, \quad (5)$$

$$x(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\sqrt{A(A + E)} \operatorname{ch}(\alpha t \sqrt{2E/m} + C) - A}{E} \quad \text{при } E > 0. \quad (6)$$

Постоянные  $C$  определяются начальными значениями  $x(0)$ , например, в (4) при  $\dot{x}(0) > 0$

$$C = \arccos \frac{A - |E|e^{\alpha x(0)}}{\sqrt{A - (A - |E|)}}.$$

Точки поворота (2) также легко найти из (4)–(6).

Движение при  $E < 0$ , согласно (4), периодическое с периодом  $T = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{|E|}}$ . Если  $E$  близко к минимальному значению  $U(x)$ , равному  $U_{\min} = U(0) = -A$  (т. е.  $\varepsilon = \frac{A - |E|}{A} \ll 1$ ), то период  $T \approx T_0 \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$ ,  $T_0 = \frac{\pi}{\alpha} \sqrt{\frac{2m}{A}}$  слабо зависит от  $E$ . В этом случае (4) можно записать в виде

$$x(t) = -\frac{1}{\alpha} \ln(1 - \varepsilon) + \frac{1}{\alpha} \ln \left[ 1 - \sqrt{\varepsilon} \cos\left(\frac{2\pi}{T} t + C\right) \right] \approx -\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\alpha} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} t + C\right). \quad (7)$$

Частица при этом совершает гармонические колебания вблизи точки  $x = 0$  с амплитудой  $\sqrt{\varepsilon}/\alpha$ , определяемой разностью  $E - U_{\min}$ , и с частотой, не зависящей от энергии. Такой характер движения при  $E$ , близком к  $U_{\min}$ , имеет место почти в любом поле  $U(x)$ . (Подробнее об этом см. в § 5.)

При  $E \geq 0$  частица, движущаяся справа, доходит до точки поворота  $x_1$  (см. (2)), поворачивает назад и уходит на бесконечность. При этом скорость

ее со временем стремится к  $\sqrt{2E/m}$  сверху.

$$\begin{aligned} \text{б) } x(t) &= \frac{1}{\alpha} \operatorname{Arsh} \left[ \sqrt{\frac{|E| + U_0}{|E|}} \sin(\alpha t \sqrt{2|E|/m} + C) \right] \quad \text{при } E < 0, \\ x(t) &= \pm \frac{1}{\alpha} \operatorname{Arsh} \left[ \sqrt{\frac{E + U_0}{E}} \operatorname{sh}(\alpha t \sqrt{2E/m} + C) \right] \quad \text{при } E > 0, \\ x(t) &= \pm \frac{1}{\alpha} \operatorname{Arsh}(\alpha t \sqrt{2U_0/m} + C) \quad \text{при } E = 0;^1 \end{aligned}$$

$$\text{в) } x(t) = \frac{1}{\alpha} \arcsin \left[ \sqrt{\frac{E}{E + U_0}} \sin \left( \alpha t \sqrt{\frac{2(U_0 + E)}{m}} \right) + C \right].$$

Почему в некоторых формулах приведенных ответов знаки двойные?

**1.2.**  $x(t) = \frac{x_0}{1 \pm tx_0 \sqrt{2A/m}}$ ,  $x_0 = x(0)$ . Знак в знаменателе противо-

положен знаку  $\dot{x}(0)$ . Пусть для определенности  $x(0) > 0$ . При  $\dot{x}(0) > 0$  частица уходит на бесконечность за время  $\sqrt{m/2Ax_0^2}$ . Разумеется, реально речь может идти только о большом, но конечном расстоянии, до которого простирается заданное поле  $U(x)$ .

При  $\dot{x}(0) < 0$  частица асимптотически приближается к точке  $x = 0$ .

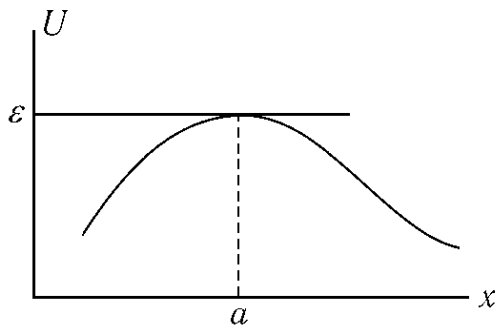


Рис. 70

**1.3.** Вблизи точки остановки  $U(x) = E - (x - a)F$ , где  $F = -U'(a)$ , т. е. можно считать, что движение частицы происходит под действием постоянной силы  $F$ . Считая, что  $x(0) = a$ , получаем

$$x(t) = a + \frac{Ft^2}{2m}.$$

Точность этой формулы убывает при удалении от точки  $x = a$ .

Маленький отрезок пути  $s$  вдали от точки остановки частица проходит за время  $\tau \propto s$ . Если же отрезок пути примыкает к точке остановки, то для его прохождения необходимо время  $\tau = \sqrt{2ms/|F|}$ , т. е.  $\tau \propto \sqrt{s}$ .

<sup>1</sup>  $\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

Если  $U'(a) = 0$  (рис. 70), то разложение  $U(x)$  необходимо продолжить до следующего члена:

$$U(x) = E + \frac{1}{2}U''(a)(x-a)^2.$$

В этом случае  $x(t) = a + se^{\pm\lambda t}$ , где  $s = x(0) - a$ ,  $\lambda^2 = -\frac{U''(a)}{m}$ , а знак в показателе определяется направлением скорости в начальный момент. Для прохождения участка пути до точки остановки частице необходимо бесконечно большое время.

**1.4.** Если  $U''(a) \neq 0$ , то  $T \propto \ln \varepsilon$ , где  $\varepsilon = U_m - E$ . Если  $U''(a) = \dots = U^{(n-1)}(a) = 0$ ,  $U^{(n)}(a) \neq 0$ , то  $T \propto \varepsilon^{-\frac{n-2}{2n}}$ .

**1.5.** а) При малом  $\varepsilon = E - U_m$  частица движется медленнее всего вблизи точки  $x = a$ . Поэтому и весь период движения  $T$  можно оценить по времени  $T_1$  прохождения (туда и обратно) малой окрестности этой точки  $a - \delta < x < a + \delta$ :

$$T_1 = \sqrt{2m} \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \approx T.$$

В окрестности  $x=a$  представим  $U(x)$  в виде  $U(x) = U_m - \frac{1}{2}k(x-a)^2$ , где  $k = -U''(a)$ . При достаточно малом  $\varepsilon$  можно выбрать  $\delta$  таким, чтобы скорость  $v$  на границах интервала была много больше минимальной (при  $x = a$ )

$$\frac{mv^2}{2} \sim \frac{k\delta^2}{2} \gg \varepsilon$$

и в то же время чтобы было  $\delta \ll L = x_2 - x_1$ , т. е.

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{k}} \ll \delta \ll L = x_2 - x_1.$$

Тогда

$$T_1 = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \ln \frac{2k\delta^2}{\varepsilon}. \quad (1)$$

Время  $T_2$  движения частицы на участках  $x_1 < x < a - \delta$  и  $a + \delta < x < x_2$  удовлетворяет условию

$$T_2 \lesssim \frac{L}{v} \sim \sqrt{\frac{m}{k}} \frac{L}{\delta}.$$

С уменьшением  $\varepsilon$  величина  $T_1$  возрастает, поэтому при достаточно малых  $\varepsilon$  оказывается  $T_2 \ll T_1$  и для оценки периода движения можно воспользоваться формулой (1). Эта формула обладает асимптотической точностью. Ее относительная ошибка стремится к нулю, как  $1/\ln \varepsilon$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Но с той же логарифмической точностью можно заменить в (1)  $\delta$  на  $L$  и опустить множитель 2 под знаком логарифма:

$$T = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \ln \frac{kL^2}{\varepsilon}. \quad (2)$$

Если  $U''(a) = 0$ ,  $U^{(4)} = -K \neq 0$ , то

$$T = 4\left(\frac{6m^2}{\varepsilon K}\right)^{1/4} \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}} = 11,6\left(\frac{m^2}{\varepsilon K}\right)^{1/4},$$

причем относительная ошибка стремится к нулю, как  $\varepsilon^{1/4}$ , при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

б) Если наблюдать за движением частицы в течение времени, большого по сравнению с периодом  $T$ , то вероятность обнаружить частицу на участке от  $x$  до  $x + dx$

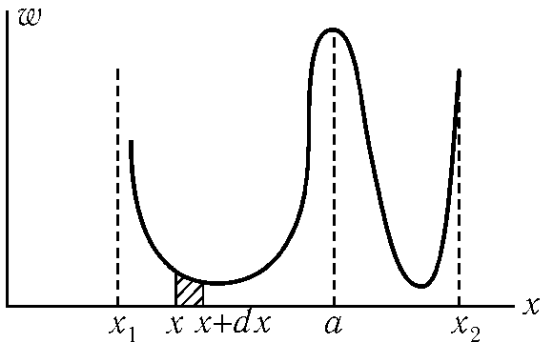


Рис. 71

$$w(x) dx = 2 \frac{dt}{T} = \frac{\sqrt{2m} dx}{T \sqrt{E - U(x)}},$$

где  $2 dt$  — время нахождения частицы на участке  $dx$  за период. Зависимость плотности вероятности  $w$  от  $x$  представлена на рис. 71.

Рассматриваемой вероятности  $w(x) dx$  соответствует заштрихованная площадь (вся площадь под кривой равна единице). При достаточно малых  $\varepsilon$  основной вклад в площадь под кривой дает площадь под центральным максимумом, равная  $T_1/T$ . Хотя  $w(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow x_{1,2}$  вклад участков вблизи точек остановки относительно мал.

$$\text{в) } \tilde{w}(p) dp = \frac{1}{T} \sum_k \left| \frac{dt_k}{dp} \right| dp = \frac{1}{T} \sum_k \frac{dp}{\left| \frac{dU(x_k)}{dx} \right|},$$

где  $x_k = x_k(p)$  — различные корни уравнения  $\frac{p^2}{2m} + U(x) = E$ .

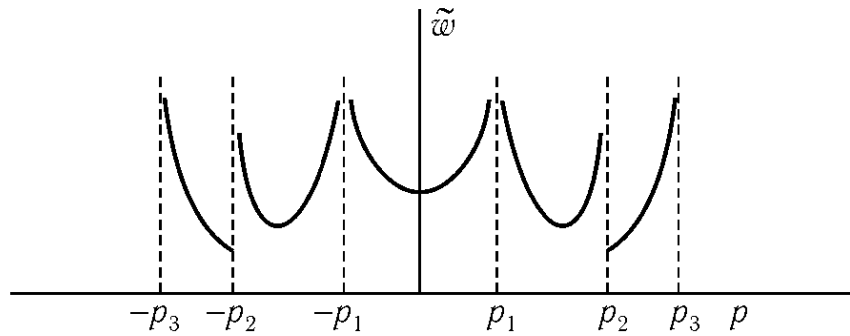


Рис. 72

График  $\tilde{w}(p)$  изображен на рис. 72,  $p_1 = \sqrt{2m(E - U_m)}$ ,

$$p_2 = \sqrt{2m[E - U(c)]}, \quad p_3 = \sqrt{2m[E - U(b)]}.$$

г) Линии  $E(x, p) = \text{const}$  (фазовые траектории частицы) приведены на рис. 73, где кривые пронумерованы в порядке возрастания энергии. При  $U(c) \leq E < U_m$  фазовая траектория 2 двусвязна. Стрелки указывают направление движения точки, изображающей состояние частицы.

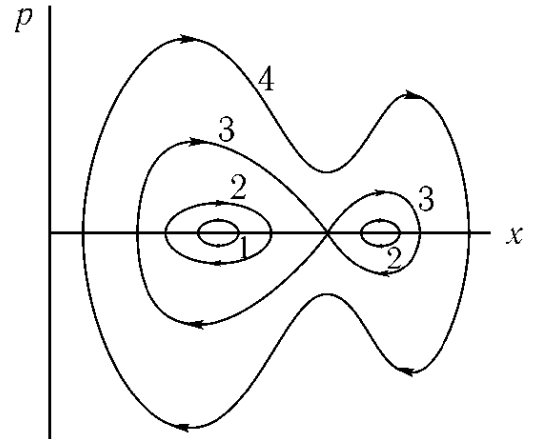


Рис. 73

**1.6.** За начало отсчета потенциальной энергии принимаем нижнюю точку. При  $E = 2mgl$  имеем

$$\varphi(t) = -\pi + 4 \operatorname{arctg} \left( e^{\pm t \sqrt{g/l}} \operatorname{tg} \frac{\varphi(0) + \pi}{4} \right)$$

( $\varphi$  — угол отклонения маятника от нижнего положения). Знак в показателе совпадает со знаком  $\dot{\varphi}(0)$ . Маятник асимптотически приближается к верхнему положению.

При  $0 < E - 2mgl \ll 2mgl$  маятник вращается, медленно «переваливая» через верхнее положение. Период обращения можно оценить, используя результат (2) предыдущей задачи:

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{\varepsilon_0}{E - 2mgl}; \quad \varepsilon_0 = 4\pi^2 mgl.$$

**1.7.** Угол отклонения маятника отсчитываем от нижнего положения. Энергия  $E = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl(1 - \cos \varphi)$ . Пусть в момент  $t_0$  угол  $\varphi(t_0) = 0$  и для определенности  $\dot{\varphi}(t_0) > 0$ . Введя  $k = \sqrt{E/2mgl}$ , имеем

$$t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} + t_0. \quad (1)$$

При  $k < 1$  маятник колеблется в пределах  $-\varphi_m \leq \varphi \leq \varphi_m$  и  $k = \sin \frac{\varphi_m}{2}$ . Подстановкой  $\sin \xi = \frac{1}{k} \sin \frac{\varphi}{2}$  интеграл (1) приводится к виду<sup>1</sup>

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} F(\xi, k) + t_0.$$

Отсюда

$$\varphi = 2 \arcsin[k \operatorname{sn}(u, k)], \quad u = (t - t_0) \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Период колебаний

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin \frac{\varphi_m}{2}\right).$$

В предельных случаях (ср. с задачей 1.4)

$$\begin{aligned} T &= 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi_m^2}{16}\right) && \text{при } \varphi_m \ll 1, \\ T &= 4\sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{8}{\pi - \varphi_m} && \text{при } \pi - \varphi_m \ll 1. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Функция  $F(\xi, k) = \int_0^{\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \xi}}$  — так называемый неполный эллиптический интеграл первого рода. Если  $u = F(\xi, k)$ , то  $\xi$  выражается через одну из эллиптических функций Якоби — эллиптический синус:  $\sin \xi = \operatorname{sn}(u, k)$ . Полным эллиптическим интегралом первого рода называется функция  $K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$ . Приведем также формулы для двух предельных случаев:

$$\begin{aligned} K(k) &= \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{k^2}{4}\right) && \text{при } k \ll 1, \\ K(k) &= \frac{1}{2} \ln \frac{16}{1 - k^2} && \text{при } 1 - k \ll 1. \end{aligned}$$

Таблицы и формулы этих функций можно найти, например, в [10].



При  $k > 1$  маятник не колеблется, а вращается. Из (1) получаем

$$t = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\frac{\varphi}{2}, \frac{1}{k}\right) + t_0, \quad \varphi = 2 \operatorname{Arcsin} \operatorname{sn}\left(u, \frac{1}{k}\right), \quad u = k(t - t_0) \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Период обращения

$$T = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\frac{1}{k}\right).$$

В частности, при  $E - 2mgl \ll 2mgl$  получаем

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \ln \frac{\varepsilon_0}{E - 2mgl},$$

где  $\varepsilon_0 = 32mgl$ . Этот результат отличается от довольно грубой оценки, сделанной в предыдущей задаче, значением постоянной  $\varepsilon_0$ , т. е. на число, не зависящее от  $E - 2mgl$ .

**1.8.** Закон движения в поле  $U(x) + \delta U(x)$  определяется равенством

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x) - \delta U(x)}} \quad (1)$$

( $x = a$  при  $t = 0$ ). Разлагая подынтегральное выражение в (1) по степеням  $\delta U(x)$ , получаем

$$t = t_0(x) + \delta t(x), \quad (2)$$

где

$$t_0(x) = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}, \quad (3)$$

$$\delta t(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_a^x \frac{\delta U(x) dx}{[E - U(x)]^{3/2}}. \quad (4)$$

Пусть закон движения в отсутствие поправки  $\delta U(x)$ , определяемый из уравнения  $t = t_0(x)$ , есть  $x = x_0(t)$ . Тогда из (2) находим

$$x = x_0(t - \delta t(x)), \quad (5)$$

причем в малой поправке  $\delta t(x)$  можно положить  $x = x_0(t)$ , а также провести разложение (5) по  $\delta t$ . Окончательно

$$x = x_0(t) - x'_0(t)\delta t(x_0(t)). \quad (6)$$

Вблизи точки остановки  $x = x_1$  разложение (2) становится неприменимым, так как поправка  $\delta t(x) \rightarrow \infty$  при  $x_1$ .

Замечательно, однако, что формула (6) оказывается справедливой вплоть до точки остановки, если

$$|\delta U'(x)| \ll |F|, \quad F = -U'(x_1). \quad (7)$$

Этот факт связан с тем, что хотя с приближением к точке остановки  $\delta t$  возрастает, зависимость  $x(t)$  вблизи экстремума оказывается слабой.

Очевидно, что вблизи  $x_1$  невозмущенное движение имеет вид

$$x_0(t) = x_1 + \frac{F}{2m}(t - t_1)^2. \quad (8)$$

Добавление  $\delta U$  смещает точку остановки на  $\delta x_1$ , согласно уравнению

$$U(x_1 + \delta x_1) + \delta U(x_1 + \delta x_1) = E.$$

Отсюда  $\delta x_1 = \frac{\delta U(x_1)}{F}$ . С учетом возмущения  $\delta U$  аналогично (8) имеем

$$x(t) = x_1 + \delta x_1 + \frac{F}{2m}(t - t_1 - \delta t_1)^2 \quad (9)$$

(в силу (7) поправкой к  $F$  пренебрегаем). Убедимся, что расчет по формуле (6) приводит к (9).

Область интегрирования в (4) разобьем на две части: от  $a$  до  $b$  и от  $b$  до  $x$ , где  $b$  лежит вблизи  $x_1$ . Во второй области можно положить  $\delta U = \delta U(x_1)$  и  $U(x) = E - (x - x_1)F$ . Тогда

$$\delta t = \frac{\sqrt{m} \delta U(x_1)}{\sqrt{2F^3(x - x_1)}} + \delta t_0, \quad (10)$$

$$\delta t_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_b^a \frac{\delta U(x) dx}{(E - U)^{3/2}} - \frac{\sqrt{m} \delta U(x_1)}{\sqrt{F^3(b - x_1)}}.$$

Подставляя (10) и (8) в (6) и пренебрегая  $\delta t_0^2$ , получим (9) с  $\delta t_1 = \delta t_0$ .

**1.9.** а) Воспользуемся результатами предыдущей задачи. Невозмущенное движение

$$x_0(t) = a \sin \omega t, \quad E = \frac{1}{2} m \omega^2 a^2.$$

При этом  $|\delta U/U| \lesssim \varepsilon = \frac{\alpha a}{\omega^2} \ll 1$ . Поправка

$$\begin{aligned} \delta t(x) &= \frac{\alpha}{3\omega^3} \left( \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} - 2a \right), \\ \delta t(x_0(t)) &= \frac{\varepsilon}{3\omega} \left( \cos \omega t + \frac{1}{\cos \omega t} - 2 \right) \end{aligned}$$

и, согласно формуле (6) предыдущей задачи,

$$x(t) = a \sin \omega t - \frac{\varepsilon a}{3} (\cos^2 \omega t + 1 - 2 \cos \omega t).$$

С точностью до членов первого порядка по  $\varepsilon$  включительно

$$x(t) = a \sin \left( \omega t + \frac{2}{3} \varepsilon \right) - \frac{\varepsilon}{2} a - \frac{\varepsilon}{6} a \cos 2\omega t$$

(ср. с задачей 8.1 б).

б) Действуя так же, как и в предыдущем пункте, получаем

$$x(t) = a \sin \omega t + a\varepsilon \left( \frac{3}{2} \omega t \cos \omega t - \frac{7}{8} \sin \omega t - \frac{1}{8} \sin 3\omega t \right), \quad \varepsilon = \frac{\beta a^2}{4\omega^2} \ll 1. \quad (1)$$

Этот результат имеет относительную точность  $\sim \varepsilon^2$  в течение одного периода, а через  $\varepsilon^{-1}$  периодов формула (1) становится полностью неприменима. Учитывая периодический характер движения, можно распространить результат (1) на бóльший промежуток времени. С точностью до членов порядка  $\varepsilon$  включительно формула (1) преобразуется к явно периодическому виду

$$x(t) = a \left( 1 - \frac{7}{8} \varepsilon \right) \sin \left[ \omega \left( 1 + \frac{3}{2} \varepsilon \right) t \right] - a \frac{\varepsilon}{8} \sin \left[ 3\omega \left( 1 + \frac{3}{2} \varepsilon \right) t \right]. \quad (2)$$

Не учтенные нами в (1) поправки приводят к изменению частоты порядка  $\varepsilon^2 \omega$ , так что (2) сохраняет относительную точность  $\sim \varepsilon$  в течение  $\varepsilon^{-1}$  периодов (ср. с задачей 8.1 а).

**1.10.** Искомое изменение периода

$$\delta T = \sqrt{2m} \left[ \int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x) - \delta U(x)}} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \right]. \quad (1)$$

Разлагать подынтегральное выражение (1) по  $\delta U(x)$  нельзя: условие применимости теоремы о дифференцировании несобственного интеграла по параметру нарушено, так как полученный при дифференцировании интеграл расходится. Разложение подынтегрального выражения по  $\delta U(x)$  до линейного члена включительно можно провести, если представить  $\delta T$  в виде

$$\delta T = 2\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \left[ \int_{x_1+\delta x_1}^{x_2+\delta x_2} \sqrt{E - U(x) - \delta U(x)} dx - \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{E - U(x)} dx \right]. \quad (2)$$

Отсюда

$$\delta T = -\sqrt{2m} \frac{\partial}{\partial E} \int_{x_1}^{x_2} \frac{\delta U(x) dx}{\sqrt{E - U(x)}} = -\frac{\partial}{\partial E} (T \langle \delta U \rangle), \quad (3)$$

где

$$\langle \delta U \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \delta U[x(t)] dt \quad (4)$$

— среднее по времени значение  $\delta U$ .

Время движения вблизи точек остановки составляет малый вклад в период (разумеется, если  $U'(x_{1,2}) \neq 0$ ); по этому поводу см. задачу 1.3. Именно поэтому формула (3) может давать хорошее приближение.

В некоторых случаях даже малая добавка  $\delta U(x)$  может существенно изменить характер движения частицы (см. например, задачу 1.11 б, в).

Действуя аналогично, можно получить следующие члены разложения  $\delta T$  по  $\delta U$ :

$$T = \sqrt{2m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial E^n} \int_{x_1}^{x_2} \frac{[\delta U(x)]^n dx}{\sqrt{E - U(x)}}. \quad (5)$$

Формальное выражение (5) может оказаться асимптотическим или даже сходящимся рядом.

**1.11.** а) Поправка к периоду  $2\pi/\omega$ , полученная по формуле (5) предыдущей задачи, равна  $-3\pi\beta E/2m\omega^5$  и мала при достаточно малых  $E$ .

б) Графики потенциальной энергии  $U(x)$  и  $U(x) + \delta U(x)$  изображены на рис. 74. Видно, что при  $E > U_m = = m\omega^6/6\alpha^2$  добавка делает движение инфинитным. При значениях  $E$ , близких к  $U_m$ , период колебаний неограниченно возрастает (как  $|\ln(U_m - E)|$ ; см. задачу 1.4); поэтому нельзя рассчитывать, что в этом случае он определяется небольшим числом членов ряда (5) задачи 1.10. Если же  $E \ll U_m$ , то поправка к периоду  $\delta T = = 5\pi E/18\omega U_m$ .

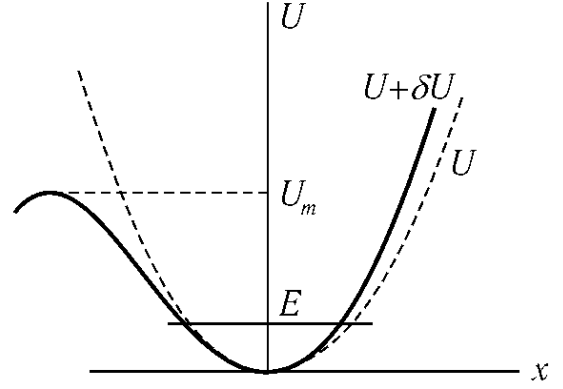


Рис. 74

в)  $\delta T = \frac{3\pi AV\sqrt{m}}{2\alpha|E|^{5/2}\sqrt{2}}$  формула применима, если  $|E| \gg |U_m| \approx \sqrt{8AV}$  ( $E < 0$ ).

$$1.12. \quad \tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{v_0} - \frac{1}{v} \right) dx = \frac{1}{\alpha v_0} \ln \frac{E}{E - U_0},$$

где  $v = \sqrt{\frac{2}{m}|E - U(x)|}$ ,  $v_0 = \sqrt{\frac{2E}{m}}$  (ср. с решением задачи 1.1 б).

## § 2. Движение частиц в полях

2.1. Для исследования движения частицы используем законы сохранения энергии и момента импульса:

$$\frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + U(r) = E, \quad (1)$$

$$m[\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}] = M. \quad (2)$$

Согласно (2) траектория является плоской кривой. Введя в ее плоскости полярные координаты (рис. 75), получаем

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{mr^2\dot{\varphi}^2}{2} + U(r) = E, \quad (3)$$

$$mr^2\dot{\varphi} = M. \quad (4)$$

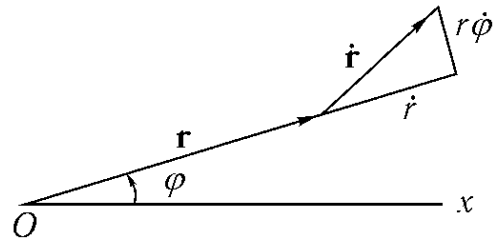


Рис. 75

Исключая из (3)  $\dot{\varphi}$  с помощью (4), находим

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(r) = E, \quad (5)$$

где

$$U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}.$$

Таким образом, радиальное движение можно рассматривать как одномерное движение в поле  $U_{\text{эфф}}(r)$ .

Для качественного исследования характера движения используем графики

$$U_{\text{эфф}}(r) = -\frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^3} + \frac{M^2}{2mr^2} \quad (6)$$

при различных значениях  $M$  (рис. 76).

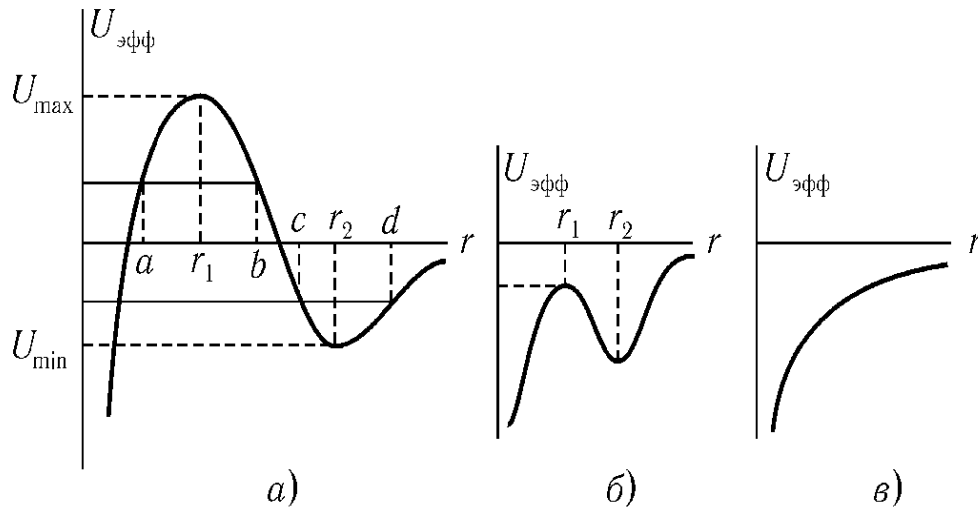


Рис. 76

Если  $12\alpha\gamma m^2 < M^4$ , то  $U_{\text{эфф}}$  имеет два экстремума (при  $r_{1,2} = \frac{M^2 \mp \sqrt{M^4 - 12\alpha\gamma m^2}}{2m\alpha}$ ). Максимальное значение  $U_{\text{эфф}}(r_1) = U_{\text{max}}$  положительно при  $M^4 > 16\alpha\gamma m^2$  (рис. 76, а) и отрицательно при  $12\alpha\gamma m^2 < M^4 < 16\alpha\gamma m^2$  (рис. 76, б); в обоих этих случаях  $U_{\text{эфф}}(r_2) = U_{\text{min}} < 0$ .

Если же  $M^4 < 12\alpha\gamma m^2$ , то функция  $U_{\text{эфф}}(r)$  монотонна (рис. 76, в).

Рассмотрим подробнее случай а). Если  $E > U_{\text{max}}$ , то частица, летящая из бесконечности, падает в центр поля. При этом величина  $\dot{\varphi}$ , согласно (4), возрастает. Этих соображений достаточно для того, чтобы грубо изобразить траекторию частицы (рис. 77, а).

На больших расстояниях, таких, что  $\frac{\gamma}{r^3} \ll \frac{\alpha}{r}$  главную роль в  $U(r)$  играет член  $-\frac{\alpha}{r}$  и траектория мало отличается от гиперболы. (О виде траектории при  $r \rightarrow 0$  см. задачу 2.8.)

Если энергия  $E$  близка к  $U_{\max}$ , то интервал значений  $r$ , близких к  $r_1$ , частица проходит очень медленно. Вращение же радиуса-вектора продолжается своим чередом со скоростью  $\dot{\varphi} \approx \frac{M}{mr_1^2}$ , так что частица может сделать много

оборотов вокруг центра, прежде чем пройдет этот интервал (рис. 77, б). Если  $E = U_{\max}$ , то

частица в своем радиальном движении асимптотически приближается из бесконечности к точке  $r = r_1$  (ср. с задачей 1.3). Траектория же представляет собой спираль, приближающуюся к окружности радиуса  $r_1$  с центром в  $O$  (рис. 78, кривая  $a$ ). Если частица с такой энергией удаляется от центра в области  $r < r_1$ , то ее траектория также приближается к этой окружности, но изнутри (рис. 78, кривая  $b$ ). Наконец, при  $E = U_{\max}$  возможно движение по окружности  $r = r_1$ .

Любое изменение величин  $E$  или  $M$  переводит частицу на траекторию, удаляющуюся от этой окружности, т. е. движение с  $r = r_1$  неустойчиво.

Если  $0 < E < U_{\max}$ , то частица, летевшая из бесконечности, отражается от потенциального барьера  $U_{\text{эфф}}(r)$  и вновь удаляется на бесконечность. Примерный вид траекторий в этом случае показан на рис. 79

(кривые  $a$  и  $b$ ). Если энергия близка к  $U_{\max}$ , то частица сделает много оборотов вокруг центра, прежде чем радиальная скорость  $\dot{r}$  изменит знак. Чем ближе энергия к нулю (при фиксированном  $M$  это соответствует увеличению прицельного параметра), тем менее искривлена траектория частицы. При  $E < U_{\max}$  возможно также падение в центр поля частицы, которая движется в области  $r < a$ . Траектория в этом случае изображена на рис. 80.

При  $U_{\min} < E < 0$  частица может также совершать радиальные колебания в области  $c \leq r \leq d$  (рис. 81). Если энергия близка к нулю, то размах радиальных колебаний велик, период их тоже может стать большим. При энергии, близкой к  $U_{\min}$ , траектория близка к окружности радиуса  $r_2$ , причем угол поворота радиуса-вектора за период радиального колебания зависит от величин  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $M$  (ср. с задачей 5.4). При  $E = U_{\min}$  частица движется по указанной окружности.

Подобным же образом можно исследовать движение частицы в остальных случаях.

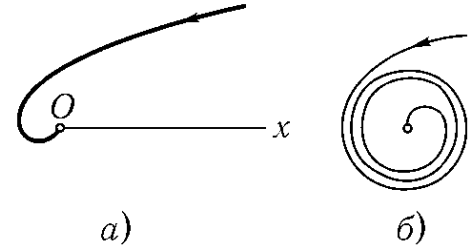


Рис. 77

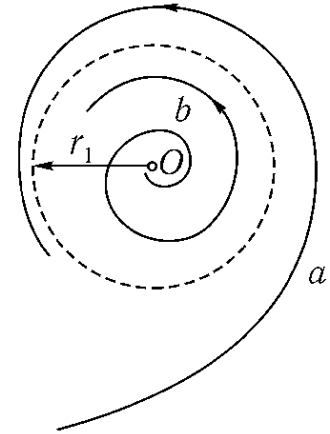


Рис. 78

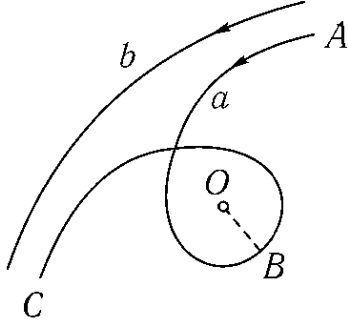


Рис. 79

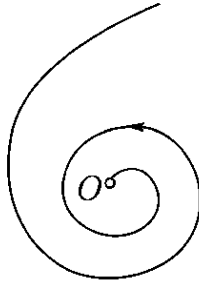


Рис. 80

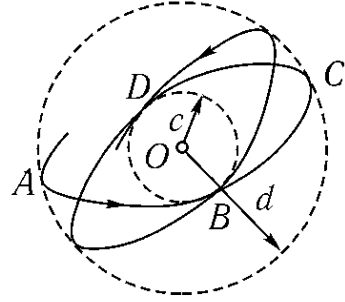


Рис. 81

Какими особенностями может обладать траектория, если  $M^4 = 12\alpha\gamma m^2$ ?

Закон движения и уравнение траектории можно найти, используя уравнения (4), (5). Из (5) получаем

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U_{\text{эфф}}(r)]}, \quad (7)$$

откуда

$$t = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}} + C. \quad (8)$$

Исключив  $dt$  из (7) с помощью (4), найдем уравнение траектории

$$\varphi = \pm \frac{M}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}} + C'. \quad (9)$$

Рассмотрим случай  $M^4 > 12\alpha\gamma m^2$ . Если частица движется к центру, то в (7) (а значит, и в (8)) следует выбрать знак «минус». Пусть  $r = r_0$  при  $t = 0$ , тогда (8) можно переписать в виде

$$t = -\sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}}. \quad (10)$$

Равенство (10) определяет в неявном виде зависимость  $r$  от времени. Если траектория проходит через точку  $r = r_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$ , то уравнение траектории (с учетом выбранного знака) приобретает вид

$$\varphi = -M \int_{r_0}^r \frac{dr}{r^2 |p_r|} + \varphi_0, \quad (11)$$

где

$$|p_r| = \sqrt{2m[E - U_{\text{эфф}}(r)]}.$$



В частности, для частицы, скорость которой на бесконечности составляет с осью  $x$  угол  $\psi$ , нужно положить  $r_0 = \infty$ ,  $\varphi_0 = \pi - \psi$ .

Если  $E > U_{\max}$ , то уравнения (10) и (11) полностью определяют закон движения и траекторию частицы.

Если же  $0 < E < U_{\max}$ , то эти уравнения отвечают только участку  $AB$  траектории (рис. 79, кривая  $a$ ). В точке  $B$  радиальная компонента скорости  $\dot{r}$  обращается в нуль, а затем меняет знак. Поэтому участок траектории  $BC$  описывается уравнением (9) со знаком «плюс», причем постоянную нужно определять заново. Удобно записать (9) в виде

$$\varphi = M \int_{r_{\min}}^r \frac{dr}{r^2 |p_r|} + C'. \quad (12)$$

Нижний предел интеграла мы могли выбрать произвольно, пока не определена постоянная  $C'$ . Согласно (12) имеем

$$C' = \varphi(r_{\min}). \quad (13)$$

Определяя  $\varphi(r_{\min})$  из (11), получаем уравнение участка траектории  $BC$ :

$$\varphi = \left( \int_{r_{\min}}^r - \int_{r_0}^{r_{\min}} \right) \frac{M dr}{r^2 |p_r|} + \varphi_0. \quad (14)$$

Подобным же образом определяем закон движения на участке  $BC$

$$t = \left( \int_{r_{\min}}^r - \int_{r_0}^{r_{\min}} \right) \sqrt{\frac{m}{2}} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}}. \quad (15)$$

Если  $U_{\min} < E < 0$ ,  $a < r_0 < b$ ,  $\dot{r}(0) < 0$ ,  $\varphi|_{t=0} = \varphi_0$ , то уравнение (11) описывает участок траектории  $AB$  (рис. 81). Участок  $BC$  описывается уравнением

$$\varphi = M \int_a^r \frac{dr}{r^2 |p_r|} + \varphi_1, \quad (16)$$

где угол  $\varphi_1$  можно получить, положив в (11)  $r = a$ . Уравнение участка  $CD$

$$\varphi = -M \int_b^r \frac{dr}{r^2 |p_r|} + \varphi_2, \quad (17)$$

где  $\varphi_2$  определяется из (16) при  $r = b$  и т.д. Подставляя в (16) и (17) значения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , представим уравнения участков траектории в виде

$$\varphi = M \left( \int_a^r - \int_{r_0}^a \right) \frac{dr}{r^2 |p_r|} + \varphi_0, \quad (18)$$

$$\varphi = M \left( \int_b^r + \int_a^b - \int_{r_0}^a \right) \frac{dr}{r^2 |p_r|} + \varphi_0 = M \left( - \int_a^r + 2 \int_a^b - \int_{r_0}^a \right) \frac{dr}{r^2 |p_r|} + \varphi_0. \quad (19)$$

Нетрудно убедиться, что уравнение участка траектории, отвечающего  $n$ -му радиальному колебанию (считая участок  $AB$  первым), имеет вид<sup>1</sup>

$$\varphi = M \left( \pm \int_a^r + 2(n-1) \int_a^b - \int_{r_0}^a \right) \frac{dr}{r^2 |p_r|} + \varphi_0. \quad (20)$$

В приведенных формулах предполагается, что угол  $\varphi$  изменяется непрерывно, ограничения  $0 \leq \varphi < 2\pi$  не вводятся. Данному значению  $r$  соответствует бесконечно много значений  $\varphi$  (при различных  $n$  и знаках в формуле (20));  $\varphi$  есть многозначная функция  $r$ . Наоборот, зависимость  $r(\varphi)$  однозначна.

Аналогично можно выразить законы движения и уравнения траектории и в других случаях.

**2.2.** Вне сферы радиуса  $R$  частица движется со скоростью  $\sqrt{2E/m}$ , а внутри — со скоростью  $\sqrt{2(E+V)/m}$ . В зависимости от соотношения  $E$  и  $M$  получаются различные виды траектории.

При  $\frac{M^2}{2mR^2} - V < E < \frac{M^2}{2mR^2}$  частица либо движется внутри сферы, испытывая отражения на границе (рис. 82, а), либо (если, кроме то-

<sup>1</sup> Уравнение траектории (20) можно представить в виде

$$\cos \gamma(\varphi + \alpha) = \left( \gamma M \int_a^r \frac{dr}{r^2 |p_r|} \right),$$

где  $\pi\gamma^{-1} = M \int_a^b \frac{dr}{r^2 |p_r|}$ ,  $\alpha = M \int_{r_0}^a \frac{dr}{r^2 |p_r|} - \varphi_0$ .

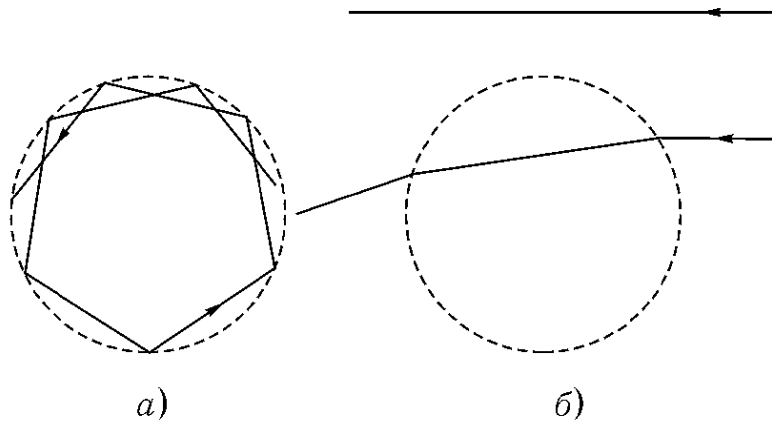


Рис. 82

го,  $E > 0$ ) может двигаться и вне сферы (траектория прямая, рис. 82, б).

При  $\frac{M^2}{2mR^2} < E$  имеет место преломление траектории (рис. 82, б).

Как выглядит траектория при  $E = \frac{M^2}{2mR^2} - V$ ?

**2.3.** Для определения уравнения траектории используем формулы

$$\varphi = \int \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U_{\text{эфф}})}}, \quad U_{\text{эфф}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (1)$$

В результате вычисления<sup>1</sup> получаем

$$r = \frac{p}{e \cos \gamma(\varphi - \psi) - 1}, \quad (2)$$

где

$$p = \frac{2}{\alpha} \left( \beta + \frac{M^2}{2m} \right), \quad e = \sqrt{1 + \frac{4E}{\alpha^2} \left( \beta + \frac{M^2}{2m} \right)}, \quad (3)$$

$\gamma = \sqrt{1 + \frac{2m\beta}{M^2}}$ ,  $E > 0$ ,  $\psi$  — произвольная постоянная.

<sup>1</sup>Интеграл, записанный в виде

$$\frac{\widetilde{M}}{M} \varphi = \int \frac{\widetilde{M} dr}{r^2 \sqrt{2m(E - \widetilde{M}^2/2mr^2 - \alpha/r)}},$$

где  $\widetilde{M}^2 = M^2 + 2m\beta$  сводится к соответствующему интегралу в задаче Кеплера (см. [1], § 15).

Траектория представляет собой кривую, получаемую из гиперболы с помощью уменьшения полярных углов в  $\gamma$  раз (рис. 83). Постоянная  $\psi$  определяет ориентацию траектории.

Направление асимптот определяется условием  $r \rightarrow \infty$ , или  $e \cos(\varphi_{1,2} - \psi) = 1$ . Скорость отклоняется на угол

$$\pi - (\varphi_1 - \varphi_2) = \pi - \frac{2}{\gamma} \arccos \frac{1}{e} = \pi - \frac{2}{\gamma} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{4E}{\alpha^2} \left( \beta + \frac{M^2}{2m} \right)}.$$

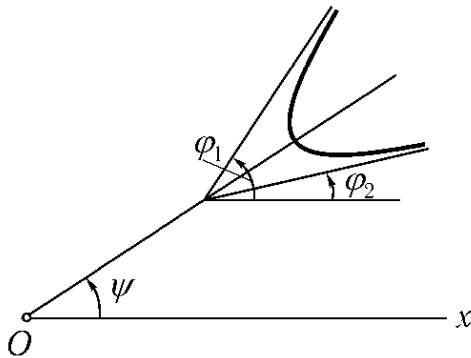


Рис. 83

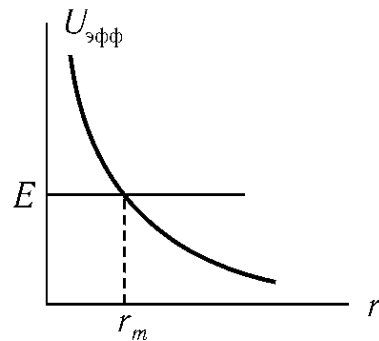


Рис. 84

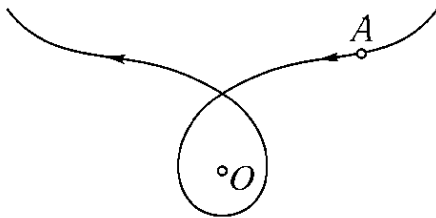


Рис. 85

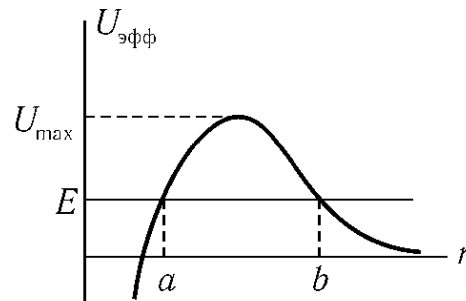


Рис. 86

**2.4.** Полезно прежде всего исследовать характер движения с помощью графика  $U_{эфф}(r)$ . Для случая  $\beta < M^2/2m$  этот график изображен на рис. 84. В этом случае возможно только инфинитное движение в области  $r \geq r_m$ , причем  $E > 0$ . Уравнение траектории такое же, как в задаче 2.3 (уравнение (2)), а в равенствах (3) нужно заменить  $\beta$  на  $-\beta$ . Основное отличие от траектории, найденной в задаче 2.3, возникает вследствие того, что  $\gamma < 1$ . Примерный вид траектории показан на рис. 85. (Точка перегиба A определяется условием  $dU/dr = 0$ , т. е.  $r = 2\beta/\alpha$ .)

Для случая  $\beta > M^2/2m$  график  $U_{эфф}(r)$  приведен на рис. 86.

Если  $E > U_{\max} = \frac{\alpha^2}{4(\beta - M^2/2m)}$ , то частица, летящая из бесконечности, падает в центр поля. Уравнение траектории и в этом случае можно получить из уравнения задачи 2.3. Для этого, кроме замены  $\beta$  на  $-\beta$  нужно заменить  $\psi$  на  $\psi + \pi/2\gamma$ , а затем воспользоваться формулами

$$\sin ix = i \operatorname{sh} x, \quad \sqrt{-x} = i\sqrt{x}.$$

В результате получим

$$r = \frac{p'}{e' \operatorname{sh} \gamma' (\varphi - \psi) + 1}, \quad (1)$$

$$p' = \frac{2}{\alpha} \left( \beta - \frac{M^2}{2m} \right), \quad e' = \sqrt{\frac{4E}{\alpha^2} \left( \beta - \frac{M^2}{2m} \right) - 1}, \quad \gamma' = \sqrt{\frac{2m\beta}{M^2} - 1}. \quad (2)$$

Траектория для этого случая изображена на рис. 87а. Заметим, что при  $r \rightarrow 0$  оказывается  $\varphi \rightarrow \infty$ . Это значит, что частица, падая в центр поля, делает вокруг него бесконечное число оборотов.

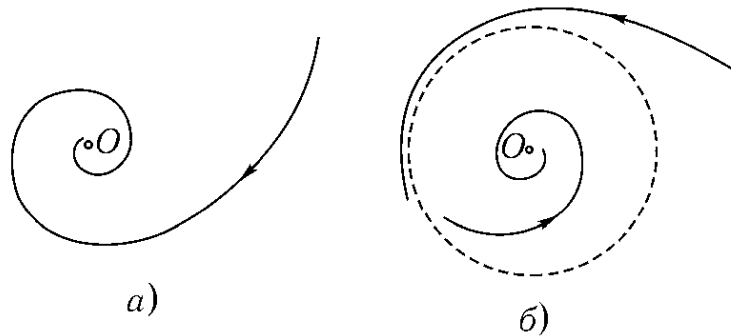


Рис. 87

Если  $E < U_{\max}$ , то, согласно рис. 86, возможно движение либо в области  $b \leq r < \infty$  (рассеяние), либо в области  $0 < r \leq a$  (падение на центр). Уравнение траектории получаем, используя равенство  $\cos ix = \operatorname{ch} x$  (а во втором случае еще и замену  $\psi$  на  $\psi + \pi/\gamma$ ):

$$r = \frac{p'}{1 \mp e'' \operatorname{ch} \gamma' (\varphi - \psi)}, \quad e'' = \sqrt{1 - \frac{4E}{\alpha^2} \left( \beta - \frac{M^2}{2m} \right)}. \quad (3)$$

В случае  $E = U_{\max}$  воспользоваться формулой (2) задачи 2.3 нельзя

(так как при ее выводе предполагалось  $e \neq 0$ ) и нужно вновь брать интеграл (1). Получаем

$$r = \frac{p'}{1 + c \exp(-\gamma' \varphi)},$$

т. е.

$$r = \frac{p'}{1 \pm \exp[-\gamma'(\varphi - \psi)]} \quad \text{или} \quad r = p'$$

в зависимости от начального значения  $r$ . Траектория представляет собой либо спираль, начинающуюся на бесконечности или вблизи от центра и асимптотически приближающуюся к окружности радиуса  $r = p'$ , либо саму эту окружность (рис. 87б).

Наконец, в случае  $\beta = M^2/2m$  также проще вновь взять интеграл. В этом случае происходит рассеяние, а уравнение траектории

$$r = \frac{\alpha/E}{1 - m\alpha^2(\varphi - \psi)^2/2M^2E}.$$

Время падения частицы в центр поля определяем с помощью формулы

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^r \frac{dr}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}}}.$$

Например, для случая, когда траектория имеет вид (2), время падения с расстояния  $r$

$$t = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{m}{2}} \left( \sqrt{Er^2 - \alpha r - \beta - M^2/2m} - \sqrt{\beta - M^2/2m} \right) + \\ + \frac{\alpha}{2E} \sqrt{\frac{m}{2E}} \left( \arcsin \frac{2Er/\alpha - 1}{e'} - \arcsin \frac{1}{e'} \right).$$

## 2.5. Уравнение траектории

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \gamma(\varphi - \psi)}$$

( $p, e, \gamma$  определены в задаче 2.3). При  $E < 0$  движение финитное<sup>1</sup>

$$T_r = \frac{\pi \alpha \sqrt{m}}{(2|E|)^{3/2}}, \quad \Delta \varphi = \frac{2\pi}{\gamma} \quad T_\varphi = \gamma T_r.$$

<sup>1</sup>Период тот же, что и в поле  $U_0 = -\alpha/r$ . Для определения  $T_r$  достаточно заметить, что добавление к полю  $U_0$  добавки  $\beta/r^2$  сказывается на радиальном движении так же, как увеличение  $M$ . Период же  $T_r$  в кулоновском поле  $U_0$  от  $M$  не зависит.

Траектория замкнутая, если  $\gamma$  — рациональное число. На рис. 88 изображена траектория для  $\gamma \approx 5$ .

**2.6.** При  $\beta < M^2/2m$

$$r = \frac{\tilde{p}}{1 - \tilde{e} \cos \tilde{\gamma}(\varphi - \psi)}, \quad \tilde{p} = \frac{2}{\alpha} \left( \frac{M^2}{2m} - \beta \right),$$

$$\tilde{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{2m\beta}{M^2}}, \quad \tilde{e} = \sqrt{1 + \frac{4E}{\alpha^2} \left( \frac{M^2}{2m} - \beta \right)};$$

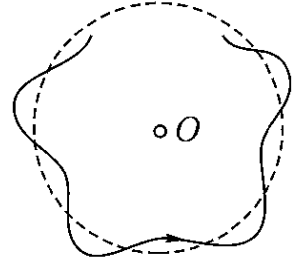


Рис. 88

если  $E < 0$ , то  $\Delta\varphi = 2\pi/\tilde{\gamma}$ ,  $T_\varphi = \tilde{\gamma}T_r$  ( $T_r$  то же, что в задаче 2.5).

При  $\beta > M^2/2m$  (в обозначениях задачи 2.4)

$$r = \frac{p'}{e' \operatorname{sh} \gamma'(\varphi - \psi) - 1}, \quad \text{если } E > U_{\max},$$

$$r = \frac{p'}{e'' \operatorname{ch} \gamma'(\varphi - \psi) - 1}, \quad \text{если } E < U_{\max}.$$

**2.7.** а) Финитное движение возможно, если функция  $U_{\text{эфф}}(r)$  имеет минимум. Уравнение  $U'_{\text{эфф}}(r) = 0$  приводится к виду  $f(x) = M^2 \kappa / \alpha m$ , где  $f(x) = x(x+1)e^{-x}$ ,  $x = \kappa r$ . С помощью графика  $f(x)$  легко убедиться, что это уравнение имеет корни только при условии, что  $M^2 \kappa / \alpha m$  меньше максимального (при  $x > 0$ ) значения  $f(x)$ .

Последнее равно  $(2 + \sqrt{5}) \exp\left(-\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \approx 0,84$ . Итак, финитное движение возможно, если  $M^2 < 0,84\alpha m / \kappa$ .

б) Финитное движение возможно, при  $M^2 < 8mV/e^2 \kappa^2$ .

**2.8.** В уравнении траектории (см. формулу (1) задачи 2.3) при малых  $r$  можем пренебречь величиной  $E$  (при  $n = 2$ ), а при  $n > 2$  — также и членом  $M^2/2mr^2$ . Получаем (рис. 89)

$$\varphi = -\frac{M \ln(r/r_0)}{\sqrt{2m\alpha - M^2}} + \varphi_0 \quad \text{при } n = 2,$$

$$\varphi = \frac{2mr^{-1+n/2}}{\sqrt{2m\alpha}(n-2)} + C \quad \text{при } n > 2.$$

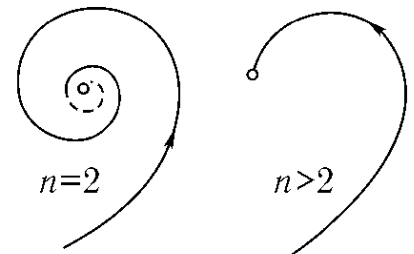


Рис. 89

Число оборотов оказывается бесконечным только при  $n = 2$ .

Время падения в центр конечно, поскольку радиальная скорость при приближении к центру возрастает.

**2.9.** Число оборотов частицы вокруг центра бесконечно только в случае б) при  $E = 0$ ,  $n = 2$ .

**2.10.** Время падения равно  $\pi\sqrt{mR^3/8\alpha}$ .

**2.11.** Относительное движение характеризуется моментом  $M = mvr$  и энергией  $E = \frac{mv^2}{2}$ , где  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  — приведенная масса. Искомое расстояние определяется условием  $U_{\text{эф}}(r_{\min}) = E$ . Простой ответ может быть получен при  $n = 1, 2, 4$ .

**2.12.** Траектории частиц:

$$\frac{m}{m_{1,2}} \frac{p}{r_{1,2}} = 1 \pm e \cos \varphi,$$

где

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad p = \frac{M^2}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}};$$

$E$  и  $M$  — полные энергия и момент системы. Частицы движутся по подобным коническим сечениям с общим фокусом, причем радиусы-векторы частиц в любой момент направлены противоположно (рис. 90).

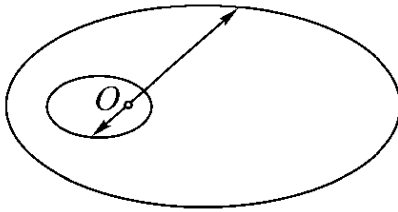


Рис. 90

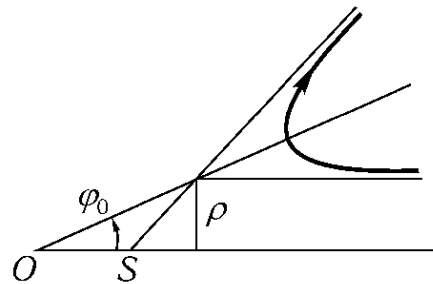


Рис. 91

**2.13.** Как легко видеть на рис. 91,

$$OS = \rho(\operatorname{ctg} \varphi_0 - \operatorname{ctg} 2\varphi_0).$$

Здесь

$$\varphi_0 = \rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - U(r)/E - \rho^2/r^2}}.$$



При  $\rho \rightarrow 0$

$$\varphi_0 = \rho \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - U/E}} - 2\rho^3 E^{3/2} \frac{\partial}{\partial E} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^4 \sqrt{E - U}} + \dots$$

(ср. с задачей 2.23), так что

$$OS = \left( 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - U/E}} \right)^{-1} + O(\rho^2) \dots$$

Точка  $S$  — мнимый фокус пучка рассеянных частиц, так как с точностью до первого порядка по  $\rho$  включительно положение точки пересечения асимптоты траектории с осью пучка не зависит от  $\rho$ .

#### 2.14. Уравнение траектории

$$\frac{p}{r} = e \cos(\varphi - \varphi_0) - 1,$$

где  $p = \frac{M^2}{m\alpha}$ ,  $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ , а  $\varphi_0$  определяется из условия  $\varphi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ :  $\cos \varphi_0 = 1/e$ . Область, недостижимая для частиц, ограничена огибающей семейства траекторий.

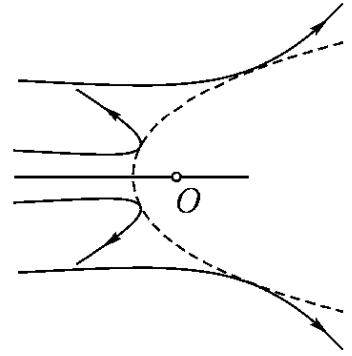


Рис. 92

Для определения ее продифференцируем уравнение траектории

$$\frac{M^2}{m\alpha r} + 1 - \cos \varphi - \frac{M}{\alpha} \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin \varphi = 0 \quad (1)$$

по параметру  $M$ :

$$\frac{2M}{mr} - \sqrt{\frac{2E}{m}} \sin \varphi = 0, \quad (2)$$

и исключим  $M$  из (1) и (2):

$$2\alpha/Er = 1 + \cos \varphi.$$

Итак, недостижимая для частиц область  $r < \frac{2\alpha}{E(1 + \cos \varphi)}$  ограничена параболоидом вращения (рис. 92).

$$2.15. \quad \rho < \frac{2a\delta}{1 - \delta^2 - (1 - \delta)^2 \cos \varphi}, \text{ где } \delta = \frac{mav^2}{2\alpha}, OA = a.$$

**2.16.** Умножим равенство

$$[\mathbf{vM}] - \frac{\alpha \mathbf{r}}{r} = \mathbf{A}$$

скалярно на  $\mathbf{r}$ . Обозначив через  $\varphi$  угол между  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{A}$ , получаем

$$\frac{M^2}{m} - \alpha r = Ar \cos \varphi$$

или  $\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi$ , где  $p = \frac{M^2}{m\alpha}$ ,  $e = \frac{|\mathbf{A}|}{\alpha}$ .

Отметим, что вектор  $\mathbf{A}$  направлен от центра поля к точке  $r = r_{\min}$ .

**2.17.**  $\delta T = -\frac{\partial \delta I}{\partial E}$ , где

$$\delta I = T \langle \delta U \rangle = 2 \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{\delta U(r) dr}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}}$$

(ср. с задачей 1.10). Подобным же образом изменение углового расстояния между последовательными прохождениями точек  $r = r_{\min}$  можно представить в виде  $\delta \Delta \varphi = \frac{\partial \delta I}{\partial M}$  (ср. [1], § 15, задача 3; § 49).

**2.18.** В области  $r \ll D$  поле  $U(r)$  мало отличается от кулоновского  $U_0(r) = -\alpha/r$ . Поэтому траектория финитного движения близка к эллипсу, параметр  $p$  и эксцентриситет  $e$  которого, определяемые постоянными  $E$  и  $M$ , сохраняются, а ориентация изменяется. Скорость поворота эллипса  $\Omega$  определяется смещением перигелия за период  $\Omega = \delta \Delta \varphi / T_0$ , где  $\delta \Delta \varphi$  вычисляем по формуле предыдущей задачи с  $\delta U = \frac{\alpha}{D} - \frac{\alpha r}{2D^2}$ , а  $T_0$  — период в кулоновском поле<sup>1</sup>. В результате вычисления получаем  $\Omega = M/2mD^2$ . Уравнение траектории можно представить в виде

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \gamma \varphi, \quad \gamma = 1 - \frac{\Omega T_0}{2\pi}. \quad (1)$$

Отклонение кривой (1) от истинной траектории — первого порядка малости по  $\delta U$ , т. е. в течение одного периода уравнение (1) описывает траекторию с такой же точностью, как уравнение неподвижного эллипса. Однако уравнение (1) сохраняет ту же точность в течение многих периодов. Поэтому именно это уравнение можно назвать «правильным нулевым приближением».

Иначе говоря, в уравнении (1) учтены только накапливающиеся эффекты первого порядка.

<sup>1</sup> Удобно перейти к интегрированию по  $\xi$ , причем (см. [1], § 15)  $r = \frac{\alpha}{2|E|} (1 - e \cos \xi)$ .

**2.19.** Поле  $U(r) = -\alpha/r^{1+\varepsilon}$  мало отличается от кулоновского, поэтому орбита частицы в этом поле представляет собой медленно прецессирующий эллипс. Разлагая  $U(r)$  по  $\varepsilon$ , представим его в виде  $U(r) = U_0(r) + \delta U$ , где  $U_0(r) = -\frac{\tilde{\alpha}}{r}$ ,  $\delta U = \frac{\varepsilon \tilde{\alpha}}{r} \ln \frac{r}{R}$ ,  $\tilde{\alpha} = \alpha R^{-\varepsilon}$ ,  $R$  — постоянная, равная характерному размеру орбиты.

Смещение перигелия за период  $\delta\Delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M} \int_0^T \delta U dt$  (см. задачу 2.17) вычисляем, сделав замену

$$r = -\frac{\tilde{\alpha}}{2E}(1 - e \cos \xi), \quad t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e \sin \xi), \quad e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\tilde{\alpha}^2}},$$

$T = \pi\tilde{\alpha} \sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}$  (см. [1], § 15). Получаем

$$\begin{aligned} \Omega = \frac{\delta\Delta\varphi}{T} &= \frac{\varepsilon\tilde{\alpha}}{2\pi} \frac{\partial}{\partial M} \int_0^{2\pi} \ln \frac{\tilde{\alpha}(1 - e \cos \xi)}{2|E|R} d\xi = \\ &= -\frac{\varepsilon|E|}{\pi} \frac{\partial e}{\partial M} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \xi d\xi}{1 - e \cos \xi} = \frac{2\pi}{T} \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e^2} \varepsilon. \end{aligned}$$

При  $\varepsilon > 0$  направление прецессии орбиты совпадает с направлением движения частицы по орбите, а при  $\varepsilon < 0$  — противоположно ему.

$$\mathbf{2.20 а.} \quad \Omega = -\frac{3}{2} \frac{\beta}{m\omega} \frac{a^2 + b^2}{a^4 b^4} \frac{M}{|M|}.$$

**2.20 б.** Функция Лагранжа

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{mg}{2l} (x^2 + y^2) + \frac{m}{2} \frac{x^2 + y^2}{l^2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \\ &= \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{mg}{2l} r^2 + \frac{mr^2}{2l^2} \dot{r}^2. \end{aligned}$$

Если пренебречь последним слагаемым, то задачу о движении частицы удобно решать в декартовых координатах. Это приводит к гармоническим колебаниям с частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

по осям  $x$  и  $y$ , т. е. к эллиптической траектории (ср. [1], задача 3 к § 21). Точное уравнение траектории удобно получить в цилиндрических координатах, используя интегралы движения  $E$  и  $\mathbf{M} = (0, 0, M)$ :

$$\varphi = \int \frac{M \sqrt{1 + r^2/l^2} dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U_{\text{эфф}})}}, \quad U_{\text{эфф}} = \frac{mgr^2}{2l} + \frac{M^2}{2mr^2}.$$

Разложение

$$\sqrt{1 + \frac{r^2}{l^2}} = 1 + \frac{r^2}{2l^2} + \dots$$

приводит к уравнению

$$\varphi = \int \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m(E - U_{\text{эфф}})}} + \frac{M}{2ml^2} \int \frac{dr}{\sqrt{2m(E - U_{\text{эфф}})}} = \varphi_0(r) + \Omega t,$$

где  $\varphi_0(r)$  соответствует движению по эллипсу, а

$$\Omega = \frac{M}{2ml^2} = \frac{ab}{2l^2} \omega$$

определяет его прецессию.

## 2.21. Функция Лагранжа системы Земля–Луна

равна

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{\mathbf{R}}_1^2 + \frac{m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}_2^2 + \frac{\gamma m_0 m_1}{R_1} + \frac{\gamma m_0 m_2}{R_2} + \frac{\gamma m_1 m_2}{|\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2|},$$

где  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  — радиус-векторы Земли и Луны в гелиоцентрической системе координат,  $m_1, m_2$  — их массы,  $m_0$  — масса Солнца,  $\gamma$  — гравитационная постоянная. Введем координаты центра масс Земли и Луны (точка  $O$  на рис. 93 а) и их взаимного расстояния

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1,$$

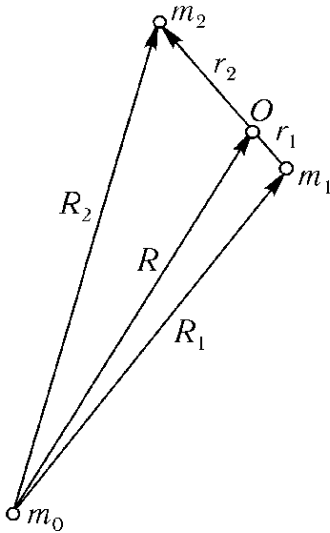


Рис. 93 а

тогда

$$\mathbf{R}_{1,2} = \mathbf{R} + \mathbf{r}_{1,2}, \quad \mathbf{r}_{1,2} = \mp \frac{m}{m_{1,2}} \mathbf{r},$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \approx m_2.$$

Используя разложение

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{2\mathbf{R}\mathbf{r}_i}{R^2} + \frac{r_i^2}{R^2} \right)^{-1/2} = \frac{1}{R} - \frac{\mathbf{R}\mathbf{r}_i}{R^3} + \frac{1}{2R^3} \left[ 3 \frac{(\mathbf{R}\mathbf{r}_i)^2}{R^2} - r_i^2 \right] + \dots$$

и учитывая, что

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = 0, \quad m_1r_1^2 \ll m_2r_2^2 \approx m_2r^2,$$

получаем

$$L = L_1 + L_2 - \delta U, \quad (1)$$

$$L_1 = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{\gamma m_0(m_1 + m_2)}{R},$$

$$L_2 = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{\gamma m_1 m_2}{r}, \quad \delta U = -\frac{\gamma m_0 m}{2R^3} \left[ 3 \frac{(\mathbf{R}\mathbf{r})^2}{R^2} - r^2 \right].$$

Без учета  $\delta U$  задачи о движении центра масс  $O$  и относительном движении разделяются и сводятся к задаче Кеплера (мы будем говорить далее просто о движениях Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли).

а) В задаче о движении Земли вокруг Солнца малость  $\delta U$  характеризуется отношением

$$\frac{\delta U}{(\gamma m_0 m_1 / R)} \sim \frac{m_2 r^2}{m_1 R^2} \sim 10^{-6}.$$

Считая орбиту Луны окружностью радиуса  $r$ , лежащей в плоскости орбиты Земли, имеем

$$\delta U = -\frac{2\beta}{R^3} (3 \cos^2 \chi - 1), \quad \beta = \frac{1}{4} \gamma m_0 m_2 r^2, \quad (2)$$

где  $\chi$  — угол между векторами  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$ . Этот угол меняется на  $2\pi$  за 29,5 суток (синодический месяц — промежуток времени между новолуниями). Усредняем (2) за этот промежуток, что приводит к замене  $\cos^2 \chi \rightarrow \frac{1}{2}$ .

В итоге

$$\delta U = -\frac{\beta}{R^2}.$$

Смещение перигелия за год (см. [1], задача 3 к §15)

$$\delta\varphi = \frac{6\pi\beta}{\alpha_1 R^2} = \frac{3\pi m_2}{2m_1} \left( \frac{r}{R} \right)^2, \quad \alpha_1 = \gamma m_0 m_1.$$

Смещение перигелия за столетие

$$100\delta\varphi = 7,7''.$$

Следует заметить, что полное смещение перигелия Земли за столетие, равное  $1158''$ , обусловлено главным образом влиянием Юпитера и Венеры.

Интересно, что оценка релятивистской поправки дает величину

$$\sim 100 \cdot 2\pi \left(\frac{V}{c}\right)^2 \sim 1'', \quad V \approx 30 \text{ км/с}$$

(см. [2] §39 и §101).

б) Исследуя движение Луны вокруг Земли, также можно считать  $\delta U$  малой добавкой к  $L_2$ :

$$\frac{\delta U}{(\gamma m_1 m_2 / r)} \sim \frac{\Omega^2}{\omega^2} \sim 10^{-2}, \quad \Omega^2 = \frac{\gamma m_0}{R^3}, \quad \omega^2 = \frac{\gamma m_1}{r^3}.$$

Здесь период  $2\pi/\omega = 27,3$  суток — звездный (сидерический) месяц, а период  $2\pi/\Omega$  равен 1 году. Добавка  $\delta U$  приводит к различным искажениям

орбиты Луны — пульсациям эксцентриситета, смещению перигелия (ср. с задачей 2.38 б) и др. Мы рассмотрим лишь одно из них, пренебрегая их взаимным влиянием и принимая невозмущенную орбиту Луны за окружность; принимаем также  $R = \text{const}$ .

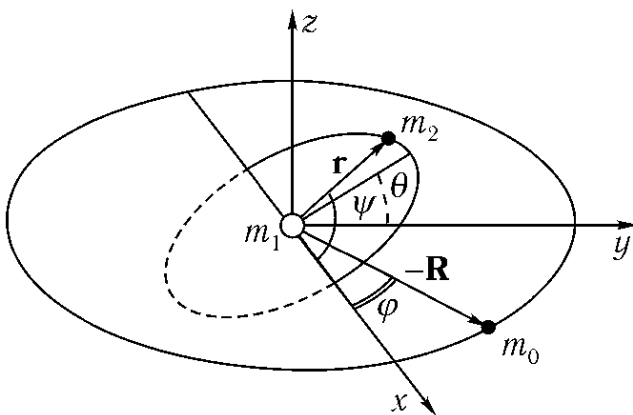


рис. 93 б

Введем геоцентрическую систему координат  $Oxyz$  с осью  $x$ , направленной вдоль линии пересечения плоскости орбиты Луны с плоскостью орбиты Земли (линия лунных узлов), осью  $y$ , лежащей в плоскости орбиты Земли, и осью  $z$ , перпендикулярной этой плоскости и направленной в северную небесную полусферу (рис. 93 б). Координаты Солнца в этой системе равны

$$-\mathbf{R} = R(\cos \varphi, \sin \varphi, 0), \quad \varphi = \Omega t + \varphi_0,$$

а координаты Луны равны

$$\mathbf{r} = r(\cos \psi, \cos \theta \sin \psi, \sin \theta \sin \psi), \quad \psi = \omega t + \psi_0,$$

где  $\varphi_0$  и  $\psi_0$  определяются моментами прохождения Солнца и Луны через ось  $x$ .

Усреднение величины

$$(\mathbf{Rr})^2 = R^2 r^2 (\cos \varphi \cos \psi + \cos \theta \sin \varphi \sin \psi)^2$$

за месяц сводится к заменам

$$\cos^2 \psi \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sin^2 \psi \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sin \psi \cos \psi \rightarrow 0,$$

так что

$$\langle (\mathbf{Rr})^2 \rangle_{\text{месяц}} = \frac{1}{2} R^2 r^2 (\cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi), \quad (3)$$

а усреднение за год — к заменам

$$\cos^2 \varphi \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \sin^2 \varphi \rightarrow \frac{1}{2},$$

что дает

$$\langle (\mathbf{Rr})^2 \rangle = \frac{1}{4} R^2 r^2 (1 + \cos^2 \theta).$$

В итоге

$$\langle \delta U \rangle = -\frac{\gamma m_0 m \Omega^2}{8 R^3} r^2 (3 \cos^2 \theta - 1).$$

За поворотом плоскости орбиты можно проследить, рассматривая движение вектора момента импульса  $\mathbf{M} = m[\mathbf{r} \dot{\mathbf{r}}]$ , перпендикулярного этой плоскости. Уравнение его движения  $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{K}$ , где

$$\mathbf{K} = - \left[ \mathbf{r} \frac{\partial \delta U}{\partial \mathbf{r}} \right]$$

— момент сил, действующих на Луну. Поскольку изменение угла  $\theta$  есть поворот вокруг оси  $x$ , то

$$K_x = -\frac{\partial \delta U}{\partial \theta},$$

т. е.

$$\langle \mathbf{K} \rangle = \left( -\frac{3\gamma m_0 m \Omega^2}{4 R^3} r^2 \sin \theta \cos \theta, 0, 0 \right).$$

Так как момент сил  $\langle \mathbf{K} \rangle$  перпендикулярен вектору  $\mathbf{M}$ , он приводит лишь к его повороту. При этом поворачиваются и оси  $x, y$ , так что угловая скорость  $\Omega_{\text{п}}$  прецессии вектора  $\mathbf{M}$  направлена вдоль оси  $z$ . Ее можно найти из условия

$$[\Omega_{\text{п}} \mathbf{M}] = \langle \mathbf{K} \rangle,$$

что дает

$$(\Omega_{\text{п}})_z = -\frac{\langle K_x \rangle}{M_y} = \frac{\langle K_x \rangle}{m\omega r^2 \sin \theta} = -\frac{3\Omega^2}{2\omega} \cos \theta \approx -\frac{\Omega}{17,3}.$$

Таким образом мы нашли, что период прецессии орбиты Луны составляет  $2\pi/\Omega_{\text{п}} = 17,3$  года. Это движение называется отступлением лунных узлов. Истинное значение этого периода 18,6 года. Учитывая грубость сделанных нами приближений, можно признать хорошим согласие нашего результата с истинным.

Этот период определяет период повторения циклов солнечных и лунных затмений. Его (точнее, его утроенное значение, содержащее целое число 19 765 суток) знали еще жрецы древнего Вавилона.

Заметим, что ограничившись усреднением за месяц, т. е. используя (3), мы обнаружили бы неравномерность прецессии в течение года:

$$\Omega_{\text{п}} \rightarrow \left(1 - \frac{1}{2} \cos 2\varphi\right) \Omega_{\text{п}}.$$

**2.22.** Аналогично задаче 2.18 имеем

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{\partial}{\partial M} \langle \delta U \rangle = \frac{a}{2} \frac{\partial e^2}{\partial M} \left[ \delta U'(a) + \frac{a}{2} \delta U''(a) \right] = \\ &= -\sqrt{\frac{a}{m\alpha}} \left[ \delta U'(a) + \frac{a}{2} \delta U''(a) \right] \frac{M}{|M|}. \end{aligned}$$

Учет следующих членов разложения  $\delta U$  по  $(r - a)$  даст в  $\Omega$  вклад  $\lesssim e^2 \Omega$ .

**2.23.** Смещение перигелия за период можно представить в виде

$$\Delta\varphi = -\frac{4}{3} \sqrt{2m} \frac{\partial^2}{\partial M \partial E} \int_{r_1+\delta r_1}^{r_2+\delta r_2} (E - U_{\text{эфф}} - \delta U)^{3/2} dr.$$



С точностью до второго порядка по  $\delta U$  имеем

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= 2\pi + \delta_1\varphi + \delta_2\varphi, \\ \delta_1\varphi &= T \frac{\partial}{\partial M} \langle \delta U \rangle, \\ \delta_2\varphi &= -\frac{\partial^2}{2\partial M \partial E} [T \langle (\delta U)^2 \rangle],\end{aligned}$$

где  $\langle f \rangle$  — среднее значение функции  $f(r)$  за период  $T$  невозмущенного движения (ср. с задачей 2.17). Скорость прецессии

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{\delta_1\varphi + \delta_2\varphi}{T + \delta T} = \frac{\delta_1\varphi}{T} + \frac{\delta_2\varphi}{T} - \frac{\delta_1\varphi \delta T}{T^2}, \\ \delta T &= -\frac{\partial}{\partial E} (T \langle \delta U \rangle).\end{aligned}$$

**2.24.** Представим уравнение траектории

$$\varphi = \int \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m \left( E - \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} - \frac{\gamma}{r^3} \right)}}, \quad (1)$$

разлагая подынтегральное выражение по  $\delta U = \gamma/r^3$ , в виде

$$\varphi = \varphi_0(r) + \delta\varphi(r), \quad (2)$$

где

$$\varphi_0(r) = \int \frac{M dr}{r^2 \sqrt{2m \left( E - \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} \right)}}, \quad (3)$$

$$\delta\varphi(r) = \int \frac{\gamma M dr}{r^5 \sqrt{2m \left( E - \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r} \right)}^3}. \quad (4)$$

Пренебрегая в (2) поправкой  $\delta\varphi(r)$ , получим, разумеется, уравнение траектории в кулоновском поле (см. [1], § 15)

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi, \quad (5)$$

где  $p = \frac{M^2}{m\alpha}$ ,  $e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$ . Учитывая же в (2) поправку  $\delta\varphi(r)$ , получим вместо (5)

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos(\varphi - \delta\varphi(r)). \quad (6)$$

В правой части (6) можно провести разложение по  $\delta\varphi(r)$ , а также подставить в  $\delta\varphi(r)$  зависимость  $r = r_0(\varphi)$ , определяемую, согласно (5),

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \varphi + e \delta\varphi(r_0(\varphi)) \sin \varphi. \quad (7)$$

Вычисляя<sup>1</sup> интеграл (4), находим

$$\delta\varphi(r_0(\varphi)) = \frac{m^2\alpha\gamma}{M^4} \left\{ -3\varphi - \frac{2e^2 + 1}{e} \sin \varphi - \frac{1 + e \cos \varphi}{e^2 \sin \varphi} [2e + (e^2 + 1) \cos \varphi] \right\}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), с точностью до первого порядка по  $\zeta = \frac{m^2\alpha\gamma}{M^4}$  получаем

$$\begin{aligned} \frac{p}{r} = 1 + e \cos[(1 + 3\zeta)\varphi] + \zeta \frac{2e^2 + 1}{e} \sin^2 \varphi - \\ - \zeta \frac{1 + e \cos \varphi}{e} [2e + (e^2 + 1) \cos \varphi] \quad (9a) \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Удобно представить (4) в виде

$$\delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M} \int \frac{\sqrt{2m\gamma} dr}{r^3 \sqrt{E - \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\alpha}{r}}}$$

и перейти к интегрированию по  $\varphi$  согласно (5):

$$\begin{aligned} \delta\varphi = \frac{\partial}{\partial M} \frac{m^2\gamma\alpha}{M^3} \int (1 + e \cos \varphi) d\varphi = \\ = -\frac{3m^2\gamma\alpha}{M^4} (\varphi + e \sin \varphi) + \frac{m^2\gamma\alpha}{M^3} \frac{\partial e}{\partial M} \sin \varphi + \frac{m^2\gamma\alpha}{M^3} \frac{\partial \varphi}{\partial M} (1 + e \cos \varphi). \quad (8') \end{aligned}$$

Находя из (5)

$$\frac{2M}{m\alpha^2 r} = \frac{\partial e}{\partial M} \cos \varphi - e \frac{\partial \varphi}{\partial M} \sin \varphi, \quad \frac{\partial e}{\partial M} = \frac{e^2 - 1}{eM}$$

и подставляя в (8'), получаем (8).

или

$$\begin{aligned}
\frac{p'}{r} &= 1 + e' \cos \lambda \varphi + f \cos 2\varphi, \\
\lambda &= 1 + 3\zeta, \\
p' &= p \left( 1 + \zeta \frac{e^3 - 2e^2 + 5e - 1}{2e} \right), \\
e' &= e \left( 1 + \zeta \frac{e^4 - 2e^3 - e^2 - 2}{2e^2} \right), \\
f &= -\zeta \frac{e^3 + 2e^2 + e + 1}{2e}.
\end{aligned} \tag{96}$$

Вблизи  $\varphi = 0, \pi$  разложение (2) становится неприменимым, так как  $\delta\varphi$  неограниченно возрастает. Однако уравнение траектории (9) справедливо и в этих областях (ср. с задачей (1.8)).

В случае инфинитного движения ( $E \geq 0$ ) уравнение (9) решает задачу. Если же  $E < 0$ , то (9) есть уравнение траектории лишь на нескольких оборотах<sup>1</sup>, пока остается  $3\zeta\varphi \ll 1$ . Сохраняя в (8) только накапливающуюся часть  $\delta\varphi = -3\zeta\varphi$ , получаем уравнения

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \lambda \varphi, \quad \lambda = 1 + 3\zeta, \tag{10}$$

описывающие траекторию на большом участке («правильное», в отличие от (5), нулевое приближение; ср. с задачей 2.18). Нетрудно также видоизменить уравнение (9) так, чтобы оно описывало траекторию на большом участке с точностью до первого порядка включительно:

$$\frac{p'}{r} = 1 + e' \cos \lambda \varphi + f \cos 2\lambda \varphi. \tag{11}$$

**2.25.** Достаточно убедиться, что выраженная через координаты центра масс  $\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$  и относительного движения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$  функция Лагранжа разбивается на две части:

$$\begin{aligned}
L &= L_1(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) + L_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \\
L_1(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}) &= \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + (e_1 + e_2) \mathcal{E} \mathbf{R}, \\
L_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) &= \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{e_1 e_2}{r} + m \left( \frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2} \right) \mathcal{E} \mathbf{r}.
\end{aligned}$$

<sup>1</sup>В частности, радиус-вектор  $\mathbf{r}$  должен быть периодической функцией  $\varphi$ .

Функция  $L_1(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}})$  определяет движение центра масс, происходящее так же, как движение частицы с массой  $m_1 + m_2$  и зарядом  $e_1 + e_2$  в однородном поле. Относительное движение, определяемое  $L_2(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ , происходит так же, как движение частицы с массой  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  (приведенная масса) в кулоновском и однородном полях.

Такой же результат можно получить, конечно, и исходя из уравнений движения частиц.

**2.26.**  $L = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1^2 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2^2}{2} + \frac{e_1}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_1) \dot{\mathbf{r}}_1 + \frac{e_2}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r}_2) \dot{\mathbf{r}}_2$ . Функция Лагранжа разбивается на две части, содержащие только  $\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}$  и  $\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}$  (обозначения задачи 2.25), если  $\frac{e_1}{m_1} = \frac{e_2}{m_2}$ :

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{e_1 + e_2}{c} \mathbf{A}(\mathbf{R}) \dot{\mathbf{R}} + \frac{m}{4} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e_1 m_1^2 + e_2 m_2^2}{c(m_1 + m_2)^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \dot{\mathbf{r}}.$$

**2.27.**  $T = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \mu_n \dot{\xi}_n^2, \quad \mathbf{p} = \mu_N \dot{\xi}_N, \quad \mathbf{M} = \sum_{n=1}^N \mu_n [\xi_n, \dot{\xi}_n],$  где

$$\frac{1}{\mu_n} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n m_k} + \frac{1}{m_{n+1}} \quad (n = 1, \dots, N-1), \quad \mu_N = \sum_{k=1}^N m_k.$$

**2.28.** Обозначим координаты летевшей и покоившейся вначале частиц через  $x_1$  и  $x_2$ . Пусть в начальный момент  $x_1 = -R, x_2 = 0$ . Центр масс системы движется по закону  $X = -\frac{R}{2} + \frac{vt}{2}$ . Относительное движение с координатой  $x = x_2 - x_1$  происходит по закону

$$t = -\sqrt{\frac{m}{4}} \int_R^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{mv^2}{4} - \frac{\alpha}{x^n}}}.$$

Закон движения первой частицы

$$x_1 = X - \frac{x}{2} = -\frac{R}{2} + \frac{1}{2} \int_x^R \frac{dx}{\sqrt{1 - 4\alpha/mv^2 x^n}} - \frac{x}{2}.$$

Расстояние между частицами уменьшается до величины  $x_{\min} = \left(\frac{mv^2}{4\alpha}\right)^{1/n}$ , а затем вновь возрастает. Когда оно вновь станет равно  $R$ , первая частица окажется в точке

$$x_{1f} = x_{\min} \left[ \int_1^{R/x_{\min}} \left( \frac{1}{\sqrt{1-z^{-n}}} - 1 \right) dz - 1 \right]. \quad (1)$$

Точка остановки налетевшей частицы есть предел  $x_{1f}$  при  $R \rightarrow \infty$ .

Если  $n \leq 1$ , то  $x_{1f} \rightarrow \infty$  при  $R \rightarrow \infty$ , т. е. обе частицы после столкновения уходят на бесконечность.

### 2.30. Уравнение движения

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{eg}{cr^3}[\mathbf{vr}] \quad (1)$$

имеет интегралы

$$\frac{mv^2}{2} = E, \quad (2)$$

$$m[\mathbf{rv}] - \frac{eg}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} = \mathbf{J}. \quad (3)$$

Умножив (1) скалярно на  $\mathbf{r}$ , получаем  $\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}} = 0$  или  $\frac{d}{dt} \frac{r^2}{2} - v^2 = 0$ , откуда

$$r^2 = r_0^2 + v^2(t - t_0)^2. \quad (4)$$

Умножив (3) скалярно на  $\mathbf{r}/r$ , получаем

$$-\frac{eg}{c} = J \cos \theta, \quad (5)$$

где  $\theta$  — полярный угол в сферической системе координат с осью  $z$ , параллельной вектору  $\mathbf{J}$ . Проекция (3) на ось  $z$

$$mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta - \frac{eg}{c} \cos \theta = J$$

совместно с (5) дает

$$\dot{\varphi} = \frac{J}{mr^2}. \quad (6)$$

При  $t = t_0$  имеем  $v = r_0\dot{\varphi} \sin \theta$  и из (6) следует  $J = \frac{mr_0v}{\sin \theta}$ , и с учетом (5)

$$\operatorname{tg} \theta = -\frac{mr_0vc}{eg}. \quad (7)$$

Интегрируя уравнение  $\dot{\varphi} = \frac{r_0 v}{\sin \theta \cdot r^2(t)}$ , получаем

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{\sin \theta} \operatorname{arctg} \frac{v(t - t_0)}{r_0}. \quad (8)$$

Таким образом, частица движется с постоянной скоростью  $v$  по поверхности конуса  $\theta = \text{const}$ . Введя

$$\psi = (\varphi - \varphi_0) \sin \theta, \quad (9)$$

перепишем (8) в виде

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{v(t - t_0)}{r_0}. \quad (10)$$

Равенства (4), (9) и (10) можно интерпретировать следующим образом: движение точки по развертке конуса оказывается равномерным и прямолинейным, причем  $r$  и  $\psi$  — полярные координаты в плоскости развертки.

**2.31.** Движение заряженной частицы в электромагнитном поле определяется функцией Лагранжа

$$L = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c}\mathbf{v}\mathbf{A}, \quad (1)$$

где  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  — скалярный и векторный потенциалы (см. [2], § 16, 17).

Используя цилиндрические координаты, имеем

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) + \frac{e}{c} \frac{mr^2\dot{\varphi}}{(r^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

Из уравнения движения для  $z$

$$m\ddot{z} + \frac{3e}{2c} \frac{mr^2\dot{\varphi}}{(r^2 + z^2)^{5/2}} = 0 \quad (3)$$

видно, что при  $z = 0$  компонента силы, параллельная оси  $z$ , обращается в нуль. Поэтому, если  $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ , то траектория частицы лежит в плоскости  $z = 0$ . Так как  $\varphi$  является циклической координатой, имеем

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} + \frac{em}{cr} = p_\varphi = \text{const}. \quad (4)$$

Отсюда видно, что  $p_\varphi$  в случае инфинитного движения есть значение  $M_z$  при  $r \rightarrow \infty$ . Кроме того, выполняется закон сохранения энергии (так как  $\partial L / \partial t = 0$ ):

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) = E. \quad (5)$$

Исключая из (5)  $\dot{\varphi}$  с помощью (4), находим

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 + U_{\text{эфф}}(r) = E, \quad (6)$$

где

$$U_{\text{эфф}}(r) = \frac{1}{2mr^2} \left( p_\varphi - \frac{em}{cr} \right)^2. \quad (7)$$

Таким образом, движение вдоль радиуса происходит так же, как одномерное в поле  $U_{\text{эфф}}(r)$ .

Графики  $U_{\text{эфф}}(r)$  для случаев  $p_\varphi < 0$  и  $p_\varphi > 0$  изображены на рис. 94, а и б соответственно.

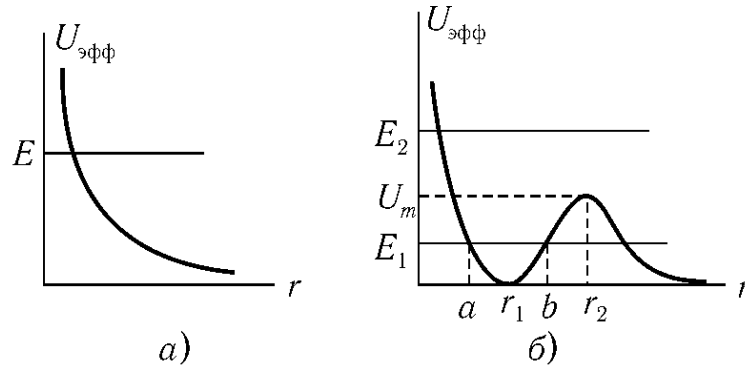


Рис. 94

В случае  $p_\varphi < 0$  для любой энергии  $E > 0$  движение инфинитно. Для того, чтобы качественно изобразить траекторию, полезно выразить из (4)

$$\dot{\varphi} = -\frac{|p_\varphi|}{mr^2} - \frac{em}{mcr^3}. \quad (8)$$

Скорость поворота радиуса-вектора частицы имеет все время одно и то же направление и возрастает с приближением к диполю.

Примерный вид траектории показан на рис. 95 (кривая 1). Траектория симметрична относительно прямой, соединяющей центр поля с точкой  $r = r_{\min}$ .

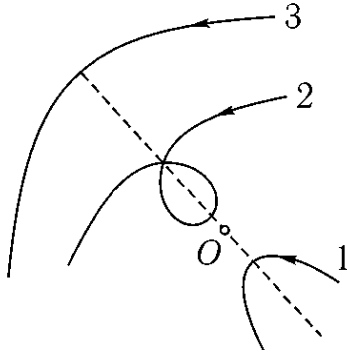


Рис. 95

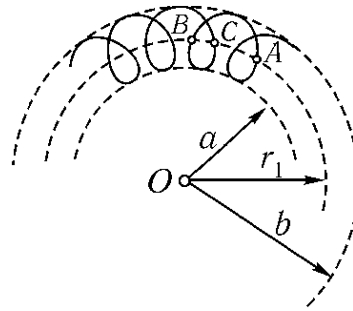


Рис. 96

В случае  $p_\varphi > 0$  возможно рассеяние частиц любой энергии  $E > 0$ , а при  $E < U_m = \frac{c^2 p_\varphi^4}{32ne^2 m^2}$  ( $E = E_1$  на рис. 94, б) возможно также финитное движение. Из равенства

$$\dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2} - \frac{em}{mcr^3}$$

следует, что  $\dot{\varphi} > 0$  при  $r > r_1 = \frac{em}{cp_\varphi}$  и  $\dot{\varphi} < 0$  при  $r < r_1$ . При  $r = r_1$  частица имеет «точки остановки» по  $\varphi$ .

Частица с энергией  $E > U_m$  ( $E = E_2$  на рис. 94, б) рассеивается, причем в двух точках  $r = r_1$  ее скорость параллельна радиусу-вектору (рис. 95, кривая 2).

При  $E < U_m$  возможно рассеяние без точек остановки по  $\varphi$  (рис. 95, кривая 3) или финитное движение в кольце  $a \leq r \leq b$  (рис. 96). В последнем случае частица в течение периода совершает как прямое (участок AB), так и «попятное» (участок BC) движение по  $\varphi$ .

**2.32.** а) Удобно использовать цилиндрические координаты, а векторный потенциал выбрать в виде  $A_\varphi = \frac{1}{2}r\mathcal{H}$ ,  $A_z = A_r = 0$ . Движение в направлении оси  $z$  равномерное, а в плоскости, перпендикулярной к оси  $z$ , — финитное. Проекция траектории на эту плоскость изображена на рис. 97. Траектории  $a$ ,  $b$ ,  $в$  отвечают условию<sup>1</sup>  $p_\varphi > 0$  и соответственно  $U_1 < E_\perp < U_2$ ,  $E_\perp = U_2$ ,  $U_2 < E_\perp$ , где  $E_\perp = E - \frac{mv_z^2}{2}$ ,  $U_1 = (\tilde{\Omega} - \Omega)p_\varphi$ ,

<sup>1</sup>Для определенности считаем  $\mathcal{H} > 0$ ,  $p_\varphi$  — обобщенный импульс, соответствующий координате  $\varphi$ .



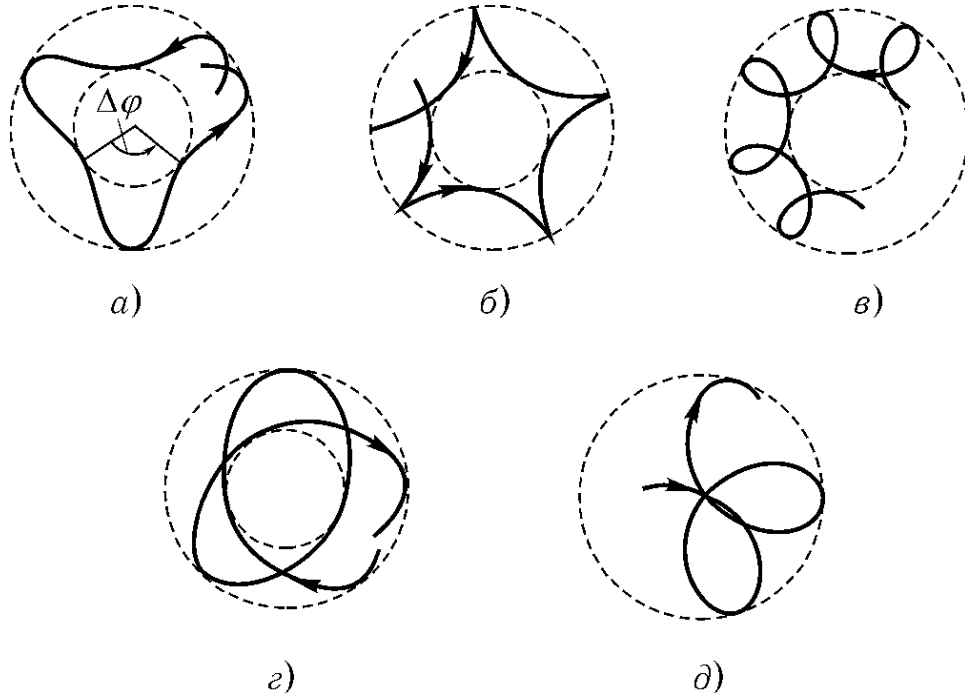


Рис. 97

$U_2 = \frac{\lambda p_\varphi}{2\Omega}$ ,  $\Omega = \frac{e\mathcal{H}}{2mc}$ ,  $\tilde{\Omega} = \sqrt{\Omega^2 + \lambda}$ . Для  $p_\varphi < 0$  траектория приведена на рис. 97, а, для  $p_\varphi = 0$  — на рис. 97, б.

Закон движения частицы в этой плоскости легко найти, зная движение свободного изотропного осциллятора с частотой  $\tilde{\Omega}$  (см. [1], § 23, задача 3)

$$r^2 = a^2 \cos^2 \tilde{\Omega}t + b^2 \sin^2 \tilde{\Omega}t, \quad \varphi = -\Omega t + \text{Arctg}\left(\frac{b}{a} \text{tg } \tilde{\Omega}t\right).^1$$

Здесь минимальный ( $b$ ) и максимальный ( $a$ ) радиусы определяются энергией  $E = \frac{m\tilde{\Omega}^2}{2}(a^2 + b^2) - p_\varphi\Omega$  и импульсом  $p_\varphi = m\tilde{\Omega}ab$ , а начала отсчета  $t$  и  $\varphi$  выбраны так, что  $\varphi(0) = 0$ ,  $r(0) = a$ . Интересно, что период радиальных колебаний  $T = \pi/\tilde{\Omega}$  не зависит от  $E$  и  $p_\varphi$ . Угол поворота радиуса-вектора за этот период  $\Delta\varphi = \pi(\pm 1 - \Omega/\tilde{\Omega})$  для  $p_\varphi \gtrless 0$  и  $\Delta\varphi = -\Omega/\tilde{\Omega}$  для  $p_\varphi = 0$  не зависит от  $E$ .<sup>2</sup>

Как изменится движение частицы, если  $\lambda < 0$ ?

Интересно сопоставить движение частицы в этой задаче с движением в скрещенных электрическом и магнитном полях (см. [3], § 22).

<sup>1</sup>Ветви  $\text{Arctg}\left(\frac{b}{a} \text{tg } \tilde{\Omega}t\right)$  нужно выбирать так, чтобы угол  $\varphi$  был непрерывной функцией  $t$ .

<sup>2</sup>Другой способ решения приведен в задаче 6.36.

## 2.33. Уравнение траектории

$$\varphi = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\left(\frac{p_\varphi}{mr^2} - \Omega\right) dr}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(r)}}, \quad (1)$$

где  $\Omega = \frac{e\mathcal{H}}{2mc}$ ,

$$U_{\text{эфф}}(r) = -\frac{\alpha}{r} + \frac{mr^2}{2} \left( \Omega - \frac{p_\varphi}{mr^2} \right)^2.$$

Качественно характер движения можно исследовать, используя графики  $U_{\text{эфф}}(r)$ . При этом нужно обращать внимание на то, что  $\dot{\varphi}$  меняет знак, когда  $r$  проходит через значение  $r_0 = \sqrt{\frac{p_\varphi}{m\Omega}}$ . В результате получаем траектории, приведенные на рис. 97, а–д.<sup>1</sup> Различные траектории на рисунках соответствуют следующим условиям:

а)  $p_\varphi > 0$ ,  $U_{\min} < E < U_0$ , где  $U_{\min}$  — минимальное значение  $U_{\text{эфф}}(r)$ ,  $U_0 = U_{\text{эфф}}(r_0)$ ;

б)  $p_\varphi > 0$ ,  $E = U_0$ ;

в)  $p_\varphi > 0$ ,  $E > U_0$ ;

г)  $p_\varphi < 0$ ;

д)  $p_\varphi = 0$ . В последнем случае частица падает в центр на первом же витке.

Рассмотрим подробнее два предельных случая.

Уравнение (1) представим в виде

$$\varphi = \frac{p_\varphi}{\sqrt{2m}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{E + p_\varphi \Omega + \frac{\alpha}{r} - \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{m\Omega^2 r^2}{2}}} - \Omega t. \quad (2)$$

Таким образом, можно считать, что влияние магнитного поля сводится к замене энергии на  $E' = E + p_\varphi \Omega$ , добавлении к полю  $U = -\frac{\alpha}{r}$  добавки  $\delta U = \frac{m\Omega^2 r^2}{2}$  (которая приводит к прецессии орбиты) и к добавочной прецессии с угловой скоростью  $-\Omega$ . При достаточно малых значениях магнитного

<sup>1</sup> Качественный характер исследования с помощью графиков позволяет воспользоваться тем же приближенным изображением траекторий, что и в задаче 2.32. Разумеется, точные траектории частиц в обеих задачах различны.

поля  $\mathcal{H}$  поле  $\delta U$  может оказаться малой добавкой к  $U_0 = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} - \frac{\alpha}{r}$ . Для этого достаточно, чтобы во всей области движения частицы выполнялось условие

$$\delta U(r) \ll |U_0(r)|. \quad (3)$$

Скорость прецессии, вызванной  $\delta U$ , можно определить как

$$\Omega' = \frac{\delta \Delta \varphi}{T} = \frac{1}{T} \frac{\partial}{\partial p_\varphi} (T \langle \delta U \rangle), \quad (4)$$

где усреднение  $\delta U$  производится по движению частицы в поле  $U_0$  с энергией  $E'$  и моментом  $p_\varphi$ , а  $T$  — период этого движения (ср. с задачами 2.17, 2.18). Вычисление<sup>1</sup> приводит к значению

$$\Omega' = -\frac{3\Omega^2 p_\varphi}{2|E'|}, \quad (5)$$

причем  $\delta U$  действительно можно считать малой поправкой, если кроме (3) выполнено также условие  $\delta \Delta \varphi \ll 2\pi$ , т. е.

$$\Omega^2 p_\varphi \alpha \sqrt{m} |E'|^{-5/2} \ll 1. \quad (6)$$

Разумеется,  $\delta U$  нельзя считать малой поправкой, если  $E' \geq 0$ , так как в этом случае удаление  $\delta U$  качественно меняет характер движения.

Величина  $\Omega'$  может оказаться как малой по сравнению с  $\Omega$ , так и большой. Знак  $\Omega'$  противоположен знаку  $p_\varphi$ , т. е. направление этой скорости противоположно направлению движения частицы по орбите. Направление же скорости  $\Omega$  определяется магнитным полем.

Итак, траектория представляет собой эллипс, прецессирующий с угловой скоростью

$$\Omega_{\text{пр}} = -\Omega + \Omega', \quad (7)$$

точнее говоря, поскольку может оказаться  $\Omega T \gtrsim 1$ , в системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega_{\text{пр}}$ , траектория представляет собой неподвижный эллипс.

Интересно сопоставить полученные результаты с теоремой Лармора (см. [3], § 45, см. также задачу 9.23).

<sup>1</sup> Для вычисления  $\langle \delta U \rangle$  удобно использовать переменные, примененные в задачах 2.18, 2.19. Так как период в поле  $U_0$  не зависит от  $p_\varphi$ , в (4) можно вынести  $T$  из-под знака производной.

Возможен ли случай, когда  $\delta U$  можно считать малой поправкой, если энергия частицы  $E$  положительна?

Далее рассмотрим случай, когда малой поправкой можно считать поле  $U = -\alpha/r$ . Движение без учета  $U$  происходит по окружности. Ее радиус  $a$  и расстояние  $b$  от ее центра до центра поля можно выразить через максимальное и минимальное расстояния частицы от центра поля

$$r_{1,2}^2 = \frac{E + p_\varphi \Omega \pm \sqrt{(E + 2p_\varphi \Omega)E}}{m\Omega^2}. \quad (8)$$

Возможны два варианта расположения окружности, изображенные на рис. 98. Если  $p_\varphi \Omega < 0$ , то осуществляется случай *a*), если  $p_\varphi \Omega > 0$ , то осуществляется случай *b*). В обоих случаях

$$b^2 = \frac{E + 2p_\varphi \Omega}{2m\Omega^2}, \quad a^2 = \frac{E}{2m\Omega^2}. \quad (9)$$

Учет поля  $U$  приводит к систематическому смещению этой окружности (называемому дрейфом), причем ее радиус и расстояние от центра поля, определяемые постоянными  $a$  и  $b$ , не изменяются, т. е. центр ее перемещается по окружности радиуса  $b$ . Угловая скорость смещения центра окружности

$$\gamma = \frac{\partial}{\partial p_\varphi} \langle U \rangle,$$

где усреднение  $U$  производится по равномерному движению по окружности. Ограничимся случаем, когда  $a \ll b$ . В этом случае можно считать просто

$$\langle U \rangle = -\frac{\alpha}{b}, \quad (10)$$

так что  $\gamma = \frac{\alpha}{2m\Omega b^3}$ . Заметим, что в этом случае линейная скорость дрейфа равна  $c\mathcal{E}/\mathcal{H}$ , где  $e\mathcal{E} = \alpha/b^2$  — сила, действующая на частицу на расстоянии  $b$  (ср. [3], § 22).

**2.34.** Задача о движении двух одинаковых заряженных частиц в однородном магнитном поле сводится к задачам о движении центра масс и об относительном движении (см. задачу 2.26).

Координаты центра масс

$$\begin{cases} X = R \cos \omega t, \\ Y = -R \sin \omega t, \end{cases} \quad (1)$$

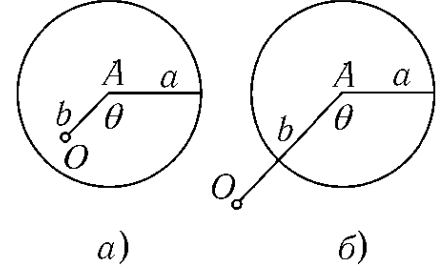


Рис. 98

где  $\omega = e\mathcal{H}/mc$ .

Относительное движение совпадает с движением частицы с массой  $m/2$  и зарядом  $e/2$  в поле  $U = e^2/r$  и в однородном магнитном поле  $\mathcal{H}$ . Это движение подобно рассмотренному в предыдущей задаче, только в формулах следует заменить  $m$  на  $m/2$ ,  $e$  на  $e/2$  и  $\alpha$  на  $-e^2$ . Ограничимся случаем, когда радиус орбиты  $a$  мал по сравнению с расстоянием до центра поля (см. рис. 98, б). Частоту радиальных колебаний с большей, чем в предыдущей задаче, точностью легко определить, разлагая  $U_{\text{эфф}}(r) = \frac{e^2}{r} + \frac{p_\varphi^2}{mr^2} + \frac{m}{16}\omega^2 r^2 - \frac{1}{2}p_\varphi\omega$  в ряд вблизи  $r = b$  (см. [1], § 21). Из условия  $U'_{\text{эфф}}(b) = 0$  находим

$$p_\varphi = \sqrt{\frac{m^2}{16}\omega^2 b^4 - \frac{m}{2}e^2 b} \approx \frac{m}{2}b^2\left(\frac{\omega}{2} - \gamma\right), \quad \gamma = \frac{2e^2}{m\omega b^3}. \quad (2)$$

Отсюда для  $\omega_r = \sqrt{\frac{2U''_{\text{эфф}}(b)}{m}}$  получаем окончательно  $\omega_r = \omega - \frac{\gamma}{2}$ , а расстояние между частицами

$$r = b + a \cos(\omega_r t + \alpha). \quad (3)$$

Для нахождения  $\varphi(t)$  воспользуемся сохранением обобщенного импульса  $p_\varphi = \frac{m}{2}r^2\left(\dot{\varphi} + \frac{\omega}{2}\right)$ . С учетом (2), (3) получаем

$$\varphi(t) = -\gamma t - \frac{a}{b} \sin(\omega_r t + \alpha) + \varphi_0. \quad (4)$$

Воспользовавшись (3) и (4), можно представить координаты относительного движения в виде

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi = b \cos(\gamma t - \varphi_0) + a \cos\left(\omega t + \frac{\gamma t}{2} + \beta\right), \\ y = r \sin \varphi = -b \sin(\gamma t - \varphi_0) - a \sin\left(\omega t + \frac{\gamma t}{2} + \beta\right), \\ \beta = \alpha - \varphi_0. \end{cases} \quad (5)$$

Здесь первые слагаемые отвечают движению центра окружности с дрейфовой скоростью  $b\gamma$ , а вторые — движению по этой окружности с угловой скоростью  $\omega + \frac{\gamma}{2}$ .

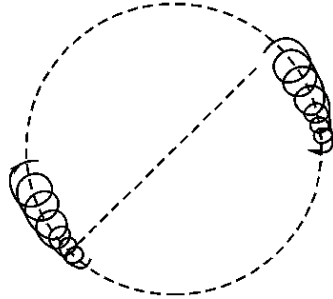


Рис. 99

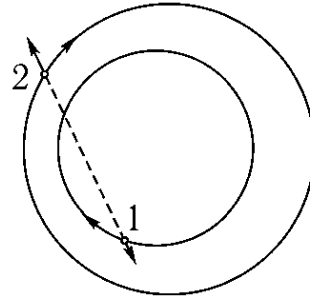


Рис. 100

Координаты частиц  $x_{1,2} = X \pm \frac{x}{2}$ ,  $y_{1,2} = Y \pm \frac{y}{2}$  удобно представить в виде

$$\begin{cases} x_{1,2} = \pm \frac{b}{2} \cos(\gamma t - \varphi_0) + \rho_{1,2} \cos(\omega t + \psi_{1,2}), \\ y_{1,2} = \mp \frac{b}{2} \sin(\gamma t - \varphi_0) - \rho_{1,2} \sin(\omega t + \psi_{1,2}), \end{cases} \quad (6)$$

где

$$\rho_{1,2} = \sqrt{R^2 + \frac{a^2}{4} \pm aR \cos\left(\frac{\gamma t}{2} + \beta\right)},$$

$$\operatorname{tg} \psi_{1,2} = \frac{\pm a \sin\left(\frac{\gamma t}{2} + \beta\right)}{2R \pm a \cos\left(\frac{\gamma t}{2} + \beta\right)}.$$

Итак, центры окружностей, по которым движутся частицы, вращаются вокруг начала координат с угловой скоростью  $\gamma$  (дрейфуют со скоростью  $b\gamma/2$ ), а радиусы этих окружностей пульсируют с частотой  $\gamma/2$  (рис. 99).

Механизм «перекачки» энергии проще всего понять в другом предельном случае:  $a \gg b$  (расстояние между центрами орбит частиц мало по сравнению с радиусами орбит (рис. 100)). Очевидно, работа, совершаемая силами взаимодействия, над второй частицей положительна, а над первой — отрицательна в течение многих периодов.

**2.35.** Убедиться в постоянстве данной величины несложно, используя уравнения движения (ср. [1], § 15), причем удобно представлять ее в виде  $\mathbf{A}\mathbf{F} + \frac{1}{2}[\mathbf{F}\mathbf{r}]^2$ , где  $\mathbf{A} = [\mathbf{v}\mathbf{M}] - \frac{\alpha\mathbf{r}}{r}$ . При малых значениях  $F$  траектория близка

к эллипсу, большая полуось которого направлена по вектору  $\mathbf{A}$ , а эксцентриситет  $e = |\mathbf{A}|/\alpha$ . В этом случае  $\mathbf{A}\mathbf{F} \approx \text{const}$ , или  $e \cos \psi = \text{const}$ , где  $\psi$  — угол между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{F}$ .

**2.36.** Появление малой добавки к потенциальной энергии  $\delta U(\mathbf{r})$  приводит к изменению величин, характеризующих движение частицы (момент, положение перигелия и т. д.), причем за небольшой промежуток времени (несколько периодов невозмущенного движения) они также изменяются мало. Однако за длительное время изменения накапливаются, так что некоторые величины могут измениться во много раз.

В частности, орбита в течение малого промежутка времени остается эллипсом. Большая полуось этого эллипса  $a = \frac{\alpha}{2|E|}$  определяется энергией и не изменяется за длительное время. Эксцентриситет же  $e = \sqrt{1 - \frac{M^2}{m\alpha a}}$  и ориентация подвержены накапливающимся изменениям.

а) Изменение момента определяется уравнением

$$\dot{\mathbf{M}} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]. \quad (1)$$

Усредним это уравнение по периоду

$$\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle = [\langle \mathbf{r} \rangle \mathbf{F}], \quad (2)$$

где

$$\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{r}(t) dt. \quad (3)$$

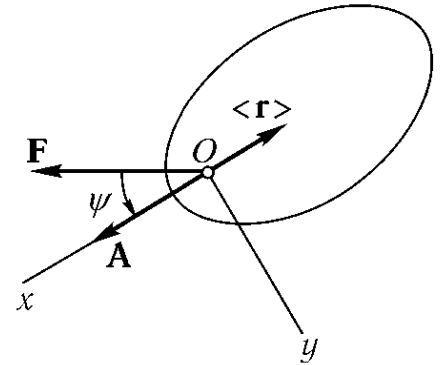


Рис. 101

Для усреднения используем систему координат с осью  $Oz$ , параллельной  $\mathbf{M}$ , и осью  $Ox$ , параллельной  $\mathbf{A}$  (рис. 101). (Здесь  $\mathbf{A} = [\mathbf{v}\mathbf{M}] - \frac{\alpha\mathbf{r}}{r}$  — дополнительный интеграл в задаче Кеплера; напомним, что вектор  $\mathbf{A}$  направлен от центра поля к перигелию, а  $|\mathbf{A}| = \alpha e$ .) Очевидно, что  $-\langle \mathbf{r} \rangle$  параллелен  $Ox$ . Подставляя  $x = a(\cos \xi - e)$ ,  $t = \frac{T}{2\pi}(\xi - e \sin \xi)$ , получаем

$$\langle x \rangle = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \xi - e)(1 - \cos \xi) d\xi = -\frac{3ae}{2}. \quad (4)$$

Таким образом,

$$\langle \mathbf{r} \rangle = -\frac{3ae}{2} \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = -\frac{3a}{2\alpha} \mathbf{A}. \quad (5)$$

б) Если сила  $\mathbf{F}$  перпендикулярна к  $\mathbf{M}$ , то из соображений симметрии ясно, что орбита — плоская кривая, а вектор  $\mathbf{M}$  сохраняет свое направление (с точностью до знака). Перепишем (2), (5), опуская знак усреднения, в виде

$$\dot{M} = \frac{3ae}{2} F \sin \psi, \quad (6)$$

где  $\psi$  — угол между  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{F}$ . Учитывая, что

$$e \cos \psi = \varepsilon = \text{const} \quad (7)$$

(см. задачу 2.35), и исключая из (6)  $e$  и  $\psi$ , находим

$$\dot{M} = \frac{3aF}{2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 - \frac{M^2}{ma\alpha}}. \quad (8)$$

Интегрируя уравнение (8), получаем

$$M = M_0 \cos(\Omega t + \beta), \quad (9)$$

где

$$\Omega = \frac{3F}{2} \sqrt{\frac{a}{m\alpha}}, \quad M_0 = \sqrt{ma\alpha(1 - \varepsilon^2)},$$

а также

$$e = \sqrt{1 - (1 - \varepsilon^2) \cos^2(\Omega t + \beta)}.$$

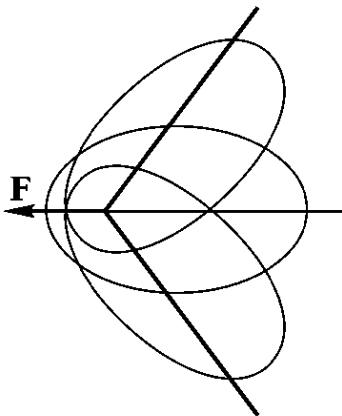


Рис. 102

Итак, траектория представляет собой эллипс, покачивающийся около направления  $\mathbf{F}$  и меняющий в такт покачиваниям эксцентриситет (рис. 102). Направление движения частицы по эллипсу также изменяется (вместе со знаком  $M$ ). Период колебания эллипса  $2\pi/\Omega$  гораздо больше периода обращения частицы по эллипсу  $T$ .

в) В общем случае рассматриваем также изменение вектора  $\mathbf{A}$ . Используя уравнения движения, легко получить

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{m} [\mathbf{F}\mathbf{M}] + [\mathbf{v}[\mathbf{r}\mathbf{F}]]. \quad (10)$$



Для усреднения (10) используем равенства

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle x\dot{x} \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{x^2}{2} \right\rangle = 0, \\ \langle y\dot{y} \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \frac{y^2}{2} \right\rangle = 0, \\ \langle x\dot{y} \rangle + \langle y\dot{x} \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} xy \right\rangle = 0, \\ \langle x\dot{y} \rangle - \langle y\dot{x} \rangle = \frac{M}{m}. \end{array} \right. \quad (11)$$

Получаем

$$\langle \dot{\mathbf{A}} \rangle = \frac{3}{2m} [\mathbf{F}\mathbf{M}]. \quad (12)$$

Итак, для  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{A}$ , усредненных по периоду (знак усреднения опускаем), имеем систему уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{A}} = \frac{3}{2m} [\mathbf{F}\mathbf{M}], \\ \dot{\mathbf{M}} = \frac{3a}{2\alpha} [\mathbf{F}\mathbf{A}]. \end{array} \right. \quad (13)$$

Компоненты этих векторов, параллельные  $\mathbf{F}$ , сохраняются:

$$\mathbf{M}\mathbf{F} = \text{const}, \quad \mathbf{A}\mathbf{F} = \text{const} \quad (14)$$

— результат, который легко получить и из других соображений. Для поперечной компоненты  $\mathbf{M}$

$$\mathbf{M}_{\perp} = \mathbf{M} - \frac{\mathbf{F}(\mathbf{M}\mathbf{F})}{F^2} \quad (15)$$

из (13) получаем уравнение

$$\ddot{\mathbf{M}}_{\perp} + \Omega^2 \mathbf{M}_{\perp} = 0. \quad (16)$$

Его решение запишем, введя систему координат  $OX_1X_2X_3$  с осью  $X_3$ , параллельной  $\mathbf{F}$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} M_1 = B_1 \cos \Omega t + C_1 \sin \Omega t, \\ M_2 = B_2 \cos \Omega t + C_2 \sin \Omega t. \end{array} \right. \quad (17)$$

Теперь из (13) находим

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{3F}{2m\Omega}(B_2 \sin \Omega t - C_2 \cos \Omega t), \\ A_2 = \frac{3F}{2m\Omega}(B_1 \sin \Omega t - C_1 \cos \Omega t). \end{cases} \quad (18)$$

Постоянные  $B_{1,2}$ ,  $C_{1,2}$  определяются, как и следовало ожидать, начальными значениями векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{A}$ .

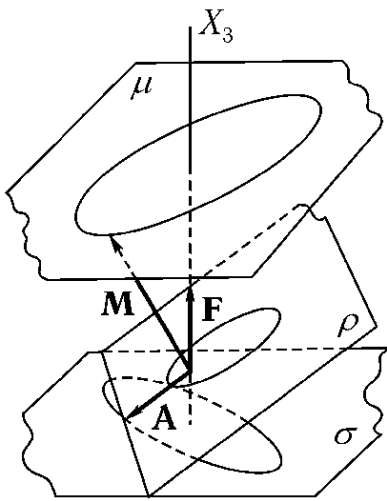


Рис. 103

Конец вектора  $\mathbf{M}$  описывает эллипс с центром на оси  $X_3$  в плоскости  $\mu$ , параллельной  $OX_1X_2$  (рис. 103). Конец вектора  $\mathbf{A}$  также описывает эллипс с центром на оси  $X_3$  в плоскости  $\sigma$ , параллельной  $\mu$ , подобный первому и повернутый на  $\pi/2$ . При этом  $\mathbf{A}$  все время перпендикулярен к  $\mathbf{M}$ . Плоскость траектории перпендикулярна к  $\mathbf{M}$ , вектор  $\mathbf{A}$  определяет направление на перигелий орбиты.

Итак, плоскость траектории поворачивается («прецессирует») вокруг  $\mathbf{F}$ . Угол, составляемый плоскостью орбиты  $\rho$  с  $\mathbf{F}$ , колеблется при этом около некоторого среднего значения. Колеблются около среднего значения эксцентриситет и угол между проекцией  $\mathbf{F}$  на плоскость  $\rho$  и направлением на перигелий. Все эти движения происходят с частотой  $\Omega$ .

Напомним, что мы пренебрегали поправками первого порядка по  $\mathbf{F}$ , если они не приводили к накапливающимся эффектам. Решение справедливо для отрезка времени порядка нескольких периодов прецессии орбиты.

Не приведет ли учет следующих приближений к качественному изменению характера движения (например, к уходу частицы на бесконечность)? Точное решение задачи о движении частицы в поле  $U = -\frac{\alpha}{r} - \mathbf{F}\mathbf{r}$ , возможное в параболических координатах (см. задачу 12.12 б), показывает, что при заданном  $E < 0$  и достаточно малых  $\mathbf{F}$  подобных эффектов не возникает.

Подчеркнем, что появление накапливающихся изменений орбиты под действием сколь угодно малого возмущения связано с вырождением невозмущенного движения.

В [5], § 7.3 можно найти решение этой задачи с использованием канонической теории возмущений.

**2.37.** Согласно теореме Лармора (см. [2], § 45) орбита частицы в однородном магнитном поле  $\mathcal{H}$  вращается вокруг центра кулоновского поля с угловой скоростью  $\Omega = -\frac{q\mathcal{H}}{2mc}$ , где  $q$  — заряд частицы. При этом векторы  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{A}$  изменяются со скоростями

$$\dot{\mathbf{M}}_1 = [\Omega \mathbf{M}], \quad \dot{\mathbf{A}}_1 = [\Omega \mathbf{A}]. \quad (1)$$

Усредненные за период скорости изменения векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{A}$  под влиянием постоянной силы  $\mathbf{F} = q\mathcal{E}$  определены в предыдущей задаче (см. формулу (13)):

$$\dot{\mathbf{M}}_2 = \frac{3a}{2\alpha} [\mathbf{F} \mathbf{A}], \quad \dot{\mathbf{A}}_2 = \frac{3}{2m} [\mathbf{F} \mathbf{M}]. \quad (2)$$

Усредненные скорости изменения векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{A}$  под влиянием обоих полей равны

$$\dot{\mathbf{M}} = \dot{\mathbf{M}}_1 + \dot{\mathbf{M}}_2, \quad \dot{\mathbf{A}} = \dot{\mathbf{A}}_1 + \dot{\mathbf{A}}_2. \quad (3)$$

а) Направим ось  $x$  по электрическому, а ось  $y$  по магнитному полю. Тогда уравнения (3) принимают вид

$$\dot{A}_x = -\Omega A_y, \quad \dot{A}_y = \Omega A_x - \frac{3F}{2m} M, \quad \dot{M} = \frac{3aF}{2\alpha} A_y.$$

Решение этой системы:

$$\begin{aligned} A_x &= -\frac{\Omega}{\omega} B \cos(\omega t + \beta) + C, \\ A_y &= B \sin(\omega t + \beta), \\ M &= \frac{3aF}{2\alpha\omega} B \sin(\omega t + \beta) + \frac{2m\Omega}{3F} C, \end{aligned}$$

где  $\omega = \sqrt{\Omega^2 + 9aF^2/4m\alpha}$ , а постоянные  $B$ ,  $\beta$ ,  $C$  определяются начальными значениями  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{M}$ .

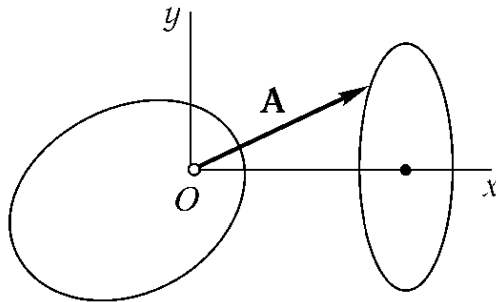


Рис. 104

Итак, конец вектора  $\mathbf{A}$  движется по эллипсу с осями, параллельными осям  $x$  и  $y$  (рис. 104) и центром на оси  $x$ . Орбита при этом покачивается (или вращается при  $\Omega B > \omega C$ ), причем периодически изменяется эксцентриситет. При  $9aF^2B > 4m\alpha\Omega\omega C$  эллиптическая орбита периодически вытягивается в отрезок.

б) Обозначив  $\Omega_F = \frac{3F}{2} \sqrt{\frac{a}{m\alpha}}$ ,  $\mathbf{N} = \mathbf{A} \sqrt{\frac{m\alpha}{a}}$ , запишем (3) в виде  $\dot{\mathbf{M}} = [\Omega\mathbf{M}] + [\Omega_F\mathbf{N}]$ ,  $\dot{\mathbf{N}} = [\Omega\mathbf{N}] + [\Omega_F\mathbf{M}]$ . Складывая и вычитая эти уравнения, находим

$$\dot{\mathbf{J}}_{1,2} = [\omega_{1,2}\mathbf{J}_{1,2}],$$

где

$$\mathbf{J}_{1,2} = \frac{1}{2}(\mathbf{M} \pm \mathbf{N}), \quad \omega_{1,2} = \Omega \pm \Omega_F.$$

Таким образом, векторы  $\mathbf{J}_{1,2}$  вращаются с постоянными угловыми скоростями  $\omega_{1,2}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{1,2}(t) = & \mathbf{J}_{1,2}(0) \cos \omega_{1,2}t + \\ & + \left[ \frac{\omega_{1,2}}{\omega_{1,2}^2} \mathbf{J}_{1,2}(0) \right] \sin \omega_{1,2}t + \omega_{1,2} \frac{\mathbf{J}_{1,2}(0) \omega_{1,2}}{\omega_{1,2}^2} (1 - \cos \omega_{1,2}t), \end{aligned}$$

и векторы  $\mathbf{M} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ ,  $\mathbf{A} = \sqrt{\frac{a}{m\alpha}}(\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2)$  полностью определяются через свои начальные значения.

Мы не будем подробно анализировать этот ответ. Заметим только, что  $\omega_1 = \omega_2$ , если электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны.

**2.38 а.** Пусть частица движется в плоскости  $xz$ . Уравнения для вектора  $\mathbf{A}$  (см. формулу (10) из задачи 2.36) можно привести к виду

$$\begin{aligned} \dot{A}_x &= -2\beta(5xz\dot{z} - 2\dot{x}z^2) = \frac{6\beta}{m}zM - 2\beta\frac{d}{dt}xz^2, \\ \dot{A}_z &= 2\beta(4\dot{x}xz - \dot{z}x^2) = \frac{4\beta}{m}xM + 2\beta\frac{d}{dt}xz^2, \end{aligned}$$

где  $M = m(z\dot{x} - x\dot{z})$  — медленно меняющаяся функция времени.

После усреднения этих уравнений получаем

$$\begin{aligned} \dot{A}_x &= 6\beta M \langle z \rangle = -9\frac{\beta a}{m\alpha} A_z M, \\ \dot{A}_z &= 4\beta M \langle x \rangle = -6\frac{\beta a}{m\alpha} A_x M, \end{aligned}$$

где  $a$  — большая полуось эллипса. Отсюда

$$\frac{\dot{A}_x}{\dot{A}_z} = \frac{3A_z}{2A_x},$$

т. е., в отличие от задачи 2.36 б, конец вектора  $\mathbf{A}$  колеблется не вдоль прямой, а вдоль гиперболы

$$A_x^2 = \frac{3}{2}A_z^2 + \text{const.}$$

Зависимость  $A$  от времени можно найти из уравнения

$$t = -\frac{m\alpha}{9\beta a} \int \frac{dA_x}{MA_z},$$

в котором  $M$  и  $A_z$  должны быть выражены как функции  $A_x$ .

Например, для случая, когда в начальный момент  $A_z(0) = 0$ ,  $A_x(0) = \alpha e_0$  ( $e_0$  — начальное значение эксцентриситета), имеем

$$\begin{aligned} A_z &= -\alpha \sqrt{\frac{2}{3}(x^2 - e_0^2)}, & M &= \sqrt{\frac{5}{3}m\alpha a(c^2 - x^2)}, \\ x &= \frac{A_x}{\alpha}, & c &= \sqrt{\frac{3 + 2e_0^2}{5}}. \end{aligned}$$

С течением времени орбита медленно поворачивается в плоскости  $xz$  и превращается в отрезок, составляющий с осью  $x$  угол

$$\psi = -\arctg \sqrt{\frac{2}{3}k}, \quad k = \sqrt{\frac{3 - 3e_0^2}{3 + 2e_0^2}},$$

за время

$$t = \frac{1}{3\beta} \sqrt{\frac{m\alpha}{10a^3}} \int_{e_0}^c \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - e_0^2)(c^2 - x^2)}}.$$

Входящий сюда интеграл приводится к полному эллиптическому интегралу первого рода (см. примечание к задаче 1.7 и [10] стр. 96–97)

$$t = \frac{T\alpha}{6\pi\sqrt{10c}\beta a^3} K(k),$$

где  $T$  — период невозмущенного движения.

**2.386.** Будем пользоваться геоцентрической системой координат. Примем прямую Земля–Солнце за ось  $z$ , ось  $x$  — лежащей в плоскости орбиты Земли. Система координат вращается вокруг оси  $y$  с угловой скоростью  $\Omega$ . В этой системе отсчета  $\delta U$  не зависит явно от времени, так что интегралом движения является энергия

$$E = \frac{m}{2}v^2 - \frac{\alpha}{r} + \delta U - \frac{m}{2}\Omega^2 r^2,$$

где  $\alpha = \gamma m_1 m$ ,  $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $m_1$  — масса Земли. Сила  $\delta \mathbf{F} = -\frac{\partial \delta U}{\partial \mathbf{r}}$  и сила инерции  $\mathbf{F}_и = m\Omega^2 \mathbf{r} + 2m[\mathbf{v}\Omega]$  приводят к искажению эллиптической орбиты Луны. Большая полуось эллипса  $a = \alpha/2|E|$  при этом почти не изменяется.

Скорость изменения вектора  $\mathbf{A}$  складывается из двух слагаемых  $\dot{\mathbf{A}}_1$  и  $\dot{\mathbf{A}}_2$ , отвечающих  $\delta \mathbf{F}$  и  $\mathbf{F}_и$  (ср. с задачей 2.37). Слагаемое  $\dot{\mathbf{A}}_1$  найдено в пункте а):

$$\dot{A}_{x1} = \frac{9}{2}\Omega\zeta A_z, \quad \dot{A}_{z1} = 3\Omega\zeta A_x,$$

где  $\zeta = M\Omega^2 a/\alpha$ . Поскольку эксцентриситет орбиты Луны мал  $e = 0,055$ , то

$$M \approx ma^2\omega, \quad \alpha \approx m\omega^2 a^3, \quad \zeta \approx \frac{\Omega}{\omega} \approx \frac{29,5}{365} \approx \frac{1}{12},$$

где  $\omega$  — угловая скорость обращения Луны вокруг Земли в принятой (вращающейся) системе координат.

Сила инерции приводит к повороту вектора  $\mathbf{A}$  с угловой скоростью  $-\Omega$  (так как в отсутствие  $\delta U$  орбита была бы неподвижной в системе отсчета  $0x_0y_0z_0$ , оси которой сохраняют постоянные направления).

$$\dot{A}_{x2} = -\Omega A_z, \quad \dot{A}_{z2} = \Omega A_x.$$

Таким образом<sup>1</sup>

$$\dot{A}_x = -\Omega\left(1 - \frac{9}{2}\zeta\right)A_z, \quad \dot{A}_z = \Omega(1 + 3\zeta)A_x. \quad (1)$$

<sup>1</sup>Заметим, что согласно (1)

$$A\dot{A} = A_x\dot{A}_x + A_z\dot{A}_z = -7,5\Omega\zeta A_x A_z.$$

Используя соотношения  $A = \alpha e$ ,  $e^2 = 1 - M^2/ma\alpha$ , можем оценить  $\dot{\zeta} = \Omega^2 a \dot{M}/\alpha \sim \sim 7,5e^2\zeta\Omega \ll \Omega$ . Величину  $\zeta$  в (1) можно считать постоянной.

Интегрирование (1) дает

$$A_x = B \cos(\Omega' t + \phi), \quad A_z = B \left(1 + \frac{15}{4}\zeta\right) \sin(\Omega' t + \phi), \quad (2)$$

где  $\Omega' = \Omega(1 - \frac{3}{4}\zeta)$ ,  $B$  и  $\phi$  — постоянные. В системе  $0xyz$  вектор  $\mathbf{A}$  вращается вокруг оси  $y$  со средней угловой скоростью  $-\Omega'$ . В системе  $0x_0y_0z_0$  он вращается с угловой скоростью

$$\Omega_{\text{пр}} = \Omega - \Omega' = \frac{3}{4}\zeta\Omega.$$

Малым, согласно (2), изменениям  $|\mathbf{A}|$  отвечают малые пульсации эксцентриситета орбиты.

### 2.39. Функция Лагранжа системы ( $q$ — заряд частицы)

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{\alpha}{r} + \frac{q}{c} \frac{[\mathbf{m}\mathbf{r}]}{r^3} \mathbf{v}$$

лишь обозначениями отличается от рассмотренной в [2] (задача 2 к § 105). Уравнения движения

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{M}} &= \frac{q}{mcr^2} [\mathbf{M}\mathbf{m}], \\ \dot{\mathbf{A}} &= \frac{q}{mcr^3} [\mathbf{A}\mathbf{m}] + \frac{3q(\mathbf{M}\mathbf{m})}{m^2cr^5} [\mathbf{M}\mathbf{r}] \end{aligned}$$

при усреднении по периоду  $T$  невозмущенного движения дают уравнения, описывающие систематическое изменение векторов  $\mathbf{M}$  и  $\mathbf{A}$ :

$$\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle = [\Omega' \mathbf{M}], \quad \Omega' = -\frac{qm}{cta^3(1-e^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

$$\langle \dot{\mathbf{A}} \rangle = [\Omega \mathbf{A}], \quad \Omega = \Omega' - 3\mathbf{M} \frac{(\Omega' \mathbf{M})}{M^2}, \quad (2)$$

где  $a$  и  $e$  — большая полуось и эксцентриситет невозмущенной орбиты. Уравнение (1) можно переписать также в виде

$$\langle \dot{\mathbf{M}} \rangle = [\Omega \mathbf{M}], \quad (3)$$

так как вектор  $\Omega - \Omega'$  параллелен  $\mathbf{M}$ .

Из (2) и (3) видно, что эллипс, по которому движется частица, прецессирует «как целое» с угловой частотой  $\Omega$ . Другая интерпретация может быть дана на основе уравнений (1) и (2): в системе координат, вращающейся с частотой  $\Omega'$ , вектор  $\mathbf{M}$ , а с ним и плоскость движения частицы, неподвижен, вектор же  $\mathbf{A}$ , а с ним и перигелий орбиты, вращается с постоянной частотой  $\Omega - \Omega'$  вокруг направления  $\mathbf{M}$ .

Укажем еще, что усреднение величин  $1/r^3$  и  $\mathbf{r}/r^5$  удобно проводить, перейдя от переменной  $t$  к углу  $\varphi$ :

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dt}{r^3(t)} = \frac{m}{TM} \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{r(\varphi)} = \frac{m}{TMp} \int_0^{2\pi} (1 + e \cos \varphi) d\varphi = \frac{2\pi m}{TMp}$$

и

$$\left\langle \frac{\mathbf{r}}{r^5} \right\rangle = \beta \mathbf{A},$$

$$\beta = \frac{1}{A^2 T} \int_0^T \frac{\mathbf{A} \mathbf{r}}{r^5} dt = \frac{m}{ATM} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi}{r^2(\varphi)} d\varphi = \frac{2\pi m e}{TM p^2}.$$

**2.40.** При усреднении уравнений (см. формулу (10) задачи 2.36)

$$\dot{\mathbf{A}} = \frac{1}{m} [\mathbf{F} \mathbf{M}] + [\mathbf{v} [\mathbf{r} \mathbf{F}]]$$

учтем, что  $\langle \mathbf{F} \rangle = 0$  и что, согласно уравнениям невозмущенного движения,

$$m \ddot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} m \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \left( -\alpha \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = -\frac{\alpha \mathbf{v}}{r^3} + \frac{3\alpha \mathbf{r}(\mathbf{r} \mathbf{v})}{r^5}.$$

Это дает (см. предыдущую задачу)

$$\langle \dot{\mathbf{A}} \rangle = -\frac{\alpha \beta}{m^2} \left\langle \frac{[\mathbf{v} \mathbf{M}]}{r^3} \right\rangle = \frac{\alpha \beta}{m^2} \left\langle \frac{\mathbf{A}}{r^3} + \frac{\alpha \mathbf{r}}{r^4} \right\rangle = -\frac{3\pi \alpha \beta}{2m^2 a^3 (1 - e^2)^{3/2}} \mathbf{A}.$$

Отсюда видно, что скорость изменения вектора  $\mathbf{A}$  направлена в сторону, противоположную самому вектору  $\mathbf{A}$ . Как известно, вектор  $\mathbf{A}$  направлен к перигелию орбиты и по величине равен  $A = \alpha e$ . Таким образом, добавочная сила не вызывает прецессию орбиты, а приводит к уменьшению эксцентриситета.

Можно также показать (см. [2], § 75, задача 1), что вследствие потери энергии и момента частица за конечное время упадет на центр.



### § 3. Сечение рассеяния в заданном поле. Столкновение частиц

**3.1.** а) Как легко видеть на рис. 105, угол отклонения частицы  $\theta$  равен удвоенному углу наклона касательной к поверхности в точке столкновения. Поэтому

$$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{d\rho}{dz} = \frac{b}{a} \cos \frac{z}{a}.$$

Отсюда

$$\rho^2 = b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$$

и

$$d\sigma = \pi |d\rho^2| = \pi a^2 \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \frac{d\theta}{\cos^2(\theta/2)} = \frac{a^2 d\theta}{4 \cos^4 \frac{\theta}{2}}.$$

Возможно отклонение частицы на углы от нулевого (при  $\rho \rightarrow b$ ) до  $\theta_m = 2 \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$  (при  $\rho \rightarrow 0$ ).

Итак,

$$d\sigma = \begin{cases} \frac{a^2 d\theta}{4 \cos^4 \frac{\theta}{2}} & \text{при } 0 < \theta < \theta_m, \\ 0 & \text{при } \theta_m < \theta. \end{cases}$$

$$\text{б) } d\sigma = A^{2/(1-n)} \left( n \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \right)^{(1+n)/(1-n)} \frac{d\theta}{(1-n) \sin \theta \cos^2 \frac{\theta}{2}}.$$

При  $n \rightarrow 1$  приведенное сечение равно

$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \begin{cases} 0 & \text{при } \theta > \theta_0 = 2 \operatorname{arctg} A, \\ \infty & \text{при } \theta < \theta_0. \end{cases}$$

Этот результат ошибочен. Почему?

$$\text{в) } d\sigma = \begin{cases} \frac{b}{4} \left( a \sqrt{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} - b \right) \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta} & \text{при } 0 < \theta < \theta_m = 2 \operatorname{arctg} \left( \frac{b}{a} \right)^2, \\ 0 & \text{при } \theta_m < \theta. \end{cases}$$

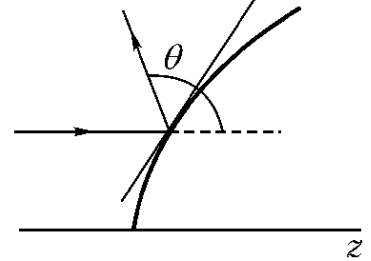


Рис. 105

**3.2.** Параболоид вращения  $\rho^2 = \frac{\alpha}{E}z$ .

Сближаются ли траектории частиц, рассеянных в поле и на параболоиде при  $r \rightarrow \infty$ ?

**3.3.** При  $E > V$

$$d\sigma = \begin{cases} \left[ \frac{a^2 n^2}{4 \cos \frac{\theta}{2}} \frac{\left(n \cos \frac{\theta}{2} - 1\right) \left(n - \cos \frac{\theta}{2}\right)}{\left(1 + n^2 - 2n \cos \frac{\theta}{2}\right)^2} + \frac{a^2}{4} \right] d\theta & \text{при } 0 < \theta < \theta_m, \\ 0 & \text{при } \theta_m = 2 \arccos n < \theta < \pi, \end{cases}$$

где

$$n = \sqrt{1 - V/E}.$$

Чем вызвано отличие этого сечения от сечения рассеяния на потенциальной яме (см. [1], § 19, задача 2)?

$$\mathbf{3.4.} \quad \text{а)} \quad \sigma = \begin{cases} \pi \left( \frac{\beta}{E} - \frac{\alpha^2}{4E^2} \right) & \text{при } E > \frac{\alpha^2}{4\beta}, \\ 0 & \text{при } E < \frac{\alpha^2}{4\beta}. \end{cases}$$

Как изменится сечение при изменении знака  $\alpha$ ?

б)

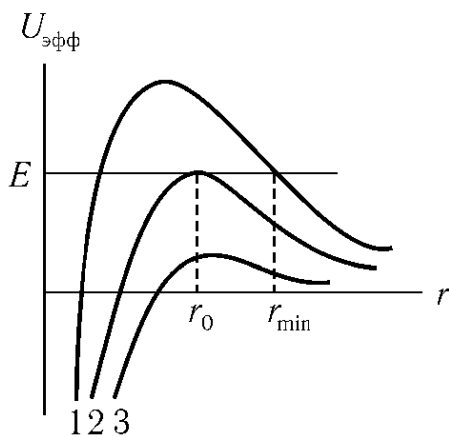


Рис. 106

$$\sigma = \begin{cases} \pi \left( 2\sqrt{\frac{\gamma}{E}} - \frac{\beta}{E} \right) & \text{при } E > \frac{\beta^2}{4\gamma}, \\ 0 & \text{при } E < \frac{\beta^2}{4\gamma}. \end{cases}$$

**3.5.** а) Рассмотрим движение пучка частиц в поле  $U(r) = -\frac{\alpha}{r^n}$ . Графики  $U_{\text{эфф}}(r) = \frac{E\rho^2}{r^2} - \frac{\alpha}{r^n}$  значениях прицельного параметра  $\rho$  приведены на рис. 106.

При больших значениях  $\rho$  (кривая 1) частица рассеивается, приближаясь к центру поля на расстояние  $r_{\min}(\rho)$ , определяемое условием  $U_{\text{эфф}}(r_{\min}) = E$ . При уменьшении  $\rho$  уменьшается и  $r_{\min}$  вплоть до значения  $r_0$ , достигаемого при  $\rho = \rho_0$  (кривая 2). При еще меньших  $\rho$  частица падает в центр (кривая 3).

Величины  $r_0$  и  $\rho_0$  определяются условиями

$$U_{\text{эфф}}(r_0) = E, \quad U'_{\text{эфф}}(r_0) = 0$$

и равны

$$r_0 = (n-2)^{1/n} \left( \frac{2E}{\alpha} \right)^{1/n}, \quad \rho_0 = \sqrt{\frac{n}{n-2}} \left[ \frac{(n-2)\alpha}{2E} \right]^{1/n}.$$

Если  $R > r_0$ , то на шарик падают частицы с  $r_{\min} \leq R$ , и сечение падения

$$\sigma = \pi \rho^2(r_{\min} = R) = \pi R^2 \left( 1 + \frac{\alpha}{ER^2} \right).$$

Если  $R < r_0$ , то на шарик падают частицы, которые упали бы в центр, и сечение падения

$$\sigma = \pi \rho_0^2 = \frac{\pi n}{n-2} \left[ \frac{(n-2)\alpha}{2E} \right]^{2/n}.$$

б)  $\sigma = \pi \left( 2\sqrt{\frac{\gamma}{E}} - \frac{\beta}{E} \right)$ , если  $2\sqrt{\gamma E} > \beta$ ,  $ER^4 < \gamma$ .

Если же хотя бы одно из этих неравенств не выполняется, то

$$\sigma = \pi R^2 \left( 1 + \frac{\gamma}{ER^4} - \frac{\beta}{ER^2} \right).$$

**3.6.** а)  $d\sigma = \frac{R^2(1+\lambda)d\theta}{4\left(1+\lambda\sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2}$ , где

$$\lambda = \frac{4RE(RE+\alpha)}{\alpha^2}.$$

Как объяснить результат, получаемый при  $\alpha + 2RE = 0$ ?

б) В плоскости траектории частицы введем декартовы координаты с осью  $x$ , направленной вдоль оси пучка, и осью  $y$  — вдоль прицельного параметра. Движение частицы в области  $r \leq R$  есть гармоническое колебание по каждой из координат, причем в начальный момент этого колебания (при  $t = 0$ )  $y_0 = \rho$ ,  $\dot{y}_0 = 0$ ,  $x_0 = -\sqrt{R^2 - \rho^2}$ ,  $\dot{x}_0 = v$ , так что

$$x = -\sqrt{R^2 - \rho^2} \cos \omega t + \frac{v}{\omega} \sin \omega t, \quad y = \rho \cos \omega t. \quad (1)$$

Момент выхода частицы из области действия сил определяется условием

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad (2)$$

а угол  $\theta$  между скоростью частицы в этот момент и осью  $x$  — условием

$$\sin \theta = \frac{\dot{y}}{v} = -\frac{\rho\omega}{v} \sin \omega t. \quad (3)$$

Подставив (1) и (3) в (2), получаем уравнение

$$\rho^4 - \rho^2 R^2 (1 + \lambda \sin^2 \theta) + \frac{1}{4} R^4 (1 + \lambda)^2 \sin^2 \theta = 0,$$

где  $\lambda = \frac{v^2}{R^2 \omega^2}$ . Отсюда

$$\rho_{1,2}^2 = \frac{R^2}{2} (1 + \lambda \sin^2 \theta \mp \sqrt{\cos^2 \theta - \lambda^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}),$$

и сечение

$$d\sigma = \pi(|d\rho_1^2| + |d\rho_2^2|) = \pi d(\rho_1^2 - \rho_2^2) = \frac{R^2(1 + \lambda^2 \cos 2\theta) d\theta}{2\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}}.$$

Если  $\lambda > 1$ , то возможно рассеяние только на углы, меньшие  $\theta_m = \arcsin \frac{R^2 \omega^2}{v^2}$ , а при  $\theta \rightarrow \theta_m$  сечение  $\frac{d\sigma}{d\theta}$  неограниченно возрастает. Такая особенность сечения называется *радужным* рассеянием (см. [11], гл. 5, § 5). Подобного типа особенность сечения приводит к образованию радуги при рассеянии света каплями воды.

Примеры радужного рассеяния см. также в задачах 3.8, 3.10.

3.7. а) 
$$\frac{d\sigma}{d\theta} = \begin{cases} \frac{a^2 \theta_m^2 (\theta_m - \theta)}{\theta^3 (2\theta_m - \theta)^2} & \text{при } \theta \leq \theta_m = \pi \frac{V}{E}, \\ 0 & \text{при } \theta > \theta_m. \end{cases}$$

б) При вычисления угла рассеяния (см. [1], § 20)

$$\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_y dx}{2E} = 2 \frac{V}{E} \frac{\rho \sqrt{R^2 - \rho^2}}{R^2}$$

учтем, что сила

$$F_y = \begin{cases} \frac{2Vy}{R^2} = \frac{2V\rho}{R^2} & \text{при } -\sqrt{R^2 - \rho^2} < x < \sqrt{R^2 - \rho^2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \sqrt{R^2 - \rho^2}. \end{cases}$$

Отсюда находим  $\rho_{1,2}^2 = \frac{1}{2}R^2(1 \mp \sqrt{1 - \theta^2/\theta_m^2})$ , где  $\theta_m = V/E$ , поэтому  $d\sigma = \pi(|d\rho_1^2| + |d\rho_2^2|) = \pi d(\rho_1^2 - \rho_2^2)$ . Окончательно

$$d\sigma = \begin{cases} \frac{R^2 d\theta}{2\theta_m \sqrt{\theta_m^2 - \theta^2}} & \text{при } 0 < \theta < \theta_m, \\ 0 & \text{при } \theta > \theta_m. \end{cases}$$

Сравните этот ответ с ответом задачи 3.6б, в которой рассматривался потенциал, отличающийся знаком от данного.

### 3.8. Угол отклонения частицы

$$\theta = \left| \frac{3\pi\beta}{4E\rho^4} - \frac{\pi a}{2E\rho^2} \right| \quad (1)$$

легко вычисляется по общей формуле<sup>1</sup>. Зависимость  $\theta(\rho^2)$  изображена на рис. 107. Из (1) находим

$$\rho_1^2 = \frac{\alpha\pi}{4E\theta} \left( \sqrt{1 + \frac{\theta}{\theta_m}} - 1 \right),$$

$$\rho_{2,3}^2 = \frac{\alpha\pi}{4E\theta} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{\theta}{\theta_m}} \right),$$

где  $\theta_m = \frac{\pi\alpha^2}{12E\beta}$ . Сечение

$$d\sigma = \pi(|d\rho_1^2| + |d\rho_2^2| + |d\rho_3^2|) = \pi d(-\rho_1^2 + \rho_2^2 - \rho_3^2) =$$

$$= \frac{\alpha\pi}{8E\theta^3} \left( \frac{1 + \theta/2\theta_m}{\sqrt{1 + \theta/\theta_m}} + \frac{2 - \theta/\theta_m}{\sqrt{1 - \theta/\theta_m}} - 1 \right) d\theta. \quad (2)$$

Для справедливости полученного результата достаточно, чтобы каждое слагаемое в (1) было много меньше единицы. Оценка показывает, что для этого достаточно выполнения условия  $\theta \ll 1$ . Выражение (2) получено для  $\theta < \theta_m$ . Если  $\theta_m \ll 1$ , то для  $\theta_m < \theta \ll 1$  сечение

$$d\sigma = \pi|d\rho_1^2| = \frac{\alpha\pi}{8E\theta^3} \left( \frac{1 + \theta/2\theta_m}{\sqrt{1 + \theta/\theta_m}} - 1 \right) d\theta.$$

<sup>1</sup>Проще всего взять оба слагаемых (1) из задачи 2 к § 20 работы [1].

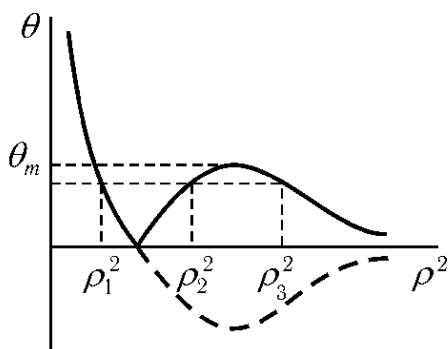


Рис. 107

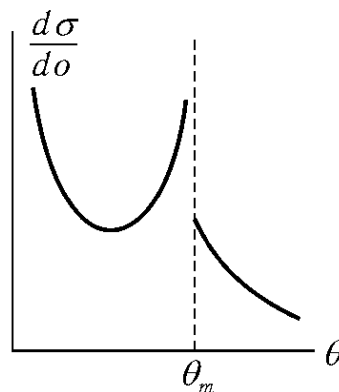


Рис. 108

Зависимость  $\frac{d\sigma}{d\omega}$  от  $\theta$  изображена на рис. 108. При  $\theta \rightarrow 0$  и при  $\theta \rightarrow \theta_m$  сечение  $\frac{d\sigma}{d\omega}$  неограниченно возрастает. Сечение рассеяния в интервал углов, прилегающий к  $\theta = 0$ , бесконечно, так как рассеяние на малые углы отвечает большим прицельным параметрам.

Сечение рассеяния в интервал углов  $\theta_m - \delta < \theta < \theta_m$

$$\int_{\theta_m - \delta}^{\theta_m} 2\pi \frac{d\sigma}{d\omega} \theta d\theta = \frac{\alpha \pi^2 \delta^{1/2}}{2E \theta_m^{3/2}}$$

конечно и стремится к нулю при  $\delta \rightarrow 0$ .

Как зависит количество рассеянных частиц, попавших на счетчик, от размеров счетчика, если он расположен под углом  $\theta_m$ ?

**3.9.** Скорость частицы после рассеяния по сравнению с первоначальным направлением оказывается повернутой на угол

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2/\rho^2}}, \quad a^2 = \frac{\alpha}{E}. \quad (1)$$

Счетчик рассеянных частиц регистрирует вместе с частицами, отклоненными на угол  $|\theta| < \pi$ , также и частицы, сделавшие предварительно несколько оборотов вокруг центра (рис. 109, а). Наблюдаемый угол отклонения  $\chi$  лежит в пределах  $0 < \chi < \pi$  и связан с  $\theta$  соотношением

$$-\theta = 2\pi l \pm \chi, \quad (2)$$

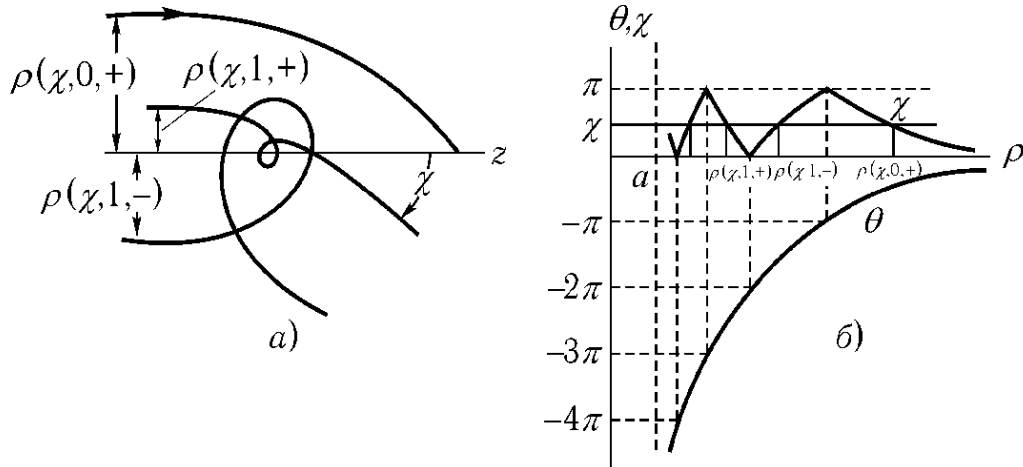


Рис. 109

где верхнему знаку соответствует  $l = 0, 1, \dots$ , а нижнему  $l = 1, 2, \dots$  (рис. 109, б). Из (1) и (2) имеем

$$\rho^2(\chi, l, \pm) = a^2 + \frac{\pi a^2}{2} \left( \frac{1}{2\pi l \pm \chi} - \frac{1}{2\pi l + 2\pi \pm \chi} \right).$$

Сечение

$$d\sigma = \pi \sum_{l=0}^{\infty} |d\rho^2(\chi, l, +)| + \pi \sum_{l=1}^{\infty} |d\rho^2(\chi, l, -)|.$$

Учитывая, что  $\frac{d\rho^2(\chi, l, +)}{d\chi} < 0$ ,  $\frac{d\rho^2(\chi, l, -)}{d\chi} > 0$ , находим

$$\begin{aligned} d\sigma &= \pi d \left[ - \sum_{l=0}^{\infty} \rho^2(\chi, l, +) + \sum_{l=1}^{\infty} \rho^2(\chi, l, -) \right] = \\ &= \frac{\pi^2 a^2}{2} d \left( \frac{1}{2\pi - \chi} - \frac{1}{\chi} \right) = \frac{\pi a^2 (2\pi^2 - 2\pi\chi + \chi^2)}{2\chi^2 (2\pi - \chi)^2 \sin \chi} d\chi. \end{aligned}$$

Сечение  $\frac{d\sigma}{d\chi}$  обращается в бесконечность при  $\chi \rightarrow \pi$ . В данном случае это приводит к тому, что сечение рассеяния в малый конечный телесный

$$\text{угол } \Delta o = \int_{\pi-\chi_0}^{\pi} 2\pi \sin \chi d\chi = \pi \chi_0^2 \text{ равно}$$

$$\Delta \sigma = \frac{a^2}{2\pi} \int_{\pi-\chi_0}^{\pi} \frac{d\sigma}{\chi} = a^2 \chi_0 = a^2 \sqrt{\frac{\Delta o}{\pi}}.$$

Появление особенности дифференциального сечения обусловлено тем, что угол отклонения, равный  $\pi$ , достигается при значениях прицельного параметра  $\rho(\pi, l, \pm)$ , отличных от нуля. В телесный угол  $\Delta o$ , пропорциональный квадрату малой величины  $\Delta \chi \equiv \chi_0$ , попадают частицы, летевшие до рассеяния через площадки  $2\pi \rho \Delta \rho$ , площади которых пропорциональны первой степени  $\Delta \rho \propto \chi_0$ . Такую особенность рассеяния называют *сиянием* (см. [11], гл. 5, § 5).

Такая же особенность есть и в рассеянии на угол  $\chi = 0$ , но в данном случае она маскируется бесконечным сечением из-за рассеяния частиц со сколь угодно большими прицельными параметрами. Сияние при рассеянии вперед могло бы проявиться, например, при ограничении диаметра налетающего на центр пучка частиц.

**3.10.** а) Условие  $E \gg V$  приводит, как легко видеть, к малости угла отклонения частицы при рассеянии. Изменение импульса

$$\Delta p = -\frac{\partial}{\partial \rho} \int_{-\infty}^{\infty} U(|\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t|) dt = \frac{2V\sqrt{\pi}}{v} x e^{-x^2},$$

где  $x = \kappa \rho$ .

Угол отклонения

$$\theta = \frac{\Delta p}{p} = \frac{V\sqrt{\pi}}{E} x e^{-x^2}.$$

Разрешить это уравнение относительно  $x$  в аналитической форме не удастся. Однако, используя график функции  $x e^{-x^2}$  (рис. 110), видим, что при  $\theta < \theta_m = \frac{V}{E} \sqrt{\frac{\pi}{2e}}$  — уравнение (1) имеет два корня.

Используя соотношение

$$d\theta = \frac{V\sqrt{\pi}}{E} (1 - 2x^2) e^{-x^2} dx$$



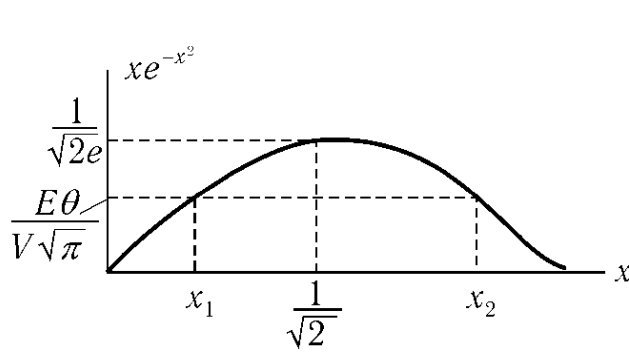


Рис. 110

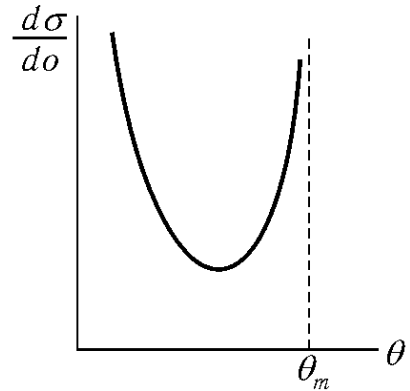


Рис. 111

и учитывая (1), представим сечение

$$d\sigma = \pi(|d\rho_1^2| + |d\rho_2^2|) = \frac{2\pi}{\kappa^2}(x_1 dx_1 - x_2 dx_2)$$

в виде

$$d\sigma = \frac{d\theta}{\kappa^2 \theta^2} \left( \frac{x_2^2}{2x_2^2 - 1} + \frac{x_1^2}{1 - 2x_1^2} \right).$$

При  $\theta \ll \theta_m$  оказывается  $x_1 \ll 1$ ,  $x_2 \gg 1$  и

$$d\sigma = \frac{d\theta}{2\kappa^2 \theta^2}.$$

При  $\theta_m - \theta \ll \theta_m$  можно разрешить (1), разложив  $x e^{-x^2}$  в ряд вблизи максимума. Получаем

$$x_{1,2} = \frac{1 \mp \sqrt{1 - \theta/\theta_m}}{\sqrt{2}}, \quad d\sigma = \frac{d\theta}{2\kappa^2 \theta_m^2 \sqrt{1 - \theta/\theta_m}}.$$

График  $d\sigma/d\theta$  изображен на рис. 111. Особенность при  $\theta = \theta_m$  — интегрируемая (ср. с задачей 3.8).

Связано ли появление особенности сечения при  $\theta = \theta_m$  с приближенным методом решения задачи?

$$\text{б) } d\sigma = \frac{d\theta}{\kappa^2 \theta^2} \left( \frac{x_1 + x_1^2}{1 - 2x_1} + \frac{x_2 + x_2^2}{2x_2 - 1} \right), \text{ где } \frac{x_{1,2}}{(1 + x_{1,2})^3} = \left( \frac{2E\theta}{\pi V} \right)^2.$$

$$\text{При } \theta \ll \theta_m = \frac{\pi V}{3\sqrt{3}E}$$

$$d\sigma = \frac{\pi V d\theta}{4\kappa^2 E \theta^3}.$$

При  $\theta_m - \theta \ll \theta_m$

$$d\sigma = \frac{\sqrt{3} do}{2\sqrt{2}\kappa^2\theta_m^2\sqrt{1-\theta/\theta_m}}.$$

**3.11.** а) При столкновении частица, имевшая скорость  $\mathbf{v}$ , приобретает скорость  $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - 2\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{v})$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности эллипсоида. Подставляя

$$\mathbf{v} = v(0, 0, 1), \quad \mathbf{n} = \frac{1}{N} \left( \frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right),^1$$

получаем

$$\mathbf{v}' = v \left( -\frac{2xz}{N^2 a^2 c^2}, -\frac{2yz}{N^2 b^2 c^2}, 1 - \frac{2z^2}{N^2 c^4} \right). \quad (1)$$

Введем полярные углы, определяющие направление  $\mathbf{v}'$ :  $\mathbf{v}' = v(\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$ . Сравнивая с (1), находим

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a^2 y}{b^2 x}, \quad \cos \theta = 1 - \frac{2z^2}{N^2 c^4}, \quad \sin^2 \theta = \left( \frac{2z}{N^2 c^2} \right)^2 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right). \quad (2)$$

Сечение

$$d\sigma = dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} \right| d\theta d\varphi,$$

где зависимость  $x, y$  от  $\theta, \varphi$  определяется из (2) и уравнения эллипсоида. Для вычисления якобиана оказывается удобным ввести промежуточную переменную  $u$  такую, что

$$x = a^2 u \cos \varphi, \quad y = b^2 u \sin \varphi.$$

Из (2) получаем

$$\sin \theta = \frac{2zu}{N^2 c^2}, \quad 1 - \cos \theta = \frac{2z^2}{N^2 c^4}, \quad \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \frac{z}{uc^2}$$

---

<sup>1</sup>Как известно из дифференциальной геометрии

$$\mathbf{n} \propto \operatorname{grad} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right),$$

$N$  определяется условием  $\mathbf{n}^2 = 1$ .

и из уравнения эллипсоида находим

$$u^{-2} = a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}.$$

Далее,

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \varphi)} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, \varphi)} \frac{\partial(u, \varphi)}{\partial(\theta, \varphi)} = \frac{a^2 b^2}{2} \frac{\partial u^2}{\partial \theta}.$$

Окончательно

$$d\sigma = \frac{a^2 b^2 c^2 d\theta}{4 \cos^4 \frac{\theta}{2} \left( a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2} \right)^2}.$$

С помощью какого предельного перехода можно получить из этого результата сечение рассеяния на параболоиде?

$$\text{б) } d\sigma = \frac{a^2 b^2 c^2 d\theta}{\cos^3 \theta (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2 \operatorname{tg}^2 \theta)^2};$$

$$\text{в) } d\sigma = \frac{\cos \theta a^2 b^2 c^2 d\theta}{\sin^4 \theta (a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi + c^2 \operatorname{ctg}^2 \theta)^2}.$$

**3.12.** а) Изменение импульса при рассеянии

$$\Delta \mathbf{p} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial U(\mathbf{r}(t))}{\partial \mathbf{r}} dt. \quad (1)$$

При рассеянии на малые углы в правую часть (1) можно подставить  $\mathbf{r}(t) = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t$ , где  $\boldsymbol{\rho} \perp \mathbf{v}$ ;

$$\Delta \mathbf{p} = - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} U(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t) dt = - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}} \frac{\mathbf{a} \rho \pi}{v \rho}.^1 \quad (2)$$

Пусть ось  $z$  параллельна  $\mathbf{v}$ , ось  $y$  перпендикулярна к  $\mathbf{a}$ . Тогда

$$\Delta p_x = - \frac{\pi a_x}{v} \frac{\rho_y^2}{\rho^3}, \quad \Delta p_y = \frac{\pi a_x}{v} \frac{\rho_x \rho_y}{\rho^3}. \quad (3)$$

<sup>1</sup>Замена в (2) дифференцирования по  $\mathbf{r}$  дифференцированием по  $\boldsymbol{\rho}$  (при условии  $\boldsymbol{\rho} \perp \mathbf{v}_\infty$ ) приводит к тому, что полученная формула определяет только компоненты  $\Delta \mathbf{p}$ , перпендикулярные к  $\mathbf{v}_\infty$ .

Направление скорости после рассеяния характеризуем углами в сферической системе координат

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\Delta p_y}{\Delta p_x}, \quad \theta = \frac{\Delta p}{p}. \quad (4)$$

Из (3) ясно, что рассеяние происходит только в интервал углов

$$\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}.$$

Из (3) и (4) находим

$$\rho_x = \pm \frac{\pi a_x}{2E} \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\theta}, \quad \rho_y = \mp \frac{\pi a_x}{2E} \frac{\cos^2 \varphi}{\theta}. \quad (5)$$

Сечение

$$d\sigma = \sum d\rho_x d\rho_y = \sum \left| \frac{\partial(\rho_x, \rho_y)}{\partial(\theta, \varphi)} \right| d\theta d\varphi = \left( \frac{\pi a_x}{E} \right)^2 \frac{\cos^2 \varphi}{2\theta^4} d\varphi. \quad (6)$$

(Суммирование в (6) проводится по двум возможным, согласно (5), значениям  $\rho$ .)

б)  $d\sigma = \frac{|\mathbf{a}_\perp| d\varphi}{2E\theta^3}$ ,  $\mathbf{a}_\perp$  — компонента  $\mathbf{a}$ , перпендикулярная к  $\mathbf{v}_\infty$ . Сечение оказывается симметричным относительно  $\mathbf{v}_\infty$  (хотя поле отнюдь не симметрично относительно этого направления).

### 3.13. Изменение угла отклонения частицы (ср. с задачей 2.17)

$$\delta\theta(\rho) = -\frac{1}{E} \frac{\partial}{\partial \rho} \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\delta U(r) dr}{\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r^2} - \frac{U(r)}{E}}}. \quad (1)$$

Из уравнения  $\theta = \theta_0(\rho) + \delta\theta(\rho)$  находим

$$\rho = \rho_0(\theta) - \delta\theta(\rho_0(\theta)) \frac{d\rho_0(\theta)}{d\theta}$$

(ср. с задачей 1.8). Здесь зависимость  $\theta_0(\rho)$  соответственно  $\rho_0(\theta)$ , определяется при  $\delta U(r) = 0$ . Отсюда сечение

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\theta} &= \pi \left| \frac{d\rho^2}{d\theta} \right| = \pi \left| \frac{d\rho_0^2(\theta)}{d(\theta)} - \frac{d}{d\theta} 2\rho_0(\theta) \delta\theta(\rho_0(\theta)) \frac{d\rho_0(\theta)}{d\theta} \right| = \\ &= \frac{d\sigma_0}{d\theta} \mp \frac{d}{d\theta} \left[ \delta\theta(\rho_0(\theta)) \frac{d\sigma_0}{d\theta} \right]. \end{aligned}$$

Знак перед  $d/d\theta$  противоположен знаку  $d\rho_0(\theta)/d\theta$ .

$$\text{а) } \delta \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{\pi\beta}{E} \frac{d}{d\theta} \frac{\pi - \theta + 2 \cos(\theta/2)}{\sin \theta};$$

$$\text{б) } \delta \frac{d\sigma}{d\theta} = \frac{2\gamma}{\pi^3 \sqrt{\beta E}} \frac{d}{d\theta} \frac{(\pi - \theta)^2}{\sqrt{\theta(2\pi - \theta)}}.$$

### 3.14. Приобретаемая частицей энергия

$$\varepsilon = \frac{(\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})^2}{2m} - \frac{p^2}{2m} \approx \mathbf{v}\Delta\mathbf{p}$$

определяется в первом порядке лишь изменением продольной компоненты импульса. Так как отклонение частицы можно считать малым, в выражении для силы

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial U(r, t)}{\partial \mathbf{r}},$$

действующей на частицу, положим (после дифференцирования)  $\mathbf{r} = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}(t - \tau)$ . Здесь  $\boldsymbol{\rho}$  — прицельный параметр, а  $\tau$  — момент времени, в который частица находится на минимальном расстоянии от центра. Тогда

$$\varepsilon = \mathbf{v} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{F}(t) dt = \varepsilon_m e^{-\kappa^2 \rho^2 \cos \varphi},$$

$$\varepsilon_m = \sqrt{\pi} V_2 \frac{\omega}{\kappa v} e^{-\frac{\omega^2}{4\kappa^2 v^2}}, \quad \varphi = \omega\tau,$$

а сечение рассеяния для частиц с данным  $\tau$  при  $\cos \varphi > 0$  ( $\cos \varphi < 0$ ) есть

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \begin{cases} \frac{\pi}{\kappa^2 |\varepsilon|} & \text{при } 0 < \varepsilon < \varepsilon_m \cos \varphi \quad (0 > \varepsilon > \varepsilon_m \cos \varphi), \\ 0 & \text{при } |\varepsilon| > \varepsilon_m |\cos \varphi|. \end{cases}$$

В падающем пучке есть частицы с различными  $\tau$ . Усредняя сечение по фазе  $\varphi$  (например, для  $\varepsilon > 0$  по формуле

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varphi, \quad \alpha = \arccos \frac{\varepsilon}{\varepsilon_m},$$

получим

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right\rangle = \begin{cases} \frac{1}{\kappa^2 |\varepsilon|} \arccos \frac{|\varepsilon|}{\varepsilon_m} & \text{при } |\varepsilon| < \varepsilon_m, \\ 0 & \text{при } |\varepsilon| > \varepsilon_m. \end{cases}$$

$$3.15. \quad \frac{dN}{N} = \frac{\lambda^2 \sin \theta d\theta}{\cos^3 \theta \sqrt{1 - \lambda^2 \operatorname{tg}^2 \theta}}, \quad \lambda = \frac{V^2 - v_0^2}{2Vv_0},$$

$$0 \leq \theta \leq \operatorname{arctg} \lambda^{-1}, \quad \text{если } V < v_0,$$

$$(\pi - \operatorname{arctg} |\lambda|^{-1}) \leq \theta \leq \pi, \quad \text{если } V > v_0.$$

$$3.16. \quad \frac{dN}{N} = \frac{6(T_{\max} - T)(T - T_{\min})}{(T_{\max} - T_{\min})^3} dT, \quad T_{\min} \leq T \leq T_{\max},$$

$$T_{\min} = \frac{m}{2}(v_0 - V)^2, \quad T_{\max} = \frac{m}{2}(v_0 + V)^2.$$

$$3.17. \quad \operatorname{tg} \theta_1 = \operatorname{ctg} \theta_2 = \frac{\alpha}{E\rho}, \quad E = \frac{mv^2}{2},$$

$$v_1 = \frac{E\rho v}{\sqrt{\alpha^2 + E^2 \rho^2}}, \quad v_2 = \frac{\alpha v}{\sqrt{\alpha^2 + E^2 \rho^2}}.$$

3.18.

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \quad \text{при } m_1 < m_2,$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \quad \text{при } m_1 = m_2,$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \quad \text{при } m_1 > m_2.$$

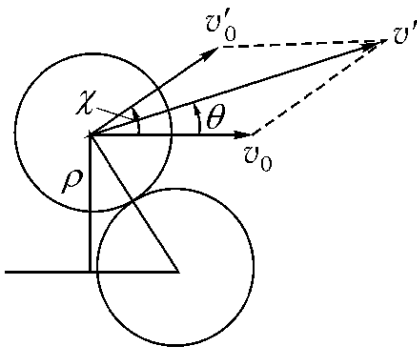


Рис. 112

3.19. В системе центра масс в результате столкновения составляющая скорости, нормальная к поверхности шариков в точке соприкосновения, обратится в нуль, а тангенциальная  $v'_0$  сохранится (рис. 112). Сечение рассеяния, выраженное через угол  $\chi$  отклонения частицы в системе центра масс,

$$d\sigma = \pi |d\rho^2| = 4a^2 \pi |d \cos^2 \chi| = 4a^2 \cos \chi d\theta.$$

Для перехода к лабораторной системе из равенства

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v'_0 \sin \chi}{v'_0 \cos \chi + v_0} = \frac{\sin \chi \cos \chi}{1 + \cos^2 \chi}$$

находим

$$\cos^2 \chi_{1,2} = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - 1 \pm \frac{1}{2} \cos \theta \sqrt{9 \cos^2 \theta - 8}.$$

Учитывая обе возможные связи  $\chi$  с  $\theta$ , получаем

$$\begin{aligned} d\sigma &= 4\pi a^2 (|d \cos^2 \chi_1| + |d \cos^2 \chi_2|) = \\ &= 4\pi a^2 d(\cos^2 \chi_2 - \cos^2 \chi_1) = 4a^2 \frac{5 - 9 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - 9 \sin^2 \theta}} d\theta, \end{aligned}$$

причем  $0 < \theta < \arcsin \frac{1}{3}$ .

Если налетающие шарики тождественны с первоначально покоившимся, так что не имеет смысла различать их после рассеяния, то к полученному сечению следует добавить сечение вылета первоначально покоившихся шариков в телесный угол  $d\Omega$ :

$$d\sigma' = 4a^2 \cos \theta d\theta \quad (0 < \theta < \pi/2).$$

$$3.20. \quad I(x) = I(0)e^{-n\sigma x}.$$

$$3.21. \quad dN = \sigma n_1 n_2 |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| dV dt.$$

$$3.22. \quad \text{а) } F_{\text{тр}} = 2\pi m v^2 n \int_0^\pi f(\theta)(1 - \cos \theta) \sin \theta d\theta;^1$$

$$\text{б) } \langle \Theta^2 \rangle = 2\pi \left(\frac{m}{M}\right)^2 n l \int_0^\pi f(\theta) \sin^3 \theta d\theta;$$

здесь  $l$  — путь, пройденный частицей массы  $M$ ,  $v$  — ее скорость, а  $n$  — концентрация легких частиц.

---

<sup>1</sup> Величина  $\int \frac{d\sigma}{d\Omega} (1 - \cos \theta) d\Omega$  называется транспортным сечением (в отличие от полного сечения  $\int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega$ ).

## § 4. Уравнения движения. Законы сохранения

**4.1.** Полагая  $x = 0$  при  $t = 0$ , находим  $C = 0$ , а из условия  $x = a$  при  $t = \tau$  находим  $B = \frac{a}{\tau} - A\tau$ . Используя функцию  $x(t) = At^2 + \left(\frac{a}{\tau} - A\tau\right)t$ , вычисляем действие

$$S = \int_0^\tau L(x, \dot{x}) dt = \int_0^\tau \left( \frac{m}{2} \dot{x}^2 + Fx \right) dt = \frac{mA^2\tau^3}{6} + \frac{ma^2}{2\tau} - \frac{FA\tau^3}{6} + \frac{Fa\tau}{2}.$$

Из условия  $\frac{\partial S}{\partial A} = 0$ , определяющего минимум действия, находим  $A = \frac{F}{2m}$ . Ясно, что закон движения

$$x(t) = \frac{Ft^2}{2m} + \left( \frac{a}{\tau} - \frac{F\tau}{2m} \right) t$$

в данном случае оказывается точным. Однако приведенное решение задачи позволяет только утверждать, что этот закон является в определенном смысле наилучшим среди всех мыслимых законов предложенного вида.

Чтобы убедиться, что найденный закон движения дает значение  $S$  меньшее, чем любой другой закон  $x(t)$ , т. е. является истинным, нужно проверить, что он удовлетворяет уравнению Лагранжа.

$$\begin{aligned} \mathbf{4.2.} \quad x(t) &= \begin{cases} v_x t - a & \text{при } 0 < t < t_0, \\ \sqrt{v_x^2 - 2U/m}(t - \tau) + a & \text{при } t_0 < t < \tau, \end{cases} \\ y(t) &= at/\tau, \end{aligned}$$

где  $v_x = (2aU/m\tau)^{1/3}$ ,  $t_0 = a/v_x$ .

**4.3.** Из соотношения

$$\tilde{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q, t), \dot{q}(Q, \dot{Q}, t), t) = L\left(q, \frac{\partial q}{\partial Q} \dot{Q} + \frac{\partial q}{\partial t}, t\right)$$

находим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} &= \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial Q}, \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial q}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial Q}. \end{aligned}$$



Учитывая, что  $\frac{\partial \dot{q}}{\partial Q} = \frac{d}{dt} \frac{\partial q}{\partial Q}$ , получаем

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} = \frac{\partial q}{\partial Q} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} \right). \quad (1)$$

Таким образом, справедливость уравнения  $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$  приводит к справедливости аналогичного уравнения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q} = 0.$$

В случае нескольких степеней свободы вместо (1) получим

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_i} = \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right).$$

$$4.4. \quad \tilde{L}\left(Q, \frac{dQ}{d\tau}, \tau\right) = L\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) \frac{dt}{d\tau}.$$

Здесь

$$q = q(Q, \tau), \quad \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{d\tau} \frac{d\tau}{dt},$$

$$\frac{dq}{d\tau} = \frac{\partial q}{\partial Q} \frac{dQ}{d\tau} + \frac{\partial q}{\partial \tau}, \quad \frac{dt}{d\tau} = \frac{\partial t}{\partial Q} \frac{dQ}{d\tau} + \frac{\partial t}{\partial \tau}.$$

$$4.5. \quad \tilde{L} = \frac{m}{2} \frac{\dot{x}^2}{1 + \lambda \dot{x}} - (1 + \lambda \dot{x}) U(x), \quad \dot{x} = \frac{dx}{d\tau}.$$

$$4.6. \quad \tilde{L} = -\sqrt{1 - \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2}.$$

Предложенная задача поставлена чисто формально. Однако, как данная функция Лагранжа, так и рассматриваемое преобразование («исправленные» введением размерных множителей) имеют простой физический смысл в теории относительности (см. [3], § 4, 8),

$$4.7. \quad \text{Для } P_l = \frac{\partial L}{\partial \dot{Q}_l}, E' = \sum_l P_l \dot{Q}_l - L \text{ находим}$$

$$P_l = \sum_k \frac{\partial f_k}{\partial Q_l} p_k, \quad E' = E - \sum_k p_k \frac{\partial f_k}{\partial t}.$$

**4.8.** Используя формулы предыдущей задачи, получаем

а)  $p'_r = m\dot{r}' = p_r$ ,  $p'_\varphi = mr'^2(\dot{\varphi}' + \Omega) = p_\varphi$ ,  $E' = E - \Omega p_\varphi$ ;

б) 
$$\begin{cases} p'_x = p_x \cos \Omega t - p_y \sin \Omega t, \\ p'_y = p_x \sin \Omega t + p_y \cos \Omega t. \end{cases} \quad (1)$$

Из (1) следует  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ , а сами эти равенства представляют собой закон преобразования компонент вектора при переходе к системе координат, повернутой на угол  $\Omega t$ . Подчеркнем, что  $\mathbf{p}' \neq m\mathbf{v}'$  (ср. [1], § 39).

**4.9.** а)  $E' = E - \mathbf{V}\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}$ ;

б)  $E' = E - \mathbf{V}\mathbf{p} + \frac{mV^2}{2}$ ,  $\mathbf{p}' = \mathbf{p} - m\mathbf{V}$ .

Два выражения энергии отличаются на постоянную. Обычно используется второе выражение, так как именно оно согласуется с определением энергии в теории относительности.

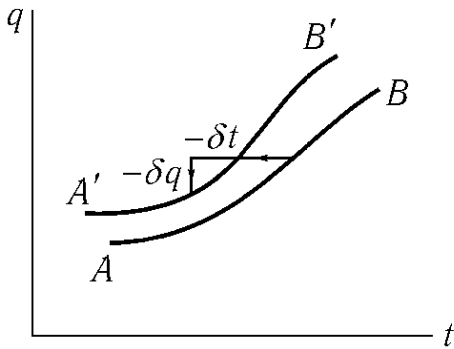


Рис. 113

**4.10.** Пусть  $q_i = f_i(t)$  описывает движение системы (траектория  $AB$  на рис. 113). Так как вид действия не изменяется при переходе к переменным  $q'_i$ ,  $t'$ , равенства  $q'_i = f_i(t')$  также описывают действительное движение системы.

Выраженные в переменных  $q_i$ ,  $t$  с точностью до первого порядка по  $\varepsilon$ , эти равенства имеют вид

$$q_i(t - \delta t) = f_i(t) - \delta q_i,$$

где

$$\delta q_i = \varepsilon \Psi_i(f(t), t), \quad \delta t = \varepsilon X(f(t), t)$$

(траектория  $A'B'$  на рис. 113).

Малые изменения координат и времени начала и конца движения при переходе от траектории  $AB$  к траектории  $A'B'$  приводят к изменению действия:

$$S_{A'B'} - S_{AB} = \left[ \frac{\partial S}{\partial t}(-\delta t) + \sum_i \frac{\partial S}{\partial q_i}(-\delta q_i) \right]_A^B.$$

Здесь (см. [1], § 43)

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = -E(t), \quad \frac{\partial S}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i(t).$$

С другой стороны, согласно условию задачи,  $S_{AB} = S_{A'B'}$ , так что

$$\begin{aligned} E(t_A)\varepsilon X(q_A, t_A) - \sum_i p_i(t_A)\varepsilon \Psi_i(q_A, t_A) = \\ = E(t_B)\varepsilon X(q_B, t_B) - \sum_i p_i(t_B)\varepsilon \Psi_i(q_B, t_B), \end{aligned}$$

или

$$EX - \sum p_i \Psi_i = \text{const.}$$

Доказанная теорема представляет собой, в сущности, единый вывод различных законов сохранения. Важность ее возрастает в связи с тем, что подобная же теорема имеет место и в теории поля (теорема Нётер, см. [12, 13]).

$$4.11. \quad \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} (\dot{q}_i X - \Psi_i) - LX - f = \text{const.}$$

4.12. а) Импульс;

б) момент импульса;

в) энергия;

г)  $M_z + \frac{h}{2\pi} p_z = \text{const}$ ,  $h$  — шаг винта;

д)  $Ex - p_x t = \text{const}$  — интеграл движения центра инерции системы (см. [2], § 14).

4.13. а) Потенциальная энергия  $U(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}\mathbf{r}$ , а с ней вместе и действие, не изменяются при сдвигах в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{F}$ , и при поворотах относительно оси, параллельной  $\mathbf{F}$ . Поэтому интегралами движения являются компоненты импульса, перпендикулярные к  $\mathbf{F}$ , и компонента момента импульса, параллельная  $\mathbf{F}$ . Так как функция Лагранжа не зависит от времени, интегралом движения является энергия.

Утверждение, что различные точки в некоторой области «равноправны», означает, что во всех этих точках равны значения потенциальной энергии (а не силы!).

б) Преобразование подобия  $\mathbf{r}' = \alpha \mathbf{r}$  может сохранять вид действия, если одновременно преобразуется время  $t' = \beta t$ . Вклад в действие кинетической энергии

$$\int \frac{mv'^2}{2} dt' = \frac{\alpha^2}{\beta} \int \frac{mv^2}{2} dt$$

остается неизменным при  $\beta = \alpha^2$ , а вклад потенциальной энергии

$$-\int U(\mathbf{r}') dt' = -\alpha^n \beta \int U(\mathbf{r}) dt = -\alpha^{n+2} \int U(\mathbf{r}) dt \quad \text{при } n = -2.$$

Чтобы воспользоваться теоремой, сформулированной в задаче 4.10, записываем бесконечно малое преобразование подобия, положив  $\alpha = 1 + \varepsilon$ ,  $\varepsilon \rightarrow 0$ :

$$\mathbf{r}' = (1 + \varepsilon)\mathbf{r}, \quad t' = (1 + 2\varepsilon)t,$$

так что  $\Psi = \mathbf{r}$ ,  $X = 2t$  и интеграл движения

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}}(\mathbf{v}X - \Psi) - LX = m\mathbf{v}\mathbf{r} - 2Et = C. \quad (1)$$

Из (1) можно найти  $r(t)$ , учитывая, что  $\mathbf{r}\mathbf{v} = \frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt}$ :

$$r^2 = \frac{2E}{m}t^2 + Ct + C_1. \quad (2)$$

Если  $E < 0$ , то частица падает на центр (при этом  $\dot{r} \rightarrow \infty$ ). Если  $E > 0$ , удобнее ввести вместо  $C$ ,  $C_1$  другие константы  $\tau$ ,  $B$  и записать (2) в виде

$$r^2 = \frac{2E}{m}(t - \tau)^2 + B.$$

При  $B > 0$  зависимость  $r(t)$  такая же, как для свободного движения частицы со скоростью  $v_0 = \sqrt{2E/m}$  и прицельным параметром  $\rho = \sqrt{B}$ . При  $B < 0$  частица падает на центр.

Поля, для которых выполняются условия этой задачи, приведены, например, в задачах 12.6, 12.7 и в [1], задача 2 к § 15.

в)  $E - \mathbf{V}\mathbf{p} = \text{const}$ ;

г)  $\mathbf{r}\mathbf{p} - 2Et = \text{const}$ , где  $\mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c}\mathbf{A}$ , если  $\mathbf{A}(\alpha\mathbf{r}) = \alpha^{-1}\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ;

д)  $E - p_\varphi\Omega = \text{const}$ .

**4.14.**  $m\mathbf{r} - \mathbf{p}t = \text{const}$  (ср. с задачей 4.12 д).

Является ли этот интеграл движения для замкнутой системы восьмым независимым интегралом (кроме  $E$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{p}$ )?

**4.15.** а) Пусть ось  $z$  параллельна  $\mathcal{H}$ . Сдвиг вдоль оси  $z$  и поворот вокруг нее не изменяют вида  $\mathbf{A}$ , а следовательно, и вида действия. Поэтому интегралами движения являются  $p_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$  и  $M_z = xp_y - yp_x = m(xy - yx) + \frac{e\mathcal{H}}{2c}(x^2 + y^2)$ . Кроме того, интегралом движения является энергия  $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ .

б)  $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ ,  $p'_y = m\dot{y} + \frac{e}{c}\mathcal{H}x$ ,  $p'_z = m\dot{z}$  (ср. с задачей 10.7).

Соображения симметрии позволяют определять различные интегралы движения в зависимости от выбора векторного потенциала данного поля  $\mathcal{H}$ . Но все величины:  $E$ ,  $p_z = p'_z$ ,  $M_z$ ,  $p'_y$  — являются интегралами движения независимо от выбора  $\mathbf{A}$ .

**4.16.** а)  $E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ ,  $M_z = m(xy - yx) + \frac{em}{c\sqrt{x^2 + y^2}}$  (здесь ось  $z$  выбрана параллельной вектору  $\mathbf{m}$ ). Ср. с задачей 2.31.

б) Из свойств симметрии данного поля можно получить следующие интегралы движения:

$$p_z = m\dot{z}, \quad M_z \equiv p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} + \frac{e\mu}{c}, \quad E = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2).$$

Однако движение в этом «поле» есть свободное движение. Действительно, функция Лагранжа

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e\mu}{c}\dot{\varphi}$$

отличается от функции Лагранжа свободной частицы только на полную производную по времени функции  $\frac{e\mu\varphi}{c}$  (разумеется, в этом случае  $\mathcal{H} = \text{rot } \mathbf{A} = 0$ ).

Заметим, что в случае, когда  $\mu$  есть функция времени,  $p_z$  и  $M_z$  остаются интегралами движения.

**4.17.** а)  $\ddot{x} + x = 0$ . Такое же уравнение может быть получено из функции Лагранжа  $L_1(x, \dot{x}) = \dot{x}^2 - x^2$ . Как известно, если две функции Лагранжа отличаются на полную производную функции координат и времени, то они приводят к одинаковым уравнениям Лагранжа. Обратное утверждение неверно.

б)  $\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \omega^2x = 0$ .

**4.18.** а) Уравнения Лагранжа для частицы в поле  $U$  в сферических координатах

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2) + \frac{\partial U}{\partial r} &= 0, \\ m(r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} - r^2\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta) + \frac{\partial U}{\partial \theta} &= 0, \\ m(r^2\ddot{\varphi} \sin^2 \theta + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \sin^2 \theta + 2r^2\dot{\theta}\dot{\varphi} \sin \theta \cos \theta) + \frac{\partial U}{\partial \varphi} &= 0 \end{aligned}$$

легко привести к виду

$$m(\dot{\mathbf{v}})_i = (\mathbf{F})_i,$$

где компоненты силы есть компоненты  $-\text{grad } U$ :

$$F_r = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta}, \quad F_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{v}})_r &= \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta - r\dot{\theta}^2, \\ (\dot{\mathbf{v}})_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta, \\ (\dot{\mathbf{v}})_\varphi &= r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned}$$

$$\text{б) } (\dot{\mathbf{v}})_i = \frac{1}{2h_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial q_i} \right) \frac{ds^2}{dt^2} = h_i \ddot{q}_i + \sum_{k=1}^3 \left( 2\dot{q}_i \dot{q}_k \frac{\partial h_i}{\partial q_k} - \dot{q}_k^2 \frac{h_k}{h_i} \frac{\partial h_k}{\partial q_i} \right).$$

**4.19.** а) Функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2} \sum_{i,k=1}^3 g_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k - U(q_1, q_2, q_3),$$

где

$$g_{ik} = \sum_{l=1}^3 \frac{\partial x_l}{\partial q_i} \frac{\partial x_l}{\partial q_k} \quad (x_1 \equiv x, x_2 \equiv y, x_3 \equiv z),$$

приводит к уравнениям

$$m \sum_{k=1}^3 g_{sk} \ddot{q}_k + m \sum_{k,l=1}^3 \Gamma_{s,kl} \dot{q}_k \dot{q}_l = -\frac{\partial U}{\partial q_s} \quad (s = 1, 2, 3), \quad (1)$$

где

$$\Gamma_{s,kl} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{sk}}{\partial q_l} + \frac{\partial g_{ls}}{\partial q_k} - \frac{\partial g_{kl}}{\partial q_s} \right).$$

б) Введя обозначение  $q_4(x, t) = t$ , можем сохранить все выкладки и формулы предыдущего пункта, лишь заменив  $\sum_1^3$  на  $\sum_1^4$ .

Какой смысл имеют в уравнениях (1) члены, содержащие  $\Gamma_{1,k4}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ), если  $q_l$  — декартовы координаты во вращающейся системе отсчета (см. задачу 4.8)?

**4.20.** Так как предложенная функция Лагранжа только слагаемым  $L_1 = -\frac{eg}{c}\dot{\varphi} \cos \theta$  отличается от функции Лагранжа свободной частицы, то компоненты силы в сферической системе координат (см. задачу 4.18 а) имеют вид

$$F_r = 0,$$

$$F_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial L_1}{\partial \theta} = \frac{eg\dot{\varphi} \sin \theta}{cr},$$

$$F_\varphi = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{eg\dot{\theta}}{cr}$$

и действительно совпадают с компонентами силы Лоренца

$$\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathcal{H}] = \frac{eg}{cr^3}[\mathbf{vr}].$$

Поскольку  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  интегралом движения является энергия  $E = \frac{mv^2}{2}$ .

Разберемся, каким образом возникает интеграл движения

$$\mathbf{J} = m[\mathbf{rv}] - \frac{eg}{c} \frac{\mathbf{r}}{r}.$$

Функция Лагранжа не изменяется при поворотах вокруг оси  $z$ , поэтому интегралом движения является

$$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} \sin^2 \theta - \frac{eg}{c} \cos \theta = J_z.$$

Другие же повороты системы приводят к изменению функции Лагранжа на полную производную функции координат по времени, которая может быть отброшена<sup>1</sup>. Поэтому интегралом движения является и проекция  $J_z$  на любую другую ось, а значит, и вектор  $\mathbf{J}$ .

---

<sup>1</sup> Например, при повороте вокруг оси  $x$  на малый угол  $\delta\alpha$  к  $L$  добавляется  $\delta L = \delta\alpha \frac{eg}{c} \frac{d}{dt} (\text{ctg } \theta \cos \varphi)$ .

Действие, соответствующее данной функции Лагранжа, не изменяется при преобразовании подобия. Поэтому интегралом движения является

$$p_r r - 2Et = m\dot{r}r - 2Et$$

(ср. с задачей 4.13 б).

#### 4.21. Уравнения движения

$$-\mathcal{L}\dot{I} = \varphi_A - \varphi_B, \quad \frac{q_2}{C} = \varphi_B - \varphi_A.$$

Будем считать, что источник напряжения представляет собой конденсатор очень большой емкости  $C_0$ , а заряд его в момент, когда  $q_1 = 0$ , есть  $Q$ . Энергия системы, включающей источник и индуктивность,  $E_0 = \frac{(Q + q_1)^2}{2C_0} + \frac{\mathcal{L}}{2}\dot{q}_1^2$ . Смещая начало отсчета энергии и рассматривая предел  $C_0 \rightarrow \infty$ , а  $Q/C_0 = U$ , получаем

$$E = E_0 - \frac{Q^2}{2C_0} = Uq_1 + \frac{\mathcal{L}\dot{q}_1^2}{2}.$$

Именно к такому значению энергии приводит предложенная функция Лагранжа.

Подобно этому энергия частицы  $m$  в однородном поле силы  $-F(t)$  есть  $\frac{m\dot{x}^2}{2} + Fx$ .

К такой же функции Лагранжа можно прийти от функции Лагранжа электромагнитного поля и взаимодействия поля с зарядами (см. [3], §§ 27, 28):

$$L = \frac{1}{8\pi} \int (\mathcal{E}^2 - \mathcal{H}^2) dV + \frac{1}{c} \int \mathbf{A}\mathbf{j} dV - \int \varphi\rho dV \quad (1)$$

(в гауссовой системе единиц).

Вообще говоря, электромагнитное поле есть система с бесконечным числом степеней свободы. Но поля в конденсаторе и в соленоиде определяются зарядом  $q_2$  и током  $\dot{q}_1$ . Используя уравнения

$$c \operatorname{rot} \mathcal{H} = 4\pi\mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathcal{E} = 4\pi\rho$$



(и учитывая, что поля сосредоточены в ограниченном объеме), получаем

$$\begin{aligned}\int \varphi \rho dV &= \frac{1}{4\pi} \int \varphi \operatorname{div} \mathcal{E} dV = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div}(\varphi \mathcal{E}) dV - \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{E} \operatorname{grad} \varphi dV = \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{E}^2 dV,\end{aligned}$$

и аналогично

$$\frac{1}{c} \int \mathbf{A} \mathbf{j} dV = \frac{1}{4\pi} \int \mathcal{H}^2 dV,$$

так что

$$L = \frac{1}{8\pi} \int (\mathcal{H}^2 - \mathcal{E}^2) dV.$$

Поэтому функция Лагранжа может быть выражена через энергии электрического поля в конденсаторе  $\frac{1}{8\pi} \int \mathcal{E}^2 dV = \frac{q_2^2}{2C}$  и магнитного — в индуктивности  $\frac{1}{8\pi} \int \mathcal{H}^2 dV = \frac{1}{2} \mathcal{L} \dot{q}_1^2$  (см. [3], § 2.32).

При наличии внешнего поля  $\mathcal{H}_e$ , создаваемого токами  $\mathbf{j}_e$ , следует заменить в (1)  $\mathcal{H}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{j}$  на  $\mathcal{H} + \mathcal{H}_e$ ,  $\mathbf{A} + \mathbf{A}_e$ ,  $\mathbf{j} + \mathbf{j}_e$ . Добавка к функции Лагранжа (1) с учетом уравнения  $c \operatorname{rot} \mathcal{H}_e = 4\pi \mathbf{j}_e$  легко приводится к виду

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathcal{H}_e^2 dV + \frac{1}{c} \int \mathbf{A}_e \mathbf{j} dV.$$

Отбрасывая слагаемые, зависящие лишь от внешнего поля, и учитывая, что для тонкого провода  $\mathbf{j} dV = \dot{q}_1 d\mathbf{l}$ , где  $d\mathbf{l}$  — элемент длины провода, получаем

$$\frac{1}{c} \int \mathbf{A}_e \mathbf{j} dV = \frac{\dot{q}_1}{c} \int \mathbf{A}_e d\mathbf{l} = \frac{\dot{q}_1}{c} \int \operatorname{rot} \mathbf{A}_e d\mathbf{S} = \frac{\dot{q}_1}{c} \int \mathcal{H}_e d\mathbf{S}.$$

При наличии внешнего электрического поля  $\mathcal{E}_e$  (или сторонних полей) получаем

$$- \int \varphi_e \rho dV = - \sum_a q_a \varphi_{ae}$$

( $q_a$  и  $\varphi_{ae}$  — заряд и потенциал во внешнем поле  $a$ -го проводника).

Варьирование  $q_{1,2}$  представляет собой, таким образом, произвольное варьирование зарядов и токов, сопровождаемое соответствующим ему варьированием потенциалов. Легко видеть, что при таком варьировании должен быть справедлив принцип наименьшего действия.

$$4.22. \quad \text{а) } L = \frac{\mathcal{L}\dot{q}_1^2}{2} - \frac{q_2^2}{2C} + U(q_2 - q_1);$$

$$\text{б) } L = \frac{\mathcal{L}\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2C};$$

$$\text{в) } L = \frac{1}{2}\mathcal{L}_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}_2\dot{q}_2^2 - \frac{q_1^2}{2C_1} - \frac{q_2^2}{2C_2} - \frac{(q_1 + q_2)^2}{2C}.$$

$$4.23. \quad \text{а) } L = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{\mathcal{L}\dot{q}^2}{2} + mgl \cos \varphi - \frac{q^2}{2C(\varphi)};$$

$$\text{б) } L = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\mathcal{L}(x)\dot{q}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + mgx - \frac{q^2}{2C}.$$

4.24. Пусть  $\varphi$  — угол поворота рамки вокруг оси  $AB$ , отсчитываемый от направления магнитного поля,  $\dot{q}$  — ток в рамке (для него положительным считается направление от  $A$  к  $D$ ). Функция Лагранжа системы

$$L = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}\dot{q}^2 + \mathcal{H}a^2\dot{q} \sin \varphi.$$

Интегралы движения — энергия

$$E = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\mathcal{L}\dot{q}^2 \quad (1)$$

и импульс, сопряженный циклической координате  $q$  и имеющий смысл полного магнитного потока через рамку,

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \mathcal{L}\dot{q} + \mathcal{H}a^2 \sin \varphi = \Phi_0.$$

Поэтому ток в рамке однозначно определяется ее положением

$$\dot{q} = (\Phi_0 - \mathcal{H}a^2 \sin \varphi) / \mathcal{L}.$$

Подставляя это значение  $\dot{q}$  в (1), получаем

$$E = \frac{1}{2}ma^2\dot{\varphi}^2 + U_{\text{эфф}}(\varphi), \quad U_{\text{эфф}}(\varphi) = (\Phi_0 - \mathcal{H}a^2 \sin \varphi)^2 / 2\mathcal{L}. \quad (2)$$

Таким образом, задача о движении системы сводится к одномерной.

Рассмотрим подробнее случай  $0 < \Phi_0 < \mathcal{H}a^2$ . График  $U_{\text{эфф}}(\varphi)$  для этого случая приведен на рис. 114. Видно, что при  $E > U_{\text{max}} = (\Phi_0 + \mathcal{H}a^2)^2 / 2\mathcal{L}$  движение рамки представляет собой вращение, причем  $\dot{\varphi}$  является периодической функцией времени с периодом

$$T = \sqrt{2ma} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{E - U_{\text{эфф}}(\varphi)}}.$$

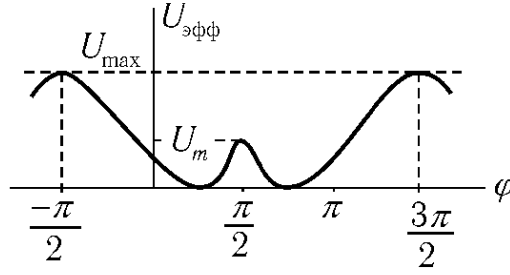


Рис. 114

При  $U_{\max} > E > (\Phi_0 - \mathcal{H}a^2)^2/2\mathcal{L} = U_m$  рамка совершает периодические колебания в интервале углов  $\varphi_1 < \varphi < \pi - \varphi_1$ , где  $\varphi_1 = \arcsin \frac{\Phi_0 - \sqrt{2\mathcal{L}E}}{\mathcal{H}a^2}$ , причем при  $E \rightarrow U_{\max}$  период движения возрастает до бесконечности (см. задачу 1.5). При  $0 < E < U_m$  возможны колебания либо в интервале  $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ , либо в интервале  $\pi - \varphi_2 < \varphi < \pi - \varphi_1$ , где

$$\varphi_2 = \arcsin \frac{\Phi_0 + \sqrt{2\mathcal{L}E}}{\mathcal{H}a^2}.$$

Как изменится по сравнению с описанным характер движения рамки, если она обладает малым сопротивлением?

**4.25.** а) Уравнения движения системы можно получить из функции Лагранжа с добавкой, учитывающей связь (см. [4], § 2.4)

$$L^* = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - mgy + \lambda(z - ax^2),$$

где  $\lambda$  — зависящий от времени множитель Лагранжа. Уравнения движения

$$m\ddot{x} = -2\lambda ax, \quad (1)$$

$$m\ddot{z} - mg = \lambda \quad (2)$$

вместе с уравнением связи  $z = ax^2$  полностью определяют движение частицы. В правой стороне уравнений (1), (2) стоят компоненты силы реакции по соответствующим осям  $R_x = -2\lambda ax$  и  $R_z = \lambda$ . Воспользовавшись уравнением связи, легко выразить их через координату и скорость частицы:

$$R_x = -2axR_z, \quad R_z = \frac{(2a\dot{x}^2 - mg)m}{m + 4a^2x^2}.$$

$$\text{б)} \quad \begin{cases} m\ddot{r} - mg \cos \varphi - mr\dot{\varphi}^2 = \lambda, \\ mr^2\ddot{\varphi} + 2mr\dot{r}\dot{\varphi} + mgr \sin \varphi = 0, \\ r = l. \end{cases}$$

Сила реакции направлена вдоль  $\mathbf{r}$  и равна

$$\lambda = -mg \cos \varphi - ml\dot{\varphi}^2.$$

4.26.

$$L^* = \frac{m}{2}(r^2\dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2) + mgr \cos \varphi + \lambda(\varphi - \Omega t);$$

$\lambda = 2mr\dot{r}\Omega + mgr \sin \Omega t$  — обобщенная сила, отвечающего координате  $\varphi$  (момент силы).

$$4.27. \quad \text{а)} \quad E = -\frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^s \dot{q}_i R_i.$$

б) Закон преобразования левых частей уравнений движения приведен в задаче 4.3:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{Q}_i} - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial Q_i} = \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right).$$

Таким же должен быть и закон преобразования правых частей:

$$\tilde{R}_i = \sum_k \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} R_k. \quad (1)$$

Если в закон преобразования координат не входит явно время, то скорости преобразуются по закону

$$\dot{q}_i = \sum_k \frac{\partial q_i}{\partial Q_k} \dot{Q}_k,$$

обратному (1).

Иначе говоря, компоненты силы  $R_k$  образуют ковариантный вектор, в то время как компоненты скорости — контравариантный вектор в  $s$ -мерном пространстве (см. [2], § 83).

Таким образом, зная силы реакции связей и трения в декартовых координатах, можно определить силы  $R_i$  в любых обобщенных координатах. В частности, если силы трения выражаются через диссипативную функцию  $R_i = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i}$ , то преобразование  $F$  сводится к замене переменных.

**4.28.** Указанные в условии уравнения получаем, исключая  $\lambda_\beta$  из уравнений

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} - \frac{\partial L}{\partial q_\beta} &= \lambda_\beta, \quad \beta = 1, \dots, r, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial L}{\partial q_n} &= - \sum_{\beta=1}^r \lambda_\beta b_{\beta n}, \quad n = r+1, \dots, s,\end{aligned}$$

и учитывая, что

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_n} &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_n} + \sum_{\beta=1}^r \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} b_{\beta n}, \\ \frac{\partial \tilde{L}}{\partial q_n} &= \frac{\partial L}{\partial q_n} + \sum_{\beta=1}^r \sum_{m=r+1}^s \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\beta} \frac{\partial b_{\beta m}}{\partial q_n} \dot{q}_m.\end{aligned}$$

Таким образом, уравнения движения системы с неголономными связями отнюдь не совпадают с уравнениями Лагранжа, хотя уравнения связи и позволяют исключить из функции Лагранжа некоторые координаты и скорости.

**4.29.** а) Учитывая, что  $q_n$  входит в  $L_n$  и  $L_{n+1}$ , получаем уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_n}{\partial \dot{q}_n} = \frac{\partial L_n}{\partial q_n} + \frac{\partial L_n}{\partial (\Delta q_n)} - \frac{\partial L_{n+1}}{\partial (\Delta q_{n+1})} \quad (\Delta q_n = q_n - q_{n-1}). \quad (1)$$

При  $a \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} \frac{\partial L_n}{\partial \dot{q}_n} &\rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q / \partial t)}, \quad \frac{1}{a} \frac{\partial L_n}{\partial q_n} \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}, \\ \frac{1}{a} \left[ \frac{\partial L_n}{\partial (\Delta q_n)} - \frac{\partial L_{n+1}}{\partial (\Delta q_{n+1})} \right] &\rightarrow - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q / \partial x)},\end{aligned}$$

так что уравнения (1) переходят в уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q / \partial t)} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial q / \partial x)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}. \quad (2)$$

Здесь производные  $\partial/\partial t$  и  $\partial/\partial x$  относятся к функции  $q(x, t)$  и ее производным.

Система  $N$  обыкновенных дифференциальных уравнений (1) переходит в одно уравнение в частных производных (2). Для непрерывной системы переменная  $x$  играет роль «номера» точки.

Мы не будем останавливаться на физических следствиях уравнения (2), так как изучение систем с бесконечным числом степеней свободы является предметом не механики, а теории поля (см. [4], гл. 11; [2], § 32).

$$б) E = \int \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial q/\partial t)} \frac{\partial q}{\partial t} - \mathcal{L} \right\} dx.$$

**4.30.** Функция Лагранжа  $L = \frac{mv^2}{2} - U(r) + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{v}$ , где  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  — векторный потенциал магнитного поля,  $\mathcal{H} = \text{rot } \mathbf{A}$  (разумеется,  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  всегда можно выбрать в виде однородной функции координат степени  $n+1$ ). Если при преобразовании подобия  $\mathbf{r} \rightarrow \alpha \mathbf{r}$ ,  $t \rightarrow \alpha^{1-\frac{k}{2}} t$ , векторный потенциал преобразуется так же, как и скорость, т. е. если  $n = \frac{k}{2}$ , то  $L \rightarrow \alpha^k L$ . Поэтому уравнения движения остаются неизменными при таком преобразовании и выполняется принцип механического подобия (см. [1], § 10).

Из приведенного вывода ясно, что принцип механического подобия справедлив также для магнитного поля, постоянного и в пространстве, если только при преобразовании подобия его величина изменяется в  $\alpha^{\frac{k}{2}-1}$  раз (см., например, задачи 2.30–2.33, 6.36).

**4.31.** Кинетическая энергия системы  $T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}$ , поэтому

$$2T = \sum \frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}_a} \mathbf{v}_a = \frac{d}{dt} \left( \sum m_a \mathbf{v}_a \mathbf{r}_a \right) - \sum \mathbf{r}_a m_a \dot{\mathbf{v}}_a.$$

При усреднении за большой промежуток времени слагаемое  $\frac{d}{dt} \sum m_a \mathbf{v}_a \mathbf{r}_a$ , представляющее собой полную производную по времени от ограниченной функции, обратится в нуль (см. [1], § 10). Подставляя во второе слагаемое  $m_a \dot{\mathbf{v}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_a} + \frac{e_a}{c} [\mathbf{v}_a \mathcal{H}]$  и усредняя по времени, получаем

$$\left\langle 2T + \mathcal{H} \sum \frac{e_a}{c} [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a] \right\rangle = k \langle U \rangle.$$

Здесь скобки  $\langle \rangle$  означают усреднение по времени. В частности, если магнитное поле  $\mathcal{H}$  однородно, то  $\frac{e_a}{m_a} = \frac{e}{m}$ , то

$$2\langle T \rangle + \frac{e}{mc} \mathcal{H} \langle \mathbf{M} \rangle = k \langle U \rangle,$$

где  $\mathbf{M} = \sum m_a [\mathbf{r}_a \mathbf{v}_a]$  — момент импульса системы.

**4.32.** а) Запишем  $\frac{dA}{dt}$  в виде двух слагаемых

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = [m(\ddot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{x}_3 + \dot{x}_1 \ddot{x}_2 \dot{x}_3 + \dot{x}_1 \dot{x}_2 \ddot{x}_3) - \dot{x}_1 \dot{U}_{23} - \dot{x}_2 \dot{U}_{13} - \dot{x}_3 \dot{U}_{12}] - \\ - (\ddot{x}_1 U_{23} + \ddot{x}_2 U_{13} + \ddot{x}_3 U_{12}). \end{aligned} \quad (1)$$

Используя уравнения движения

$$m\ddot{x}_1 = F_{12} + F_{13}, \quad m\ddot{x}_2 = F_{21} + F_{23}, \quad m\ddot{x}_3 = F_{31} + F_{32}, \quad (2)$$

$$F_{ik} = -F_{ki} = -\frac{\partial U_{ik}}{\partial x_i} = \frac{2g^2}{(x_i - x_k)^3} \quad (3)$$

и введя относительные расстояния

$$x_1 - x_2 = x, \quad x_2 - x_3 = y, \quad x_1 - x_3 = z,$$

запишем второе слагаемое из (1) в виде

$$-\frac{2g^2}{m} \left[ \left( \frac{1}{x^3} + \frac{1}{z^3} \right) \frac{1}{y^2} + \left( -\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} \right) \frac{1}{z^2} - \left( \frac{1}{z^3} + \frac{1}{y^3} \right) \frac{1}{x^2} \right]. \quad (4)$$

Собирая слагаемые с одинаковыми степенями  $z$ , перепишем (4)

$$\frac{2g^2(x-y)}{m} \left( \frac{1}{x^3 y^3} - \frac{x^2 + xy + y^2}{z^2 x^3 y^3} - \frac{x+y}{z^3 x^2 y^2} \right).$$

Подставляя сюда  $z = x + y$ , легко убедиться, что это выражение обращается в нуль.

Первое слагаемое из (1) обращается в нуль для произвольных сил. Чтобы показать это, достаточно использовать уравнения движения в форме (2) и подставить

$$\dot{U}_{ik} = \frac{\partial U_{ik}}{\partial (x_i - x_k)} (\dot{x}_i - \dot{x}_k) = -(\dot{x}_i - \dot{x}_k) F_{ik}.$$

Укажем, наконец, что в данном поле преобразование подобия не меняет вида действия, и потому кроме трех указанных есть еще и четвертый интеграл движения (см. задачу 4.13 б)

$$m(x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2 + x_3\dot{x}_3) - 2Et. \quad (5)$$

**4.33.** При сближении любой пары частиц энергия их взаимодействия неограниченно возрастает, поэтому частицы не могут пройти «одна сквозь другую» и порядок их расположения на прямой сохраняется.

При столкновении двух частиц равной массы, но с произвольной энергией взаимодействия (обеспечивающей лишь непроницаемость частиц) эти частицы просто обмениваются скоростями. (Это следует из законов сохранения энергии и импульса.) Если столкновения трех частиц происходят поочередно, так что во время сближения двух частиц третья находится далеко от них, то будет происходить просто обмен скоростями, причем соударения закончатся, когда впереди будет находиться самая быстрая, а позади — самая медленная из частиц, т. е. в этом случае

$$v'_1 = v_3, \quad v'_2 = v_2, \quad v'_3 = v_1. \quad (1)$$

В общем же случае, когда сближаются все три частицы одновременно, величины скоростей отнюдь не будут сохраняться.

Тем удивительнее, что для указанных в предыдущей задаче сил сохраняется ответ (1). Это можно показать, используя все три интеграла движения:  $P$ ,  $E$ ,  $A$ . Учитывая, что при  $t \rightarrow \pm\infty$  функции  $U_{ik} \rightarrow 0$ , и сравнивая  $P$ ,  $E$ ,  $A$  при  $t \rightarrow +\infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$ , получим три уравнения:

$$\begin{aligned} v'_1 + v'_2 + v'_3 &= v_1 + v_2 + v_3, \\ (v'_1)^2 + (v'_2)^2 + (v'_3)^2 &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \\ v'_1 v'_2 v'_3 &= v_1 v_2 v_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Решая эту систему относительно  $v'_i$ , мы по получим, вообще говоря, шесть различных решений. Однако все эти решения можно угадать.

Легко проверить, что решение (1) удовлетворяет системе (2). Далее, так как уравнения (2), очевидно, симметричны относительно всех шести возможных перестановок частиц, то ясно, что остальные корни системы (2) могут быть получены простыми перестановками из (1).

После этого нетрудно убедиться, что только ответ (1) может осуществиться при  $t \rightarrow +\infty$ , ибо любой другой вариант предполагает (в силу указанных неравенств  $v_3 > v_2 > v_1$ ) возможность дальнейших столкновений частиц.



## § 5. Малые колебания систем с одной степенью свободы

5.1. а)  $\omega^2 = \frac{V\alpha^2}{m} \sqrt{1 - \left(\frac{F}{V\alpha}\right)^2}$ ;  $\min U(x)$  существует при  $F < V\alpha$ ;

б)  $\omega^2 = \frac{8\pi}{3} \frac{V\alpha^4}{m} x_0^2 \left(\frac{\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)}\right)^2$ , где амплитуда  $x_0$  определена равенством

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{1}{3}V\alpha^4 x^4 = \frac{1}{3}V\alpha^4 x_0^4.$$

5.2. Функция Лагранжа системы (см. [1], § 5, задача 4)

$$L = ma^2[\dot{\theta}^2(1 + 2\sin^2 \theta) + \Omega^2 \sin^2 \theta + 2\Omega_0^2 \cos \theta],$$

где введено обозначение  $\Omega_0^2 = 2g/a$ .

При  $\Omega > \Omega_0$  потенциальная энергия системы

$$U(\theta) = -ma^2(\Omega^2 \sin^2 \theta + 2\Omega_0^2 \cos \theta)$$

имеет минимум при  $\cos \theta_0 = \Omega_0^2/\Omega^2$ . Разлагаем  $U(\theta)$  вблизи  $\theta_0$ , а в кинетической энергии полагаем

$$1 + 2\sin^2 \theta = 1 + 2\sin^2 \theta_0 = 3 - 2\left(\frac{\Omega_0}{\Omega}\right)^4 \equiv \frac{M}{2ma^2},$$

тогда

$$L = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2,$$

где  $k = U''(\theta_0)$ ,  $x = \theta - \theta_0$ . Отсюда

$$\omega^2 = \frac{k}{M} = \Omega^2 \frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4} \quad (\Omega > \Omega_0).$$

При  $\Omega \gg \Omega_0$  частота колебаний пропорциональна угловой скорости вращения  $\omega = \frac{1}{\sqrt{3}}\Omega$ , а  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$ . В случае  $\Omega \rightarrow \Omega_0$  малые колебания совершаются с частотой  $\omega \rightarrow 0$ , а  $\theta_0 \rightarrow 0$ .

Если  $\Omega < \Omega_0$ , то можно рассматривать колебания вблизи  $\theta_0 = 0$  при упругих соударениях боковых масс

$$\omega^2 = \Omega_0^2 - \Omega^2 \quad (\Omega < \Omega_0).$$

При  $\Omega = \Omega_0$  потенциальная энергия  $U$  имеет минимум при  $\theta_0 = 0$  и представима вблизи него в виде

$$U = ma^2\Omega_0^2\left(-2 + \frac{\theta^4}{4}\right),$$

т. е. колебания существенно нелинейны. Оставляя и в кинетической энергии члены до четвертого порядка, получим

$$\frac{2\pi}{\omega} = T = 8 \int_0^{\theta_m} \frac{\sqrt{1 + 2\theta^2} d\theta}{\sqrt{\Omega_0^2(\theta_m^4 - \theta^4)}}.$$

Здесь  $\theta_m$  — амплитуда колебаний (ср. [1], § 11, задача 2 а).

**5.3.** Обозначим  $s = (q^2/8mgR^2)^{1/3}$ .

При  $s < 1$  положение устойчивого равновесия  $\varphi_0$  определяется условием  $\sin \frac{\varphi_0}{2} = s$ ,  $\omega^2 = \frac{3g}{R}(1 - s^2)$ .

При  $s > 1$  положение устойчивого равновесия — точка  $A$ , а  $\omega^2 = \frac{3g}{R}(s^3 - 1)$ .

**5.4.**

$$r = r_0 + a \cos \omega(t - t_0),$$

$$\varphi = \varphi_0 + \Omega(t - t_0) - \frac{2a\Omega}{r_0\omega} \sin[\omega(t - t_0)],$$

где  $r_0, \varphi_0, a, t_0$  — константы интегрирования ( $a \ll r_0$ ),

$$\Omega = \sqrt{\frac{n\alpha}{m}} r_0^{-(n+2)/2}, \quad \omega = \Omega \sqrt{2 - n}.$$

**5.5.** В точке  $\theta = \theta_0$  эффективная потенциальная энергия  $U_{\text{эфф}}(\theta) = \frac{M_z^2}{2ml^2 \sin^2 \theta} - mgl \cos \theta$  (см. [1], § 14, задача 1) имеет минимум, поэтому  $U'_{\text{эфф}}(\theta_0) = 0$ . Отсюда находим

$$M_z^2 = m^2 l^3 g \sin^4 \theta_0 / \cos \theta_0,$$

а частота малых колебаний

$$\omega(\theta_0) = \sqrt{\frac{U''_{\text{эфф}}(\theta_0)}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l} \frac{1 + 3 \cos^2 \theta_0}{\cos \theta_0}}.$$

Для применимости этого расчета необходимо, чтобы

$$\frac{1}{2}U''_{\text{эфф}}(\theta_0)(\Delta\theta)^2 \gg \frac{1}{6}|U'''_{\text{эфф}}(\theta_0)|(\Delta\theta)^3,$$

где  $\Delta\theta$  — амплитуда колебаний. Если  $\theta_0 \sim 1$ , это условие выполняется при  $\Delta\theta \ll 1$ . Однако при  $\theta_0 \ll 1$  оказывается  $U'''_{\text{эфф}}(\theta_0) \propto \frac{1}{\theta_0}$  и колебания по  $\theta$  можно рассматривать как малые, только если  $\Delta\theta \ll \theta_0$ . Тем не менее в этом случае полученный результат  $\omega = 2\sqrt{g/l}$  справедлив и для  $\Delta\theta \sim \theta_0$ , когда колебания по  $\theta$  перестают быть гармоническими. Действительно, по осям  $x$  и  $y$  в этом случае происходят малые гармонические колебания с частотой  $\sqrt{g/l}$ , т. е. маятник движется по эллипсу, совершая за один оборот два колебания по углу  $\theta$  (см. [1], § 23, задача 3).

**5.6.** Эффективная потенциальная энергия для радиальных колебаний молекулы

$$U_{\text{эфф}}(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2(r - r_0)^2 + \frac{M^2}{2mr^2},$$

где  $r$  — расстояние между атомами, а  $m$  — приведенная масса. Добавление второго члена, предполагаемого малой поправкой, приводит к малому смещению положения равновесия

$$\delta r_0 = \frac{M^2}{m^2\omega_0^2 r_0^3}.$$

Изменение частоты определим, разлагая  $U_{\text{эфф}}(r)$  в ряд вблизи точки  $r_0 + \delta r_0$ :

$$U_{\text{эфф}}(r) = \frac{1}{2}m\omega_0^2(r - r_0 - \delta r_0)^2 + \frac{M^2}{2mr_0^2} + \frac{3M^2}{2mr_0^4}(r - r_0 - \delta r_0)^2.$$

Отсюда поправка к частоте

$$\delta\omega = \frac{3M^2}{2m^2\omega_0 r_0^4} = \frac{3\Omega^2}{2\omega_0},$$

где  $\Omega = M/mr_0^2$  — средняя скорость вращения молекулы.

**5.7.** а) Смещение из положения равновесия

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{\dot{x}_0}{\omega} \sin \omega t = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}} \cos(\omega t + \varphi),$$

$$\text{tg } \varphi = -\frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}, \quad \omega^2 = \frac{2k}{m}.$$

б) Пусть натяжение одной пружинки  $f$ . Для малых смещений  $|y| \ll \sqrt{fl/k}$ , колебания гармонические  $y = A \cos(\omega t + \varphi)$ ,  $\omega^2 = 2f/ml$ .

При  $f = kl$  частота колебаний та же, что и в пункте а). Если пружинки не натянуты ( $f = 0$ ), колебания нелинейны, возвращающая сила  $F = -ky^3/l^2$ ; частота (см. задачу 5.1 б)

$$\omega = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(3/4)}{\Gamma(1/4)} \sqrt{\frac{2k}{m}} \frac{y_m}{l}$$

( $y_m$  — амплитуда колебаний).

Если частица может двигаться в плоскости  $xy$ , то ее движение при  $f \neq 0$  и малых смещениях представляет собой гармонические колебания вдоль осей  $x$  и  $y$  с частотами  $\omega_x^2 = 2k/m$  и  $\omega_y^2 = 2f/ml$  соответственно (см. задачу 6.3).

**5.8.** Пусть  $y$  — координата частицы, отсчитанная от точки верхнего подвеса. Функция Лагранжа системы

$$L = \frac{m\dot{y}^2}{2} - k(y-l)^2 + mgy = \frac{m\dot{y}^2}{2} - k\left(y-l-\frac{mg}{2k}\right)^2 + \text{const}$$

соответствует осциллятору с частотой  $\omega^2 = \frac{2k}{m}$  и положением равновесия  $y_0 = l + \frac{mg}{2k}$ , поэтому  $y = y_0 + A \cos(\omega t + \varphi)$ .

Заметим, что, выбирая в качестве координаты отклонение от положения равновесия, мы исключаем из функции Лагранжа поле тяжести.

**5.9.** Угол отклонения маятника от вертикали

$$\varphi = \frac{a\Omega^2}{g-l\Omega^2} \cos \Omega t, \quad \left| \frac{a\Omega^2}{g-l\Omega^2} \right| \ll 1$$

(см. также задачу 8.3).

Возможны также колебания маятника вблизи направления радиуса-вектора  $\varphi = \Omega t + \frac{g}{a\Omega^2} \sin \Omega t$ ,  $\Omega^2 \gg \frac{g}{a}$ .

**5.10.** Ток в контуре

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{U_0 \sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + (\omega\mathcal{L} - 1/\omega C)^2}}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{\omega\mathcal{L} - 1/\omega C}{R}$$

можно получить, решая уравнения Лагранжа для  $q$ . Функция Лагранжа системы  $L = \frac{\mathcal{L}\dot{q}^2}{2} - \frac{q^2}{2C}$  (см. задачу 4.22) диссипативная функция равна  $\frac{1}{2}R\dot{q}^2$  (см. [3], § 48).

**5.11.** Общее решение уравнения движения (см. [1], § 26; см. также [14])

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F}{m} \cos \gamma t$$

при условии  $\omega^2 = \omega_0^2 - \lambda^2 > 0$  имеет вид

$$x(t) = e^{-\lambda t}(a \cos \omega t + b \sin \omega t) + \frac{F[(\omega_0^2 - \gamma^2) \cos \gamma t + 2\lambda\gamma \sin \gamma t]}{m[(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]},$$

где  $a$  и  $b$  — константы, определяемые из начальных условий. Полагая  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ , найдем окончательно

$$x(t) = \frac{F}{m[(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]} \left[ (\omega_0^2 - \gamma^2)(\cos \gamma t - e^{-\lambda t} \cos \omega t) + 2\lambda\gamma \left( \sin \gamma t - \frac{\omega_0^2 + \gamma^2}{2\gamma\omega} e^{-\lambda t} \sin \omega t \right) \right]. \quad (1)$$

Исследуем полученное решение вблизи резонанса  $\gamma = \omega + \varepsilon$ ,  $|\varepsilon| \ll \omega$ . Если трение полностью отсутствует, т. е.  $\lambda = 0$ , то в окрестности резонанса движение осциллятора представляет собой биения:

$$x = \frac{F}{m\omega_0\varepsilon} \sin \frac{\varepsilon t}{2} \cdot \sin \omega_0 t, \quad (2)$$

причем величина амплитуды и частота биений определяются степенью близости к резонансу (рис. 115, а). Когда же  $\gamma = \omega_0$  (т. е. имеет место полный резонанс) при  $\varepsilon \rightarrow 0$  получим

$$x = \frac{F}{2m\omega_0} t \sin \omega_0 t, \quad (3)$$

т. е. колебания, амплитуда  $a(t)$  которых неограниченно возрастает по закону  $a(t) = Ft/2m\omega_0$  (рис. 115, б).

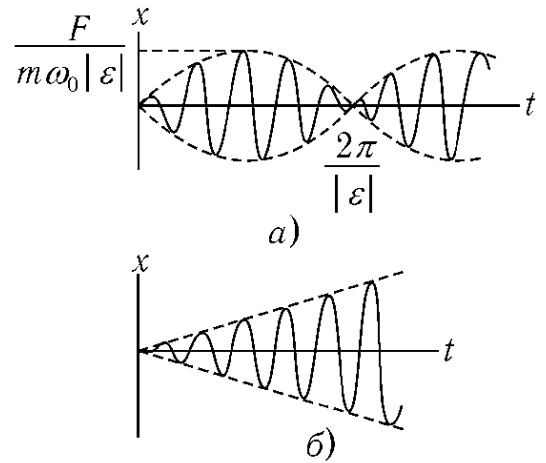


Рис. 115

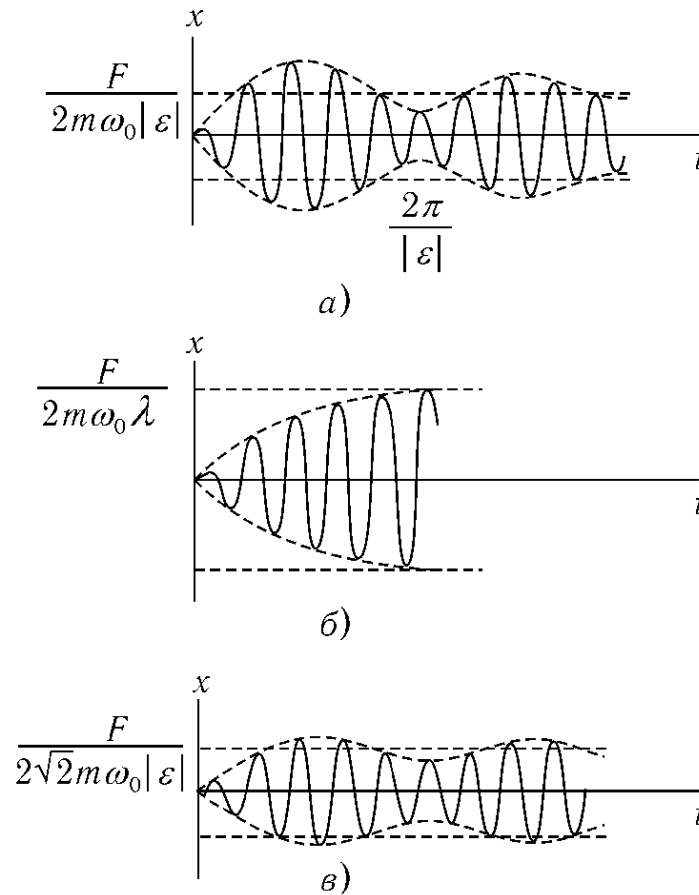


Рис. 116

При наличии даже малого трения ( $\lambda \ll \omega_0$ ) картина движения качественно меняется. Так, при  $\lambda \ll |\varepsilon|$  из (1) легко получить вместо (2)

$$x(t) = \frac{F}{2m\omega_0\varepsilon} \sqrt{1 - 2e^{-\lambda t} \cos \varepsilon t + e^{-2\lambda t}} \cos(\omega_0 t + \varphi_1(t)). \quad (4)$$

Здесь  $\varphi_1(t)$  — некоторая медленно меняющаяся во времени фаза колебаний. Амплитуда колебаний медленно осциллирует с частотой  $|\varepsilon|$  около значения  $F/2m\omega_0|\varepsilon|$ , постепенно приближаясь к нему (рис. 116, а). Замечательно, что во время переходного процесса амплитуда может достигать значений, почти вдвое больших амплитуды установившихся колебаний. При соотношениях  $|\varepsilon| \ll \lambda \ll \omega_0$  получаем

$$x = \frac{F}{2m\omega_0\lambda} (1 - e^{-\lambda t}) \cos(\omega_0 t + \varphi_2(t)). \quad (5)$$

В этом случае происходит переходный процесс с плавно растущей амплитудой, асимптотически приближающейся к значению  $F/2m\omega_0\lambda$ , опреде-

ляемому коэффициентом трения  $\lambda$  (рис. 116, б). И, наконец, если  $\varepsilon$  и  $\lambda$  — величины одного порядка малости,  $|\varepsilon| \sim \lambda \ll \omega_0$ , то осцилляции амплитуды вокруг значения, отвечающего установившимся колебаниям  $F/2\sqrt{2}m\omega_0|\varepsilon|$ , весьма неглубоки (для случая  $\varepsilon \approx \lambda$ , см. рис. 116, в).

Таким образом, система приходит к установившимся колебаниям для этих трех случаев (рис. 116) за время  $t$  порядка  $1/\lambda$  (это, впрочем, очевидно и из (1)).

Качественное исследование процесса установления колебаний (переходного процесса) при  $\lambda \ll \omega_0$  удобно проводить с помощью векторных диаграмм (рис. 117). Вынужденное колебание изображается проекцией на ось  $x$  вектора  $\vec{OA}$ , вращающегося с угловой скоростью  $\gamma$ . Вектор свободного колебания  $\vec{AB}$  вращается с угловой скоростью  $\omega$ , и длина его убывает пропорционально  $e^{-\lambda t}$ . В начальный момент  $\vec{AB} + \vec{OA} \approx 0$ .

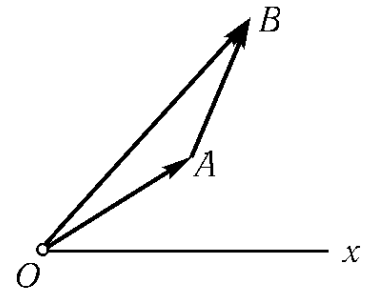


Рис. 117

Каков характер переходного процесса, если  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) \neq 0$ ?

**5.12. а)** Энергия, приобретенная осциллятором,

$$E = \frac{\pi F^2}{2m} \tau^2 \exp\left[-\frac{1}{2}(\omega\tau)^2\right]$$

существенно зависит от того, как быстро включается сила (от параметра  $\omega\tau$ ). При мгновенном ударе ( $\omega\tau \ll 1$ ) или при очень медленном включении силы ( $\omega\tau \gg 1$ ) передачи энергии малы,

максимум передачи энергии  $E_{\max} = \frac{\pi F^2}{m\omega^2 e}$  достигается при  $\tau_m = \sqrt{2}/\omega$  (рис. 118).

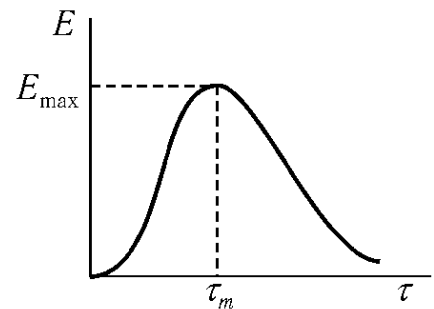


Рис. 118

б) Если  $x \rightarrow a \cos(\omega t + \varphi)$  при  $t \rightarrow \infty$ ,<sup>1</sup> то

$$\Delta E = E(+\infty) - E(-\infty) = \frac{\pi F^2}{2m} \tau^2 e^{-(\omega\tau)^2/2} - \sqrt{\pi} a \omega \tau F e^{-(\omega\tau)^2/4} \sin \varphi.$$

В зависимости от величины  $\varphi$  осциллятор приобретает или теряет энергию. Это изменение энергии подобно поглощению или вынужденному испусканию света атомом.

При усреднении по фазе  $\varphi$  получим тот же ответ, что и в пункте а).

<sup>1</sup> $\varphi$  имеет смысл «прицельной фазы», т. е. той фазы, которую осциллятор имел бы при  $t = 0$ , если бы не было вынуждающей силы.

**5.13.** а)  $x(t) = \frac{1}{2\mu} [\xi_1(t) + \xi_2(t)]$ , где

$$\xi_{1,2} = e^{\pm\mu t} \left[ \int_0^t \frac{1}{m} F(\tau) e^{\pm\mu\tau} d\tau + \dot{x}_0 \mp \mu x_0 \right].$$

б)  $x(t) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\omega t - \lambda t} \left[ \int_0^t \frac{1}{m} F(\tau) e^{\lambda\tau - i\omega\tau} d\tau + \dot{x}_0 + (i\omega + \lambda)x_0 \right] \right\},$

где  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$ .

**5.14.** На осциллятор действует сила

$$\mathbf{F}(t) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} U(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)|), \quad (1)$$

где  $\mathbf{r}(t)$  — отклонение осциллятора, а  $\mathbf{r}_0(t)$  — радиус-вектор налетающей частицы. Предполагая отклонение частицы малым, полагаем  $\mathbf{r}_0(t) = \boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t$  ( $\boldsymbol{\rho}$  — прицельный параметр, векторы  $\boldsymbol{\rho}$  и  $\mathbf{v}$  взаимно ортогональны). Считая также малой амплитуду колебаний осциллятора, полагаем в (1) (после дифференцирования)  $\mathbf{r} = 0$ ; тогда  $\mathbf{F}(t) = -2\kappa^2 V(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}t) \cdot \exp(-\kappa^2 \boldsymbol{\rho}^2 - \kappa^2 \mathbf{v}^2 t^2)$ .

Колебания по направлениям  $\boldsymbol{\rho}$  и  $\mathbf{v}$  независимы и возбуждаются до энергии

$$\frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F_\rho(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} F_v(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2 \quad (2)$$

соответственно. Здесь  $F_v$  и  $F_\rho$  — компоненты силы по направлениям  $\mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\rho}$ . Полная энергия возбуждения осциллятора<sup>1</sup>

$$\varepsilon = \frac{\pi V^2}{2E} (x + a) e^{-x-a}, \quad (3)$$

где

$$E = \frac{1}{2} m v^2, \quad a = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega}{\kappa v} \right)^2, \quad x = 2(\kappa \rho)^2.$$

<sup>1</sup>Интересно отметить, что зависимость  $\varepsilon(\omega)$  такая же, как и зависимость спектральной плотности излучения быстрого электрона в поле  $U(r)$  (см. [2], § 67).



Сечение возбуждения осциллятора до энергии, лежащей в интервале от  $\varepsilon$  до  $\varepsilon + \delta\varepsilon$ ,

$$d\sigma = \pi \sum_k |d\rho_k^2| = \frac{\pi}{2\kappa^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \sum_k \left| \frac{a + x_k(\varepsilon)}{1 - a - x_k(\varepsilon)} \right|, \quad (4)$$

где  $x_k$  — различные корни уравнения (3).

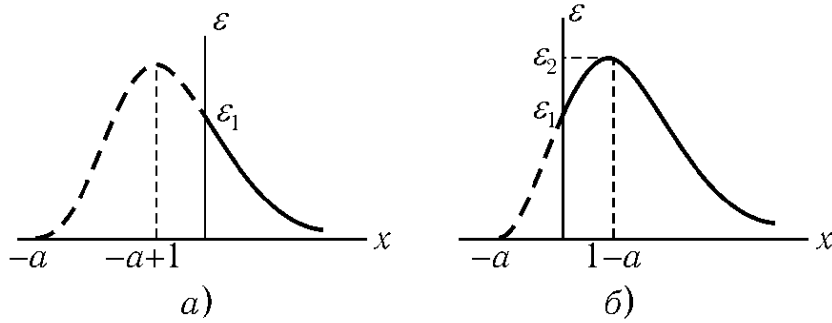


Рис. 119

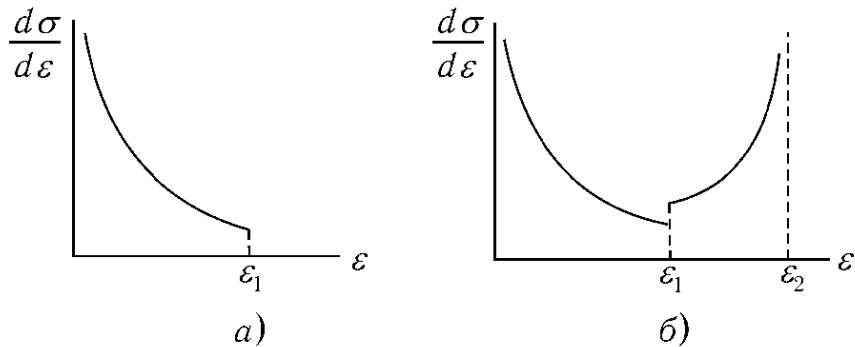


Рис. 120

Дальнейшее исследование удобно проводить, решая уравнение (3) графически, как это делалось в задаче 3.10 а. При  $\varepsilon \ll \varepsilon_1 = \frac{\pi V^2}{2E} a e^{-a}$  получаем  $d\sigma = \frac{\pi}{2\kappa^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$  (в уравнении (4) полагаем  $x_k(\varepsilon) \gg 1$ ,  $x_k \gg a$ ). Для бóльших  $\varepsilon$  результат зависит от величины  $a$ . Если  $a > 1$ , то возможно лишь  $\varepsilon < \varepsilon_1$  (рис. 119, а; для сечения — рис. 120, а). Если же  $a < 1$ , то возможно  $\varepsilon < \varepsilon_2 = \frac{\pi V^2}{2Ee}$  (рис. 119, б), причем при  $\varepsilon = \varepsilon_1$  график  $d\sigma/d\varepsilon$  испытывает скачок, а при  $\varepsilon_2 - \varepsilon \ll \varepsilon_2$  имеет интегрируемую особенность (рис. 120, б)

$$d\sigma = \frac{\pi}{\sqrt{2}\kappa^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon/\varepsilon_2}}.$$

**5.15.** Если осциллятор имеет «прицельную фазу», равную  $\varphi$  (см. задачу 5.12 б), то, повторяя выкладки предыдущей задачи, получим для энергии осциллятора выражение

$$\varepsilon = \varepsilon_1 e^{-2(\kappa\rho)^2} + 2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0} e^{-(\kappa\rho)^2} \cos\varphi + \varepsilon_0, \quad (1)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{4E} \left( \frac{V\omega}{\kappa v} \right)^2 \exp \left\{ -\frac{\omega^2}{2(\kappa v)^2} \right\}.$$

При  $\cos\varphi > 0$  для всех  $\rho$  оказывается  $\varepsilon > \varepsilon_0$ , а при  $\cos\varphi < 0$  существуют такие  $\rho_{1,2}$ , для которых  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Разрешая уравнение (1) относительно  $\rho^2$ , находим

$$\rho^2 = \frac{1}{\kappa^2} \ln \frac{\sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0}}{-\cos\varphi + \sqrt{(\varepsilon/\varepsilon_0) - \sin^2\varphi}} \quad \text{при } \varepsilon > \varepsilon_0,$$

$$\rho_{1,2}^2 = \frac{1}{\kappa^2} \ln \frac{\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_0}|\cos\varphi| \pm \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0 \sin^2\varphi}} \quad \text{при } \cos\varphi < 0$$

и  $\varepsilon_0 > \varepsilon > \varepsilon_{\min} = \varepsilon_0 \sin^2\varphi$ . Отсюда

$$d\sigma = \pi \left| \frac{d\rho^2}{d\varepsilon} \right| d\varepsilon = \frac{\pi}{2\kappa^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_0 \sin^2\varphi - \cos\varphi \cdot \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2 \sin^2\varphi}} \quad (2)$$

при  $\varepsilon > \varepsilon_0$  и

$$d\sigma = \pi d(-\rho_1^2 + \rho_2^2) = \frac{1}{\kappa^2} \frac{\varepsilon_0 \pi |\cos\varphi| d\varepsilon}{(\varepsilon_0 - \varepsilon) \sqrt{\varepsilon\varepsilon_0 - \varepsilon_0^2 \sin^2\varphi}} \quad (3)$$

при  $\varepsilon_{\min} < \varepsilon < \varepsilon_0$  и  $\cos\varphi < 0$ .

Усредняя по всем возможным для данного  $\varepsilon$  фазам  $\varphi$ , получим

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right\rangle = \frac{\pi}{2\kappa^2 |\varepsilon_0 - \varepsilon|} \quad (4)$$

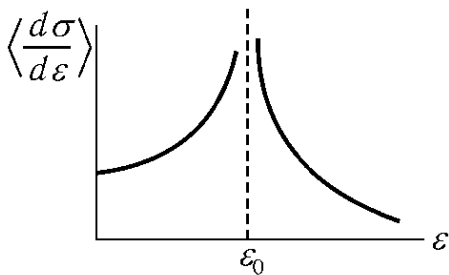


Рис. 121

(рис. 121). Усреднение проводится по формулам

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varphi$$

для  $\varepsilon > \varepsilon_0$  и

$$\left\langle \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\pi-\alpha}^{\pi+\alpha} \frac{d\sigma}{d\varepsilon} d\varphi$$

для  $\varepsilon < \varepsilon_0$ . Здесь  $\alpha = \arcsin \sqrt{\varepsilon/\varepsilon_0}$ .

Расходимость сечений (2), (3) и (4) при  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$  связана с тем, что при любых больших  $\rho$  осциллятор возбуждается.

С чем связана дополнительная особенность в (3) и почему ее нет в (4)?

**5.16.** Для функции Лагранжа  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 + xF(t)$  энергия системы

$$E(t) = \frac{m}{2}(\operatorname{Re} \xi)^2 + \frac{m}{2}(\operatorname{Im} \xi)^2 - \frac{F(t)}{\omega} \operatorname{Im} \xi = \frac{m}{2} \left| \xi - \frac{iF(t)}{m\omega} \right|^2 - \frac{F^2(t)}{2m\omega^2},$$

где

$$\xi = \dot{x} + i\omega x = e^{i\omega t} \int_{-\infty}^t e^{-i\omega\tau} \frac{1}{m} F(\tau) d\tau \quad (1)$$

(см. [1], § 22). Хотя выражение для энергии имеет определенный предел при  $t \rightarrow \infty$ , интеграл, определяющий  $\xi(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , не имеет предела (так как  $F(\tau) \rightarrow F_0$  при  $\tau \rightarrow \infty$ ). Интегрируя (1) по частям, получим

$$\xi(t) = \frac{iF(t)}{m\omega} - \frac{ie^{i\omega t}}{m\omega} \int_{-\infty}^t F'(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau, \quad (2)$$

где  $F'(\tau) \rightarrow 0$  при  $\tau \rightarrow \infty$  и интеграл сходится при  $t \rightarrow \infty$ . Из (2) видно, что движение осциллятора при  $t \rightarrow \infty$  представляет собой гармонические колебания (второе слагаемое в (2)) около нового положения равновесия  $x_0 = \frac{F_0}{m\omega^2}$  (первое слагаемое в (2)). Переданная осциллятору энергия в соответствии с этим имеет вид

$$E(+\infty) = -\frac{F_0^2}{2m\omega^2} + \frac{1}{2m\omega^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F'(t) e^{-i\omega t} dt \right|^2.$$

**5.17.**

$$\Delta E = E(+\infty) - E(-\infty) = -\frac{F_0^2}{2m\omega^2} + \frac{\lambda^4 F_0^2}{2m\omega^2(\lambda^2 + \omega^2)^2} - \frac{a\lambda^2 F_0 \cos \varphi}{\lambda^2 + \omega^2}.$$

$E_0 = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$ ,  $\varphi$  — «прицельная фаза» (см. сноску к задаче 5.12 б).

**5.18.** Проводя в формуле  $\xi(\tau) = \xi(0)e^{i\omega\tau} + \frac{1}{m}e^{i\omega\tau} \int_0^\tau F(t)e^{-i\omega t} dt$

(см. [1], § 22)  $n$ -кратное интегрирование по частям, получаем выражение

$$\begin{aligned} \xi(\tau) = \xi(0)e^{i\omega\tau} + \frac{iF_0}{m\omega} + \frac{F^{(n)}(+0)e^{i\omega\tau} - F^{(n)}(\tau-0)}{m(i\omega)^{(n+1)}} + \\ + \frac{e^{i\omega\tau}}{m(i\omega)^{(n+1)}} \int_0^\tau F^{(n+1)}(t)e^{-i\omega t} dt. \end{aligned}$$

Здесь  $|\xi(0)| = a_0\omega$ , где  $a_0$  — амплитуда колебаний до момента включения силы. Предпоследний член в этой формуле по порядку величины равен  $\frac{F_0}{m\omega}(\omega\tau)^{-n}$ , а последний, вообще говоря, гораздо меньше (если  $F^{(n+1)}(t)$  изменяется плавно). Квадрат амплитуды колебания  $\omega^{-2} \left| \xi - \frac{iF_0}{m\omega} \right|^2$  при  $t > \tau$  по порядку величины равен  $\left( a_0 + \frac{F_0(\omega\tau)^{-n}}{m\omega^2} \right)^2$ .

Таким образом, если сила включается медленно и плавно, передача энергии очень мала.

**5.19.** а) В промежуток времени  $0 \leq t \leq \tau$  колебания имеют вид  $x = Ft/m\omega^2\tau + B \sin \omega t + C \cos \omega t$ .

Движение окажется установившимся, если

$$x(\tau) = x(0), \quad \dot{x}(\tau) = \dot{x}(0).$$

Эти условия приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{F}{m\omega^2} + B \sin \omega\tau + C(\cos \omega\tau - 1) = 0, \\ B(\cos \omega\tau - 1) - C \sin \omega\tau = 0, \end{cases} \quad (1)$$

определяющей постоянные  $B$  и  $C$ . Таким образом, при  $0 \leq t \leq \tau$

$$x(t) = \frac{F}{m\omega^2} \left[ \frac{t}{\tau} - \frac{\sin(\omega t - \omega\tau/2)}{2 \sin(\omega\tau/2)} \right]. \quad (2)$$

Если же  $t$  лежит в промежутке  $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$  (где  $n$  — целое), то в правой части (2) следует заменить  $t$  на  $t' = t - n\tau$  ( $0 \leq t' \leq \tau$ ).

При  $\omega\tau$ , близком к целому кратному  $2\pi$ , второй член в (2) оказывается очень большим — случай, близкий к резонансу. При  $\omega\tau = 2\pi l$  ( $l$  — целое) установившихся колебаний быть не может (система (1) противоречива<sup>1</sup>).

б)  $x(t) = \frac{1}{\omega} \operatorname{Im} \left[ \frac{iF}{m\omega} + \frac{F}{m(\lambda + i\omega)} e^{-\lambda t} + A e^{i\omega t} \right]$  для  $0 \leq t \leq \tau$ ; здесь

$$A = -\frac{F}{m(\lambda + i\omega)} \frac{1 - e^{-\lambda\tau}}{1 - e^{i\omega\tau}};$$

для  $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$  в правой части следует заменить  $t$  на  $t' = t - n\tau$ .

в) При  $\omega_0 = (\mathcal{L}C)^{-1/2} > \lambda = R/2\mathcal{L}$  установившийся ток

$$I(t) = -\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}} \frac{V}{\mathcal{L}} \operatorname{Im} \left( \frac{e^{\alpha t}}{1 - e^{\alpha\tau}} + \frac{1}{\alpha\tau} \right), \quad \alpha = -\lambda + i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \quad (1)$$

для  $0 \leq t \leq \tau$ . Для  $n \leq \frac{t}{\tau} \leq n+1$  нужно в формуле для тока заменить  $t$  на  $t' = t - n\tau$ .

Можно ли, используя (1), получить выражение для установившегося тока при  $\omega_0 < \lambda$  или при  $\omega_0 = \lambda$ ?

**5.20.** а)  $A = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) \dot{x}(t) dt =$

$$= \frac{\lambda\omega^2}{m} \left[ \frac{f_1^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2} + \frac{4f_2^2}{(\omega_0^2 - 4\omega^2)^2 + 16\lambda^2\omega^2} \right],$$

---

<sup>1</sup>Представив силу в виде ряда Фурье

$$F(t) = \frac{F}{2} - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{F}{\pi l} \sin \frac{2\pi l}{\tau} t,$$

видим, что резонансную раскачку колебаний может вызывать каждая гармоника вынуждающей силы. При  $\tau = 2\pi l/\omega$  для достаточно больших  $t$  (каких именно?)

$$x(t) \sim -\frac{Ft}{2\pi m\omega l} \sin \omega t.$$

т. е. каждая из двух гармоник силы передает энергию независимо от другой (здесь период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ).

$$\text{б) } A = \frac{4\lambda\omega^2}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a|^2 n^2}{(\omega_0^2 - n^2\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2 n^2}.$$

$$\text{в) } \langle A \rangle = \frac{\lambda}{m} \left[ \frac{f_1^2 \omega_1^2}{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_1^2} + \frac{f_2^2 \omega_2^2}{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\lambda^2 \omega_2^2} \right].$$

При усреднении за большой промежуток времени  $T \gg \frac{2\pi}{\omega_{1,2}}$  оказывается, что каждая из сил  $f_1 \cos \omega_1 t$  и  $f_2 \cos \omega_2 t$  передает энергию осциллятору независимо. Это связано с тем, что лишь средние квадраты тригонометрических функций отличны от нуля. При  $T \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega_1 t \, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\omega_1 T} (1 - \sin 2\omega_1 T) \rightarrow \frac{1}{2},$$

а средние значения перекрестных произведений типа  $\sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_1 t$  и т. д. исчезают. Например, при  $T \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t \, dt = \frac{1 - \cos(\omega_1 - \omega_2)T}{2(\omega_1 - \omega_2)T} + \frac{1 - \cos(\omega_1 + \omega_2)T}{2(\omega_1 + \omega_2)T} \rightarrow 0.$$

г) Смещение осциллятора

$$x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(\omega) e^{i\omega t} d\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega};$$

отсюда полная работа силы  $F(t)$  равна

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}(t) F(t) \, dt = \frac{8\pi\lambda}{m} \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 |\psi(\omega)|^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2 \omega^2} d\omega. \quad (1)$$

При доказательстве последнего равенства использовано обратное преобразование Фурье  $\int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{i\omega t} dt = 2\pi \psi^*(\omega)$ .

При  $\lambda \ll \omega_0$  основной вклад в интеграл (1) дает окрестность вблизи собственной частоты осциллятора  $\omega = \omega_0$ .

Поэтому

$$A \approx \frac{4\pi|\psi(\omega_0)|^2\omega_0}{m} \left[ \lambda \int_0^\infty \frac{d\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega_0^2} \right].$$

При этом сомножитель, стоящий в квадратных скобках, легко вычисляется и оказывается не зависящим от  $\lambda$ ,  $A = \frac{|2\pi\psi(\omega_0)|^2}{2m}$  (ср. с формулой (22,12) из [1]).

**5.21.** Учитывая, что отклонение осциллятора  $x$  есть малая величина первого порядка по  $F$ , получим

$$\begin{aligned} \Delta E &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t) \dot{x} dt \approx \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \dot{x} dt, \\ \Delta P &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x, t) dt \approx \int_{-\infty}^{\infty} \left[ f(t) - \dot{f}(t) \frac{x}{V} \right] dt. \end{aligned}$$

Интегрируя второе слагаемое по частям, найдем

$$\Delta P = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt + \frac{\Delta E}{V}.$$

В частности, если  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 0$ , то  $\Delta E = V \Delta P$ .

Поясним условие малости  $x$  на примере действия на осциллятор группы волн  $f(t) = f e^{-|t|/\tau} \cos \gamma t$ . Малым параметром в разложении  $F(x, t)$  является  $x/\lambda$ , где  $\lambda = 2\pi V/\gamma$  — характерная длина волны, т. е.

$$\frac{|x|}{\lambda} = \frac{f\gamma}{2\pi m|\omega^2 - \gamma^2|} \ll 1.$$

## § 6. Малые колебания систем с несколькими степенями свободы

**6.1.** Пусть  $x_i$  — отклонение  $i$ -й частицы от положения равновесия ( $i = 1, 2$ ). Функции Лагранжа системы

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} [x_1^2 + (x_1 - x_2)^2]. \quad (1)$$

Уравнения движения

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) = 0, \quad m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) = 0$$

подстановкой  $x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi)$  сводятся к системе алгебраических уравнений

$$(-m\omega^2 + 2k)A_1 - kA_2 = 0, \quad -kA_1 + (-m\omega^2 + k)A_2 = 0. \quad (2)$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$(-m\omega^2 + 2k)(-m\omega^2 + k) - k^2 = 0. \quad (3)$$

Отсюда получаем собственные частоты

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}.$$

Из двух уравнений (2) в силу (3) лишь одно независимо. Подставляя значения  $\omega_1$  и  $\omega_2$  в (2), получим соотношения между амплитудами

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{2}{\sqrt{5} + 1} A_2 \equiv A && \text{для } \omega = \omega_1, \\ A_1 &= -\frac{2}{\sqrt{5} - 1} A_2 \equiv B && \text{для } \omega = \omega_2. \end{aligned}$$

Таким образом, свободные колебания системы суть

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ x_2 &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} A \cos(\omega_1 t + \varphi_1) - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} B \cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (4)$$

Постоянные  $A, B, \varphi_1, \varphi_2$  определяются начальными условиями.



Свободные колебания (4) полностью описывают движение системы. Однако при решении многих задач удобнее пользоваться нормальными координатами, например в задачах с вынуждающей силой (см. задачи 6.2 б и 6.24), при построении теории возмущений (см. задачу 6.34), при переходе к квантовой механике. Это связано с тем, что нормальные координаты  $q_i$ , определенные равенствами

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 + q_2, \\ x_2 &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2} q_1 - \frac{\sqrt{5} - 1}{2} q_2, \end{aligned} \quad (5)$$

приводят функцию Лагранжа (1) к сумме квадратов

$$L = \frac{5 + \sqrt{5}}{4} m (\dot{q}_1^2 - \omega_1^2 q_1^2) + \frac{5 - \sqrt{5}}{4} m (\dot{q}_2^2 - \omega_2^2 q_2^2), \quad (6)$$

а уравнения движения для  $q_1$  и  $q_2$  разделяются:

$$\ddot{q}_i + \omega_i^2 q_i = 0.$$

Подобным же образом задача о движении двух взаимодействующих тел сводится к задачам о движении центра инерции и о движении частицы с приведенной массой в заданном силовом поле.

Отметим, наконец, что более общий случай системы  $N$  частиц с одной точкой подвеса рассмотрен в задаче 7.2.

## 6.2. Функция Лагранжа системы

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} [(x_1 - a(t))^2 + (x_1 - x_2)^2].$$

Если отбросить член  $-\frac{1}{2}ka^2(t)$ , представляющий собой полную производную по времени, то  $L$  можно переписать в виде

$$L = L_0 + \Delta L, \quad \Delta L = x_1 ka(t), \quad (1)$$

где  $L_0$  — функция Лагранжа системы с неподвижной точкой подвеса (см. формулу (1) из предыдущей задачи). Такая запись удобнее тем, что сразу позволяет выписать «вектор» внешней силы

$$\begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka(t) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## а) Уравнения движения

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) &= ka \cos \gamma t, \\ m\ddot{x}_2 + k(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

подстановкой<sup>1</sup>

$$x_1 = A \cos \gamma t, \quad x_2 = B \cos \gamma t$$

приводятся к линейной неоднородной системе двух уравнений относительно  $A$  и  $B$ . Отсюда

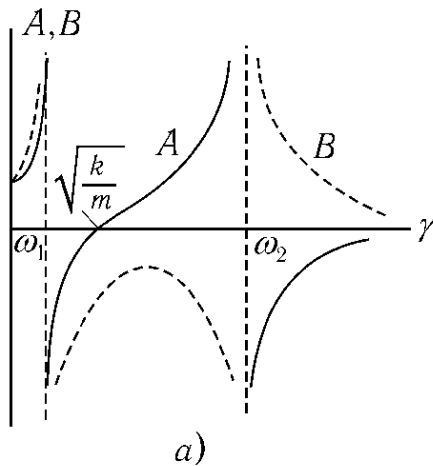
$$\begin{aligned} A &= \frac{ak(-m\gamma^2 + k)}{m^2(\gamma^2 - \omega_1^2)(\gamma^2 - \omega_2^2)}, \\ B &= \frac{ak^2}{m^2(\gamma^2 - \omega_1^2)(\gamma^2 - \omega_2^2)}, \end{aligned}$$

где  $\omega_{1,2}^2 = \frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}$  — нормальные частоты системы.

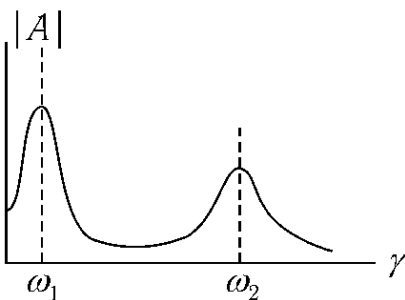
Зависимость амплитуд  $A$  и  $B$  от частоты  $\gamma$  изображена на рис. 122, а.

При переходе через точки резонанса  $\gamma = \omega_{1,2}$  амплитуды  $A$  и  $B$  меняют знак, что отвечает изменению фазы колебаний на  $\pi$ . При частоте  $\gamma = \sqrt{k/m}$  колебания верхней массы полностью демпфируются:  $A = 0$ .

На рис. 122, б изображен примерный вид зависимости  $|A|$  от частоты вынуждающей силы при наличии трения.



а)



б)

Рис. 122

На каких частотах  $\gamma$  будут демпфироваться колебания верхней частицы, если к нижней подвесить еще одну частицу на такой же пружинке?

б) Вводя нормальные координаты  $q_{1,2}$  (см. формулу (5) из предыдущей задачи), представим функцию Лагранжа (1) в виде

$$L = L_1(q_1, \dot{q}_1) + L_2(q_2, \dot{q}_2),$$

$$L_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4} m(\dot{q}_{1,2}^2 - \omega_{1,2}^2 q_{1,2}^2) + q_{1,2} ka(t)$$

(ср. с формулой (6) предыдущей задачи).

<sup>1</sup>Общее решение системы (2) является суперпозицией свободных и вынужденных колебаний. При наличии даже малого трения свободные колебания затухают, поэтому после большого промежутка времени решение системы (2) не зависит от начальных условий и представляет собой вынужденные колебания (3).

Таким образом, задача сводится к отысканию установившихся колебаний двух независимых осцилляторов, на каждый из которых действует пилообразная сила (см. задачу 5.19 а).

Разумеется, и в пункте а) можно было решать задачу, переходя к нормальным координатам (ср. с задачей 6.24).

**6.3 а.** Вводим систему координат с началом в точке подвеса и осью  $y$ , направленной по вертикали вниз. В качестве обобщенных координат выберем координаты  $x_1$  и  $x_2$  точек  $A$  и  $B$ . В выражение для потенциальной энергии  $U = -mgy_1 - mgy_2$  подставляем  $y_1(x_1)$  и  $y_2(x_1, x_2)$  с точностью до второго порядка по  $x_{1,2}/l$ :

$$y_1 = \sqrt{4l^2 - x_1^2} \approx 2l - \frac{x_1^2}{4l},$$

$$y_2 = y_1 + \sqrt{l^2 - (x_2 - x_1)^2} \approx 3l - \frac{x_1^2}{4l} - \frac{(x_2 - x_1)^2}{2l},$$

а в выражение для кинетической энергии  $T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2)$  подставляем  $\dot{y}_1$  и  $\dot{y}_2$  с точностью до первого порядка:

$$\dot{y}_1 = -\frac{x_1 \dot{x}_1}{2l} \approx 0, \quad \dot{y}_2 = \dot{y}_1 - \frac{(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)}{l} \approx 0.$$

После этого функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{mg}{2l}x_1^2 - \frac{mg}{2l}(x_2 - x_1)^2 + 5mgl$$

совпадает с функцией Лагранжа системы, рассмотренной в задаче 6.1, если принять  $k = mg/l$  и отбросить несущественную постоянную  $5mgl$ . Поэтому найденная в задаче 6.1 зависимость  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  справедлива и для двойного маятника.

Если точка подвеса маятника движется по закону  $x_0 = a(t) \ll l$ , то, как легко убедиться, мы возвращаемся к функции Лагранжа, рассмотренной в задаче 6.2.

**6.3 б.** Пусть  $\varphi$  и  $\psi$  — углы отклонения верхней и нижней частицы от вертикали. Нормальные колебания таковы:  $\psi = 2\varphi$  с частотой  $\sqrt{4g/5l}$  и  $\psi = -2\varphi$  с частотой  $\sqrt{4g/3l}$ .

#### 6.4. Закон движения

$$x = a \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad y = b \cos(\omega_2 t + \psi).$$

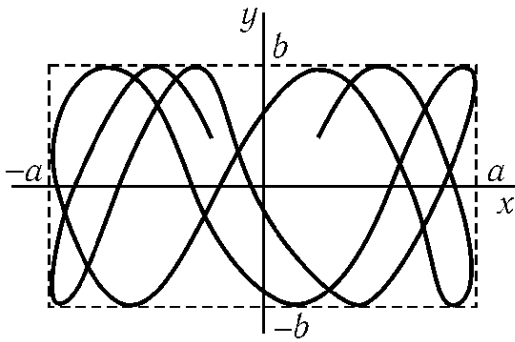


Рис. 123

Постоянные  $a$ ,  $b$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  определяются начальными условиями. Траектория расположена внутри прямоугольника (рис. 123):

$$-a \leq x \leq a, \quad -b \leq y \leq b.$$

Вообще говоря, траектория «заполняет» весь прямоугольник. Точнее, если  $\omega_1$  и  $\omega_2$  несоизмеримы, она проходит как угодно близко к любой точке этого прямоугольника. Движение точки в этом случае не является периодическим (хотя движение ее проекций на оси координат периодическое).

Если же  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соизмеримы ( $l\omega_1 = n\omega_2$ , где  $l$  и  $n$  — целые числа), то траектория представляет собой замкнутую кривую, называемую фигурой Лиссажу. Движение в этом случае периодическое, период равен  $2\pi n/\omega_1$ .

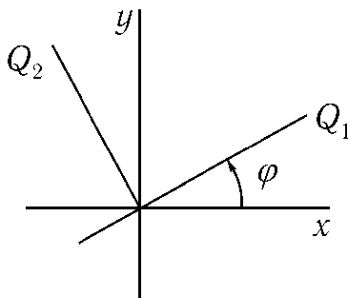


Рис. 124

**6.5.** а) Для данной системы переход к нормальным координатам есть просто поворот в плоскости  $(x, y)$  (рис. 124):

$$x = Q_1 \cos \varphi - Q_2 \sin \varphi, \quad y = Q_1 \sin \varphi + Q_2 \cos \varphi. \quad (1)$$

Действительно, кинетическая энергия при повороте не меняет своего вида, а в потенциальной энергии коэффициент при  $Q_1$ ,  $Q_2$ , равный

$$-\frac{1}{2}(\omega_1^2 - \omega_2^2) \sin 2\varphi - \alpha \cos 2\varphi,$$

можно обратить в нуль, если определить параметр  $\varphi$  из условия

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\alpha}.$$

Зависимость  $\varphi$  от  $\omega_1$  показана на рис. 125; ширина области частот, в которой происходит переход от  $\varphi = 0$  к  $\varphi = \pi/2$  порядка  $\alpha/\omega_2$ .

При слабой связи,  $\alpha \ll |\omega_1^2 - \omega_2^2|$  нормальные колебания локализованы, т. е. при  $\omega_1 < \omega_2$  оказывается  $\varphi \approx 0$  и  $x \approx Q_1$ ,  $y \approx Q_2$ , а при  $\omega_1 > \omega_2$  получаем  $\varphi \approx \frac{\pi}{2}$  и  $x \approx -Q_2$ ,  $y \approx Q_1$ .

При  $|\omega_1^2 - \omega_2^2| \ll \alpha$  нормальные колебания перестают быть локализованными:  $\varphi \approx \frac{\pi}{4}$ ,  $x \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$ ,  $y \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2)$  (см. [1], § 23, задача 1).

Нормальные частоты

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}[\omega_1^2 + \omega_2^2 \mp \sqrt{(\omega_2^2 - \omega_1^2)^2 + 4\alpha^2}] \quad (2)$$

лежат вне интервала парциальных частот<sup>1</sup>, т. е.  $\Omega_1 < \omega_1$  и  $\Omega_2 > \omega_2$  (для определенности считаем  $\omega_1 < \omega_2$ ). Соотношения подобного рода для систем со многими степенями свободы известны под названием «теорем Рэлея» (см. [15] и задачу 6.23).

Зависимость  $\Omega_{1,2}$  от  $\omega_1$  показана на рис. 126. Видно, что отличие нормальных частот  $\Omega_{1,2}$  от парциальных  $\omega_{1,2}$  (равно как и нормальных координат  $Q_1, Q_2$  от координат  $x, y$ ) при малых  $\alpha$  несущественно всюду, за исключением области вырождения  $|\omega_1^2 - \omega_2^2| \lesssim \alpha$ . При достаточно малых  $\omega_1$  одна из нормальных частот становится мнимой — система перестает быть устойчивой.

В координатах  $Q_1$  и  $Q_2$  закон движения и траектория такие же, как в предыдущей задаче.

б) Нормальные координаты можно получить в этом случае из результатов предыдущей задачи простой заменой  $\omega_{1,2}^2 \rightarrow m_{1,2}$ , причем нормальные частоты данной задачи обратны нормальным частотам  $\Omega_{1,2}$  предыдущей задачи. Почему?

Можно ли обнаружить факт независимости нормальных частот от знака  $\alpha$  (или  $\beta$ ) из вида функции Лагранжа, не находя  $\Omega_{1,2}$  в явном виде?

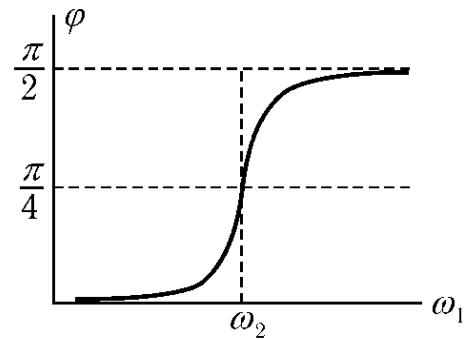


Рис. 125

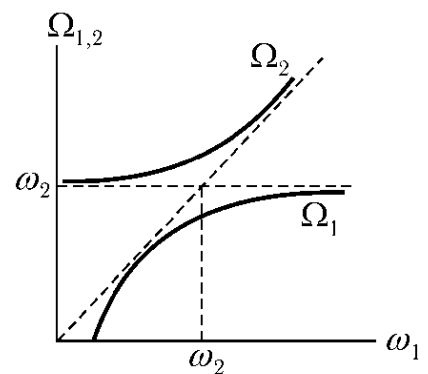


Рис. 126

<sup>1</sup>Следуя Мандельштаму [7], парциальной частотой мы называем частоту колебаний системы, которая получается из исходной при  $x \equiv 0$  (или при  $y \equiv 0$ ).

**6.6.** а) Функция Лагранжа системы (см. задачу 4.22)

$$L = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_1 \dot{q}_1^2 + \mathcal{L}_2 \dot{q}_2^2) - \frac{1}{2} \left[ \frac{q_1^2}{C_1} + \frac{q_2^2}{C_2} + \frac{(q_1 + q_2)^2}{C} \right],$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — заряды на верхних пластинах конденсаторов  $C_1$  и  $C_2$ . Введя новые переменные  $\sqrt{\mathcal{L}_1}q_1 = x$  и  $\sqrt{\mathcal{L}_2}q_2 = y$ , мы получим функцию Лагранжа задачи 6.5 а с параметрами

$$\omega_1^2 = \frac{1}{\mathcal{L}_1} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_1} \right), \quad \omega_2^2 = \frac{1}{\mathcal{L}_2} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_2} \right), \quad \alpha = \frac{1}{C\sqrt{\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2}}.$$

б) Заменой переменных  $q_1 = \sqrt{C_1}x$ ,  $q_2 = \sqrt{C_2}y$  можно функцию Лагранжа данной системы свести к функции Лагранжа задачи 6.5 б с параметрами

$$m_{1,2} = (\mathcal{L} + \mathcal{L}_{1,2})C_{1,2}, \quad \beta = \mathcal{L}\sqrt{C_1C_2}.$$

Могут ли данные системы стать неустойчивыми?

**6.7.** Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — отклонения частиц  $m_1$  и  $m_2$  от положения равновесия. Сделав замену  $\sqrt{m_1}x_1 = x$  и  $\sqrt{m_2}x_2 = y$ , получим для системы функцию Лагранжа, рассмотренную в задаче 6.5 а.

В различных предельных случаях ответ может быть получен без решения уравнений. Например, если все  $k_i = k$  и  $m_1 \ll m_2$ , то возможно нормальное колебание очень низкой частоты  $\Omega_1^2 = \frac{3k}{2m_2}$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}x_2$  (частица  $m_1$  является как бы элементом пружинки, а частица  $m_2$  колеблется между пружинками жесткости  $\frac{1}{2}k$  слева и  $k$  справа) и очень высокой частоты  $\Omega_2^2 = \frac{2k}{m_1}$  (когда частица  $m_2$  почти покоится). Амплитуду колебаний второй частицы можно найти, рассматривая ее движение как вынужденное под действием вынуждающей силы  $kx_1$  высокой частоты (см. [1], формула (22.4)):  $x_2 = -\frac{m_1}{2m_2}x_1$ .

Подобным же образом интересно рассмотреть случаи

а)  $m_1 = m_2$ ,  $k_1 = k_2 \ll k_3$ ;

б) все жесткости различные, но одного порядка, а  $m_1 \ll m_2$ ;

в)  $k_2 \gg k_1 = k_3$ , а массы  $m_1$  и  $m_2$  одного порядка.

**6.8.** а)  $x_{1,2} = \frac{v}{2} \left( \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \pm \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t \right)$ ; при  $k_1 \ll k$  колебания имеют форму биений:

$$x_1 = \frac{v}{\omega} \cos \varepsilon t \cdot \sin \omega t, \quad x_2 = -\frac{v}{\omega} \sin \varepsilon t \cdot \cos \omega t.$$

б)  $x_{1,2} = \frac{a}{2} (\cos \omega_1 t \pm \cos \omega_2 t)$ ; при  $k_1 \ll k$

$$x_1 = a \cos \varepsilon t \cdot \cos \omega t, \quad x_2 = a \sin \varepsilon t \cdot \sin \omega t.$$

Всюду  $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\omega_2^2 = \frac{2k_1 + k}{m}$ ,  $\varepsilon = \frac{k_1}{2k} \omega_1$ ,  $\omega = \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$ .

**6.9.** Энергия, переданная от первой частицы ко второй за время  $dt$ , равна работе силы  $F = k_1(x_1 - x_2)$

$$dE = k_1(x_1 - x_2) dx_2 = k_1(x_1 - x_2) \dot{x}_2 dt,$$

а поток энергии  $\frac{dE}{dt} = k_1(x_1 - x_2) \dot{x}_2$ . Для предельного случая  $k_1 \ll k$  в задаче 6.8 а поток энергии, усредненный по периоду быстрых колебаний, равен  $\frac{mv^2}{4} \omega_1 \sin 2\varepsilon t$  и меняет знак с частотой, равной удвоенной частоте биений.

**6.10.** Уравнения движения

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k_1(x_1 - x_2) + kx_1 + \alpha\dot{x}_1 &= 0, \\ m\ddot{x}_2 + k_1(x_2 - x_1) + kx_2 + \alpha\dot{x}_2 &= 0 \end{aligned}$$

при замене  $x_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_1 \pm q_2)$  распадаются на два уравнения для нормальных координат

$$\begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 + 2\lambda \dot{q}_1 &= 0, \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + 2\lambda \dot{q}_2 &= 0, \end{aligned}$$

где  $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\omega_2^2 = \frac{k + 2k_1}{m}$ ,  $2\lambda = \frac{\alpha}{m}$ . Поэтому при  $\lambda < \omega_{1,2}$  (см. [1], § 25)

$$x_{1,2} = e^{-\lambda t} [a \cos(\gamma_1 t + \varphi_1) \pm b \cos(\gamma_2 t + \varphi_2)],$$

где  $\gamma_{1,2} = \sqrt{\omega_{1,2}^2 - \lambda^2}$ .

Для системы рис. 22 при наличии трения характеристическое уравнение не биквадратное, а четвертой степени, поэтому найти свободные колебания гораздо сложнее.

**6.11.** Функция Лагранжа двойного маятника

$$L = \frac{M}{2} \dot{x}_1^2 + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2 - \frac{Mg}{2l} x_1^2 - \frac{mg}{2l} [x_1^2 + (x_2 - x_1)^2],$$

где  $x_1$  и  $x_2$  — отклонения точек  $M$  и  $m$  от вертикали, проходящей через точку подвеса (ср. с задачей 6.3а). Заменой

$$x_1 = \frac{x}{\sqrt{M}}, \quad x_2 = \frac{y}{\sqrt{m}}$$

функция Лагранжа сводится к виду, рассмотренному в задаче 6.5а, причем

$$\omega_1^2 - \omega_2^2 \equiv \frac{2mg}{Ml} \ll \alpha \equiv \frac{g}{l} \sqrt{\frac{m}{M}}.$$

В этом случае

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2),$$

где  $Q_i = a_i \cos \Omega_i t + b_i \sin \Omega_i t$ ,

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{g}{l}} \mp \frac{\gamma}{2}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{mg}{Ml}}.$$

С учетом начальных условий  $Q_{1,2}(0) = \frac{l\beta\sqrt{m}}{\sqrt{2}}$ ,  $\dot{Q}_{1,2}(0) = 0$  получаем

$$x_1 = l\beta\sqrt{\frac{m}{M}} \sin \gamma t \sin \sqrt{\frac{g}{l}} t,$$

$$x_2 = l\beta \cos \gamma t \cos \sqrt{\frac{g}{l}} t.$$

Таким образом, маятники колеблются «по очереди» и амплитуда верхнего маятника в  $\sqrt{M/m}$  раз меньше, чем нижнего.

**6.12.**

$$x_1 = \frac{ak(k_1 + k - m\gamma^2)}{m^2(\gamma^2 - \omega_1^2)(\gamma^2 - \omega_2^2)} \cos \gamma t,$$

$$x_2 = \frac{akk_1}{m^2(\gamma^2 - \omega_1^2)(\gamma^2 - \omega_2^2)} \cos \gamma t,$$

где  $\omega_1^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\omega_2^2 = \frac{k + 2k_1}{m}$ .



**6.13.**  $x_1 = x_2 = \frac{ak}{k - m\gamma^2} \cos \gamma t$ , где  $x_i$  — смещение вдоль кольца из положения равновесия  $i$ -й частицы. Резонанс возможен только на одной из нормальных частот при  $\gamma^2 = k/m$  (см. задачу 6.24).

**6.14.** Пусть  $x_i$  — смещение вдоль кольца из положения равновесия  $i$ -й частицы, тогда

$$x_1 = x_3 = \frac{ak(\omega_2^2 - \gamma^2)}{m(\gamma^2 - \omega_1^2)(\gamma^2 - \omega_3^2)} \cos \gamma t,$$

$$x_2 = \frac{2ak^2}{m^2(\gamma^2 - \omega_1^2)(\gamma^2 - \omega_3^2)} \cos \gamma t,$$

где собственные частоты  $\omega_i$  равны  $\omega_{1,3}^2 = (2 \mp \sqrt{2}) \frac{k}{m}$ ,  $\omega_2^2 = \frac{2k}{m}$ . Обратим внимание на то, что при  $\gamma = \omega_2$  смещения  $x_1 = x_3 = 0$ , а  $x_2 = -a \cos \gamma t$ . Почему число резонансов в системе меньше числа нормальных частот?

**6.15.** Уравнения движения (ср. с задачей 6.12)

$$m\ddot{x}_1 + \alpha\dot{x}_1 + kx_1 + k_1(x_1 - x_2) = ka \operatorname{Re} e^{i\gamma t},$$

$$m\ddot{x}_2 + \alpha\dot{x}_2 + kx_2 + k_1(x_2 - x_1) = 0.$$

Ищем решение в виде  $x_1 = \operatorname{Re} Ae^{i\gamma t}$ ,  $x_2 = \operatorname{Re} Be^{i\gamma t}$ . Для  $A$  и  $B$  получаем уравнения

$$(-m\gamma^2 + 2im\lambda\gamma + k + k_1)A - k_1B = ka,$$

$$-k_1A + (-m\gamma^2 + 2im\lambda\gamma + k + k_1)B = 0, \quad 2m\lambda = \alpha,$$

откуда

$$A = \frac{ak(k + k_1 - m\gamma^2 + 2i\lambda m\gamma)}{m^2(\gamma^2 - 2i\lambda\gamma - \omega_1^2)(\gamma^2 - 2i\lambda\gamma - \omega_2^2)},$$

$$B = \frac{akk_1}{m^2(\gamma^2 - 2i\lambda\gamma - \omega_1^2)(\gamma^2 - 2i\lambda\gamma - \omega_2^2)},$$

$$x_1 = \frac{ak\sqrt{\left(\gamma^2 - \frac{1}{2}\omega_1^2 - \frac{1}{2}\omega_2^2\right)^2 + 4\lambda^2\gamma^2} \cos(\gamma t + \varphi_1 + \varphi_2 + \psi)}{m\sqrt{[(\gamma^2 - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2][(\gamma^2 - \omega_2^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]}},$$

$$x_2 = \frac{akk_1 \cos(\gamma t + \varphi_1 + \varphi_2)}{m^2\sqrt{[(\gamma^2 - \omega_1^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2][(\gamma^2 - \omega_2^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2]}},$$

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{k + 2k_1}{m}, \quad \operatorname{tg} \varphi_{1,2} = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_{1,2}^2}, \quad \operatorname{tg} \psi = \frac{4\lambda\gamma}{\omega_1^2 + \omega_2^2 - 2\gamma^2}.$$

Между колебаниями двух частиц возникает сдвиг фаз  $\psi$ ; полного демпфирования колебаний первой частицы нет. Амплитуда колебаний как функция частоты вынуждающей силы  $\gamma$  имеет один или два максимума в зависимости от соотношения параметров  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  и  $\lambda$  (см. [16], § 1).

**6.16.** Функция Лагранжа системы ( $x$  и  $y$  — смещения из положения равновесия первой и второй частиц)

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \frac{k_1 + k_2}{m}x^2 - \frac{k_2 + k_3}{m}y^2 + \frac{2k_2}{m}xy) + k_1ax \cos \gamma t$$

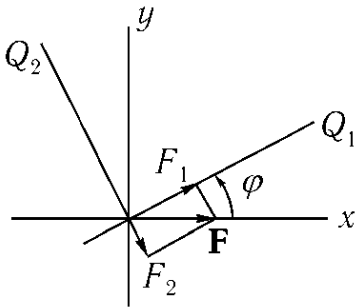


Рис. 127

отличается от функции Лагранжа, рассмотренной в задаче 6.5 а, лишь слагаемым  $xk_1a \cos \gamma t$ , отвечающим силе  $k_1a \cos \gamma t$ , действующей на первую частицу. Ниже мы будем пользоваться обозначениями задачи 6.5 а. Парциальная частота  $\omega_{1,2} = \sqrt{\frac{k_{1,3} + k_2}{m}}$  соответствует нормальной частоте системы, которая получится, если закрепить вторую (первую) частицу в положении равновесия, т. е. положить  $y = 0$  (соответственно  $x = 0$ ). При переходе к нормальным координатам  $Q_1$ ,  $Q_2$  функция Лагранжа приводится к виду

$$L = \frac{m}{2}(\dot{Q}_1^2 - \Omega_1^2 Q_1^2 + \dot{Q}_2^2 - \Omega_2^2 Q_2^2) + (F_1 Q_1 + F_2 Q_2) \cos \gamma t,$$

где  $F_1 = k_1a \cos \varphi$  и  $F_2 = -k_2a \sin \varphi$  — проекции амплитуды силы  $F = k_1a \cos \gamma t$  на нормальные координаты  $Q_1$  и  $Q_2$  (рис. 127). Для координаты  $Q_{1,2}$  мы получаем уравнение движения осциллятора с частотой  $\Omega_{1,2}$  под действием вынуждающей силы  $F_{1,2} \cos \gamma t$ . Начальные условия  $Q_i(0) = \dot{Q}_i(0) = 0$ . Получаем

$$Q_{1,2} = \frac{F_{1,2}(\cos \gamma t - \cos \Omega_{1,2} t)}{m(\Omega_{1,2}^2 - \gamma^2)}.$$

У данной системы в приближении слабой связи

$$\frac{k_2}{k_3 - k_1} \equiv \varepsilon \ll 1$$

(для определенности  $k_1 < k_3$ ) интересно рассмотреть резонанс на второй нормальной частоте. Полагая  $\gamma = \Omega_2(1 + \varepsilon_1)$ , имеем

$$Q_1 = \frac{k_1 a}{k_1 - k_3} (\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t),$$

$$Q_2 = -\frac{k_1 a \varepsilon}{m \omega_2^2 \varepsilon_1} \sin\left(\varepsilon_1 \frac{\omega_2}{2} t\right) \sin \omega_2 t \quad \text{при } |\varepsilon_1| \ll 1,$$

$$Q_2 = -\frac{k_1 a}{2m\omega_2} \varepsilon t \sin \omega_2 t \quad \text{при } \varepsilon_1 = 0.$$

Таким образом, даже при слабой связи амплитуда  $Q_2$  может быть большой или расти со временем, однако скорость ее изменения при этом будет мала. Поскольку угол поворота мал ( $\sin \varphi = \varepsilon$ ), для смещения имеем:  $x = Q_1 - \varepsilon Q_2$  и  $y = Q_2$ .

Какова скорость роста амплитуды колебаний при резонансе на первой частоте  $\gamma = \Omega_1$ ?

Как изменится характер колебаний, если на обе частицы будет действовать малая сила трения, пропорциональная скорости (ср. с задачей 5.11)?

### 6.17.

$$\text{а) } x = \frac{F_0 \cos \varphi}{m(\omega_1^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t, \quad y = \frac{F_0 \sin \varphi}{m(\omega_2^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t,$$

где  $\omega_1^2 = \frac{k_1}{m}$ ,  $\omega_2^2 = \frac{k}{m}$ ,  $\varphi$  — угол между направлением силы и осью  $AB$ , а  $x$  и  $y$  — смещения из положения равновесия вдоль осей  $AB$  и  $CD$ . Частица колеблется вдоль прямой, проходящей через центр.

Интересно, что при  $\gamma^2 = \omega_1^2 \sin^2 \varphi + \omega_2^2 \cos^2 \varphi$  эта прямая перпендикулярна к вектору  $\mathbf{F}_0$ . В этом случае работа вынуждающей силы равна нулю. Поэтому, казалось бы, наличие даже малого трения должно привести к затуханию колебаний. Так ли это?

$$\text{б) } x = \frac{F}{m(\omega_1^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t, \quad y = \frac{F}{m(\omega_2^2 - \gamma^2)} \sin \gamma t. \text{ Траектория — эллипс}$$

с полуосями  $a = \frac{F}{m|\omega_1^2 - \gamma^2|}$  и  $b = \frac{F}{m|\omega_2^2 - \gamma^2|}$ . Если величины  $(\omega_1^2 - \gamma^2)$  и  $(\omega_2^2 - \gamma^2)$  противоположны по знаку, то движение частицы по эллипсу происходит по часовой стрелке, а вектор силы вращается против часовой стрелки.

Как изменятся описанные выше картины движения частицы, если натяжение пружинок в положении равновесия не равно нулю?

**6.18.** Пусть  $x_i$  — смещение  $i$ -й частицы вдоль кольца из положения равновесия. Три частицы могут вращаться по кольцу с постоянной угловой скоростью, при этом

$$x_1 = x_2 = x_3 = Ct + C_1 = q_1(t), \quad \omega_1 = 0. \quad (1)$$

Колебания же частиц 1 и 2 навстречу друг другу с равной амплитудой

$$x_1 = -x_2 = A \cos(\omega_2 t + \alpha) = q_2(t), \quad x_3 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}} \quad (2)$$

происходят, очевидно, с той же частотой, что и колебания частиц 2 и 3 навстречу друг другу

$$x_1 = 0, \quad x_2 = -x_3 = B \cos(\omega_3 t + \beta) = q_3(t), \quad \omega_3 = \omega_2. \quad (3)$$

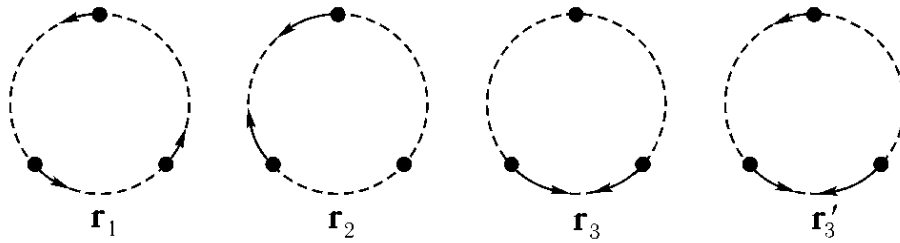


Рис. 128

Введем «вектор смещения»

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

тогда колебания (1)–(3) можно представить в виде (рис. 128),

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_2, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} q_3.$$

Любая линейная комбинация векторов  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$  также представляет собой колебания с частотой  $\omega_2$ . Таким образом, в пространстве с декартовыми координатами  $x_1, x_2, x_3$  совокупность решений, отвечающих колебаниям с дважды вырожденной частотой  $\omega_2 = \omega_3$ , определяет плоскость, проходящую через векторы  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$ .<sup>1</sup> Как легко видеть из (4), оба эти вектора

<sup>1</sup> Отметим, что в этой плоскости линейная комбинация вида  $a\mathbf{r}_1(t) + b\mathbf{r}_2(t)$  представляет собой либо колебания по прямой (при  $\alpha = \beta, \beta + \pi$ ), либо движение по эллипсу (при  $\alpha \neq \beta$ ).

(а следовательно, и все векторы, лежащие в этой плоскости) ортогональны вектору  $\mathbf{r}_1$  (общее соотношение ортогональности см. в задаче 6.22).

Функция Лагранжа системы

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{k}{2}[(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2]. \quad (5)$$

Нормальные координаты должны диагонализировать одновременно обе квадратичные формы — для кинетической и для потенциальной энергии. Поскольку в (5) кинетическая энергия уже пропорциональна сумме квадратов скоростей, то преобразование от  $x_i$  к нормальным координатам, не меняющее ее вида, должно быть ортогональным, а векторы соответствующих нормальных колебаний — взаимно ортогональными. Векторы  $\mathbf{r}_i$  независимы, но не ортогональны друг другу:  $\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1\mathbf{r}_3 = 0$ , но  $\mathbf{r}_2\mathbf{r}_3 \neq 0$ . Чтобы получить нормальные координаты, достаточно в плоскости векторов  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$  выбрать два взаимно ортогональных вектора. Это могут быть, например, вектор  $\mathbf{r}_2$  и ортогональный ему вектор  $\mathbf{e}q_3$ , где единичный вектор  $\mathbf{e}$  найден из условия  $\mathbf{e}\mathbf{r}_1 = \mathbf{e}\mathbf{r}_2 = 0$ . В итоге набор нормированных векторов<sup>1</sup>

$$\mathbf{r}'_1 = \frac{\mathbf{r}_1}{\sqrt{3}}, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{\mathbf{r}_2}{\sqrt{2}}, \quad \mathbf{r}'_3 = \mathbf{e}q_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} q_3 \quad (6)$$

позволяет определить нормальные координаты:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}q_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}q_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}q_3, \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}q_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}q_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}q_3, \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}q_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}q_3, \end{cases} \quad (7)$$

которые приводят функцию Лагранжа (5) к виду

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega_2^2 q_2^2 + \dot{q}_3^2 - \omega_3^2 q_3^2). \quad (8)$$

Разумеется, любые координаты, полученные из  $q_2, q_3$  ортогональным преобразованием (т. е. простым поворотом вокруг  $\mathbf{r}_1$ ), также являются нормальными координатами.

<sup>1</sup>Множители  $1/\sqrt{3}$  и  $1/\sqrt{2}$  введены для того, чтобы нормировать векторы  $\mathbf{r}_i$  условием  $\mathbf{r}_i\mathbf{r}_k = \delta_{ik}q_i^2$ , при этом условии преобразование (7) ортогональное.

**6.19.** Начальные условия для смещения  $x_i$  вдоль кольца

$$x_1(0) = a, \quad x_2(0) = x_3(0) = \dot{x}_i(0) = 0.$$

Отсюда для нормальных координат  $q_i$  (см. формулу (7) предыдущей задачи) найдем начальные условия:

$$q_1(0) = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad q_2(0) = \frac{a}{\sqrt{2}}, \quad q_3(0) = \frac{a}{\sqrt{6}}, \quad \dot{q}_i(0) = 0.$$

Поэтому

$$q_1 = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad q_2 = \frac{a}{\sqrt{2}} \cos \omega_2 t, \quad q_3 = \frac{a}{\sqrt{6}} \cos \omega_3 t,$$

и с учетом того, что  $\omega_2 = \omega_3$ , получаем окончательно

$$x_1 = \frac{a}{3} + \frac{2a}{3} \cos \omega_2 t, \quad x_2 = x_3 = \frac{a}{3} - \frac{a}{3} \cos \omega_2 t.$$

**6.20.** Пользуемся обозначениями задачи 6.18. Функция Лагранжа системы

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_2^2 + 3\dot{x}_3^2) - \frac{k}{2}[2(x_1 - x_2)^2 + 6(x_2 - x_3)^2 + 3(x_3 - x_1)^2]. \quad (1)$$

Уравнения движения подстановкой  $x_i = A_i \cos(\omega t + \varphi)$  сводятся к системе трех алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + 5k)A_1 - 2kA_2 - 3kA_3 = 0, \\ -2kA_1 + (-2m\omega^2 + 8k)A_2 - 6kA_3 = 0, \\ -3kA_1 - 6kA_2 + (-3m\omega^2 + 9k)A_3 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$\omega^2(m\omega^2 - 6k)^2 = 0.$$

Отсюда находим собственные частоты системы:

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{6k}{m}}.$$

Значению  $\omega_1 = 0$  отвечает очевидное решение — вращение по кольцу с постоянной угловой скоростью

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1, \quad q_1(t) = Ct + C_1. \quad (3)$$

Для совпадающих частот  $\omega_2 = \omega_3$  в системе (2) лишь одно уравнение является независимым:

$$A_1 + 2A_2 + 3A_3 = 0. \quad (4)$$

Любые наборы величин  $A_i$ , удовлетворяющие условию (4), дают колебания с частотой  $\omega_2$ . В частности, можно выбрать такие колебания, чтобы первая, или вторая, или третья частица покоилась:

$$\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} q_2, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} q_3, \quad \mathbf{r}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_4. \quad (5)$$

$$q_i = C_i \cos(\omega_2 t + \varphi_i), \quad i = 2, 3, 4.$$

Согласно (4) любая линейная комбинация векторов (5) ортогональна вектору

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Легко убедиться, что набор векторов

$$\mathbf{r}_1, \quad \mathbf{r}_2, \quad \mathbf{r}'_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} q_3 \quad (6)$$

позволяет, как и в задаче 6.18, определить нормальные координаты, которые приводят функцию Лагранжа (1) к диагональному виду. Векторы (6) удовлетворяют не простому соотношению ортогональности (как в задаче 6.18), а соотношению «ортогональности с весом» (см. задачу 6.22).

**6.21. Векторы нормальных колебаний**

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_1, & \mathbf{r}_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} q_2, \\
\mathbf{r}_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} q_3, & \mathbf{r}_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_4,
\end{aligned} \tag{1}$$

$$q_l = A_l \cos(\omega_l t + \varphi_l), \quad l = 1, 2, 3; \quad q_4 = A_4 t + A_5,$$

$$\omega_1 = \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}, \quad \omega_3 = 2\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Функция Лагранжа системы

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2 - \omega_1^2 q_1^2 - \omega_2^2 q_2^2 - \omega_3^2 q_3^2).$$

Это, конечно, не единственный выбор. Любые векторы, полученные из данных поворотом в плоскости, определяемой векторами  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , также будут векторами нормальных колебаний, например:

$$\mathbf{r}'_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} q'_1, \quad \mathbf{r}'_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} q'_2, \quad \mathbf{r}'_3 = \mathbf{r}_3, \quad \mathbf{r}'_4 = \mathbf{r}_4 \tag{2}$$

(поворот на  $\pi/4$ ). Но векторы  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}'_2$ ,  $\mathbf{r}_3$ ,  $\mathbf{r}_4$  хотя и независимы, но не приводят функцию Лагранжа к сумме квадратов.

**6.22. Амплитуды нормальных колебаний удовлетворяют уравнениям**

$$-\omega_l^2 \sum_j m_{ij} A_j^{(l)} + \sum_j k_{ij} A_j^{(l)} = 0, \tag{1}$$

$$-\omega_s^2 \sum_j m_{ij} A_j^{(s)} + \sum_j k_{ij} A_j^{(s)} = 0. \tag{2}$$



Умножим уравнение (1) на  $A_i^{(s)}$ , а уравнение (2) — на  $A_i^{(l)}$ . Взяв в обоих уравнениях сумму по  $i$ , получим

$$-\omega_l^2 \sum_{ij} m_{ij} A_j^{(l)} A_i^{(s)} + \sum_{ij} k_{ij} A_j^{(l)} A_i^{(s)} = 0, \quad (3)$$

$$-\omega_s^2 \sum_{ij} m_{ij} A_j^{(s)} A_i^{(l)} + \sum_{ij} k_{ij} A_j^{(s)} A_i^{(l)} = 0. \quad (4)$$

Вычтем уравнение (4) из уравнения (3), учитывая, что  $m_{ij} = m_{ji}$  и  $k_{ij} = k_{ji}$ , получим

$$(\omega_s^2 - \omega_l^2) \sum_{ij} m_{ij} A_i^{(s)} A_j^{(l)} = 0,$$

т. е. при  $\omega_s \neq \omega_l$

$$\sum_{ij} m_{ij} A_i^{(s)} A_j^{(l)} = 0, \quad (5)$$

и одновременно из (3)

$$\sum_{ij} k_{ij} A_i^{(s)} A_j^{(l)} = 0. \quad (6)$$

Удобно воспользоваться терминологией, принятой в линейной алгебре. Набор амплитуд данного колебания будем называть вектором амплитуды  $\mathbf{A}^{(l)} = (A_1^{(l)}, A_2^{(l)}, \dots, A_N^{(l)})$ . Доказанные соотношения (5) и (6) означают, что амплитуды  $\mathbf{A}^{(s)}$  и  $\mathbf{A}^{(l)}$  взаимно ортогональны, если скалярное произведение определять с помощью метрических тензоров  $m_{ij}$  или  $k_{ij}$ .

В случае вырождения (если  $\omega_s = \omega_l$ ) амплитуды  $\mathbf{A}^{(s)}$  и  $\mathbf{A}^{(l)}$  не обязаны удовлетворять соотношениям (5) и (6). Но в этом случае всегда можно выбрать, и притом не единственным способом, такие амплитуды, которые удовлетворяли бы (5) и (6) и приводили бы функцию Лагранжа к сумме квадратов.

### 6.23. Переходя к нормальным координатам

$$x_i = \sum_l A_i^{(l)} q_l,$$

преобразуем уравнение связи

$$\sum_l b_l q_l = 0, \quad b_l = \sum_i a_i A_i^{(l)}.$$

Уравнения движения с неопределенным множителем Лагранжа  $\lambda$

$$M_l(\ddot{q}_l + \Omega_l^2 q_l) = b_l \lambda$$

можно решить, полагая

$$q_l = C_l \cos(\omega t + \varphi), \quad \lambda = \Lambda \cos(\omega t + \varphi).$$

Выразив  $C_l$  из уравнения

$$M_l(\Omega_l^2 - \omega^2)C_l = b_l \Lambda$$

и подставив в уравнение связи, получаем для новых частот уравнение

$$\Lambda \sum_l \frac{b_l^2}{M_l(\Omega_l^2 - \omega^2)} = 0.$$

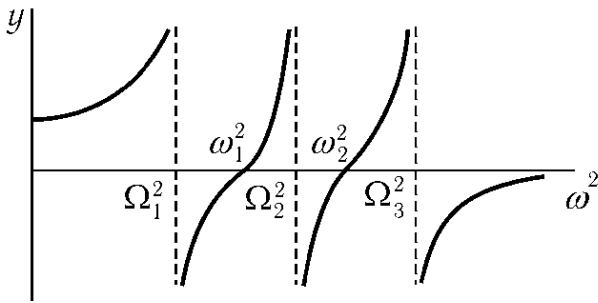


Рис. 129

Для исследования этого уравнения удобно представить график (рис. 129)

$$y(\omega^2) = \sum_l \frac{b_l^2}{M_l(\Omega_l^2 - \omega^2)} = 0.$$

Обратим внимание, что функция  $y(\omega^2)$  меняет знак, проходя через бесконечное значение при  $\omega^2 = \Omega_l^2$ . После этого расположение корней  $\omega_l$  становится очевидным. Если какой-

нибудь из коэффициентов  $b_l$  равен нулю, то соответствующее нормальное колебание (и его частота) не изменяются при наложении связи.

Рассмотренному в этой задаче факту можно дать простую геометрическую интерпретацию (см. [6], § 24).

**6.24.** Подставив  $x_j = \sum_l \lambda^{(l)} A_j^{(l)} \cos \gamma t$  в уравнения движения

$$\sum_j m_{ij} \ddot{x}_j + \sum_j k_{ij} x_j = f_i \cos \gamma t,$$

получим следующую систему уравнений для определения коэффициентов  $\lambda^{(l)}$ :

$$-\gamma^2 \sum_{i,j} m_{ij} \lambda^{(l)} A_j^{(l)} + \sum_{j,l} k_{ij} \lambda^{(l)} A_j^{(l)} = f_i. \quad (2)$$

Ее проще всего решить, используя соотношения ортогональности (5), (6) задачи 6.22.

Для этого умножим уравнения (2) на  $A_i^{(s)}$  и, просуммировав по  $i$ , получим окончательно

$$\lambda^{(s)} = \frac{F_s}{M_s(\omega_s^2 - \gamma^2)},$$

где

$$F_s = \sum_i A_i^{(s)} f_i, \quad M_s = \sum_{i,j} m_{ij} A_i^{(s)} A_j^{(s)}, \quad K_s = \sum_{i,j} k_{ij} A_i^{(s)} A_j^{(s)},$$

а величина  $\omega_s = \sqrt{K_s/M_s}$  является  $s$ -й нормальной частотой системы в соответствии с формулой (4) задачи 6.22.<sup>1</sup> Зависимость  $\lambda^{(s)}$  от  $\gamma$  имеет резонансный характер.

Для нормальных колебаний  $q_s$ , введенных по формуле

$$x_i = \sum_s A_i^{(s)} q_s(t), \quad (3)$$

вместо (1) получаем следующие уравнения движения:

$$M_s \ddot{q}_s + K_s q_s = F_s \cos \gamma t. \quad (4)$$

Отсюда, если вектор силы  $f_i$  ортогонален к амплитуде некоторого  $s$ -го нормального колебания  $\sum_i A_i^{(s)} f_i = 0$ , то соответствующая нормальная координата удовлетворяет уравнению свободных колебаний, и резонанс на данной частоте при  $\omega = \omega_s$  не проявляется.

Отметим, что работа внешней силы в этом случае равна нулю ( $\sum_i f_i dx_i = \sum_i f_i A_i^{(s)} dq_s = 0$ ).

Пусть вектор силы параллелен какому-либо нормальному колебанию:  $\frac{f_i}{A_i^{(s)}} = \text{const}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ). Может ли такая сила возбудить другие нормальные колебания?

---

<sup>1</sup>Если некоторые нормальные частоты вырождены, то соответствующие им амплитуды нормальных колебаний мы считаем выбранными так, чтобы они удовлетворяли соотношениям ортогональности (5) и (6) задачи 6.22.

**6.25.** Вынужденные установившиеся колебания можно представить в виде (см. предыдущую задачу)

$$x_i = \sum_j \beta_{ij} f_j,$$

где

$$\beta_{ij} = \sum_l \frac{A_i^{(l)} A_j^{(l)}}{M_l(\omega_l^2 - \gamma^2)}.$$

Теорема взаимности отражает тот факт, что  $\beta_{ij} = \beta_{ji}$ .

Как изменится формулировка этой теоремы, если координаты  $x_i$  и  $x_j$  имеют разные размерности (например, для электромеханической системы)?

**6.26.** Нормальные колебания

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_2, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} q_3, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -m/M \\ 1 \\ -m/M \end{pmatrix} q_4,$$

где  $q_1 = At + B$ ,  $q_i = A_i \cos(\omega_i t + \alpha_i)$ ,  $i = 2, 3, 4$ ;  $\omega_2^2 = \frac{2k}{m}$ ,  $\omega_3^2 = \frac{2k}{M}$ ,

$\omega_4^2 = \frac{2k(M+m)}{mM}$ . Три первых колебания легко угадываются, а последнее находится из условия ортогональности к первым трем. Поскольку массы частиц различны, условие ортогональности двух нормальных колебаний **A** и **B** имеет вид  $m A_1 B_1 + M A_2 B_2 + m A_3 B_3 + M A_4 B_4 = 0$  (см. задачу 6.22).

**6.27.** Пусть  $x_i$  — смещение  $i$ -й частицы вдоль кольца. Два нормальных колебания легко угадываются:

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1(t), \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_2(t), \quad (1)$$

$$q_1(t) = C_1 t + C_2, \quad q_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \quad \omega_2^2 = \frac{2k}{m}.$$

Два других вектора должны быть ортогональны к векторам (1) в метрике, определяемой коэффициентами квадратичной формы кинетической энергии

(см. задачу 6.22), т. е. иметь вид

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ -a - \frac{b}{2} \end{pmatrix} q(t). \quad (2)$$

Подставляя (2) в уравнения движения первой и второй частиц

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_4 - x_2) = 0, \quad m\ddot{x}_2 + k(2x_2 - x_1 - x_3) = 0,$$

получаем уравнения для определения величин  $a$ ,  $b$  и частот

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + 3k)a - \frac{k}{2}b &= 0, \\ -2ka + (-m\omega^2 + 2k)b &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Из (3) находим  $\omega_{3,4}^2 = \frac{5 \mp \sqrt{5}}{2} \frac{k}{m}$ ,  $b_{3,4} = (1 \pm \sqrt{5})a_{3,4}$  или

$$\mathbf{r}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \pm \sqrt{5} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \mp \frac{\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} q_{3,4}(t),$$

$$q_{3,4} = A_{3,4} \cos(\omega_{3,4}t + \varphi_{3,4}).$$

**6.28.** а) Пусть  $x_i$ ,  $y_i$ ,  $z_i$  — отклонение  $i$ -й частицы от положения равновесия. Функция Лагранжа системы имеет вид (см. задачу 5.7)

$$\begin{aligned} L &= L_1(x, \dot{x}) + L_1(y, \dot{y}) + L_1(z, \dot{z}), \\ L_1(x, \dot{x}) &= \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + \dot{x}_5^2) - \frac{k}{2}[x_1^2 + (x_1 - x_5)^2 + \\ &+ (x_5 - x_3)^2 + x_3^2 + x_2^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_5 - x_4)^2 + x_4^2], \end{aligned}$$

поэтому колебания по  $x$ ,  $y$  и  $z$  происходят независимо. Легко угадать три нормальных колебания по  $x$ :

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} q_1, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_2, \quad \mathbf{r}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_3, \quad (1)$$

$$q_i = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

Два остальных нормальных колебания должны быть ортогональны к векторам (1) и потому иметь вид<sup>1</sup>

$$\mathbf{r}_{4,5} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ d \end{pmatrix} q_{4,5}.$$

Подставляя этот вектор в уравнения движения для первой и пятой частиц

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_5) = 0,$$

$$m\ddot{x}_5 + k(4x_5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) = 0,$$

получим два уравнения для определения  $a$ ,  $d$  и частот  $\omega_{4,5}$ :

$$\begin{aligned} (-\omega^2 m + 2k)a - kd &= 0, \\ -4ka + (-m\omega^2 + 4k)d &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Решив (3), найдем  $\omega_{4,5}^2 = (3 \mp \sqrt{5}) \frac{k}{m}$  и  $d_{4,5} = (-1 \pm \sqrt{5})a_{4,5}$ .

Окончательно

$$\mathbf{r}_{4,5} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \pm \sqrt{5} \end{pmatrix} q_{4,5}. \quad (4)$$

Для колебаний по осям  $y$  и  $z$  получаются такие же результаты, что и по оси  $x$ . Таким образом, в системе имеется всего три различные частоты:  $\omega_1^2 = \frac{2k}{m}$  — девятикратно вырожденная и две трехкратно вырожденные  $\omega_{4,5}^2 = (3 \mp \sqrt{5}) \frac{k}{m}$  (о снятии вырождения см. задачу 6.41).

б) Колебания вдоль оси  $z$  легко угадываются

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} q_1, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} q_2, \quad \mathbf{r}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \\ 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} q_{3,4},$$

$$q_i = A_i \cos(\omega_i t + \varphi_i), \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{2f}{ml}}, \quad \omega_4 = \sqrt{\frac{f}{ml}},$$

<sup>1</sup>Пусть  $\mathbf{r}_{4,5} = (a, b, c, e, d) \equiv \mathbf{r}$ , тогда условия ортогональности  $(\mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}_2) = (\mathbf{r}, \mathbf{r}_3) = 0$  дают соотношения  $a = b = c = e$ .

где  $f$  — натяжение пружинок, а  $l$  — длина одной пружинки в положении равновесия.

Если  $f = kl$ , то колебания в направлении оси  $x$  (или  $y$ ) имеют такой же вид, как в направлении оси  $z$ , если считать  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  (или  $\mathbf{r} = (y_2, y_1, y_4, y_3)$ ). Если же  $f \neq kl$ , то вырождение снимается. Два нормальных колебания с частотами  $\omega_1 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$  и  $\omega_2 = \sqrt{\frac{2f}{ml}}$  совпадают с  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ . Два других по условию ортогональности должны иметь вид

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ a \\ b \end{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi).$$

Для их нахождения достаточно уравнений движения двух частиц

$$m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_5) = 0, \quad m\ddot{x}_2 + \frac{f}{l}(2x_2 - x_5) = 0.$$

Здесь

$$x_5 = \frac{\left[ k(x_1 + x_3) + \frac{f}{l}(x_2 + x_4) \right]}{\left( 2k + \frac{2f}{l} \right)}$$

— координата точки соединения пружинок, определяемая из условия максимальности потенциальной энергии при заданных  $x_{1,2,3,4}$ .

Решая уравнения, получаем

$$\begin{aligned} \omega_3^2 &= \frac{f + kl}{ml}, & b_3 &= -\frac{f}{kl}a_3; \\ \omega_4^2 &= \frac{2kf}{m(f + kl)}, & b_4 &= \frac{kl}{f}a_4. \end{aligned}$$

**6.29.** В данном случае ответ может быть получен простым обобщением результатов задачи 6.20 без явного вычисления собственных частот  $\omega_i$ .

Пусть в системе имеется вырождение:  $\omega_1 = 0$ , а  $\omega_2 = \omega_3$ . Частоте  $\omega_1 = 0$  отвечает вращение частиц по кольцу

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (Ct + C_1).$$

Из-за вырождения частоты  $\omega_2$  любой вектор

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} \cos(\omega t + \varphi), \quad (1)$$

удовлетворяющий условию

$$m_1 A_1 + m_2 A_2 + m_3 A_3 = 0, \quad (2)$$

представляет собой нормальное колебание с частотой  $\omega = \omega_2$ . (Равенство (2) есть условие ортогональности вектору  $\mathbf{r}_1$  в метрике, определяемой коэффициентами квадратичной формы кинетической энергии — см. задачу 6.22). В частности, можно выбрать такое нормальное колебание (1), чтобы первая частица покоилась:

$$A_1 = 0, \quad m_2 A_2 + m_3 A_3 = 0. \quad (3)$$

Подставляя (3) в уравнения движения

$$\begin{aligned} (m_1 \omega^2 - k_2 - k_3) A_1 + k_3 A_2 + k_2 A_3 &= 0, \\ k_3 A_1 + (m_2 \omega^2 - k_1 - k_3) A_2 + k_1 A_3 &= 0, \\ k_2 A_1 + k_1 A_2 + (m_3 \omega^2 - k_1 - k_2) A_3 &= 0, \end{aligned}$$

мы немедленно получаем, что они имеют решение лишь при

$$k_3 A_2 + k_2 A_3 = 0. \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), находим, что  $m_2 k_2 = m_3 k_3$ . Повторяя подобные рассуждения для случаев, когда покоится вторая или третья частица, получаем, что при вырождении частот коэффициенты  $k_i$  с необходимостью удовлетворяют условию

$$m_1 k_1 = m_2 k_2 = m_3 k_3. \quad (5)$$

С другой стороны, из приведенных рассуждений видно, что (5) является и достаточным условием вырождения частот. В самом деле, если выполнено условие (5), то в системе существуют три различных нормальных колебания с частотами, отличными от нуля. Из этих трех колебаний в силу (2) лишь два линейно независимы. Отсюда однозначно следует, что эти три колебания имеют одну и ту же частоту.

Таким образом, (5) является необходимым и достаточным условием вырождения частот.



**6.30.** Для решения удобно воспользоваться методом, изложенным в задаче 6.27.

а) Нормальные колебания

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1 t + C_2), \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \mathbf{r}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} A_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3), \\ \omega_2^2 &= \frac{(3 + 2\varepsilon)k}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{3k}{m}, \quad \varepsilon = \frac{\delta k}{k} \end{aligned} \quad (1)$$

близки при малых  $\varepsilon$  к колебаниям (6) задачи 6.18 — амплитуды векторов колебаний совпадают, однако частоты различны. Поэтому, если в задаче 6.18 любая суперпозиция векторов  $\mathbf{r}'_2$  и  $\mathbf{r}'_3$  давала также нормальные колебания, теперь выбор вектора  $\mathbf{r}_2$  и  $\mathbf{r}_3$  вполне однозначен.

б) Нормальные колебания

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1 t + C_2), \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \mathbf{r}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\frac{2}{1+\varepsilon} \end{pmatrix} A_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3), \\ \omega_2^2 &= \frac{3k}{m}, \quad \omega_3^2 = \frac{3+\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{k}{m}, \quad \varepsilon = \frac{\delta m}{m} \end{aligned} \quad (2)$$

близки при малых  $\varepsilon$  к колебаниям (6) задачи 6.18. Если перегрузок был добавлен к частице 2, то нормальные колебания

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1 t + C_2), \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2), \\ \mathbf{r}_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{1+\varepsilon} \\ 1 \end{pmatrix} A_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3), \end{aligned}$$

близки к суперпозиции нормальных колебаний (6) задачи 6.18.

$$\text{в) } \mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (C_1 t + C_2),$$

$$\mathbf{r}_{2,3} = \left\{ a_{2,3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + b_{2,3} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cos(\omega_{2,3} t + \varphi_{2,3}),$$

где

$$\frac{b_{2,3}}{a_{2,3}} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \mp \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2}},$$

$$\omega_{2,3}^2 \approx \frac{k}{m} \left( 3 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \mp \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2} \right),$$

$$\varepsilon_i = \frac{\delta m_i}{m}.$$

**6.31.** а) Вектор начального смещения  $\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}$  представим

в виде суперпозиции векторов  $\mathbf{r}_i$  (см. формулу (1) предыдущей задачи), взятых в начальный момент времени  $t = 0$ :

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{r}_1(0) + \mathbf{r}_2(0) + \mathbf{r}_3(0). \quad (1)$$

Аналогично представим вектор начальной скорости

$$\dot{\mathbf{r}}(0) = \dot{\mathbf{r}}_1(0) + \dot{\mathbf{r}}_2(0) + \dot{\mathbf{r}}_3(0). \quad (2)$$

Из системы уравнений (1) и (2) получим следующие значения констант:  $A_2 = A_3 = a/2$ ,  $C_1 = C_2 = \varphi_2 = \varphi_3 = 0$  или

$$\mathbf{r} = \frac{a}{2} \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t \\ -\cos \omega_2 t + \cos \omega_3 t \\ -2 \cos \omega_3 t \end{pmatrix} \approx a \begin{pmatrix} \cos \frac{\varepsilon \omega_3 t}{6} \cos \omega_3 t \\ \sin \frac{\varepsilon \omega_3 t}{6} \sin \omega_3 t \\ -\cos \omega_3 t \end{pmatrix}.$$

Таким образом, движение частиц 1 и 2 имеет характер биений, частота которых определяется возмущением  $\delta k$ , а частица 3 участвует в простом колебании с частотой  $\omega_3$ . Подчеркнем, что даже очень малая добавка  $\delta k$  приводит к накапливающимся изменениям, которые для достаточно больших времен становятся существенными (ср. с задачей 2.36).

6.32. а), б)

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} q_1(t), \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} q_2(t), \quad \mathbf{r}_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp 1 \\ 1 \\ \mp 1 \end{pmatrix} q_{3,4}(t);$$

в) то же, что и в задаче 6.21, формула (1).

$$6.33. \quad x_{1,2} = -x_{3,4} = \pm \frac{a}{2} \cos \sqrt{\frac{2k + 2\delta k}{m}} t + \frac{a}{2} \cos \sqrt{\frac{2k}{m}} t;$$

колебания частиц имеют характер биений (см. по этому поводу задачу 6.31).

6.34. Можно ожидать, что изменения частот и векторов нормальных колебаний окажутся малыми, и воспользоваться методом последовательных приближений. Удобно перейти к нормальным координатам исходной системы (см. задачу 6.24)

$$x_i = \sum_l A_i^{(l)} q_l.$$

При этом  $\delta L$  принимает вид

$$\delta L = \frac{1}{2} \sum_{l,s} (\delta M_{ls} \dot{q}_l \dot{q}_s - \delta K_{ls} q_l q_s), \quad (1)$$

где

$$\delta M_{ls} = \sum_{i,j} \delta m_{ij} A_i^{(l)} A_j^{(s)}, \quad \delta K_{ls} = \sum_{i,j} \delta k_{ij} A_i^{(l)} A_j^{(s)}, \quad (2)$$

а уравнения движения

$$M_l(\ddot{q}_l + \omega_l^2 q_l) = - \sum_s (\delta M_{ls} \ddot{q}_s + \delta K_{ls} q_s). \quad (3)$$

Предполагая, что в нулевом приближении возбуждено только колебание  $q_n$ , можем оставить в правых частях уравнения (3) только слагаемые с  $s = n$ .

Для определения добавки к частоте  $\omega_n$  достаточно выписать одно уравнение (с  $l = n$ ):

$$(M_n + \delta M_{nn}) \ddot{q}_n + (M_{nn} \omega_n^2 + \delta K_{nn}) q_n = 0,$$

откуда

$$(\omega_n + \delta \omega_n)^2 = \frac{M_{nn} \omega_n^2 + \delta K_{nn}}{M_n + \delta M_{nn}},$$

так что

$$\delta\omega_n = \frac{\delta K_{nn}}{2\omega_n M_n} - \frac{\omega_n \delta M_{nn}}{2M_n}. \quad (4)$$

Уравнения с  $l \neq n$  позволяют найти поправки к вектору нормального колебания. При этом правые части уравнений можно рассматривать как заданные силы частоты  $\omega_n$ . Возбуждение колебаний  $q_l$ , как мы и ожидали, оказывается слабым, так как эти «силы» малы.

Можно получить и следующие приближения, уточняющие поправки к  $\omega_n$  и векторам нормальных колебаний (см., например, [13], гл. 1, § 5).

Полезно заметить, что величина  $\delta M_{nn}$  в (2) представляет собой добавку к удвоенной кинетической энергии системы при условии, что скорости  $\dot{x}_i = A_i^{(n)}$ . Отсюда следует, в частности, что при увеличении масс частиц  $\delta M_{nn} \geq 0$  и, согласно (4),  $\delta\omega_n \leq 0$ . Подобным же образом легко видеть, что при увеличении коэффициентов жесткости пружинок собственные частоты могут только возрастать (ср. [6], § 24; [15]).

Важно понять, что изменится когда мы ищем поправку к вырожденной частоте (пусть  $\omega_p = \omega_n$ ). В этом случае «сила» в правой части уравнений (3) оказывается резонансной. Поэтому координата  $q_p$  возрастает со временем, и ее тоже нужно учитывать в правых частях уравнений (3). Таким образом, в этом случае нужно использовать уравнения (3) совместно с  $l = n, p$ , оставив в правых частях только слагаемые с  $s = n, p$

$$\begin{aligned} M_n(\ddot{q}_n + \omega_n^2 q_n) &= -\delta M_{nn}\ddot{q}_n - \delta M_{np}\ddot{q}_p - \delta K_{nn}q_n - \delta K_{np}q_p, \\ M_p(\ddot{q}_p + \omega_p^2 q_p) &= -\delta M_{pn}\ddot{q}_n - \delta M_{pp}\ddot{q}_p - \delta K_{pn}q_n - \delta K_{pp}q_p. \end{aligned} \quad (5)$$

Ясно, что сказанное относится и к случаю  $\omega_p \approx \omega_n$ .

Итак, для определения поправок ко всем собственным частотам (включая и вырожденные) в добавке (1) к функции Лагранжа можно отбросить все члены, содержащие произведения нормальных координат, относящихся к различным частотам исходной системы.

**6.35.** Используем обозначения и результаты задач 6.27 и 6.34. Ясно заранее, что  $\delta\omega_1 = 0$ . Для остальных частот

$$\delta\omega_n = -\frac{\omega_n}{2} \frac{\sum_{i,j} (\mathbf{r}_n)_i \delta m_{ij} (\mathbf{r}_n)_j}{\sum_{i,j} (\mathbf{r}_n)_i m_{ij} (\mathbf{r}_n)_j}, \quad n = 2, 3, 4. \quad (1)$$

Матрица кинетической энергии  $m_{ij}$  диагональна, причем

$$m_{11} = m_{22} = m_{33} = m, \quad m_{44} = 2m. \quad (2)$$

Матрица  $\delta m_{ij}$  имеет единственный отличный от нуля элемент

$$\delta m_{11} = \delta m. \quad (3)$$

Подставляя в (1) выражения (2) и (3), а также компоненты векторов нормальных колебаний  $\mathbf{r}_n$ , найденные в задаче 6.27, получим

$$\delta\omega_2 = -\frac{1}{4}\varepsilon\omega_2, \quad \delta\omega_{3,4} = -\frac{3 \mp \sqrt{5}}{40}\varepsilon\omega_{3,4}.$$

**6.36.** Векторный потенциал выбираем в виде

$$\mathbf{A} = \frac{\mathcal{H}}{2}(-y, x, 0),$$

функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{m}{2}(\omega_1^2 x^2 + \omega_2^2 y^2 + \omega_3^2 z^2) + \frac{m\omega_{\mathcal{H}}}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

где  $\omega_{\mathcal{H}} = \frac{e\mathcal{H}}{mc}$ . Для  $x$  и  $y$  получаем уравнения

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x - \omega_{\mathcal{H}} \dot{y} &= 0, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y + \omega_{\mathcal{H}} \dot{x} &= 0. \end{aligned}$$

Удобно искать колебания в виде

$$x = \operatorname{Re}(Ae^{i\Omega t}), \quad y = \operatorname{Re}(Be^{i\Omega t}).$$

Система уравнений

$$\begin{aligned} (\omega_1^2 - \Omega^2)A - i\omega_{\mathcal{H}}\Omega B &= 0, \\ i\omega_{\mathcal{H}}\Omega A + (\omega_2^2 - \Omega^2)B &= 0 \end{aligned}$$

приводит к колебаниям

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re}(A_k e^{i\Omega_k t}) = a_k \cos(\Omega_k t + \varphi_k), \\ y &= \operatorname{Re}\left(A_k \frac{-i\omega_{\mathcal{H}}\Omega_k}{\omega_2^2 - \Omega_k^2} e^{i\Omega_k t}\right) = a_k \frac{\omega_{\mathcal{H}}\Omega_k}{\omega_2^2 - \Omega_k^2} \sin(\Omega_k t + \varphi_k), \\ A_k &= a_k e^{i\varphi_k}, \quad k = 1, 2, \end{aligned}$$

с частотами

$$\Omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} \left[ \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_{\mathcal{H}}^2 \pm \sqrt{(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_{\mathcal{H}}^2)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2} \right],$$

для которых справедливо соотношение  $\Omega_1\Omega_2 = \omega_1\omega_2$ . Пусть для определенности  $\omega_1 > \omega_2, \omega_{\mathcal{H}} > 0$ . Тогда первое из найденных колебаний представляет собой движение по эллипсу с большой осью, направленной вдоль оси  $x$ , по часовой стрелке, а второе — по эллипсу с большой осью, лежащей вдоль оси  $y$ , в обратном направлении.

Движение вдоль оси  $z$  оказывается гармоническим колебанием, не зависящим от магнитного поля,

$$z = a_3 \cos(\omega_3 t + \varphi_3).$$

Свободное движение осциллятора представляет собой суперпозицию найденных колебаний. Эти колебания можно назвать нормальными, обобщая тем самым понятие нормального колебания: движения в направлениях осей  $x$  и  $y$  происходят с одной и той же частотой, но со сдвигом фаз. Привести функцию Лагранжа к диагональному виду с помощью линейного преобразования только координат невозможно, так как переход к нормальным координатам связан в этом случае с каноническим преобразованием (см. задачи 11.7–11.9).

а) Если магнитное поле мало,  $\omega_{\mathcal{H}} \ll \omega_1 - \omega_2$ , то эллипсы нормальных колебаний сильно вытянуты, а частоты  $\Omega_{1,2} \approx \omega_{1,2} \pm \frac{\omega_{\mathcal{H}}^2 \omega_{1,2}}{2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$  близки к  $\omega_{1,2}$ . Траектория осциллятора без магнитного поля заполняет прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат (см. задачу 6.4); влияние слабого магнитного поля приводит только к небольшой деформации области, заполняемой траекторией. (Теорема Лармора здесь неприменима, так как поле  $U$  не обладает симметрией относительно оси  $z$ .)

б) В сильном магнитном поле  $\omega_{\mathcal{H}} \gg \omega_{1,2}$  нормальное колебание с частотой  $\Omega_1 \approx \omega_{\mathcal{H}}$  происходит по окружности, а нормальное колебание с частотой  $\Omega_2 \approx \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_{\mathcal{H}}}$  — по эллипсу, у которого отношение осей, параллельных  $x$  и  $y$ , равно  $\omega_2/\omega_1$ . Таким образом, происходит движение по окружности, центр которой относительно медленно движется по эллипсу.

Известно, что при движении заряженной частицы в сильном однородном магнитном поле в плоскости, перпендикулярной к полю, появление слабого квазиоднородного поля  $U(\mathbf{r})$  (т. е. такого, что сила  $\mathbf{F} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}$  мало

изменяется в пределах круговой орбиты) приводит к медленному смещению (дрейфу) центра орбиты в направлении, перпендикулярном к  $\mathbf{F}$  (т. е. по линии уровня  $U(\mathbf{r})$ ) (см. [2], § 22). Заметим, что в нашем случае подобный же дрейф происходит и в сильно неоднородном осцилляторном поле.

в) Если  $\omega_1 = \omega_2$ , то в плоскости  $(x, y)$  нормальные колебания представляют собой движения по окружностям в противоположные стороны с частотами  $\Omega_{1,2} = \tilde{\omega} \pm \omega_{\mathcal{H}}/2$ , где  $\tilde{\omega} = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_{\mathcal{H}}^2}/2$ . Поэтому в системе, вращающейся с частотой  $-\omega_{\mathcal{H}}/2$  обе частоты этих движений оказываются равными  $\tilde{\omega}$ . Такие движения суть нормальные колебания изотропного осциллятора с частотой  $\tilde{\omega}$ . Действительно, сумма и разность таких колебаний с равными амплитудами

$$\begin{pmatrix} \cos \tilde{\omega} t \\ -\sin \tilde{\omega} t \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} \cos \tilde{\omega} t \\ \sin \tilde{\omega} t \end{pmatrix}$$

представляют собой линейные колебания по осям  $x$  или  $y$ . (Мы отвлекаемся от смещения вдоль магнитного поля.)

Если магнитное поле мало,  $\omega_{\mathcal{H}} \ll \omega_1$ , то  $\tilde{\omega} \approx \omega_1$ , и все влияние поля на движение осциллятора сводится к появлению вращения («прецессии») вокруг оси  $z$  с частотой  $-\omega_{\mathcal{H}}/2$  (теорема Лармора, ср. [2], § 45). Если же  $\omega_{\mathcal{H}} \gtrsim \omega_1$ , то использование вращающейся системы теряет наглядность.

### 6.37. Уравнения движения

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_1^2 x &= \omega_z \dot{y}, \\ \ddot{y} + \omega_2^2 y &= -\omega_z \dot{x} + \omega_x \dot{z}, \\ \ddot{z} + \omega_3^2 z &= -\omega_x \dot{y}, \end{aligned}$$

где

$$\omega_x = \frac{e\mathcal{H}_x}{mc}, \quad \omega_z = \frac{e\mathcal{H}_z}{mc}$$

решаем с помощью последовательных приближений. Ищем координаты в виде  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ ,  $y = y^{(1)} + y^{(2)}$ ,  $z = z^{(1)} + z^{(2)}$  где  $x^{(2)}$ ,  $y^{(2)}$ ,  $z^{(2)}$  малы по сравнению с  $x^{(1)}$ ,  $y^{(1)}$ ,  $z^{(1)}$ . В первом приближении пренебрегаем малыми членами, стоящими в правых частях уравнений:

$$\begin{aligned} x^{(1)} &= A \cos(\omega_1 t + \alpha), \\ y^{(1)} &= B \cos(\omega_2 t + \beta), \\ z^{(1)} &= C \cos(\omega_3 t + \gamma). \end{aligned}$$

Поправки  $x^{(2)}$ ,  $y^{(2)}$ ,  $z^{(2)}$  определяются из уравнений

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{(2)} + \omega_1^2 x^{(2)} &= \omega_z \dot{y}^{(1)}, \\ \ddot{y}^{(2)} + \omega_2^2 y^{(2)} &= -\omega_z \dot{x}^{(1)} + \omega_x \dot{z}^{(1)}, \\ \ddot{z}^{(2)} + \omega_3^2 z^{(2)} &= -\omega_x \dot{y}^{(1)}.\end{aligned}\tag{1}$$

Получаем

$$\begin{aligned}x^{(2)} &= \frac{-\omega_z \omega_2 B \sin(\omega_2 t + \beta)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \\ y^{(2)} &= \frac{\omega_1 \omega_z A \sin(\omega_1 t + \alpha)}{\omega_2^2 - \omega_1^2} - \frac{\omega_x \omega_3 C \sin(\omega_3 t + \gamma)}{\omega_2^2 - \omega_3^2}, \\ z^{(2)} &= \frac{\omega_x \omega_2 B \sin(\omega_2 t + \beta)}{\omega_3^2 - \omega_2^2}.\end{aligned}\tag{2}$$

Поправки оказываются малыми, если  $|\omega_z| \ll |\omega_1 - \omega_2|$ ,  $|\omega_x| \ll |\omega_2 - \omega_3|$ . Нормальные колебания суть колебания по эллипсам, сильно вытянутым вдоль осей координат.

Если же, например,  $|\omega_z| \gtrsim |\omega_1 - \omega_2|$ ,  $|\omega_x| \ll |\omega_2 - \omega_3|$ , то  $x^{(2)}$  и  $y^{(2)}$ , согласно (2), уже не малы. Это связано с тем, что частоты «сил»  $\omega_z \dot{y}^{(1)}$  и  $-\omega_z \dot{x}^{(1)}$  в (1) оказываются близкими к собственным частотам осциллятора. В этом случае в уравнениях первого приближения следует сохранить резонансные члены:

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{(1)} + \omega_1^2 x^{(1)} - \omega_z \dot{y}^{(1)} &= 0, \\ \ddot{y}^{(1)} + \omega_2^2 y^{(1)} + \omega_z \dot{x}^{(1)} &= 0, \\ \ddot{z}^{(1)} + \omega_3^2 z^{(1)} &= 0,\end{aligned}\tag{3}$$

т. е. влияние  $\mathcal{H}_z$  на движение необходимо учесть точно. Система (3) рассмотрена в задаче 6.36. Для поправок второго порядка имеем уравнения

$$\begin{aligned}\ddot{x}^{(2)} + \omega_1^2 x^{(2)} &= 0, \\ \ddot{y}^{(2)} + \omega_2^2 y^{(2)} &= \omega_x \dot{z}^{(1)}, \\ \ddot{z}^{(2)} + \omega_3^2 z^{(2)} &= -\omega_x \dot{y}^{(1)}.\end{aligned}$$



Выпишем свободные колебания, во избежание громоздкости ограничившись случаем  $\omega_1 = \omega_2 \equiv \omega$ :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left\{ A_1 \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ \frac{\omega\omega_x}{\omega_3^2 - \omega^2} \end{pmatrix} e^{i\left(\omega + \frac{\omega_z}{2}\right)t} + \right. \\ \left. + A_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ \frac{-\omega\omega_x}{\omega_3^2 - \omega^2} \end{pmatrix} e^{i\left(\omega - \frac{\omega_z}{2}\right)t} + A_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{i\omega_x\omega_3}{\omega_3^2 - \omega^2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\omega_3 t} \right\}. \quad (4)$$

Нормальные колебания (4) с частотами  $\omega \pm \frac{\omega_z}{2}$  происходят (в принятом приближении) по окружностям, плоскости которых составляют с плоскостью  $(x, y)$  углы  $\mp \frac{\omega_x\omega}{\omega_3^2 - \omega^2}$  (поворот вокруг оси  $y$ ), а колебание с частотой  $\omega_3$  — по сильно вытянутому вдоль оси  $z$  эллипсу, лежащему в плоскости  $(y, z)$ .

**6.38.** Колебания маятника предполагаем малыми, угол отсчитываем от вертикали против часовой стрелки, в качестве второй координаты возьмем заряд  $q$  на правой пластине. При отклонении маятника на угол  $\varphi$  магнитный поток через контур равен  $\Phi = \text{const} - \frac{1}{2} \mathcal{H} l^2 \varphi$ , поэтому функция Лагранжа (см. задачу 4.21)

$$L = \frac{1}{2} \left( m l^2 \dot{\varphi}^2 + \mathcal{L} \dot{q}^2 - m g l \varphi^2 - \frac{q^2}{C} - \mathcal{H} l^2 \varphi \dot{q} \right).$$

Если ввести координаты  $x = l\varphi$  и  $y = \sqrt{\mathcal{L}/mq}$ , то функция Лагранжа нашей системы отличается от рассмотренной в задаче 6.36 (с параметрами  $\omega_1^2 = \frac{g}{l}$ ,  $\omega_2^2 = \frac{1}{\mathcal{L}C}$ ,  $\omega_{\mathcal{H}} = -\frac{\mathcal{H}l}{2\sqrt{m\mathcal{L}}}$  при  $z = 0$ ) лишь на полную производную по времени:  $\frac{m}{2} \omega_{\mathcal{H}} \frac{d}{dt} xy$ . Поэтому уравнения движения и их решения в задаче 6.35 справедливы и для нашего случая.

**6.39.** Пусть

$$\mathbf{r} = \mathbf{A} \cos(\omega t + \varphi), \quad \mathbf{A} = (A_1, A_2, \dots, A_N) \quad (1)$$

— какое-либо нормальное колебание. Поскольку замена  $x_i \rightarrow \sum_j S_{ij} x_j$ , не меняет вида функции Лагранжа, то наряду с (1) должно существовать

нормальное колебание вида

$$S\mathbf{r} = S\mathbf{A} \cos(\omega t + \varphi), \quad (S\mathbf{A})_i = \sum_j S_{ij} A_j. \quad (2)$$

Здесь  $S$  — матрица с элементами  $S_{ij}$ , которая по условию обладает свойствами ( $E$  — единичная матрица,  $S^T$  — транспонированная матрица  $S$ ):

$$S^T = S, \quad SS = E. \quad (3)$$

а) Если данная частота  $\omega$  не вырождена, то решение (2) может отличаться от (1) разве лишь общим множителем:

$$S\mathbf{r} = c\mathbf{r}.$$

Аналогично

$$SS\mathbf{r} = cS\mathbf{r} = c^2\mathbf{r}. \quad (4)$$

Поскольку  $SS = E$ , то из (4) немедленно следует, что  $\mathbf{r} = c^2\mathbf{r}$ , или  $c^2 = 1$  и  $c = \pm 1$ . Поэтому для невырожденной частоты

$$\text{или } S\mathbf{r} = +\mathbf{r}, \quad \text{или } S\mathbf{r} = -\mathbf{r}.$$

б) Если частота  $\omega$  вырождена, то колебания (1) и (2) могут и не совпадать. Но их сумма и разность

$$\mathbf{r} \pm S\mathbf{r} = (\mathbf{A} \pm S\mathbf{A}) \cos(\omega t + \varphi)$$

также являются нормальными колебаниями с той же частотой, обладающими необходимыми свойствами симметрии.

в) Добавка к функции Лагранжа имеет вид  $\Delta L = \sum_i f_i x_i$ , где

$$\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_N)$$

— внешняя сила, действующая на систему.

Пусть сила  $\mathbf{f}$  симметрична, а нормальное колебание  $\mathbf{r}_a$  вида (1) — антисимметрично относительно преобразования  $S$ , т. е.

$$S\mathbf{f} = +\mathbf{f}, \quad S\mathbf{r}_a = -\mathbf{r}_a. \quad (5)$$

Данная сила не влияет на колебание  $\mathbf{r}_a$ , если векторы  $\mathbf{f}$  и  $\mathbf{r}_a$  взаимно ортогональны (см. задачу 6.24):

$$(\mathbf{f}, \mathbf{r}_a) = 0. \quad (6)$$

Из (5) следует, что

$$(S\mathbf{f}, S\mathbf{r}_a) = -(\mathbf{f}, \mathbf{r}_a). \quad (7)$$

С другой стороны, левую часть (7) можно переписать в виде

$$(S\mathbf{f}, S\mathbf{r}_a) = (\mathbf{f}, S^T S\mathbf{r}_a).$$

Из (3) очевидно, что  $S^T S = E$ . Сравнивая тогда (7) и (8), получим немедленно (6).

Остаются ли неизменными пункты а)–в) задачи, если заранее не требовать условия  $S^T = S$ ?

**6.40.** Пусть  $x_i$  — смещение  $i$ -й частицы вдоль кольца из положения равновесия, для определенности считаем положительным смещение против часовой стрелки. Система явно симметрична относительно поворота на угол  $180^\circ$  вокруг оси  $AB$ , проходящей через положение равновесия второй частицы и центр кольца. Поэтому и функция Лагранжа системы

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \frac{M}{2}(\dot{x}_4^2 + \dot{x}_5^2) - \frac{k}{2} \left[ \sum_{i=1}^4 (x_i - x_{i+1})^2 + (x_5 - x_1)^2 \right]$$

не изменяет своего вида при соответствующей такому повороту замене

$$x_2 \rightarrow -x_2, \quad x_1 \rightarrow -x_3, \quad x_3 \rightarrow -x_1, \quad x_4 \rightarrow -x_5, \quad x_5 \rightarrow -x_4. \quad (1)$$

Использование соображений симметрии (см. предыдущую задачу) и ортогональности позволяет очень просто свести эту задачу с пятью степенями свободы к двум независимым задачам с двумя степенями свободы каждая.

Действительно, векторы нормальных колебаний, симметричные и антисимметричные относительно преобразования (1), имеют вид

$$\mathbf{r}_s = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -a \\ b \\ -b \end{pmatrix} \cos(\omega_s t + \varphi_s), \quad \mathbf{r}_a = \begin{pmatrix} c \\ d \\ c \\ f \\ f \end{pmatrix} \cos(\omega_a t + \varphi_a).$$

Кроме того, одно антисимметричное «колебание» легко угадывается — это

вращение всех частиц по кольцу

$$\mathbf{r}_{a1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} (Ct + C_1), \quad \omega_{a1} = 0.$$

Два других (помимо  $\mathbf{r}_{a1}$ ) антисимметричных колебания должны быть ортогональны к  $\mathbf{r}_{a1}$  с метрическим тензором, определяемым коэффициентами кинетической энергии, т. е.

$$m(2c + d) + 2Mf = 0. \quad (2)$$

В итоге в  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{r}_s$  остаются неопределенными всего по два коэффициента. Для определения их достаточно использовать всего лишь два уравнения движения из пяти, например для первой и пятой частиц:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2 - x_5) &= 0, \\ M\ddot{x}_5 + k(2x_5 - x_4 - x_1) &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя сюда явный вид  $\mathbf{r}_s$ , найдем для двух симметричных колебаний

$$\begin{aligned} b_{1,2} &= \left( \frac{m}{k} \omega_{s1,2}^2 - 2 \right) a_{1,2}, \\ \omega_{s1,2}^2 &= \frac{k}{2mM} (2M + 3m \mp \sqrt{2(M - m)^2 + 5m^2}). \end{aligned}$$

Аналогично, подставляя в (3) вектор  $\mathbf{r}_a$  и учитывая (2), найдем

$$\begin{aligned} c_{2,3} &= \left( \frac{M}{k} \omega_{a2,3}^2 - 1 \right) f_{2,3}, \quad d_{2,3} = -2c_{2,3} - \frac{2M}{m} f_{2,3}, \\ \omega_{a2,3}^2 &= \frac{k}{2mM} \left( 4M + m \mp \sqrt{\frac{1}{2}(4M - m)^2 + \frac{1}{2}m^2} \right). \end{aligned}$$

**6.41.** Рассматриваемая система близка к изученной в задаче 6.28 а, функция Лагранжа в нашей задаче отличается на малую величину

$$\begin{aligned} \delta L &= \delta L_1(x, \dot{x}) + \delta L_2(y, \dot{y}) + \delta L_3(z, \dot{z}), \\ \delta L_1(x, \dot{x}) &= \frac{\varepsilon k}{2} [x_2^2 + (x_2 - x_5)^2 + (x_4 - x_5)^2 + x_4^2], \\ \varepsilon &= \frac{l - l_1}{l} \ll 1. \end{aligned}$$

И в этом случае колебания по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  происходят независимо. Нас интересуют только колебания по  $x$ .

Для определения частот колебаний удобно воспользоваться методом последовательных приближений (см. задачу 6.34). Частоты  $\omega_{3,4}$  невырожденные, так что к этим колебаниям непосредственно применима формула (4) из задачи 6.34.

Частота  $\omega_1$  исходной задачи (6.28 а) трехкратно вырождена, поэтому, казалось бы, для определения поправок к частоте и векторов нормальных колебаний придется рассматривать систему уравнений типа (5) из задачи 6.34. Однако свойства симметрии системы позволяют сразу же указать те векторы нормальных колебаний исходной системы, которые мало изменяются при добавлении  $\delta L$ . Это как раз векторы (1) из задачи 6.28, потому что именно они обладают определенными свойствами симметрии: колебание  $\mathbf{r}_3$  симметрично относительно оси  $AB$  и антисимметрично относительно  $CD$ ,  $\mathbf{r}_1$  — симметрично, а  $\mathbf{r}_2$  — антисимметрично относительно обеих осей. Поправки к частотам этих колебаний тоже можно вычислять по формуле (4) из задачи 6.34.

Подставляя  $x_1 = -x_3 = 1$ ,  $x_2 = x_4 = x_5 = 0$ , находим

$$\delta K_{11} = -2\delta L_1 = 0,$$

так что  $\delta\omega_1 = 0$ . Аналогично

$$\delta K_{22} = -2\delta L_1(x_1 = x_3 = x_5 = 0, x_2 = -x_4 = 1) = -4\epsilon k,$$

$$M_2 = 2L_1(\dot{x}_1 = \dot{x}_3 = \dot{x}_5 = 0, \dot{x}_2 = -\dot{x}_4 = 1, x_i = 0) = 2m,$$

так что  $\delta\omega_2 = -\epsilon\sqrt{\frac{k}{2m}}$ ;

$$\delta K_{33} = -4\epsilon k, \quad M_3 = 4m, \quad \delta\omega_3 = -\frac{\epsilon}{2}\sqrt{\frac{k}{2m}}.$$

Представляя вектор начального смещения  $\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ -a \\ 0 \end{pmatrix}$  и вектор начальной скорости  $\dot{\mathbf{r}}(0) = 0$  в виде  $\mathbf{r}(0) = \sum_i \mathbf{r}_i(0)$  и  $\dot{\mathbf{r}}(0) = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i(0)$  соответственно, найдем, что

$$A_1 = A_2 = A_3 = \frac{a}{2}, \quad A_4 = A_5 = \varphi_i = 0.$$

Таким образом, в данном приближении четвертое и пятое нормальные колебания не возбуждаются, и колебания частиц

$$\begin{aligned}x_{1,3} &= \frac{a}{2}(\pm \cos \omega_1 t + \cos \omega_3 t), \\x_{2,4} &= \frac{a}{2}(\pm \cos \omega_2 t - \cos \omega_3 t), \quad x_5 = 0\end{aligned}$$

носят характер биений (см. по этому поводу задачу 6.31).

**6.42.** В этой задаче удобно воспользоваться методом последовательных приближений (см. задачу 6.34). Изменение масс приводит к появлению добавки к функции Лагранжа

$$\delta L = \frac{1}{2}(\delta m_1 \dot{x}_1^2 + \delta m_2 \dot{x}_2^2).$$

Ее следует выразить через нормальные координаты исходной системы (см. задачу 6.21). При этом коэффициент при произведении обобщенных скоростей  $\dot{q}_1 \dot{q}_2$ , отвечающих вырожденной частоте, оказывается равным нулю. Остальные произведения  $\dot{q}_l \dot{q}_s$  (для  $\omega_l \neq \omega_s$ ) можно опустить, как это отмечено в задаче 6.34. Получаем

$$\delta L_1 = \frac{1}{4}\delta m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{4}\delta m_2 \dot{q}_2^2 + \frac{1}{8}(\delta m_1 + \delta m_2)(\dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2).$$

Функция Лагранжа  $L + \delta L_1$ , как и функция Лагранжа исходной системы, разделяется на слагаемые, каждое из которых содержит только одну из координат  $q_l$ . Координаты  $q_l$  остаются, таким образом, нормальными, а для вычисления поправок к частотам можно воспользоваться формулой (4) из задачи 6.34:

$$\begin{aligned}\delta \omega_1 &= -\frac{\varepsilon_1}{4}\omega_1, \quad \delta \omega_2 = -\frac{\varepsilon_2}{4}\omega_3, \quad \delta \omega_3 = -\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{8}\omega_3, \\ \delta \omega_4 &= 0, \quad \varepsilon_i = \frac{\delta m_i}{m}.\end{aligned}$$

Все собственные частоты системы стали различными, исчезла неоднозначность выбора векторов нормальных колебаний: с точностью до  $\varepsilon_i$  это векторы (1) из задачи 6.21.

Интересно, что при  $\delta m_1 = \delta m_2$  частоты  $\omega_1 + \delta \omega_1$  и  $\omega_2 + \delta \omega_2$  вновь совпадают друг с другом (с точностью до поправок второго порядка  $|\delta \omega_1 - \delta \omega_2| \sim \varepsilon_1^2 \omega_1$ ). В этом случае функция Лагранжа  $L + \delta L_1$  снова приводит к неоднозначному выбору векторов нормальных колебаний. Однако

в точном решении задачи при  $\delta m_1 = \delta m_2$  векторы нормальных колебаний имеют вид

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 - \varepsilon \\ -1 - \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \mp \sqrt{1 + \varepsilon + 9\varepsilon^2} \pm 3\varepsilon \\ \pm \sqrt{1 + \varepsilon + 9\varepsilon^2} \mp 3\varepsilon \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

и при малых  $\varepsilon$  близки к векторам (2) задачи 6.21 (с точностью до опущенных здесь нормировочных множителей). Резкое изменение вида нормальных колебаний происходит в очень узком интервале изменения масс  $|\delta m_1 - \delta m_2| \lesssim \varepsilon^2 m$  (ср. с задачей 6.5 а). Для определения векторов нормальных колебаний в этом интервале значений  $\delta m_1, \delta m_2$  можно было бы воспользоваться следующим приближением в методе последовательных приближений.

**6.43 а.** Очевидно, движения частиц в направлении осей  $AA$  и  $BB$  независимы. Будем рассматривать движение в направлении оси  $AA$ .

Для первой и четвертой частиц положительными считаем отклонения влево, для второй и третьей — вправо. Согласно результату задачи 6.39 нормальные колебания  $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  могут быть выбраны симметричными или антисимметричными относительно осей  $AA$  и  $BB$ . Для симметричного относительно оси  $AA$  колебания  $x_1 = x_4, x_2 = x_3$ . Если к тому же это колебание симметрично относительно оси  $BB$ , то  $x_1 = x_2, x_3 = x_4$ , так что для этого дважды симметричного колебания имеем  $\mathbf{r}_{ss} = (1, 1, 1, 1)q_{ss}$ .

Для колебания, симметричного относительно оси  $AA$  и антисимметричного относительно оси  $BB$ , имеем  $x_1 = x_4, x_2 = x_3$  и  $x_1 = -x_2, x_4 = -x_3$ , так что

$$\mathbf{r}_{sa} = (1, -1, -1, 1)q_{sa}.$$

Подобным же образом находим

$$\mathbf{r}_{as} = (1, 1, -1, -1)q_{as}, \quad \mathbf{r}_{aa} = (1, -1, 1, -1)q_{aa}.$$

Аналогично находятся векторы нормальных колебаний в вертикальном направлении.

Частоты колебаний можно найти, подставив найденные векторы в уравнения движения.

При наличии вырождения, кроме найденных нормальных колебаний, существует множество нормальных колебаний, не обладающих указанными

свойствами симметрии. Нетрудно сообразить, например, что частоты  $ss$  и  $aa$  колебаний совпадают  $\omega_{ss} = \omega_{aa} = 2\sqrt{k/m}$ , если натяжение пружинок не произвольно, а равно  $kl$  (где  $l$  — длина каждой из пружинок в положении равновесия). Но тогда нормальным колебанием будет любая суперпозиция векторов  $\mathbf{r}_{aa}$  и  $\mathbf{r}_{ss}$ , например вектор  $(1, 0, 1, 0)q_{ss}$ .

Аналогично можно найти векторы нормальных колебаний в направлении оси  $BB$ .

**6.43 б.** Соображения симметрии позволяют свести эту систему с 7 степенями свободы к нескольким простым (не более чем с двумя степенями свободы) системам. Действительно, вследствие симметрии системы относительно плоскости, перпендикулярной плоскости весов, все нормальные колебания могут быть выбраны либо симметричными, либо антисимметричными относительно этой плоскости. Далее, нормальные колебания разделяются на выводящие частицы из плоскости весов и сохраняющие весы плоскими. Рассмотрим эти последние колебания.

Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы отклонения от вертикали центра рамки, нити  $BA$  и нити  $DE$  соответственно. Кроме очевидного симметричного колебания  $\alpha = 0, \beta = -\gamma$  с частотой  $\sqrt{g/3l}$  имеется два антисимметричных колебания, для которых  $\beta = \gamma$ . Так как вклады различных нормальных колебаний в функцию Лагранжа аддитивны, то для нахождения антисимметричных колебаний достаточно знать лишь слагаемое

$$L_a = ml^2(2\dot{\alpha}^2 + 9\dot{\beta}^2 + 3\dot{\alpha}\dot{\beta}) - mgl(\alpha^2 + 3\beta^2),$$

отвечающее данному типу колебаний. В итоге получаем два антисимметричных колебания:  $\alpha = \beta = \gamma$  с частотой  $\sqrt{2g/7l}$  и  $\alpha = -3\beta = -3\gamma$  с частотой  $\sqrt{2g/3l}$ .

Для описания колебаний, выводящих частицы из плоскости весов, используем декартовы координаты отклонения частиц от положения равновесия в направлении оси  $x$ , которую направим перпендикулярно равновесной плоскости весов. Очевидно, что симметричные колебания  $x_A = x_E$ ,  $x_B = x_D$  совпадают с колебаниями двойного плоского маятника (см. [1], задача 2 к § 23 с параметрами  $m_1 = m_2 = 2m$ ,  $l_1 = l/2$ ,  $l_2 = 3l$ ,  $\varphi_1 = 2x_B/l$ ,  $\varphi_2 = (x_A - x_B)/3l$ ), поэтому  $\omega_s^2 = g(7 \mp \sqrt{37})/3l$ , и  $x_A = (6 \pm \sqrt{37})x_B$ . Среди двух антисимметричных колебаний  $x_A = -x_E$ ,  $x_B = -x_D$  одно очевидное — вращение весов вокруг вертикальной оси:  $x_A = x_B$ . Другое антисимметричное колебание ортогонально к указанному и потому для него  $x_A = -x_B = x_D = -x_E$ . Но при таком колебании центр каждой нити в



первом приближении не смещается, следовательно, частота таких колебаний совпадает с частотой маятника длиной  $3l/2$ , т. е. равна  $\sqrt{2g/3l}$ .

**6.44.** Очевидно, колебания в направлениях  $AA$ ,  $BB$  и в направлении, перпендикулярном плоскости рамки, независимы. Рассмотрим, например, первые.

Компоненты вектора колебания удобно размещать в таблице, соответствующей форме рамки. Для частиц, расположенных слева от оси  $BB$ , положительными считаем отклонения влево, для частиц, расположенных справа — вправо. Колебание  $ss$ , симметричное относительно обеих осей  $AA$  и  $BB$ , имеет вид

$$\begin{pmatrix} x & X & X & x \\ x & X & X & x \end{pmatrix}.$$

Колебания  $x$ ,  $X$  сводятся к колебаниям системы, рассмотренной в задаче 6.7 с  $m_1 = m$ ,  $m_2 = M$ , где следует положить  $k_1 = k + k'$ ,  $k_2 = k$ ,  $k_3 = 2k + k'$ ,  $k' = f/l$ . Таким образом, имеется два  $ss$  колебания.

Колебания  $sa$ , симметричные относительно оси  $AA$  и антисимметричные относительно оси  $BB$ , имеют вид

$$\begin{pmatrix} x & X & -X & -x \\ x & X & -X & -x \end{pmatrix},$$

причем теперь  $k_3 = k'$ ,  $k_1 = k + k'$ .

Аналогично для  $as$ - и  $aa$ -колебаний:

$$\begin{pmatrix} x & X & X & x \\ -x & -X & -X & -x \end{pmatrix}, \quad k_1 = k + 3k', \quad k_3 = 2k + 3k',$$

$$\begin{pmatrix} x & X & -X & -x \\ -x & -X & X & x \end{pmatrix}, \quad k_1 = k + 3k', \quad k_3 = 3k'.$$

Подобным же образом можно найти остальные шестнадцать нормальных колебаний.

**6.45.** В обозначениях предыдущей задачи вектор силы

$$\begin{pmatrix} -k - k', & -k', & k', & k + k' \\ -k - k', & -k', & k', & k + k' \end{pmatrix} a \cos \gamma t.$$

Он ортогонален всем нормальным колебаниям, кроме симметрично-антисимметричных ( $sa$ ). Поэтому резонанс возникает лишь при двух частотах

$\gamma = \omega_{1,2}^{sa}$ , где

$$(\omega_{1,2}^{sa})^2 = \frac{1}{2mM} \left\{ k(2M + m) + \frac{f}{l}(M + m) \pm \sqrt{\left[ k(2M - m) + \frac{f}{l}(M - m) \right]^2 + 4k^2 M m} \right\}.$$

**6.46.** Линейная молекула  $C_2H_2$  имеет всего семь нормальных колебаний: три продольных колебания и по два изгибных колебания в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (см., например [1], § 24).

Задача об определении двух симметричных продольных колебаний  $x_1 = -x_4$ ,  $x_2 = -x_3$ , сводится к задаче 6.7 с параметрами  $k_2 = k_{HC}$ ,  $k_3 = 2k_{CC}$ ,  $k_1 = 0$ , где  $k_{HC}$  и  $k_{CC}$  — жесткости связей HC и CC. Антисимметричное продольное колебание  $x_1 = x_4$ ,  $x_2 = x_3$ ,  $m_H x_1 + m_C x_2 = 0$  имеет частоту  $\omega_{a1} = \sqrt{\frac{k_{HC}(m_H + m_C)}{m_H m_C}}$  (такую же, как и «молекула» CH). Заметим, что продольное смещение молекулы как целого  $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$  можно рассматривать как второе антисимметричное колебание, причем условие ортогональности к нему первого антисимметричного колебания совпадает с условием равенства нулю полного импульса молекулы.

Поперечное симметричное колебание  $y_1 = y_4$ ,  $y_2 = y_3$ ,

$$m_H y_1 + m_C y_2 = 0, \quad \omega_{s3}^2 = \frac{k_{HCC}(m_H + m_C)}{l_{HC}^2 m_H m_C}.$$

Здесь  $k_{HCC}$  — жесткость молекулы при изгибе: при изгибе связи HCC на угол  $\delta$  потенциальная энергия возрастает на  $k_{HCC} \delta^2 / 2$ .

Поперечное антисимметричное колебание  $y_1 = -y_4$ ,  $y_2 = -y_3$ ,

$$m_C l_{CC} y_2 + m_H (l_{CC} + 2l_{HC}) y_1 = 0, \\ \omega_{a2}^2 = \frac{k_{HCC} [m_C l_{CC}^2 + m_H (2l_{HC} + l_{CC})^2]}{m_H m_C l_{HC}^2 l_{CC}^2},$$

где  $l_{HC}$  и  $l_{CC}$  — равновесное расстояние между атомами H–C и C–C соответственно. Отметим, что соотношение между смещениями атомов этого колебания может быть найдено из условия равенства нулю полного момента импульса молекулы (или ортогональности вектору чистого вращения молекулы как целого  $y_1 = -y_4$ ,  $y_2 = -y_3$ ,  $y_2(2l_{HC} + l_{CC}) = y_1 l_{CC}$ , которое можно рассматривать как второе антисимметричное колебание).

**6.47.** Обозначим отклонения частиц от положения равновесия в направлении  $BD$  через  $x_1$  и  $x_2$ , а в направлении  $CF$  — через  $y_1$  и  $y_2$ . Поворот вокруг оси симметрии  $CF$  на  $180^\circ$  приводит к заменам:

$$x_1 \leftrightarrow -x_2, \quad y_1 \leftrightarrow y_2,$$

т. е. преобразование  $S$  поворота вектора колебания  $\mathbf{r} = (x_1, y_1, x_2, y_2)$  имеет вид

$$S\mathbf{r} = (-x_2, y_2, -x_1, y_1).$$

Вследствие симметрии системы в ней возможны нормальные колебания двух видов:  $\mathbf{r}_s$  — симметричные относительно оси  $CF$ , для которых  $S\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_s$ , и антисимметричные  $\mathbf{r}_a$ , для которых  $S\mathbf{r}_a = -\mathbf{r}_a$ . Для симметричного колебания  $(-x_2, y_2, -x_1, y_1) = (x_1, y_1, x_2, y_2)$ , откуда

$$\mathbf{r}_s = (x, y, -x, y).$$

Аналогично

$$\mathbf{r}_a = (x, y, x, -y).$$

(Для антисимметричного колебания поворот вокруг оси симметрии равносильно изменению фазы колебания на  $\pi$ .)

Возможны два симметричных и два антисимметричных колебания; для определения частот и векторов каждой пары колебаний достаточно использовать два уравнения движения.

Можно получить еще некоторые сведения о виде нормальных колебаний, не зная жесткостей пружинок. Условие ортогональности векторов колебаний  $\mathbf{r}_{s1}$  и  $\mathbf{r}_{s2}$  сводится к равенству

$$2m(x_{s1}x_{s2} + y_{s1}y_{s2}) = 0,$$

показывающему, что векторы отклонений, например, частицы 1 при каждом из двух симметричных колебаний взаимно перпендикулярны (рис. 130, *а*). То же самое относится и к антисимметричным колебаниям (рис. 130, *б*).

Направление, в котором отклоняется частица при каждом из нормальных колебаний, нельзя определить, не зная жесткостей пружинок. Действительно, если жесткость и натяжения пружинок  $AC$  и  $CE$  малы, то отклонения частиц при нормальных колебаниях направлены почти вдоль или поперек пружинок  $BD$ , и, наоборот, при малой жесткости пружинок  $BD$  нормальные колебания происходят почти вдоль или поперек пружинок  $AC$  и  $CE$ .

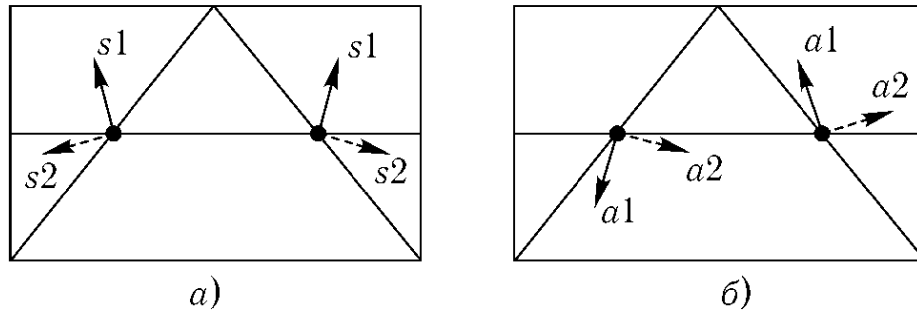


Рис. 130

Разумеется, при вырождении частот можно выбрать и другие векторы нормальных колебаний, не обладающие свойствами симметрии. Например, при «выключенной» пружинке  $BD$  это могут быть колебания каждой из частиц вдоль или поперек пружинки  $AC$  и  $CE$ .

**6.48.** Обозначим отклонения каждого из атомов от положения равновесия в направлениях  $OD$  через  $x_i$ ,  $OA$  — через  $y_i$ , перпендикулярно плоскости молекулы — через  $z_i$ .

Колебания молекулы  $C_2H_4$  разделяются на сохраняющие молекулу плоской и выводящие атомы из плоскости. Рассмотрим последние колебания.

Вектор отклонения атомов удобно записывать в форме

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} z_1 & & z_4 \\ & z_2 & z_5 \\ z_3 & & z_6 \end{pmatrix}.$$

Для колебания, симметричного относительно оси  $AB$ ,

$$z_4 = z_1, \quad z_5 = z_2, \quad z_6 = z_3.$$

Если колебание к тому же антисимметрично относительно оси  $CD$ , то

$$z_3 = -z_1, \quad z_2 = -z_2, \quad z_5 = -z_5, \quad z_6 = -z_4.$$

Итак,

$$\mathbf{r}_{sa} = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 0 & 0 \\ -1 & & -1 \end{pmatrix} q_{sa}.$$

Это «колебание» оказалось вращением вокруг оси  $CD$ .

Аналогично симметричные относительно обеих осей колебания

$$\mathbf{r}_{ss} = \begin{pmatrix} z_1 & & z_1 \\ & z_2 & z_2 \\ z_1 & & z_1 \end{pmatrix}.$$

Одно из них

$$\mathbf{r}_{ss,1} = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} q_{ss,1}.$$

Это поступательное движение. Амплитуды другого можно определить, учтя его ортогональность вектору  $\mathbf{r}_{ss,1}$ :

$$4mz_1 + 2Mz_2 = 0,$$

$m$  — масса атома водорода,  $M$  — углерода.

$$\mathbf{r}_{ss,2} = \begin{pmatrix} 1 & & 1 \\ & -\frac{2m}{M} & -\frac{2m}{M} \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} q_{ss,2}.$$

Антисимметричное относительно обеих осей колебание

$$\mathbf{r}_{aa} = \begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & 0 & 0 \\ -1 & & 1 \end{pmatrix} q_{aa}$$

есть крутильное колебание вокруг оси  $CD$ .

Наконец,

$$\mathbf{r}_{as,i} = \begin{pmatrix} 1 & & -1 \\ & a_i & -a_i \\ 1 & & -1 \end{pmatrix} q_{as,i}.$$

Здесь для вращения вокруг оси  $AB$  (колебание  $\mathbf{r}_{sa,1}$ ) имеем  $a_1 = l_{OC}/l_{OH}$  — отношение расстояний атомов углерода и водорода от оси  $AB$  в положении равновесия; для изгибного колебания ( $\mathbf{r}_{as,2}$ )

$$a_2 = -\frac{2m}{M} \frac{l_{OH}}{l_{OC}}.$$

Аналогично могут быть рассмотрены и колебания, не выводящие атомы из плоскости молекулы. Вектор отклонения запишем в виде

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & & x_4 & y_4 \\ & x_2 & y_2 & x_5 & y_5 \\ & x_3 & y_3 & & x_6 & y_6 \end{pmatrix}.$$

Общий вид колебания  $as$

$$\mathbf{r}_{as} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & & x_1 - y_1 \\ & x_2 & 0 & x_2 & 0 \\ & x_1 - y_1 & & x_1 & y_1 \end{pmatrix}.$$

В число  $as$ -«колебаний» входит поступательное движение молекулы в направлении оси  $x$  ( $x_1 = x_2$ ,  $y_1 = 0$ ). Два других  $as$ -колебания изображены на рис. 131, *a*, *б*.

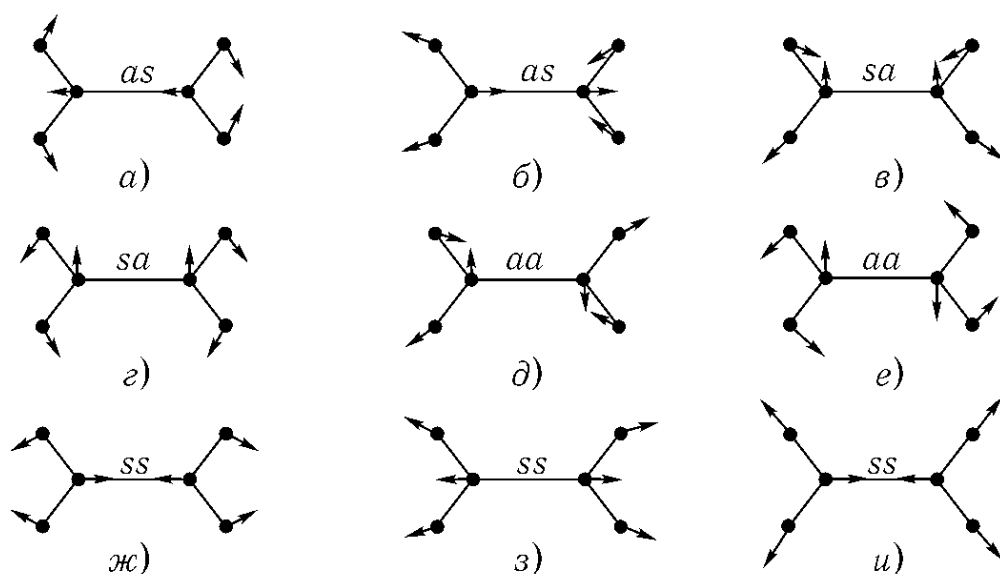


Рис. 131

Чтобы представить себе вид отклонений атомов при этих колебаниях, заметим, что расстояние между атомами углерода не изменяется — связь С-С «не работает». Если пренебречь взаимодействием относительно далеких атомов (например, 1-4, 1-5 на рис. 40), а также жесткостью углов вида 1-2-5, то рассматриваемые колебания совпадут с симметричными относительно оси  $CD$  колебаниями двух «молекул»  $\text{H}_2\text{C}$ , происходящими в противофазе (ср. с задачей 6.46; колебания молекулы вида  $\text{A}_2\text{B}$  рассмотрены в [1], § 24, задача 2).

Общий вид  $sa$  колебания

$$\mathbf{r}_{sa} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & & -x_1 & y_1 \\ & 0 & y_2 & 0 & y_2 \\ -x_1 & y_1 & & x_1 & y_1 \end{pmatrix}.$$

Кроме поступательного движения в направлении оси  $y$ , вектору  $\mathbf{r}_{sa}$  соответствуют два колебания (рис. 131, в, г). Одно из них (в) можно представить себе как колебания двух «молекул»  $\text{H}_2\text{C}$ , антисимметричные относительно оси  $CD$  и происходящие в фазе. Другое (г) — это вращения «молекул»  $\text{H}_2\text{C}$  в разные стороны. Если бы можно было полностью пренебречь связями удаленных атомов и жесткостью углов вида 1–2–5, то частота этого колебания оказалась бы равна нулю.

Среди  $aa$ -колебаний есть вращение молекулы как целого в плоскости  $xy$ , антисимметричные колебания «молекул»  $\text{H}_2\text{C}$  в противофазе (рис. 131, д) и их вращения в одну сторону (рис. 131, е).

Возможны также три  $ss$ -колебания (полносимметричные), они изображены на рис. 131, ж, з, и (подробнее о колебаниях молекулы этилена см., например, в [17].)

#### 6.49. Функция Лагранжа

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_2^2 + \dot{\mathbf{u}}_3^2) - \frac{k}{2}\{(|\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20} + \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2| - l)^2 +$$

$$+ (|\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{30} + \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3| - l)^2 - (|\mathbf{r}_{30} - \mathbf{r}_{10} + \mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1| - l)^2\},$$

где  $l = |\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}| = |\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{30}| = |\mathbf{r}_{30} - \mathbf{r}_{10}|$ ;  $\mathbf{u}_a$  — смещение  $a$ -го атома из положения равновесия, определяемого радиусом вектором  $\mathbf{r}_{a0}$ . Поскольку  $|\mathbf{u}_a| \ll l$ , имеем

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\mathbf{u}}_1^2 + \dot{\mathbf{u}}_2^2 + \dot{\mathbf{u}}_3^2) - \frac{k}{2}\{(\mathbf{e}_{12}(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2))^2 + (\mathbf{e}_{23}(\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3))^2 + (\mathbf{e}_{31}(\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_1))^2\}, \quad (1)$$

где

$$\mathbf{e}_{12} = \frac{\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20}}{l}, \quad \mathbf{e}_{23} = \frac{\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{30}}{l}, \quad \mathbf{e}_{31} = \frac{\mathbf{r}_{30} - \mathbf{r}_{10}}{l}.$$

В системе отсчета, где полный импульс  $m(\dot{\mathbf{u}}_1 + \dot{\mathbf{u}}_2 + \dot{\mathbf{u}}_3) = 0$ , выполняется условие

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 = 0. \quad (2)$$

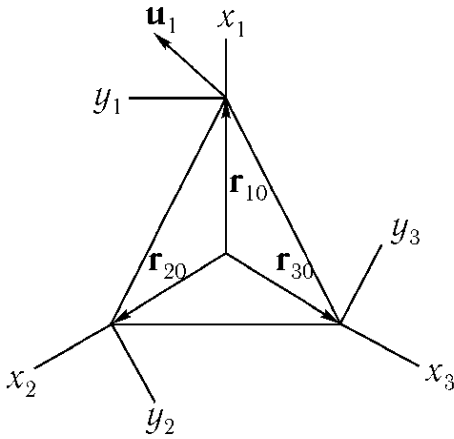


Рис. 132

Кроме того, накладываем на  $\mathbf{u}_a$  условие

$$[\mathbf{r}_{10}\mathbf{u}_1] + [\mathbf{r}_{20}\mathbf{u}_2] + [\mathbf{r}_{30}\mathbf{u}_3] = 0, \quad (3)$$

равносильное требованию, чтобы момент импульса молекулы

$$\mathbf{M} = m \sum_a [\mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a, \dot{\mathbf{u}}_a] \quad (4)$$

обращался в нуль с точностью до первого порядка по  $\mathbf{u}_a$  включительно.

Оказывается удобным выбрать для описания движения каждого атома свою систему декартовых координат (рис. 132), сохраняя таким образом симметрию в описании системы. Равенства (2), (3) в этих координатах дают<sup>1</sup>

$$y_1 + \left(-\frac{1}{2}y_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_2\right) + \left(-\frac{1}{2}y_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_3\right) = 0, \quad (5)$$

$$y_2 + \left(-\frac{1}{2}y_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}x_3\right) + \left(-\frac{1}{2}y_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}x_1\right) = 0, \quad (6)$$

откуда

$$y_1 = \frac{x_3 - x_2}{\sqrt{3}}, \quad y_2 = \frac{x_1 - x_3}{\sqrt{3}}, \quad y_3 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{3}}$$

и

$$L = \frac{5m}{6}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) - \frac{m}{3}(\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2\dot{x}_3 + \dot{x}_3\dot{x}_1) - \frac{3}{2}k(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Одно нормальное колебание (полносимметричное) очевидно:

$$x_1^{(1)} = x_2^{(1)} = x_3^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}q_1. \quad (7)$$

<sup>1</sup>Например, умножая обе стороны равенства (2) на  $\mathbf{e}_{23}$ , получим (5). При этом нужно учесть, что вектор  $\mathbf{e}_{23}$  в различных системах имеет координаты

$$\mathbf{e}_{23} = (0, 1)_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)_3,$$

а  $\mathbf{u}_a = (x_a, y_a)_a$ .

Равенство (6) получается из (5) круговой перестановкой индексов.



Два других колебания ортогональны первому, что приводит к условию<sup>1</sup>

$$x_1^{(s)} + x_2^{(s)} + x_3^{(s)} = 0, \quad s = 2, 3. \quad (8)$$

Одно из этих колебаний симметрично относительно оси  $x_1$ :  $x_2^{(2)} = x_3^{(2)}$ ; другое — антисимметрично:  $x_1^{(3)} = 0$ ,  $x_2^{(3)} = -x_3^{(3)}$ .

Учитывая (8), имеем

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= -2x_2^{(2)} = -2x_3^{(2)} = \sqrt{\frac{2}{3}}q_2, \\ x_2^{(3)} &= -x_3^{(3)} = \frac{1}{\sqrt{2}}q_3. \end{aligned} \quad (9)$$

Замена

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}q_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}q_2, \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}q_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}q_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}q_3, \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}q_1 - \frac{1}{\sqrt{6}}q_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}q_3 \end{aligned}$$

приводит функцию Лагранжа к виду

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_3^2) - \frac{3k}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2). \quad (10)$$

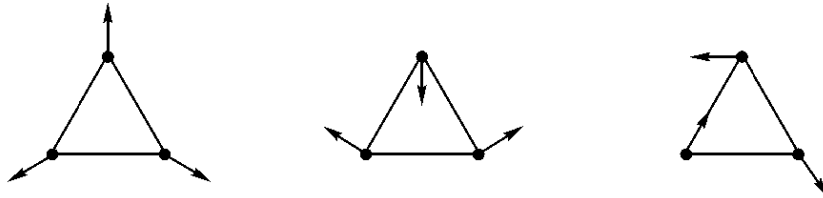


Рис. 133

Нормальные колебания, соответствующие этим координатам, приведены на рис. 133. Их частоты

$$\omega_1 = \sqrt{3\frac{k}{m}}, \quad \omega_2 = \omega_3 = \sqrt{\frac{3k}{2m}}.$$

Вид функции Лагранжа (10) сохраняется при повороте в плоскости  $q_2, q_3$ .

<sup>1</sup>Использована метрика  $k_{ij}$ . В (7), (9) множители перед  $q$  выбраны так, что  $x_1^{(l)2} + x_2^{(l)2} + x_3^{(l)2} = q_l^2$ .

Момент импульса с учетом квадратичных по  $u_a$  членов

$$|M| = m \left| \sum_a [u_a \dot{u}_a] \right| = m |q_2 \dot{q}_3 - q_3 \dot{q}_2|$$

может быть отличным от нуля, если колебания  $q_2$  и  $q_3$  происходят со сдвигом фаз.

Интересно разобраться, какие изменения может внести в эту картину зависимость потенциальной энергии от углов, образуемых связями. Очевидно, на частоту колебаний  $q_1$  такая зависимость не повлияет. Частота колебаний  $q_2$  и  $q_3$  изменится, но двукратное вырождение сохранится. Действительно, наряду с некоторым колебанием  $q$  возможно также колебание, полученное из  $q$  поворотом на  $2\pi/3$ . Его частота должна быть такой же, как и частота колебаний  $q$ . С другой стороны, оно отличается от  $q$  (при повороте на  $2\pi/3$  само с собой совпадает только колебание  $q_1$ ). Таким образом, мы обнаруживаем два независимых колебания с одной частотой. Нормальные координаты в этом случае должны удовлетворять только одному условию: быть ортогональными  $q_1$ ; в частности,  $q_2$  и  $q_3$  остаются нормальными координатами.

**6.50.** а) Вводим координаты атомов В так же, как в предыдущей задаче, для атома А — координаты  $x_4, y_4, z_4$  с осями, параллельными  $x_1, y_1, z_1$  и началом в центре треугольника.

Есть четыре степени свободы движений, выводящих атомы из плоскости  $xy$ . Три из них отвечают поступательному движению вдоль оси  $z$  и вращениям вокруг осей  $x_4$  и  $y_4$ , а одно — колебанию (при котором, очевидно,  $z_1 = z_2 = z_3, m_A z_4 + m(z_1 + z_2 + z_3) = 0$ ). Частота этого колебания  $\omega_1$  невырожденная, она лишь случайно могла бы совпасть с частотой какого-нибудь другого колебания.

Рассмотрим колебание атомов в плоскости  $xy$ , симметричное относительно оси  $x_4$ . Общий вид такого колебания:

$$y_1 = 0, \quad x_2 = x_3, \quad y_2 = -y_3, \quad y_4 = 0.$$

Вектор смещения содержит четыре независимых параметра:  $x_1, x_2, y_2, x_4$ , т. е. на такие движения приходится четыре степени свободы. Одна из них отвечает поступательному движению молекулы вдоль оси  $x_4$  одна — полносимметричному колебанию

$$x_1 = x_2 = x_3, \quad y_1 = y_2 = y_3 = x_4 = y_4 = 0$$

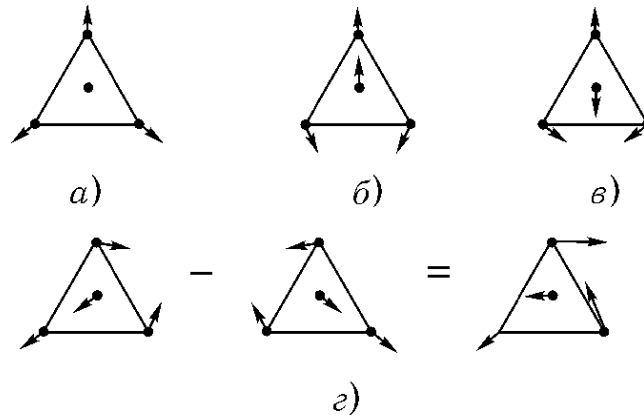


Рис. 134

с частотой  $\omega_2$  (рис. 134, а), а две остальные — колебаниям, нарушающим симметрию молекулы. Частоты этих колебаний  $\omega_3$  и  $\omega_4$  (рис. 134, б, в).

Из четырех оставшихся степеней свободы одна приходится на поступательное движение в направлении оси  $y_4$ , одна — на вращение вокруг оси  $z_4$ , а две — на колебания. Это колебания, которые могут быть получены из уже указанных с частотами  $\omega_3$ ,  $\omega_4$  поворотом на  $2\pi/3$  вокруг оси  $z_4$  (ср. с предыдущей задачей).

Итак, частоты  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  — невырожденные, частоты  $\omega_3$  и  $\omega_4$  — двукратно вырождены.

Заметим, что векторы колебания, антисимметричного относительно оси  $x_4$ , можно получить, зная вектор симметричного. Для этого достаточно взять определенную суперпозицию колебаний, полученных из последнего поворотами вокруг оси  $z_4$  на углы  $\pm 2\pi/3$ , а именно — их разность (см. рис. 134, г).

б) Изменения собственных частот можно определить, используя теорию возмущений (см. задачу 6.34):

$$\delta\omega = -\frac{\omega}{2} \frac{\delta M}{M}.$$

Для полносимметричного колебания в качестве нормальной координаты выберем  $x_1$ . Тогда величины  $M$  и  $\delta M$  определяются как коэффициенты в выражениях кинетической энергии и добавки к ней:

$$\frac{3m}{2} \dot{x}_1^2 = \frac{M}{2} \dot{x}_1^2, \quad \frac{\delta m}{2} \dot{x}_1^2 = \frac{\delta M}{2} \dot{x}_1^2,$$

так что

$$\delta\omega_2 = -\omega_2 \frac{\delta m}{6m}.$$

Для колебания вдоль оси  $z$  кинетическая энергия и добавка к ней равны

$$\frac{3m}{2} \left(1 + \frac{3m}{m_A}\right) \dot{z}_1^2 \quad \text{и} \quad \frac{\delta m}{2} \dot{z}_1^2,$$

так что

$$\delta\omega_1 = -\frac{\omega_1}{2} \frac{m_A \delta m}{3m(3m + m_A)}.$$

Например, для хлорида бора замена одного атома хлора с атомным весом 35 на изотоп с атомным весом 37 уменьшает частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  на 0,1% и 1% соответственно.

**6.51.** Пусть колебание, при котором молекула остается подобной сама себе (рис. 135, *a*), происходит с частотой  $\omega_1$ .

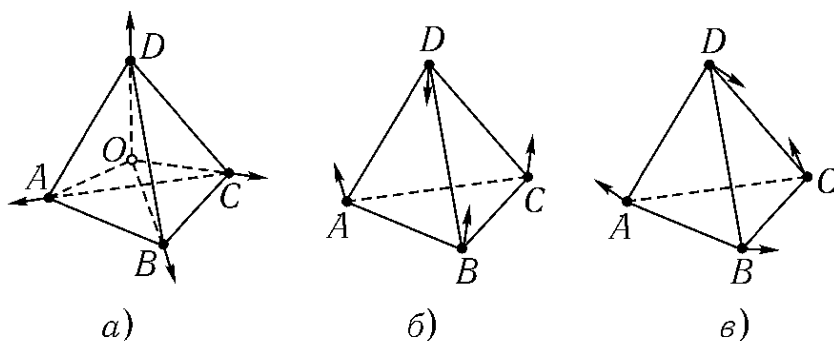


Рис. 135

Частота  $\omega_2$  колебания, сохраняющего свой вид при поворотах вокруг оси  $OD$  на угол  $2\pi/3$  (рис. 135, б), вообще говоря, отлична от  $\omega_1$ . Иное распределение смещений атомов можно получить, производя отражение смещений в плоскости  $BCO$ ; получится колебание, отличающееся от второго лишь тем, что атомы  $A$  и  $D$  поменялись ролями. Частота этого колебания  $\omega_3 = \omega_2$ . Подобным же образом отражение в плоскости  $AOC$  меняет местами атомы  $B$  и  $D$ , сохраняя частоту  $\omega_4 = \omega_2$ . Это четвертое колебание не сводится к суперпозиции предыдущих, так как, в отличие от них, несимметрично относительно плоскости  $AOD$ .

Колебание, симметричное относительно плоскости  $AOB$  и  $DOC$  (рис. 135, в), имеет частоту  $\omega_5$ , отличную от  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Поворот на угол  $2\pi/3$

вокруг оси  $OD$ , равносильный круговой перестановке  $A$ ,  $B$  и  $C$ , приводит к колебанию, симметричному относительно плоскостей  $COA$  и  $DOB$ , а его частота  $\omega_6 = \omega_5$ .

Итак, молекула обладает тремя собственными частотами одно-, дву- и трехкратно вырожденными.

В заключение заметим, что молекул, рассмотренных в задачах 6.49 и 6.51, по-видимому, не существует в природе. Однако подобный же метод исследования может быть применен и к реальным молекулам.

**6.52.** а) При полносимметричных и дважды вырожденных колебаниях, указанных в предыдущей задаче (см. рис. 135, *а, в*), атом углерода остается неподвижным. Есть еще две трехкратно вырожденные частоты. Соответствующие колебания похожи на колебания, изображенные на рис. 135, *б*, только атом углерода колеблется либо в том же направлении, что атом D, либо в противоположном.

б) Добавка к функции Лагранжа, описывающая действие электрического поля  $\mathcal{E}(t)$ , есть

$$\delta L = \mathcal{E}(t) \sum_a e_a \mathbf{u}_a,$$

где  $e_a$  — заряд,  $\mathbf{u}_a$  — смещение  $a$ -го атома.

В любом колебании  $m \sum_{a=1}^4 \mathbf{u}_a + m_C \mathbf{u}_5 = 0$ , так что

$$\sum_{a=1}^5 e_a \mathbf{u}_a = -e_1 \left( \frac{m_C}{m} + 4 \right) \mathbf{u}_5.$$

При полносимметричном и дважды вырожденных колебаниях  $\sum e_a \mathbf{u}_a = 0$  и эти колебания не возбуждаются. При колебании рис. 135, *б*, напротив,  $\sum e_a \mathbf{u}_a \neq 0$  и подобные колебания возбуждаются.

Итак, резонанс возможен на двух частотах.

Вектор  $\mathcal{E}$  можно разложить на три слагаемых  $\mathcal{E}_j$ , параллельных осям симметрии каждого из трех колебаний молекулы с вырожденной частотой. Каждое из слагаемых  $\mathcal{E}_j$  приведет к колебанию атома углерода с амплитудой, пропорциональной  $\mathcal{E}_j$ , и одним и тем же коэффициентом пропорциональности  $\kappa$ . Поэтому  $\mathbf{u}_5 = \kappa \mathcal{E}$  и  $|\mathbf{u}_5|$  не зависит от ориентации молекулы. Можно убедиться, что амплитуды колебаний атомов водорода  $|\mathbf{u}_{1,2,3,4}|$  тоже не зависят от ориентации молекулы и параллельны вектору  $\mathcal{E}$ .

## § 7. Колебания линейных цепочек

### 7.1. Функция Лагранжа системы

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2} \sum_{n=1}^N \dot{x}_n^2 - \frac{k}{2} \left[ x_1^2 + \sum_{n=2}^N (x_n - x_{n-1})^2 + x_N^2 \right], \quad (1)$$

где  $x_n$  — смещение  $n$ -й частицы из положения равновесия. Введем также координату положения равновесия  $n$ -й частицы  $X_n = na$ , где  $a$  — равновесная длина одной пружинки. Система уравнений Лагранжа

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 + k(2x_1 - x_2) = 0, \\ m\ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 2, 3, \dots, N-1, \\ m\ddot{x}_N + k(2x_N - x_{N-1}) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

эквивалентна системе

$$m\ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

при дополнительном условии

$$x_0 = x_{N+1} \equiv 0. \quad (4)$$

Из физических соображений можно предвидеть, что нормальными колебаниями должны быть стоячие волны. Удобнее, однако, выбрать

$$x_n = Ae^{i(\omega t \pm n\varphi)}. \quad (5)$$

При таком выборе система  $N$  уравнений сводится к одному уравнению

$$\omega^2 = 4\frac{k}{m} \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \quad (6)$$

которым определяется связь частоты с разностью фаз колебаний соседних частиц  $\varphi$ . Смысл подстановки (5) заключается в выборе для  $x_n$  решения в виде бегущей волны с волновым вектором  $p = \varphi/a$ , так как  $n\varphi = nar = pX_n$ . Уравнение (6) устанавливает, таким образом, связь между частотой и волновым вектором.

Условиям (4) можно удовлетворить, подбирая суперпозицию бегущих в обе стороны волн  $x_n = Ae^{i(\omega t - n\varphi)} + Be^{i(\omega t + n\varphi)}$ . Условие  $x_0 = 0$  дает  $A = -B$ , или  $x_n = 2iB \sin(n\varphi)e^{i\omega t}$ , т. е. стоячую волну. Из условия на

другом конце  $x_{N+1} = 0$  определяются возможные значения частот («спектр частот»).

Уравнение  $\sin(N+1)\varphi = 0$  приводит к  $N$  независимым решениям

$$\varphi_s = \frac{\pi s}{N+1}, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

В самом деле,  $s = 0, s = N+1$  дают нулевые решения, а для  $s = N+l$  фаза  $\varphi_{N+l} = -\varphi_{N-l+2} + 2\pi$ , т. е. решения, отвечающие  $s = N+l$  выражаются через решения, отвечающие  $s = N-l+2$ .

Из (6) и (7) находим  $N$  различных частот

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\varphi_s}{2} = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\pi s}{2(N+1)}, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (8)$$

На рис. 136 различные частоты укладываются дискретными точками на синусоиду. Вектор нормально-го колебания, отвечающего  $s$ -й частоте,

$$\mathbf{r}_s = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_N \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \begin{pmatrix} \sin \varphi_s \\ \sin 2\varphi_s \\ \dots \\ \sin N\varphi_s \end{pmatrix} q_s(t), \quad (9)$$

где

$$q_s(t) = \operatorname{Re}(2iB_s e^{i\omega_s t}) = C_s \cos(\omega_s t + \alpha_s)$$

—  $s$ -я нормальная координата, а множитель

$$\sqrt{\frac{2}{N+1}} = \left[ \sum_{n=1}^N \sin^2 n\varphi_s \right]^{-1/2}$$

введен для нормировки:  $(\mathbf{r}_s, \mathbf{r}'_s) = \delta_{ss'} q_s^2$ . Общее решение есть суперпозиция всех нормальных колебаний

$$x_n = \sum_{s=1}^N \sqrt{\frac{2}{N+1}} q_s(t) \sin n\varphi_s.$$

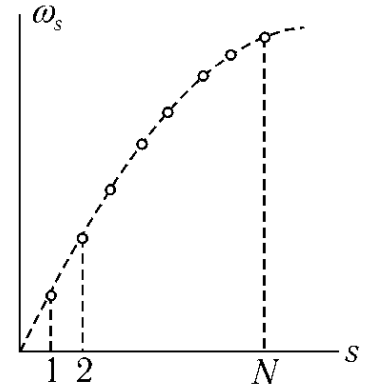


Рис. 136

Матрица перехода от  $x_n$  к  $q_s$

$$U_{ns} = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi ns}{N+1}$$

является ортогональной матрицей, приводящей функцию Лагранжа к диагональному виду, отвечающих набору  $N$  различных осцилляторов:

$$L = \sum_{s=1}^N L_s(q_s, \dot{q}_s), \quad L(q_s, \dot{q}_s) = \frac{m}{2} (\dot{q}_s^2 - \omega_s^2 q_s^2).$$

**7.2 а.** Уравнения движения для данной системы те же, что и уравнения (3) предыдущей задачи, при дополнительном условии  $x_0 = 0$ ,  $x_N = x_{N+1}$ . Поэтому

$$\varphi_s = \frac{(2s-1)\pi}{2N+1}, \quad s = 1, 2, \dots, N,$$

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{(2s-1)\pi}{2(2N+1)},$$

$$x_n = \sum_s \sin n\varphi_s \cdot A_s \cos(\omega_s t + \alpha_s).$$

Частный случай при  $N = 2$  см. в задаче 6.1.

**7.2 б.** В качестве обобщенных координат используем отклонения каждой из частиц от вертикали (ср. с задачей 6.3). В таких переменных задача полностью сводится к задаче 7.2. а) с  $k/m = g/l$ .

**7.3.** Уравнения движения совпадают с уравнениями (3) задачи 7.1 при дополнительном условии  $x_0 = x_N$  и  $x_{N+1} = x_1$ . Поэтому

$$\varphi_s = \frac{2\pi s}{N}, \quad s = 0, 1, \dots, N-1,$$

$$\omega_s = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{s\pi}{N},$$

причем частоты  $\omega_s$  и  $\omega_{N-s}$  совпадают, а соответствующие им волновые векторы отличаются знаком  $\varphi_s = 2\pi - \varphi_{N-s}$ . Частоте  $\omega_0 = 0$  отвечает движение всех частиц по кольцу с постоянной скоростью. В системе возможны колебания вида

$$x_n^{(s)} = \operatorname{Re} A_s e^{i(\omega_s t - n\varphi_s)},$$



т. е. бегущие по кольцу волны. Упомянутое выше двукратное вырождение частот соответствует волнам, бегущим в разные стороны. Наложение двух таких волн с равными амплитудами дает стоячую волну

$$x_n^{(s)} \pm x_n^{(N-s)} = 2|A_s| \begin{cases} \cos n\varphi_s \cos(\omega_s t + \alpha_s), \\ \sin n\varphi_s \sin(\omega_s t + \alpha_s). \end{cases} \quad (2)$$

Это и есть нормальные колебания (все точки движутся в фазе или противофазе).

В соответствующих нормальных координатах

$$x_n = \sum_{s=1}^R (q_{s1} \cos n\varphi_s + q_{s2} \sin n\varphi_s) + q_0, \quad (3)$$

$$R = \frac{N-1}{2}, \quad N - \text{нечетное},$$

функция Лагранжа приводится к диагональному виду:

$$L = \frac{Nm}{2} \left\{ \dot{q}_0^2 + \sum_{s=1}^R [\dot{q}_{s1}^2 + \dot{q}_{s2}^2 - \omega_s^2 (q_{s1}^2 + q_{s2}^2)] \right\}. \quad (4)$$

(Если число частиц четное, то формулы (3), (4) следует несколько видоизменить в связи с тем, что частота  $\omega_{N/2}$  невырожденная; формула (1) при  $s = N/2$  сразу же определяет стоячую волну.)

Интересно заметить, что повороты в плоскостях  $q_{s1}, q_{s2}$ :

$$q_{s1} = q'_{s1} \cos \beta_s - q'_{s2} \sin \beta_s,$$

$$q_{s2} = q'_{s1} \sin \beta_s + q'_{s2} \cos \beta_s,$$

сохраняющие вид функции Лагранжа (4), соответствуют смещению узлов стоячих волн:

$$x_n = q_0 + \sum_{s=1}^R [q'_{s1} \cos(n\varphi_s - \beta_s) + q'_{s2} \sin(n\varphi_s - \beta_s)].$$

Для бегущих волн (1) средний поток энергии по кольцу (см. задачу 6.9)<sup>1</sup>

$$S_{\text{ср}} = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} k(x_{n-1} - x_n) \dot{x}_n dt = \frac{1}{2} k |A|^2 \omega \sin \varphi,$$

<sup>1</sup>Ниже для краткости мы всюду опускаем индекс  $s$ . Вычисление потока  $S_{\text{ср}}$  и энергии  $E$  удобно производить в комплексной форме, воспользовавшись формулами из [2], § 48.

а групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \frac{d\omega}{dp} = \sqrt{\frac{k}{m}} a \cos \frac{\varphi}{2},$$

где  $a$  — равновесная длина одной пружинки,  $p = \varphi/a$  — волновой вектор. Энергия

$$E = \frac{m}{2} \sum_{n=1}^N \dot{x}_n^2 + \frac{k}{2} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n-1})^2 = 2N|A|^2 k \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} N m \omega^2 |A|^2.$$

и потому

$$\frac{E}{Na} v_{\text{гр}} = S_{\text{ср}}.$$

#### 7.4. а) Уравнения движения

$$\begin{cases} m\ddot{x}_{2n-1} + k(2x_{2n-1} - x_{2n-2} - x_{2n}) = 0, \\ M\ddot{x}_{2n} + k(2x_{2n} - x_{2n-1} - x_{2n+1}) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

причем  $x_0 = x_{2N+1} = 0$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ .

Ищем решение в виде бегущих волн разной амплитуды

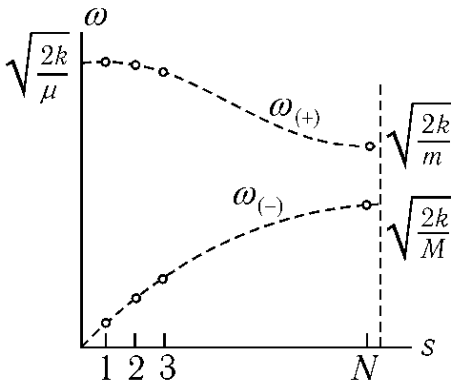


Рис. 137

$$\begin{aligned} x_{2n-1} &= A e^{i[\omega t \pm (2n-1)\varphi]}, \\ x_{2n} &= B e^{i[\omega t \pm 2n\varphi]}. \end{aligned} \quad (2)$$

Для определения  $A$  и  $B$  получаем систему однородных уравнений

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + 2k)A - k(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})B &= 0, \\ -k(e^{-i\varphi} + e^{i\varphi})A + (-M\omega^2 + 2k)B &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

имеющих нетривиальные решения, только если детерминант обращается в нуль. Это условие определяет связь частоты с разностью фаз колебаний соседних частиц

$$\omega_{(\mp)}^2 = \frac{k}{\mu} \left( 1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\mu^2}{mM} \sin^2 \varphi} \right), \quad \mu = \frac{mM}{m+M}. \quad (4)$$

Дополнительным условиям удовлетворяют только определенные линейные комбинации бегущих волн (2), а именно:

$$\begin{aligned}x_{2n-1} &= A_s \sin(2n-1)\varphi_s \cos(\omega_s t + \alpha_s), \\x_{2n} &= B_s \sin 2n\varphi_s \cos(\omega_s t + \alpha_s),\end{aligned}$$

у которых  $\varphi_s = \frac{\pi s}{2N+1}$ . Так как  $\varphi_{2N+1-s} = \pi - \varphi_s$ , то различные частоты при выборе определенного знака в (4) мы получим лишь для  $s = 1, 2, \dots, N$ . На рис. 137 (для случая  $M > m$ ) они укладываются дискретными точками на две различные кривые, одну из них ( $\omega_{(-)}$ ) принято называть акустической, другую ( $\omega_{(+)}$ ) оптической.

Общее решение имеет вид

$$\begin{aligned}x_{2n-1} &= \sum_{s=1}^N \sin(2n-1)\varphi_s [A_{(+ )s} \cos(\omega_{(+ )s} t + \alpha_s) + A_{(- )s} \cos(\omega_{(- )s} t + \beta_s)], \\x_{2n} &= \sum_{s=1}^N \sin 2n\varphi_s [B_{(+ )s} \cos(\omega_{(+ )s} t + \alpha_s) + B_{(- )s} \cos(\omega_{(- )s} t + \beta_s)],\end{aligned}$$

где  $A_{(\pm)s}$  и  $B_{(\pm)s}$  связаны, согласно (3), соотношением

$$B_{(\pm)s} = \frac{2k - m\omega_{(\pm)s}^2}{2k \cos \varphi_s} A_{(\pm)s}.$$

Замечательно, что  $B_{(-)s}$  и  $A_{(-)s}$ , отвечающие акустическим частотам, имеют одинаковые знаки, а  $B_{(+ )s}$  и  $A_{(+ )s}$  для оптических частот имеют противоположные знаки (т. е. соседние частицы с массами  $m$  и  $M$  колеблются в противофазе). Распределение амплитуд колебаний для случая  $N = 8$ ,  $s = 2$  показано на рис. 138, где на оси ординат отложены номера частиц, а на оси абсцисс — соответствующие им амплитуды ( $a$  — для акустических и  $b$  — для оптических колебаний).

Каким образом можно получить из результатов данной задачи предельный случай  $m = M$  (см. задачу 7.1)?

б) Нормальные колебания

$$\begin{aligned}x_{2n}^{(s)} &= A_s \sin 2n\varphi_s \cos(\omega_s t + \alpha_s), \\x_{2n-1}^{(s)} &= A_s \frac{K \sin 2n\varphi_s + k \sin(2n-2)\varphi_s}{k + K - m\omega_s^2} \cos(\omega_s t + \alpha_s),\end{aligned}$$

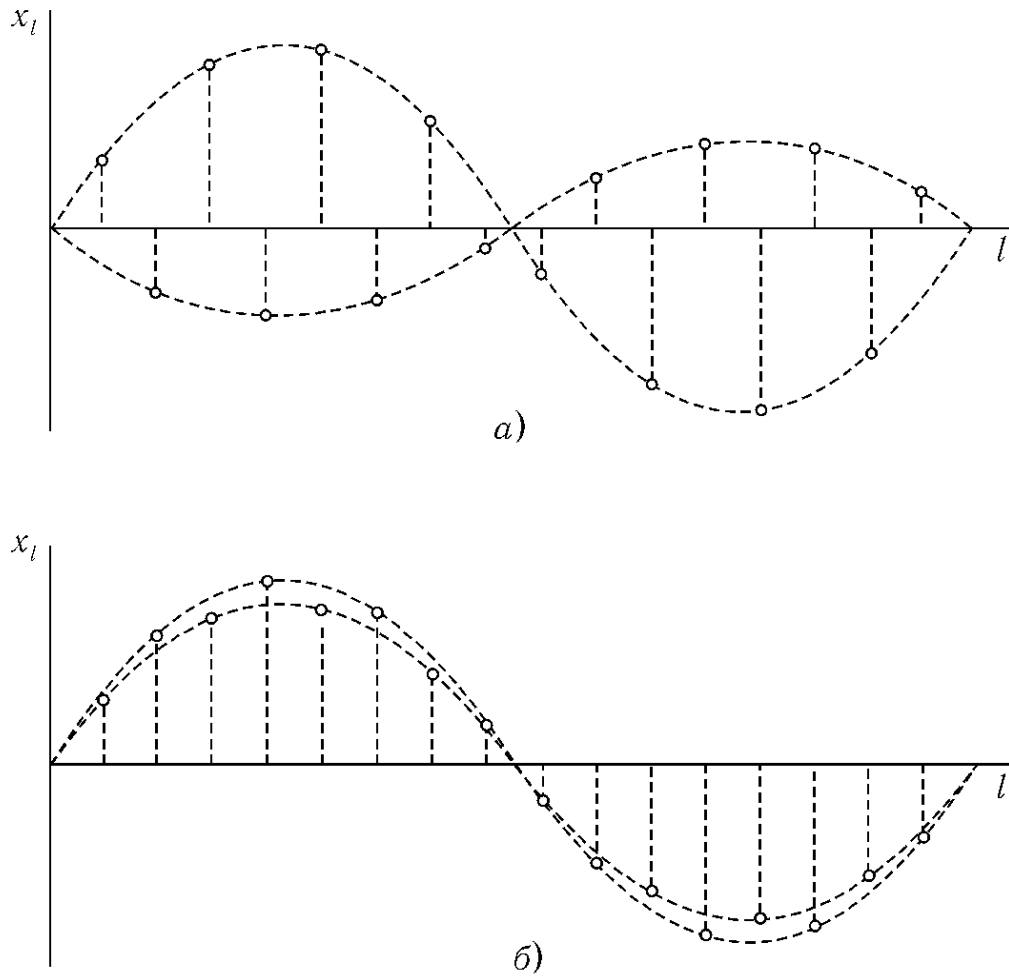


Рис. 138

где

$$\omega_s^2 = \frac{1}{m} [K + k \mp \sqrt{(K - k)^2 + 4Kk \cos^2 \varphi_s}],$$

а  $\varphi_s$  определяется из уравнения

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(2N + 1)\varphi_s &= -\frac{K - k}{K + k} \operatorname{tg} \varphi_s, \quad s = 1, 2, \dots, N, \\ 0 < \varphi_s &< \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Кривые для оптической и акустической ветвей частот представлены на рис. 139, а (при  $K > k$ ).

Как совершить переход к предельному случаю  $K = k$ ?

в) Величина  $\varphi_s = \frac{\pi s}{2(N + 1)}$ ; для  $s = 1, 2, \dots, N$  получаем  $2N$  нормальных колебаний и собственных частот, имеющих тот же вид, что и в

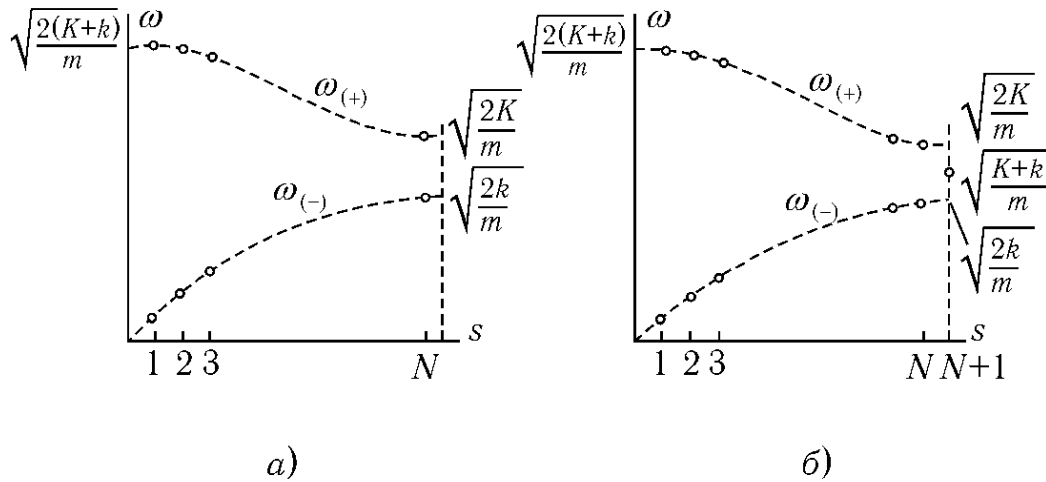


Рис. 139

пункте б) (рис. 139, б). Как найти недостающее и самое интересное нормальное колебание  $x_{2n} = 0$ ,  $x_{2n-1}K = -x_{2n+1}k$ , частота которого  $\omega_0^2 = \frac{K+k}{m}$  лежит в «запрещенной зоне» между оптической и акустической ветвями?

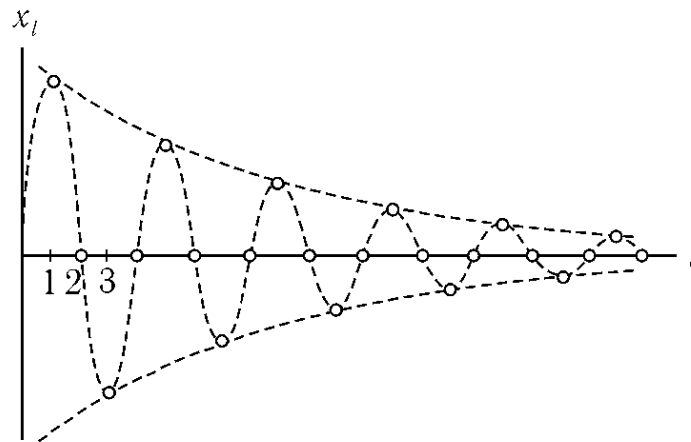


Рис. 140

Распределение амплитуд этого колебания показано на рис. 140, где на оси абсцисс отложены номера частиц, а на оси ординат — соответствующие им амплитуды колебаний. Частицы, имеющие четные номера, неподвижны, а соседние частицы с нечетными номерами колеблются в противофазе с амплитудами, экспоненциально затухающими при удалении от левого конца цепочки («поверхностный фонон»).

## 7.5. а) Решение уравнений движения

$$m\ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

(дополнительные условия  $x_0 = 0$ ,  $x_{N+1} = a \cos \gamma t$ ) ищем в виде стоячих волн  $x_n = A \sin n\varphi \cos \gamma t$  так, чтобы сразу удовлетворить первому дополнительному условию. Тогда из второго условия находим константу  $A = a / \sin(N+1)\varphi$ , а из уравнении (1) — «волновой вектор»  $\varphi$  стоячей волны

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{m\gamma^2}{4k}.$$

При  $\gamma^2 < \frac{4k}{m}$  установившиеся колебания

$$x_n = a \frac{\sin n\varphi}{\sin(N+1)\varphi} \cos \gamma t \quad (2)$$

имеют большую амплитуду, если знаменатель  $\sin(N+1)\varphi$  близок к нулю. Но именно это условие и определяет спектр собственных частот  $\omega_s$  (см. задачу 7.1), т.е. при этом мы имеем случай, близкий к резонансу,  $\gamma \approx \omega_s$ . При  $\gamma \ll \omega_1 = 2\sqrt{\frac{k}{m}} \sin \frac{\pi}{2(N+1)}$  колебания (2) соответствуют медленному растяжению и сжатию всех пружинок как целого;

$$x_n = a \frac{n}{N+1} \cos \gamma t.$$

Если  $\gamma^2 > \frac{4k}{m}$ , то, сделав в (2) замену  $\varphi = \pi - i\psi$ , получаем

$$x_n = (-1)^{N+1+n} a \frac{\operatorname{sh} n\psi}{\operatorname{sh}(N+1)\psi} \cos \gamma t,$$

где  $\operatorname{ch}^2 \frac{\psi}{2} = \frac{m\gamma^2}{4k}$ . Амплитуды колебаний частиц убывают (при  $n\psi \gg 1$  — экспоненциально) к левому концу цепочки. Естественность этого результата особенно очевидна для  $\gamma^2 \gg \frac{4k}{m}$ , когда частота вынуждающей силы лежит гораздо выше спектра нормальных частот. В этом случае крайняя правая частица колеблется с малой амплитудой в противофазе с вынуждающей силой, а  $(N-1)$ -я частица в первом приближении покоится. Затем можно

движение  $(N - 1)$ -й частицы рассматривать как вынужденное колебание, вызванное вынуждающей силой большой частоты со стороны  $N$ -й частицы, и т. д.

Отметим, что в явлениях полного внутреннего отражения имеет место аналогичное затухание волны (например, при отражении коротких радиоволн от ионосферы).

Какой вид имеет установившееся колебание при  $\gamma^2 = \frac{4k}{m}$ ?

$$\text{б) } x_n = a \frac{\cos(N - n + 1/2)\varphi}{\cos(N + 1/2)\varphi} \cos \gamma t,$$

$$\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{m\gamma^2}{4k} \quad \text{при} \quad \gamma^2 < \frac{4k}{m},$$

$$x_n = (-1)^n a \frac{\text{sh}(N - n + 1/2)\psi}{\text{sh}(N + 1/2)\psi} \cos \gamma t,$$

$$\text{ch}^2 \frac{\psi}{2} = \frac{m\gamma^2}{4k} \quad \text{при} \quad \gamma^2 > \frac{4k}{m}.$$

**7.6.** Если частота вынуждающей силы лежит в области акустических собственных частот  $0 < \gamma^2 < \frac{2k}{M}$  или в области оптических собственных частот  $\frac{2k}{m} < \gamma^2 < \frac{2k}{\mu}$  (см. задачу 7.4 а), то установившиеся колебания

$$x_{2n-1} = a \frac{\sin(2n-1)\varphi}{\sin(2n+1)\varphi} \cos \gamma t,$$

$$x_{2n} = \pm \sqrt{\frac{2k - m\gamma^2}{2k - M\gamma^2}} a \frac{\sin 2n\varphi}{\sin(2N+1)\varphi} \cos \gamma t,$$

где  $\cos^2 \varphi = \frac{(2k - M\gamma^2)(2k - m\gamma^2)}{4k^2}$ , а верхний (нижний) знак отвечает частоте  $\gamma$ , лежащей в области акустических (оптических) собственных частот.

Для частот  $\frac{2k}{M} < \gamma^2 < \frac{2k}{m}$ , лежащих в «запрещенной зоне»,

$$x_{2n-1} = (-1)^{N+n} a \frac{\operatorname{ch}(2n-1)\psi}{\operatorname{ch}(2N+1)\psi} \cos \gamma t,$$

$$x_{2n} = (-1)^{N+n} a \sqrt{\frac{2k - m\gamma^2}{M\gamma^2 - 2k}} \frac{\operatorname{sh} 2n\psi}{\operatorname{ch}(2N+1)\psi} \cos \gamma t,$$

$$\operatorname{sh}^2 \psi = \frac{(2k - m\gamma^2)(M\gamma^2 - 2k)}{4k^2},$$

и для частот  $\gamma^2 > \frac{2k}{\mu}$ , лежащих выше границы оптической ветви,

$$x_{2n-1} = a \frac{\operatorname{sh}(2n-1)\chi}{\operatorname{sh}(2N+1)\chi} \cos \gamma t,$$

$$x_{2n} = -a \sqrt{\frac{2k - m\gamma^2}{2k - M\gamma^2}} \frac{\operatorname{sh} 2n\chi}{\operatorname{sh}(2N+1)\chi} \cos \gamma t,$$

$$\operatorname{ch}^2 \chi = \frac{(M\gamma^2 - 2k)(m\gamma^2 - 2k)}{4k^2},$$

колебания затухают к левому концу цепочки.

### 7.7. а) Решение уравнений движения

$$m\ddot{x}_n + k(2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (1)$$

$$m_N\ddot{x}_N + k(2x_N - x_{N-1}) = 0 \quad (2)$$

(дополнительное условие  $x_0 = 0$ ) ищем в виде стоячих волн:

$$\begin{aligned} x_n &= A \sin n\varphi \cos(\omega t + \alpha), \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \\ x_N &= B \cos(\omega t + \alpha). \end{aligned} \quad (3)$$

Из (1) находим связь

$$\frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\varphi}{2} = \omega^2. \quad (4)$$

Из уравнений (1) и (2), с учетом (3) и (4), получаем систему

$$A \sin N\varphi - B = 0.$$

$$-A \sin(N-1)\varphi + \left(-\frac{2m_N}{m} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + 2\right) B = 0.$$



Отсюда  $B = A \sin N\varphi$ , а параметр  $\varphi$  определяется как решение трансцендентного уравнения

$$\sin N\varphi \left( \frac{4m_N}{m} \sin^2 \frac{\varphi}{2} - 2 + \cos \varphi \right) = \cos N\varphi \sin \varphi. \quad (5)$$

При  $m_N \gg m$ , кроме очевидных нормальных колебаний, когда частица  $m_N$  почти неподвижна ( $\sin N\varphi_s \ll 1$ ),

$$x_n^{(s)} = A_s \sin n\varphi_s \cos(\omega_s t + \alpha_s), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

$$\operatorname{tg} N\varphi_s \approx \frac{m}{2m_N} \operatorname{ctg} \frac{\varphi_s}{2}, \quad s = 1, 2, \dots, N-1,$$

имеется нормальное колебание, при котором амплитуды частиц линейно убывают к левому концу цепочки,

$$x_n^{(N)} = B \frac{n}{N} \cos(\omega_N t + \alpha_N), \quad \omega_N^2 = \frac{k}{m_N} \left( 1 + \frac{1}{N} \right).$$

Частица  $m_N$  при этом колеблется между пружинками жесткости  $k$  (справа) и жесткости  $k/N$  (слева). Тот факт, что уравнение (5) имеет подобное решение, устанавливается следующим рассуждением. Предполагая  $\varphi$  малым и сохраняя лишь главные члены, получим из (5)  $\varphi^2 = \frac{m}{m_N} \left( 1 + \frac{1}{N} \right)$  в полном согласии со сделанным предположением.

При  $m_N \ll m$  имеются обычные колебания, характерные для системы из  $(N-1)$ -й частицы с пружинкой жесткостью  $k/2$  на правом конце (параметр  $\varphi_s$  и частоты  $\omega_s$  определяются из уравнения  $\operatorname{tg} N\varphi = -\frac{\sin \varphi}{2 - \cos \varphi}$ ). Кроме них, существует нормальное колебание, при котором амплитуды частиц убывают к левому концу цепочки

$$x_n^{(N)} = (-1)^{N+n} B \frac{\operatorname{sh} n\psi}{\operatorname{sh} N\psi} \cos(\omega_N t + \alpha_N),$$

$$\operatorname{ch}^2 \frac{\psi}{2} = \frac{m}{2m_N} \gg 1, \quad \omega_N^2 = \frac{2k}{m_N}.$$

Формально значение параметра  $\psi$  можно получить из уравнения (5), сделав замену  $\varphi = \pi - i\psi$  и предполагая  $\psi$  большим. Это нормальное колебание можно рассматривать в первом приближении как простое колебание частицы малой массы при покоящихся остальных частицах, а затем рассмотреть

движение остальных частиц как вынужденные колебания под действием высокочастотной силы  $kx_N = kB \cos(\omega_N t + \alpha_N)$ , приложенной к правому концу цепочки из  $N - 1$  одинаковых частиц (см. задачу 7.5 а).

б) При  $k_{N+1} \ll k$  решение совпадает с решением задачи 7.2. При  $k_{N+1} \gg k$  имеются нормальные колебания, при которых  $N$ -я частица почти неподвижна:

$$x_n^{(s)} = A_s \sin n\varphi_s \cos(\omega_s t + \alpha_s), \quad \omega_s^2 = \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\varphi_s}{2},$$

$$\varphi_s \approx \frac{s\pi}{N}, \quad s = 1, 2, \dots, N - 1.$$

Параметр  $\varphi_s$  определяется из уравнения

$$\left(2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{k_{N+1}}{k}\right) \sin N\varphi = \cos N\varphi \sin \varphi, \quad (6)$$

которое в рассматриваемом приближении имеет вид

$$\operatorname{tg} N\varphi = -\frac{k}{k_{N+1}} \sin \varphi.$$

Уравнение (6) допускает еще одно решение, которое можно получить, положив  $\varphi = \pi - i\psi$  и предполагая  $\psi$  большим. В этом случае имеем

$$x_n^{(N)} = (-1)^{N+1} B_N \frac{\operatorname{sh} n\psi}{\operatorname{sh} N\psi} \cos(\omega_N t + \alpha_N),$$

$$\operatorname{ch}^2 \frac{\psi}{2} = \frac{k_{N+1}}{4k}, \quad \omega_N^2 = \frac{k_{N+1}}{m},$$

т. е. амплитуды частиц убывают к левому концу цепочки.

Каким образом можно получить это последнее колебание, используя результаты задачи 7.5?

**7.8.** Пусть  $\varphi_n$  — угол отклонения  $n$ -го маятника от вертикали.

а)  $s$ -е нормальное колебание

$$\varphi_n = A_s \cos\left(n - \frac{1}{2}\right) \psi_s \cdot \cos(\omega_s t + \alpha_s),$$

где спектр частот (рис. 141) начинается со значения  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ :

$$\omega_s^2 = \frac{g}{l} + \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\psi_s}{2},$$

$$\psi_s = \frac{\pi s}{N}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

б) В области собственных частот системы  $\omega_0 < \gamma < \sqrt{\omega_0^2 + 4k/m}$  вынужденные колебания

$$\varphi_n = \frac{F \cos[(n - \frac{1}{2})\psi]}{2kl \sin N\psi \sin \frac{\psi}{2}} \sin \gamma t;$$

$$\gamma^2 = \frac{g}{l} + \frac{4k}{m} \sin^2 \frac{\psi}{2}, \quad 0 < \psi < \pi.$$

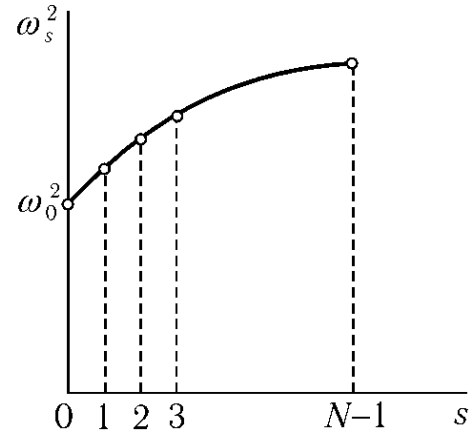


Рис. 141

При  $\gamma \rightarrow \omega_s$  возникают резонансы, так как  $\sin N\psi \rightarrow \sin N\psi_s \rightarrow 0$ .

В области малых частот  $\gamma < \omega_0$  все маятники колеблются в одной фазе

$$\varphi_n = \frac{F \operatorname{ch}(n - \frac{1}{2})\chi}{2kl \sin N\chi \operatorname{sh} \frac{\chi}{2}} \sin \gamma t; \quad \gamma^2 = \frac{g}{l} - \frac{4k}{m} \operatorname{sh}^2 \frac{\chi}{2} > 0.$$

Если при этом жесткость пружин мала

$$\frac{k}{m(\omega_0^2 - \gamma^2)} = \varepsilon \ll 1,$$

то амплитуды колебаний быстро убывают к левому концу

$$\varphi_n = \varphi_N \varepsilon^{N-n}.$$

В области высоких частот  $\gamma > \sqrt{\omega_0^2 + 4k/m}$  соседние маятники колеблются в противофазе

$$\varphi_n = \frac{(-1)^{N-n} F \operatorname{sh}(n - \frac{1}{2})\chi}{2kl \operatorname{sh} N\chi \operatorname{ch} \frac{\chi}{2}} \sin \gamma t, \quad \gamma^2 = \frac{g}{l} + \frac{4k}{m} \operatorname{ch}^2 \frac{\chi}{2}.$$

При очень высокой частоте  $m\gamma^2/k \gg 1$  амплитуды колебаний также быстро убывают к левому концу

$$\varphi_n = \left(-\frac{k}{m\gamma^2}\right)^{N-n} \varphi_N.$$

в) Ясно, что при  $b - a = 0$  все маятники (в линейном приближении) колеблются независимо друг от друга с частотой  $\omega_0 = \sqrt{g/l}$ .

С ростом параметра  $b - a$  пружинки сначала ослабляют возвращающую в положение равновесия силу тяжести, а затем начинают «расталкивать» соседние маятники, так что малые колебания маятников вблизи вертикали становятся неустойчивыми.

Функция Лагранжа системы

$$L = \frac{1}{2}ml^2 \sum_{n=1}^{2N} \dot{\varphi}_n^2 - U, \quad U = \sum_{n=1}^{2N} \left( -mgl \cos \varphi_n + \frac{kr_n^2}{2} \right),$$

где удлинение  $n$ -й пружинки (принимая  $l|\Delta_n| \ll a$ )

$$r_n = \sqrt{a^2 + 4l^2 \sin^2 \frac{\Delta_n}{2}} - b \approx a - b + \frac{l^2}{2a} \Delta_n^2 - \frac{l^2(a^2 + 3l^2)}{24a^3} \Delta_n^4,$$

$$\Delta_n = \varphi_n - \varphi_{n+1}.$$

С точностью до членов  $\varphi_n^4$  включительно

$$U = \frac{1}{2}mgl \sum_n \left( \varphi_n^2 - \alpha \Delta_n^2 - \frac{1}{12} \varphi_n^4 + \beta \Delta_n^4 \right) + \text{const},$$

$$\alpha = \frac{(b-a)kl}{amg}, \quad \beta = \frac{1}{12} \alpha + \frac{kbl^3}{4mga^3}. \quad (1)$$

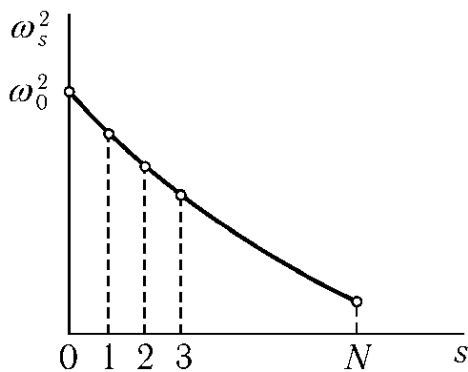


Рис. 142

Уравнения движения в линейном по  $\varphi_n$  приближении

$$\ddot{\varphi}_n + \frac{g}{l} [\varphi_n - \alpha(2\varphi_n - \varphi_{n+1} - \varphi_{n-1})] = 0$$

имеют решения в виде бегущих волн

$$\varphi_n = Ae^{i(\omega t \pm n\psi)} \quad (2)$$

с частотами (см. рис. 142)

$$\omega_s^2 = \frac{g}{l} \left( 1 - 4\alpha \sin^2 \frac{\psi_s}{2} \right),$$

$$\psi_s = \frac{\pi s}{N}, \quad s = 0, 1, \dots, N,$$

причем частоты  $\omega_0$  и  $\omega_N$  невырождены, а остальные частоты двукратно вырождены.

Отсюда видно, что при

$$4\alpha - 1 > 0, \quad \text{или} \quad b - a > \frac{mga}{4kl}, \quad (3)$$

колебания неустойчивы — некоторые  $\omega_s^2$  становятся отрицательными. Раньше всех обращается в нуль частота  $\omega_N$ . Ей соответствует  $\psi_N = \pi$ , т. е. нормальное колебание типа «гармошки», при котором соседние частицы колеблются в противофазе:  $\varphi_n = -\varphi_{n-1}$ . Естественно поэтому и новое положение равновесия  $\varphi_{n0}$  искать в виде «гармошки»:

$$\varphi_{10} = -\varphi_{20} = \varphi_{30} = -\varphi_{40} = \dots = -\varphi_{2N0} = \varphi. \quad (4)$$

Значение  $\varphi$  найдем из условия равновесия  $\frac{\partial U}{\partial \varphi_n} = 0$  или

$$\varphi_n - \alpha(2\varphi_n - \varphi_{n+1} - \varphi_{n-1}) - \frac{1}{6}\varphi_n^3 + 2\beta(\varphi_n - \varphi_{n+1})^3 + 2\beta(\varphi_n - \varphi_{n-1})^3 = 0, \quad (5)$$

что дает

$$\varphi = \pm \sqrt{\frac{6(4\alpha - 1)}{192\beta - 1}}.$$

Рассмотрим теперь малые колебания вблизи нового положения равновесия (4). Введем малые смещения

$$x_n = \varphi_n - \varphi_{n0},$$

тогда с точностью до  $x_n^2$  включительно потенциальная энергия (1) равна

$$U = \frac{1}{2}mgl \sum_n \left[ \left(1 - \frac{1}{2}\varphi^2\right)x_n^2 - (\alpha - 24\beta\varphi^2)(x_n - x_{n+1})^2 \right] + \text{const.} \quad (6)$$

Сравнивая (1) и (6), легко увидеть, что  $x_n$  имеет решение такого же вида, как и  $\varphi_n$  (2) с частотами

$$\omega_s^2 = \frac{g}{l} \left[ 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 - 4(\alpha - 24\beta\varphi^2) \sin^2 \frac{\psi_s}{2} \right].$$

Однако теперь для малых  $\varphi^2 < \frac{\alpha}{24\beta} < \frac{1}{2}$  все  $\omega_s^2$  положительны (см. (3)):

$$\omega_s^2 > \frac{g}{l} \left[ 1 - \frac{\varphi^2}{2} - 4(\alpha - 24\beta\varphi^2) \right] = \frac{2g}{l}(4\alpha - 1) > 0,$$

т. е. малые колебания вблизи нового положения равновесия (4) устойчивы.

Таким образом, с ростом параметра  $\alpha$  первоначальная конфигурация вертикальных маятников сменяется «гармошкой». Такое изменение симметрии подобно изменению симметрии термодинамических систем при фазовых переходах второго рода. Аналогом  $\alpha$  при этом является внешний параметр типа температуры, магнитного поля и т. д. (см., например, [23]).

Конечно, уравнение (5) может иметь и другие ненулевые решения, кроме найденного (4). Например, ему удовлетворяет значение  $\varphi_n = \sqrt{6}$ , которое, однако, не является физическим, так как отвечает большим углам отклонения, а само разложение (1) справедливо лишь при малых  $\varphi$ .

**7.9.** а) Ток в  $n$ -й катушке обозначим  $\dot{q}_n$ . Функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N [\mathcal{L} \dot{q}_n^2 - \frac{1}{C} (q_n - q_{n+1})^2] + \frac{1}{2} \mathcal{L}_0 \dot{q}_{N+1}^2 + U q_1 \cos \gamma t$$

(ток через цепочку  $Z$  обозначен  $\dot{q}_{N+1}$ ). Сопротивление  $R$  можно ввести в уравнения движения с помощью диссипативной функции

$$F = \frac{1}{2} R \dot{q}_{N+1}^2.$$

Уравнения движения

$$\mathcal{L} \ddot{q}_1 + \frac{1}{C} (q_1 - q_2) = U \cos \gamma t, \quad (1)$$

$$\mathcal{L} \ddot{q}_n + \frac{1}{C} (2q_n - q_{n-1} - q_{n+1}) = 0, \quad n = 2, 3, \dots, N, \quad (2)$$

$$\mathcal{L}_0 \ddot{q}_{N+1} + \frac{1}{C} (q_{N+1} - q_N) = R \dot{q}_{N+1}. \quad (3)$$

Решение ищем в виде

$$q_n = \operatorname{Re}(A e^{i\gamma t - in\varphi}),$$

причем можем считать, не ограничивая общности, что  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . Из (2), (3) получаем

$$\gamma^2 = \frac{4}{\mathcal{L}C} \sin^2(\varphi/2), \quad (4)$$

$$-\gamma^2 \mathcal{L}_0 + \frac{1}{C} (1 - e^{-i\varphi}) = i\gamma R. \quad (5)$$

Отсюда

$$R = \frac{\sin \varphi}{\gamma} C, \quad \mathcal{L}_0 = \frac{1 - \cos \varphi}{C} \gamma^2 = \frac{\mathcal{L}}{2}.$$

Поскольку  $R > 0$ , должно быть  $\varphi > 0$  — волна бежит в сторону  $\mathcal{L}R$ -цепочки. Амплитуда может быть определена из уравнения (1).

При  $\gamma^2 > \mathcal{L}C/4$  распространение бегущих волн по искусственной линии невозможно (ср. с задачей 7.5 а).

б) Уравнения движения

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 \ddot{q}_{2n-1} + \frac{1}{C} (2q_{2n-1} - q_{2n-2} - q_{2n}) &= 0, \quad n = 2, 3, \dots, N, \\ \mathcal{L}_2 \ddot{q}_{2n} + \frac{1}{C} (2q_{2n} - q_{2n-1} - q_{2n+1}) &= 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (6)$$

с точностью до обозначений совпадают с уравнениями (1) в задаче 7.4. Кроме того,

$$\mathcal{L}_1 \ddot{q}_n + \frac{1}{C} (q_1 - q_2) = U \cos \gamma t, \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_0 \ddot{q}_{2N+1} + \frac{1}{C} (q_{2N+1} - q_{2N}) = -R \dot{q}_{2N+1}. \quad (8)$$

Решение ищем в виде

$$\begin{aligned} q_{2n-1} &= A e^{i\gamma t - i(2n-1)\varphi}, \\ q_{2n} &= B e^{i\gamma t - i2n\varphi}. \end{aligned} \quad (9)$$

Не ограничивая общности, считаем  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . Из (6)

$$\begin{aligned} (1 - \gamma^2/\gamma_1^2)A - \cos \varphi \cdot B &= 0, \\ \cos \varphi \cdot A - (1 - \gamma^2/\gamma_2^2)B &= 0, \\ \gamma_{1,2}^2 &= \frac{2}{\mathcal{L}_{1,2}C}, \end{aligned} \quad (10)$$

откуда

$$\cos^2 \varphi = (1 - \gamma^2/\gamma_1^2)(1 - \gamma^2/\gamma_2^2).$$

Пусть, например,  $\gamma_1 < \gamma_2$ . Условия  $0 \leq \cos^2 \varphi \leq 1$  выполняются при  $0 \leq \gamma \leq \gamma_1$  (область «акустических» волн, ср. с задачей 7.4) и при  $\gamma_2 \leq \gamma \leq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$  (область «оптических» волн). Вне этой области распространение бегущих волн невозможно (ср. с задачей 7.6).

Из формулы (8)

$$R + i\gamma\mathcal{L}_0 = \frac{i}{\gamma C} - \frac{i}{\gamma C} \frac{B}{A} e^{i\varphi} = \frac{i}{\gamma C} \left(1 - \frac{B}{A} \cos \gamma\right) + \frac{B}{A} \frac{\sin \varphi}{\gamma C}. \quad (11)$$

Здесь должно быть  $\frac{B}{A} \sin \varphi > 0$ . В области  $\gamma \leq \gamma_1$  амплитуды  $A$  и  $B$  имеют одинаковые знаки, так что  $\varphi > 0$ . В области  $\gamma_2 \leq \gamma \leq \sqrt{\gamma_1^2 + \gamma_2^2}$ , наоборот,  $B/A < 0$  и  $\varphi < 0$ . Подставив в (11) значения  $B/A$ ,  $\cos \varphi$  и  $\sin \varphi$ , получаем окончательно

$$R = \sqrt{\frac{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2}{2C} \left(1 - \frac{\mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 C}{\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2} \cdot \frac{\gamma^2}{2}\right) \frac{2 - \mathcal{L}_1 C \gamma^2}{2 - \mathcal{L}_2 C \gamma^2}}, \mathcal{L}_0 = \frac{\mathcal{L}_1}{2}.$$

Отрицательное значение  $\varphi$  в области «оптических» колебаний означает, что фазовая скорость бегущей по линии волны направлена от  $Z$ -цепочки к источнику напряжения. Групповая же скорость, определяющая поток энергии (ср. с задачей 7.3), естественно, имеет противоположное направление (см., например, рис. 137, где  $v_{\text{гр}} \sim \frac{d\omega(+)}{ds} < 0$ ).

**7.10.** Уравнения колебаний дискретной системы (см. формулу (3) задачи 7.1) преобразуем к виду

$$\ddot{x}_n - ka \frac{a}{m} \left( \frac{x_{n+1} - x_n}{a} - \frac{x_n - x_{n-1}}{a} \right) \frac{1}{a} = 0. \quad (1)$$

Величина  $\frac{m}{a} = \frac{Nm}{Na}$  в пределе имеет смысл линейной плотности стержня  $\rho$ . Относительное удлинение отрезка  $a$ , т. е. величина  $\frac{x_n - x_{n-1}}{a}$ , пропорционально действующей на него силе  $F = ka \frac{x_n - x_{n-1}}{a}$ , поэтому в пределе  $ka$  имеет смысл модуля упругости стержня  $\kappa$ . Таким образом, уравнение (1) в пределе переходит в волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial \xi^2} = 0, \quad (2)$$

где  $v = \sqrt{\kappa/\rho}$  имеет смысл фазовой скорости волны.



Вместо системы  $N$  обыкновенных дифференциальных уравнений мы получили одно уравнение в частных производных (ср. с задачей 4.29).

Отметим, что для данного вывода необходимо важное предположение о том, что функция  $x_n(t)$  стремится к определенному пределу  $x(\xi, t)$ , являющемуся достаточно гладкой функцией.

**7.11.** При малых  $a$  можно приближенно представить смещения в виде  $x_n = x(\xi, t)$ ,  $x_{n\pm 1} = x(\xi \pm a, t) = x(\xi, t) \pm a \frac{\partial x(\xi, t)}{\partial \xi} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 x(\xi, t)}{\partial \xi^2} \pm \frac{a^3}{6} \frac{\partial^3 x(\xi, t)}{\partial \xi^3} + \dots$ . При этом уравнение (2) задачи 7.10 переходит в уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{\kappa}{\rho} \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} - \frac{\kappa a^2}{12\rho} \frac{\partial^4 x}{\partial \xi^4} = 0.$$

В то время, как каждое из уравнений (1) задачи 7.10 содержит смещения трех соседних точек (дальнодействие), уравнение (1) содержит лишь смещение  $x$  в данной точке  $\xi$  (близкодействие). Член  $-\frac{\kappa a^2}{12\rho} \frac{\partial^4 x}{\partial \xi^4}$  в уравнении (1) соответствует приближенному учету дальнодействия.

Подробнее об учете пространственной дисперсии и исследовании уравнения (1) см. [19], гл. 4, § 4.

## § 8. Нелинейные колебания

### 8.1. а) Уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\beta x^3 \quad (1)$$

решаем методом последовательных приближений (ср. с задачей 6.34):

$$x = x_0 + \delta x = A e^{i\omega_0 t} + A^* e^{-i\omega_0 t} + \delta x. \quad (2)$$

«Сила»

$$-\beta x_0^3 = -\beta A^3 e^{3i\omega_0 t} - 3\beta A^2 A^* e^{i\omega_0 t} - 3\beta A A^{*2} e^{-i\omega_0 t} - \beta A^{*3} e^{-3i\omega_0 t}$$

содержит резонансные слагаемые

$$-3\beta A^2 A^* e^{i\omega_0 t} - 3\beta A A^{*2} e^{-i\omega_0 t} = -3\beta |A|^2 x,$$

которые удобнее присоединить к слагаемому  $\omega_0^2 x$  в левой части (1). Это приводит к замене

$$\omega_0^2 \rightarrow \omega^2 = \omega_0^2 + 3\beta |A|^2.$$

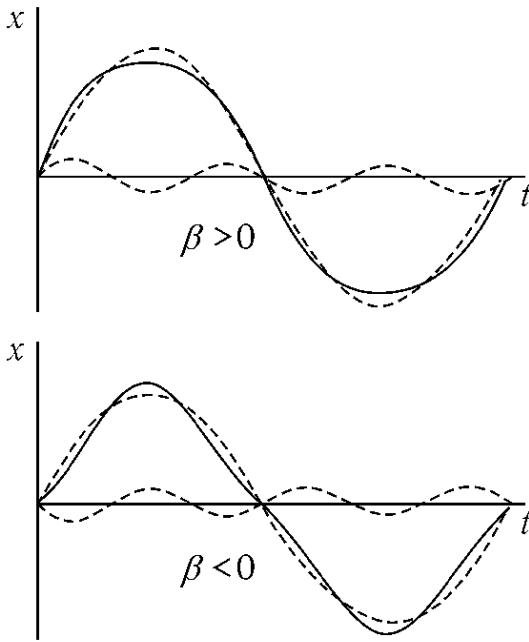


Рис. 143

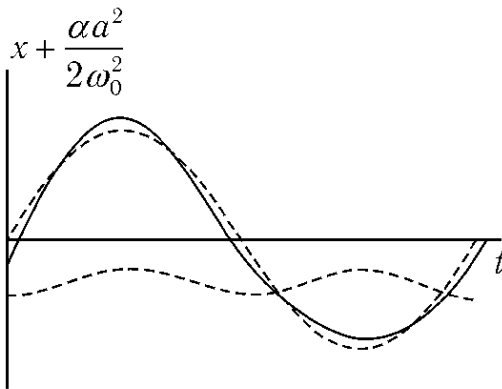


Рис. 144

Для  $\delta x$  получаем уравнение

$$\delta \ddot{x} + \omega^2 \delta x = -\beta(A^3 e^{3i\omega t} + \text{компл. сопряж.}),$$

откуда

$$\delta x = \frac{\beta A^3}{8\omega^2} e^{3i\omega t} + \text{компл. сопряж.}$$

Итак,

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) + \frac{\beta a^3}{32\omega^2} \cos(3\omega t + 3\varphi),$$

$$A = \frac{1}{2} a e^{i\varphi}$$

(ср. с [1], § 28). На рис. 143 изображены графики  $x(t)$ .

При  $\beta > 0$  происходит ограничение колебаний, при  $\beta < 0$  максимумы становятся более острыми. Эти особенности колебаний и знак поправки к частоте нетрудно усмотреть из графика  $U(x)$ . Другие способы решения см. в задачах 1.9 и 11.25 в.

б) Решая задачу тем же способом, что и в пункте а), получаем:

$$\delta x = \frac{\alpha A^2}{3\omega_0^2} e^{2i\omega_0 t} - \frac{2\alpha |A|^2}{\omega_0^2} + \frac{\alpha A^{*2}}{3\omega_0^2} e^{-2i\omega_0 t},$$

т. е.

$$x = a \cos(\omega_0 t + \varphi) - \frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos(2\omega_0 t + 2\varphi).$$

Искажение колебаний несимметрично (рис. 144).

В следующем приближении в «силе»  $-\alpha(x_0 + \delta x)^2$  нужно учитывать слагаемое  $-2\alpha x_0 \delta x$ , содержащее резонансные члены

$$-\frac{2\alpha^2}{3\omega_0^2} A^2 A^* e^{i\omega_0 t} - \frac{2\alpha^2}{3\omega_0^2} A A^{*2} e^{-i\omega_0 t} + \frac{4\alpha^2 |A|^2}{\omega_0^2} x = \frac{10\alpha^2}{3\omega_0^2} |A|^2 x.$$

Это приводит к замене

$$\omega_0 \rightarrow \omega_0 - \frac{5\alpha^2 a^2}{12\omega_0^3}.$$

$$\mathbf{8.2.} \quad x = a \cos \omega t - \frac{1}{4}\gamma a^2 \cos 2\omega t + \frac{1}{4}\gamma a^2, \quad \omega = \omega_0 + \frac{\gamma^2 a^2 \omega_0}{16}.$$

$$\mathbf{8.3.} \quad \varphi = \frac{a\Omega^2}{g - l\Omega^2} \cos \Omega t + \frac{a^2\Omega^4}{12(g - l\Omega^2)(g - 4l\Omega^2)} \sin 2\Omega t \text{ (обозначения задачи 5.9).}$$

$$\mathbf{8.4.} \quad x = x^{(0)} + x^{(1)} + \dots,$$

$$x^{(0)} = \frac{f_1 \cos \omega_1 t}{m(\omega_0^2 - \omega_1^2)} + \frac{f_2 \cos \omega_2 t}{m(\omega_0^2 - \omega_2^2)},$$

$$\begin{aligned} x^{(1)} = & -\frac{\alpha f_1^2}{2m\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2} - \frac{\alpha f_2^2}{2m\omega_0^2(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2} - \\ & - \frac{\alpha f_1^2 \cos 2\omega_1 t}{2m(\omega_0^2 - 4\omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2} - \frac{\alpha f_2^2 \cos 2\omega_2 t}{2m(\omega_0^2 - 4\omega_2^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2} - \\ & - \frac{\alpha f_1 f_2 \cos(\omega_1 - \omega_2)t}{m[\omega_0^2 - (\omega_1 - \omega_2)^2](\omega_0^2 - \omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2)} - \\ & - \frac{\alpha f_1 f_2 \cos(\omega_1 + \omega_2)t}{m[\omega_0^2 - (\omega_1 + \omega_2)^2](\omega_0^2 - \omega_1^2)(\omega_0^2 - \omega_2^2)}. \end{aligned}$$

Какие комбинационные частоты возникают при учете ангармонической поправки  $\delta U = \frac{m\beta x^4}{4}$ ?

### 8.5. Функция Лагранжа

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{k}{2}(\sqrt{(l-y)^2 + x^2} - l_0)^2 - mgy = \\ &= \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 - \omega_1^2 x^2 - \omega_2^2 y^2 + 2\alpha x^2 y) + \dots, \end{aligned}$$

где

$$\omega_1^2 = \frac{g}{l}, \quad l = l_0 + \frac{mg}{k}, \quad \omega_2^2 = \frac{k}{m}, \quad \alpha = \frac{kl_0}{2ml^2}.$$

Действуя далее так же, как и в задаче 8.1, получаем

$$x = a \cos(\omega_1 t + \varphi) - \frac{\alpha ab}{2\omega_2(2\omega_1 + \omega_2)} \cos(\omega_1 t + \omega_2 t + \varphi + \psi) + \\ + \frac{\alpha ab}{2\omega_2(2\omega_1 - \omega_2)} \cos(\omega_1 t - \omega_2 t + \varphi - \psi), \\ y = b \cos(\omega_2 t + \psi) + \frac{\alpha a^2}{2\omega_2^2} + \beta b^2 + \frac{\alpha a^2}{2(\omega_2^2 - 4\omega_1^2)} \cos(2\omega_1 t + 2\varphi).$$

Ангармонические поправки резко возрастают при  $2\omega_1 \approx \omega_2$ . Случай  $2\omega_1 = \omega_2$  рассмотрен в задаче 8.10.

**8.6.** а) Решение уравнения ищем в виде

$$x = Ae^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}.$$

Приравнивая коэффициенты при  $e^{i\omega t}$ , получаем

$$(\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\lambda\omega + 3\beta|A|^2)A = \frac{1}{2}f,$$

откуда

$$[(\omega_0^2 - \omega^2 + 3\beta|A|^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2]|A|^2 = \frac{f^2}{4}.$$

Исследование этого уравнения, кубического относительно  $|A|^2$ , можно провести подобно исследованию аналогичного уравнения (29.4) в [1].

**8.7.** а) Решение уравнения колебаний

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2(1 + h \cos 2\omega t)x + \beta x^3 = 0 \quad (1)$$

ищем в виде

$$x = Ae^{i\omega t} + A^* e^{-i\omega t}, \quad (2)$$

причем сохраняем только члены, содержащие  $e^{\pm i\omega t}$ .<sup>1</sup> Приравнивая нулю коэффициенты при  $e^{\pm i\omega t}$  находим

$$\frac{h}{2}\omega_0^2 A + (\omega^2 - \omega_0^2 - 2i\omega\lambda - 3\beta|A|^2)A^* = 0, \\ \frac{h}{2}\omega_0^2 A^* + (\omega^2 - \omega_0^2 + 2i\omega\lambda - 3\beta|A|^2)A = 0. \quad (3)$$

<sup>1</sup>Предполагаем, что члены с  $e^{\pm 3i\omega t}$  значительно меньшие, будут компенсированы вкладом в (2) третьей гармоники, как это видно из дальнейшего.

Не равное нулю  $A$  возможно при условии

$$\begin{vmatrix} \frac{h}{2}\omega_0^2 & \omega^2 - \omega_0^2 - 2i\omega\lambda - 3\beta|A|^2 \\ \omega^2 - \omega_0^2 + 2i\omega\lambda - 3\beta|A|^2 & \frac{h}{2}\omega_0^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (4)$$

откуда

$$|A|^2 = \frac{1}{3\beta} \left[ \omega^2 - \omega_0^2 \pm \sqrt{\left(\frac{h}{2}\omega_0^2\right)^2 - (2\omega\lambda)^2} \right]. \quad (5)$$

Из (3) получаем<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \sin 2\varphi &= \operatorname{Im} \frac{A}{A^*} = -\frac{4\lambda}{h\omega_0}, \\ \cos 2\varphi &= \mp \frac{2}{h\omega_0} \sqrt{\left(\frac{h}{2}\omega_0^2\right)^2 - (2\omega\lambda)^2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Итак,

$$x = a \cos(\omega t + \varphi), \quad (7)$$

где  $A = \frac{1}{2}ae^{i\varphi}$ .

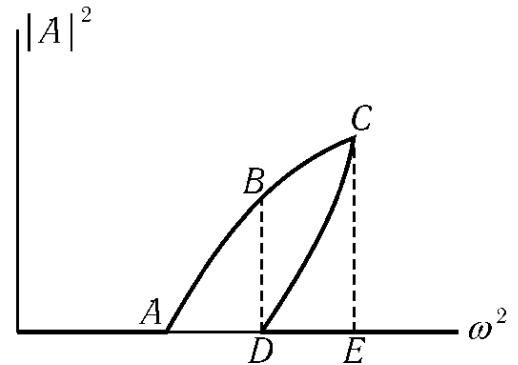


Рис. 145

Зависимость  $|A|^2$  от  $\omega^2$  изображена на рис. 145 (для определенности считаем  $\beta > 0$ ). В некоторых областях частот возможны две или три (считая нулевую) различные амплитуды установившихся колебаний.

Амплитуды, соответствующие участкам  $AD$  и  $CD$ , реально не осуществляются, так как такие колебания неустойчивы (доказательство этого относительного участка  $AD$  см. в следующей задаче, а исследование устойчивости колебаний на участках  $ABC$ ,  $CD$  и  $DE$  см. в [8]).

б) С учетом третьей гармоники  $x$  имеет вид

$$x = Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t} + Be^{3i\omega t} + B^*e^{-3i\omega t}. \quad (8)$$

Мы предполагаем, что  $|B| \ll |A|$ , что будет подтверждено результатом. Подставляя (8) в (1), выделим члены, содержащие  $e^{3i\omega t}$ ; при этом опускаем произведения  $B$  на малые параметры. Оказывается,

$$B = \left( \frac{h}{16} + \frac{\beta A^2}{8\omega^2} \right) A \quad (9)$$

и, действительно,  $|B| \ll |A|$ .

<sup>1</sup>Формулы (6) определяют фазу с точностью до слагаемого  $n\pi$ . Определение фазы с бóльшей точностью не имеет смысла, так как изменение фазы на  $\pi$  соответствует просто сдвигу начала отсчета времени.

Таким образом,

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) + b \cos(3\omega t + \psi),$$

где  $b = 2|B|$ ,  $\psi = \arg B$ .

Нетрудно заметить, что пятая гармоника окажется малой второго порядка ( $\sim h^2 A$ ), седьмая — третьего ( $h^3 A$ ) и т. д. Это служит обоснованием используемого способа вычисления амплитуд. Четные гармоники не возникают.

**8.8.** а) Ищем решение уравнения в виде

$$x(t) = a(t) \cos \omega t + b(t) \sin \omega t, \quad (1)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  — медленно изменяющиеся функции времени. Для определения  $a(t)$  и  $b(t)$  получаем систему уравнений (см. [1], § 27)

$$\begin{aligned} \dot{a} + \left( \omega - \omega_0 + \frac{h\omega_0}{4} \right) b &= 0, \\ \dot{b} - \left( \omega - \omega_0 - \frac{h\omega_0}{4} \right) a &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Если  $|\omega_1 - \omega_0| < h\omega_0/4$ , то ее решение

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha_1 (C_1 e^{-st} + C_2 e^{st}), \\ b(t) &= \alpha_2 (C_1 e^{-st} - C_2 e^{st}), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$s = \frac{1}{4} \sqrt{(h\omega_0)^2 - 16(\omega - \omega_0)^2}, \quad \alpha_{1,2} = \sqrt{h\omega_0 \pm 4(\omega - \omega_0)}.$$

Отсюда

$$x = C' e^{st} \cos(\omega t - \varphi) + C'' e^{-st} \cos(\omega t + \varphi), \quad (4)$$

где  $\operatorname{tg} \varphi = \alpha_1 / \alpha_2$  (рис. 146).

Таким образом, колебания, вообще говоря, неограниченно возрастают. Скорость их роста, характеризуемая величиной  $s$ , действительно мала. В реальных условиях возрастание амплитуды колебаний прекращается, например, если становится существенной роль ангармонических поправок (см. задачу 8.7) или обратное влияние колебаний на устройство, периодически изменяющее частоту.

Полезно обратить внимание на аналогию между полученным результатом и особым решением задачи о нормальных колебаниях цепочки частиц,

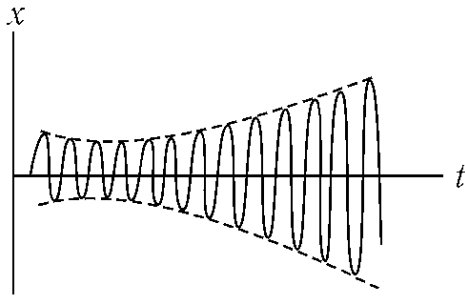


Рис. 146

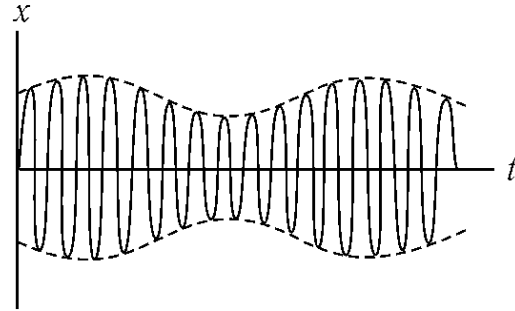


Рис. 147

соединенных пружинками различной жесткости (задача 7.4 в). Неоднородность с периодом  $2a$  вдоль цепочки приводит к нарастанию вдоль цепочки амплитуды установившегося колебания, причем «длина волны» равна  $4a$  (рис. 140), подобно тому как периодическое изменение со временем частоты осциллятора приводит к возрастанию со временем амплитуды.

Еще более полную аналогию можно обнаружить с задачей 7.6. Области неустойчивости относительно параметрического резонанса соответствует запрещенная зона спектра колебаний цепочки.

К подобным же уравнениям приводит в квантовой механике задача о движении частицы в периодическом поле. В этой задаче также появляются «запрещенные зоны» и «поверхностные состояния»,

б) Если  $|\omega - \omega_0| > h\omega_0/4$ , то

$$x = C\beta_1 \sin(\Omega t + \psi) \cos \omega t - C\beta_2 \cos(\Omega t + \psi) \sin \omega t,$$

где  $\Omega = \frac{1}{4} \sqrt{16(\omega - \omega_0)^2 - (h\omega_0)^2}$ ,

$$\beta_{1,2} = \begin{cases} \sqrt{4(\omega - \omega_0) \pm h\omega_0} & \text{при } \omega > \omega_0, \\ \pm \sqrt{4(\omega - \omega_0) \pm h\omega_0} & \text{при } \omega < \omega_0. \end{cases}$$

Колебания представляют собой биения:

$$x = C \sqrt{4|\omega - \omega_0| - h\omega_0} \cos(2\Omega t + \psi) \cos(\omega t + \theta),$$

где  $\theta$  — медленно меняющаяся фаза (см. рис. 147). Если частота приближается к границе области неустойчивости, то глубина модуляции колебаний приближается к полной, а период их неограниченно растет.

Каков вид колебаний при  $|\omega - \omega_0| = h\omega_0/4$ ?

**8.9.** Пусть при  $0 < t < \tau$  колебание  $x = e^{i\omega_1 t}$ . Тогда на отрезке  $\tau < t < 2\tau$ ,

$$x = ae^{i\omega_2 t} + be^{-i\omega_2 t},$$

где  $a$  и  $b$  определяются условием «сшивания» при  $t = \tau$ :

$$x(\tau - 0) = x(\tau + 0), \quad \dot{x}(\tau - 0) = \dot{x}(\tau + 0),$$

откуда

$$a = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\omega_2} e^{i(\omega_1 - \omega_2)\tau},$$

$$b = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_2} e^{i(\omega_1 + \omega_2)\tau}.$$

Аналогично находим, что при  $2\tau < t < 3\tau$

$$x = \alpha e^{i\omega_1 t} + \beta e^{-i\omega_1 t},$$

где

$$\alpha = e^{-i\omega_1 \tau} \left( \cos \omega_2 \tau + i \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1 \omega_2} \sin \omega_2 \tau \right),$$

$$\beta = i \sin \omega_2 \tau e^{3i\omega_1 \tau} \frac{\omega_1^2 - \omega_2^2}{2\omega_1 \omega_2}.$$

Ясно, что колебание вида

$$Ae^{i\omega_1 t} + Be^{-i\omega_1 t} \tag{1}$$

при  $0 < t < \tau$  переходит через период  $2\tau$  в колебание

$$\begin{aligned} A(\alpha e^{i\omega_1 t} + \beta e^{-i\omega_1 t}) + B(\alpha^* e^{-i\omega_1 t} + \beta^* e^{i\omega_1 t}) = \\ = (\alpha A + \beta^* B) e^{i\omega_1 t} + (\beta A + \alpha^* B) e^{-i\omega_1 t}. \end{aligned}$$

Найдем такую линейную комбинацию (1), чтобы через период  $2\tau$  колебание сохраняло свой вид с точностью до постоянного множителя:

$$(\alpha A + \beta^* B) e^{i\omega_1 t} + (\beta A + \alpha^* B) e^{-i\omega_1 t} = \mu (A e^{i\omega_1 t'} + B e^{-i\omega_1 t'}),$$

здесь  $t' = t - 2\tau$ ,

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta^* B &= \mu e^{-2i\omega_1 \tau} A, \\ \beta A + \alpha^* B &= \mu e^{2i\omega_1 \tau} B. \end{aligned} \tag{2}$$



Система (2) имеет нетривиальное решение при условии

$$(\alpha - \mu e^{-2i\omega_1\tau})(\alpha^* - \mu e^{2i\omega_1\tau}) - \beta\beta^* = 0,$$

откуда

$$\mu_{1,2} = \gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1},$$

где

$$\gamma = \operatorname{Re}(\alpha e^{2i\omega_1\tau}) = \cos \omega_1\tau \cos \omega_2\tau - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1\omega_2} \sin \omega_1\tau \sin \omega_2\tau.$$

Через  $n$  периодов колебание

$$x_{1,2} = A_{1,2}(e^{i\omega_1 t} + \lambda_{1,2}e^{-i\omega_1 t}), \quad 0 < t < \tau,$$

$$\lambda_{1,2} = \mu_{1,2} \frac{e^{-2i\omega_1\tau} - \alpha}{\beta^*}$$

переходит в

$$x_{1,2}(t) = \mu_{1,2}^n A_{1,2}(e^{i\omega_1 t'} + \lambda_{1,2}e^{-i\omega_1 t'}), \quad 0 < t' = t - 2n\tau < \tau.$$

Любое колебание представляет собой суперпозицию колебаний вида  $x_{1,2}$  в частности, действительное колебание (только и имеющее непосредственный физический смысл)

$$x(t) = Ae^{i\omega_1 t} + A^*e^{-i\omega_1 t}, \quad 0 < t < \tau,$$

есть сумма  $x_1(t) + x_2(t)$  с

$$A_1 = \frac{A^* - \lambda_2 A}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad A_2 = \frac{\lambda_1 A - A^*}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

Если  $\gamma < 1$ , то  $|\mu_{1,2}| = 1$  и колебания  $x_{1,2}(t)$  (а с ними и  $x(t)$ ) остаются ограниченными.

Если же  $\gamma > 1$ , то  $\mu_1 > 1$ , и амплитуда колебаний неограниченно возрастает. Это и есть случай возникновения параметрического резонанса. Нетрудно убедиться, что при малой разности частот  $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1$  это условие выполняется, если частоты близки к  $\pi n/\tau$ :

$$|(\omega_1 + \omega_2)\tau - 2\pi n| < \frac{(\omega_1 - \omega_2)^2 \tau}{\omega_1 + \omega_2}.$$

На рис. 148 (взятом из [20]) показаны области неустойчивости относительно параметрического резонанса,

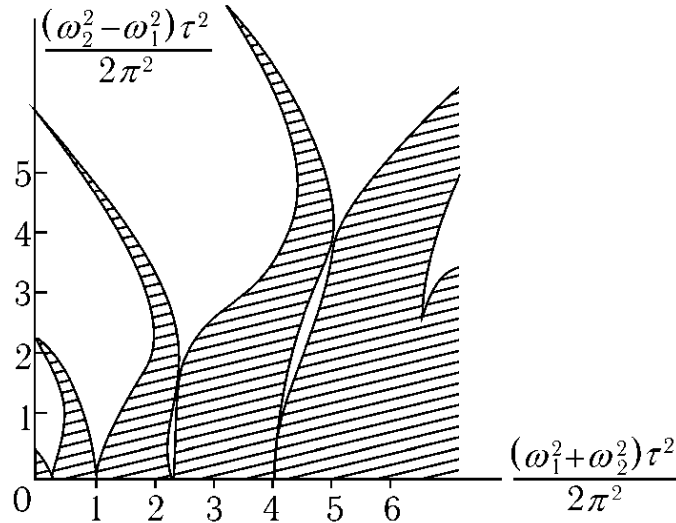


Рис. 148

### 8.10. Уравнения движения

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \omega^2 x - 2\alpha xy &= 0, \\ \ddot{y} + 4\omega^2 y - \alpha x^2 &= 0.\end{aligned}$$

Решение ищем в виде

$$\begin{aligned}x &= Ae^{i\omega t} + A^*e^{-i\omega t} + \delta x, \\ y &= Be^{2i\omega t} + B^*e^{-2i\omega t} + \delta y,\end{aligned}$$

принимая, что  $A$  и  $B$  — медленно меняющиеся амплитуды колебаний, а более быстро осциллирующими слагаемыми  $\delta x$  и  $\delta y$  можно пренебречь:  $|\ddot{A}| \ll \omega|\dot{A}| \ll \omega^2|A|$ ,  $|\ddot{B}| \ll \omega|\dot{B}| \ll \omega^2|B|$ ,  $\delta x \sim \delta y \ll |A|$ .

Сохраняя только слагаемые с  $e^{i\omega t}$  (соответственно  $e^{2i\omega t}$ ) и пренебрегая  $|\ddot{A}|$ ,  $|\ddot{B}|$ , получаем

$$\begin{aligned}\omega\dot{A} - i\alpha BA^* &= 0, \\ 4\omega\dot{B} - i\alpha A^2 &= 0.\end{aligned}\tag{1}$$

Легко видеть, что из (1) следует

$$|A|^2 + 4|B|^2 = C = \text{const}\tag{2}$$

(это закон сохранения энергии) и

$$A^{*2}B + A^2B^* = D = \text{const}.\tag{3}$$

Используя (1), находим

$$\omega \frac{d}{dt} |A|^2 = i\alpha(A^{*2}B - A^2B^*). \quad (4)$$

Возведем (4) в квадрат и учтем (2), (3):

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} |A|^2 \right)^2 &= -\frac{\alpha^2}{\omega^2} [(A^{*2}B + A^2B^*)^2 - 4|A|^4|B|^2] = \\ &= \frac{\alpha^2}{\omega^2} [|A|^4(C - |A|^2) - D^2]. \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнение (5), аналогичное закону сохранения энергии для задачи об одномерном движении частицы с координатой  $|A|^2$ , удобно исследовать с помощью графика  $U(|A|^2) = (|A|^2 - C)|A|^4$  (рис. 149).

Таким образом, амплитуда  $|A|$  испытывает колебания — происходят биения. Зависимость амплитуд  $|A|$  и  $|B|$  от времени может быть выражена через эллиптические функции (мы не будем этого делать).

Отметим, что, в отличие от колебаний осцилляторов с линейной связью (задача 6.8), в данном случае от начальных амплитуд и фаз зависит не только глубина биений, но и период.

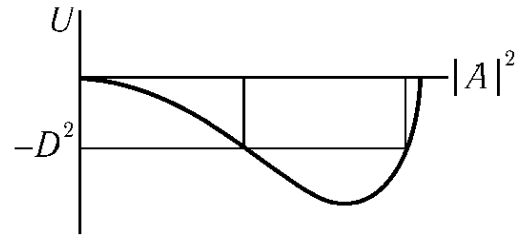


Рис. 149

Эта задача имеет отношение, например, к связи продольных и изгибных колебаний молекулы  $\text{CO}_2$  (так называемый резонанс Ферми, см. [21]) и к удвоению и делению частоты света в нелинейной оптике (см. [22]).

$$8.11. \quad \omega^2 = \frac{a^2 \gamma^2}{2l^2} \pm \frac{g}{l} \text{ (ср. [1], § 30 задача 1).}$$

$$8.12. \quad \begin{aligned} \text{а) } U_{\text{эфф}} &= \frac{\alpha^2}{m\omega^2} \left[ \frac{a^2}{r^6} + \frac{3(\mathbf{ar})^2}{r^8} \right], \\ \text{б) } U_{\text{эфф}} &= \frac{\alpha^2}{m(\omega^2 - \omega_0^2)} \left[ \frac{a^2}{r^6} + \frac{3(\mathbf{ar})^2}{r^8} \right], \end{aligned}$$

где  $\omega_0$  — собственная частота осциллятора.

Обратим внимание на то, что зависимость  $U_{\text{эфф}} \propto r^{-6}$  характерна для межмолекулярных сил. Если подставить в (1) значения величин<sup>1</sup>:

---

<sup>1</sup>В системе СИ:  $\alpha \sim \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \sim \frac{(10^{-19} \text{ К})^2}{10^{-11} \text{ Ф/м} \cdot 10}, m \sim 10^{-30} \text{ кг}, a \sim 10^{-10} \text{ м},$   
 $U_{\text{эфф}} \sim 10^{-18} \left( \frac{a}{r} \right)^6 \text{ Дж}.$

$\alpha \sim e^2 \sim (5 \cdot 10^{-10} \text{ ед. СГСЭ})^2$ ,  $m \sim 10^{-27} \text{ г}$ ,  $a \sim 10^{-8} \text{ см}$ ,  $\omega \sim 10^{16} \text{ сек}^{-1}$  типичные для атомов, то получим  $U_{\text{эфф}} \sim 10^{-59} \text{ эрг} \cdot \text{см}^6/r^6$ , что по порядку величины близко к правильному значению для ван-дер-ваальсова взаимодействия. Такой результат может служить указанием на физическую природу этого взаимодействия. Полный же расчет ван-дер-ваальсовых сил возможен лишь в квантовой механике.

**8.13.** Движение вдоль оси  $z$  почти равномерное,  $z = vt$ . В плоскости  $(x, y)$  на частицу действует быстро осциллирующая сила  $f_x = 2Ax \sin kvt$ ,  $f_y = 2Ay \sin kvt$ . Соответствующий эффективный потенциал  $U_{\text{эфф}} = \frac{m\Omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ , где  $\Omega = \frac{A\sqrt{2}}{mkv}$ .

Согласно условию частота колебаний силы  $kv \gg \Omega$ , так что сила действительно быстро осциллирующая. Итак, в плоскости  $(x, y)$  частица совершает гармонические колебания с частотой  $\Omega$  около оси  $z$ . Эта задача иллюстрирует принцип жесткой фокусировки пучков частиц в ускорителях.

**8.14.** Уравнения движения

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \frac{e}{c}\mathcal{H}(x)\dot{y}, \\ m\ddot{y} &= -\frac{e}{c}\mathcal{H}(x)\dot{x}. \end{aligned}$$

Ищем закон движения в виде

$$x = X + \xi, \quad y = Y + \eta, \quad (1)$$

где слагаемые  $\xi, \eta$  описывают быстрое движение по почти круговой орбите, а  $X, Y$  — медленное смещение ее центра (сравните с [1], § 30). Подставляя (1) в уравнения движения, разлагаем  $\mathcal{H}(X + \xi)$  по степеням  $\xi$ :

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \ddot{\xi} &= \omega\dot{Y} + \omega\dot{\eta} + \frac{e}{mc}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\xi(\dot{Y} + \dot{\eta}), \\ \ddot{Y} + \ddot{\eta} &= -\omega\dot{X} - \omega\dot{\xi} - \frac{e}{mc}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x}\xi(\dot{X} + \dot{\xi}) \end{aligned}$$

и разделяем быстро осциллирующие и медленно меняющиеся слагаемые. Для осциллирующих слагаемых

$$\ddot{\xi} = \omega\dot{\eta}, \quad \ddot{\eta} = -\omega\dot{\xi}, \quad \omega = \frac{e}{mc}\mathcal{H}(X),$$

откуда

$$\xi = r \cos \omega t, \quad \eta = -r \sin \omega t.$$

Для медленно меняющихся членов имеем

$$\begin{aligned}\ddot{X} &= \omega \dot{Y} + \frac{e}{mc} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \langle \xi \dot{\eta} \rangle, \\ \ddot{Y} &= -\omega \dot{X} - \frac{e}{mc} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \langle \xi \dot{\xi} \rangle,\end{aligned}\tag{2}$$

где

$$\langle \xi \dot{\eta} \rangle = -r^2 \omega \langle \cos^2 \omega t \rangle = -\frac{r^2 \omega}{2}, \quad \langle \xi \dot{\xi} \rangle = 0.$$

Поскольку  $\ddot{X}, \ddot{Y} \sim \varepsilon \omega \dot{X}, \varepsilon \omega \dot{Y}$ , то левые части (2) можно положить равными нулю.

Итак,

$$\dot{Y} = \frac{er^2}{2mc} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = \frac{1}{2} \varepsilon v, \quad \dot{X} = 0.$$

(Скорость смещения центра орбиты (скорость дрейфа) в более общем случае рассмотрена в [2], задача 3 к § 22 и [8], § 25.)

### 8.15. Уравнение движения шарика

$$m\ddot{y} = -\frac{dU(y)}{dy} + f(t).$$

Собственное движение шарика под действием пружинки описывается «низкочастотным» смещением  $x = y - y_0 \cos \gamma t$ , для которого

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x + y_0 \cos \gamma t)}{dx}.$$

Усредняя по периоду  $2\pi/\gamma$  высокочастотного движения

$$\left( \langle \cos^{2n+1} \gamma t \rangle = 0, \langle \cos^2 \gamma t \rangle = \frac{1}{2}, \langle \cos^4 \gamma t \rangle = \frac{3}{8} \right),$$

получим эффективную силу и соответствующую эффективную потенциальную энергию

$$U_{\text{эфф}}(x) = Ax^2 + Bx^4, \quad A = -C + \frac{9}{4}By_0^2.$$

График функции  $U_{\text{эфф}}(x)$  изображен на рис. 150.

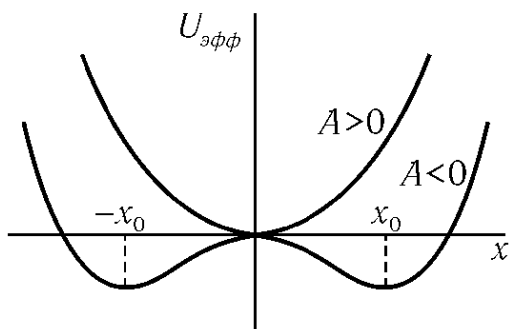


Рис. 150

При  $A > 0$ , или  $T = y_0^2 > T_c = 4C/9B$  шарик колеблется вблизи точки  $x = 0$  с частотой  $\omega = \sqrt{2A/m} \propto \sqrt{T - T_c}$ . При  $A < 0$ , или  $T < T_c$ , минимумы  $U_{эфф}(x)$  расположены в точках  $\pm x_0 = \pm \sqrt{-A/2B}$  и шарик колеблется вблизи одного из них с частотой  $\omega = \sqrt{-A/m} \propto \sqrt{T_c - T}$ .

Возникающая картина весьма близка к картине фазовых переходов второго рода, описываемых феноменологической теорией Ландау [23]. Быстрые вынужденные колебания являются аналогом теплового движения (соответствующего оптическим модам колебаний системы, не связанным с переходом), а величина  $T = y_0^2$  — аналог температуры. При больших  $T$  система колеблется вокруг положения равновесия  $x = 0$ . При этом имеется симметрия относительно замены  $x \rightarrow -x$ . При уменьшении температуры до значения  $T < T_c$  шарик начинает колебаться вокруг одного из новых положений равновесия:  $x_0$  или  $-x_0$ . При этом симметрия  $x \rightarrow -x$ , очевидно, разрушается. Значение  $T_c$  — аналог температуры фазового перехода второго рода. В окрестности точки  $T = T_c$  величина  $x_0$  мала,  $x_0 \propto \sqrt{T_c - T}$ , и мала частота собственных колебаний  $\omega$ .

## § 9. Движение твердого тела. Неинерциальные системы отсчета

9.1. а) 
$$\begin{pmatrix} 2a^2(m+M) & 2a^2(m-M) & 0 \\ 2a^2(m-M) & 2a^2(m+M) & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{pmatrix},$$

б) 
$$\begin{pmatrix} 4a^2m & 0 & 0 \\ 0 & 4a^2M & 0 \\ 0 & 0 & 4a^2(m+M) \end{pmatrix}.$$

9.2. Для обеих фигур одной из главных осей является ось, перпендикулярная к плоскости рисунка и проходящая через центр инерции фигуры (ось  $z$ ). Главная ось  $x$  повернута на угол  $\varphi$  к стороне  $O'x'$  каждой из фигур. Главная ось  $y$  перпендикулярна к оси  $x$ . Обе эти оси проходят через центр тяжести фигур.

а) Координаты центра в осях  $O'x'y'$  ( $x' = b$ ,  $y' = a$ ):

$$I_{zz} = 2(a^2 + b^2)(M + m),$$

$$I_{xx} = (a^2 + b^2)(M + m) \mp \sqrt{(b^2 - a^2)^2(M + m)^2 + 4a^2b^2(M - m)^2},$$

$$I_{yy} = (a^2 + b^2)(M + m) \pm \sqrt{(b^2 - a^2)^2(M + m)^2 + 4a^2b^2(M - m)^2},$$

при  $a \geq b$ ,  $\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2ab(M - m)}{(a^2 - b^2)(M + m)}$ .

б) В осях  $O'x'y'z'$  (рис. 151) координаты центра масс  $O$ :  $x' = y' = a$ ,  $z' = 0$ . В системе координат  $Ox''y''z''$  с осями, параллельными осям  $x'y'z'$ , тензор инерции

$$I''_{ik} = 4ma^2 \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

При переходе к системе  $Oxyz$ , повернутой на угол  $\varphi$  вокруг  $z''$ , координаты преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= x'' \cos \varphi + y'' \sin \varphi, & y &= -x'' \sin \varphi + y'' \cos \varphi, \\ z &= z'', \end{aligned}$$

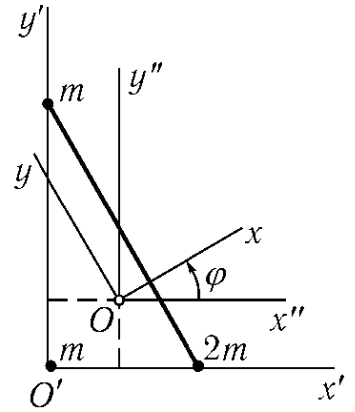


Рис. 151

а компоненты тензора инерции — как произведения координат:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= I''_{xx} \cos^2 \varphi + 2I''_{xy} \sin \varphi \cos \varphi + I''_{yy} \sin^2 \varphi = \\ &= 4ma^2(3 \cos^2 \varphi + \sin 2\varphi + \sin^2 \varphi), \end{aligned}$$

$$I_{yy} = 4ma^2(\cos^2 \varphi - \sin 2\varphi + 3 \sin^2 \varphi),$$

$$I_{zz} = 16ma^2,$$

$$I_{xy} = 4ma^2(-\sin 2\varphi + \cos 2\varphi),$$

$$I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

Угол  $\varphi$  выбираем так, чтобы выполнялось условие  $I_{xy} = 0$ , например,  $\varphi = \pi/8$ . Тогда

$$I_{xx} = 4ma^2(2 + \sqrt{2}), \quad I_{yy} = 4ma^2(2 - \sqrt{2}).$$

$$9.3. \quad I_n = \sum_{i,k} I_{ik} n_i n_k.$$

**9.4.** Центр масс: точка на оси симметрии на расстоянии  $\frac{(R-r)r^3}{R^3-r^3}$  от центра шара влево. Тело — симметрический волчок. Относительно оси симметрии  $I_3 = \frac{m}{R^3-r^3} \frac{2}{5} (R^5-r^5)$ ; относительно перпендикулярных осей, проходящих через центр масс,

$$I_1 = I_2 = \frac{m}{R^3-r^3} \left[ \frac{2}{5} (R^5-r^5) - \frac{(R-r)^2 r^3 R^3}{(R^3-r^3)} \right].$$

**9.5.**  $D_{ik} = \left( \sum_n I_{nn} \right) \delta_{ik} - 3I_{ik}$  (см. [2], § 99).

**9.6.** Центр масс расположен на оси полушара на расстоянии  $\frac{3}{8}R$  от центра шара ( $R$  — радиус шара). Момент инерции относительно любой из осей, перпендикулярных к оси симметрии ( $m$  — масса полушара)

$$I = \frac{2}{5}mR^2 - m\left(\frac{3}{8}R\right)^2 = \frac{83}{320}mR^2.$$

При колебаниях центр масс может двигаться только по вертикали. Пусть  $\varphi$  — угол поворота полушара,  $z$  — высота центра масс над плоскостью,  $z = R - \frac{3}{8}R \cos \varphi$ . Функция Лагранжа системы  $L = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - mgz$ , при малых  $\varphi$  имеем  $L = \frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2 - \frac{3}{16}mgR\varphi^2$ . Отсюда частота малых колебаний

$$\omega = \sqrt{\frac{120}{83} \cdot \frac{g}{R}}.$$

**9.7.** Очевидно, скорость шарика после столкновения  $\mathbf{v}$  может быть направлена только вдоль или против  $\mathbf{V}$ , т. е.  $\mathbf{v} = v\mathbf{V}/V$ . Скорость гантельки после удара  $\mathbf{u}$  направлена вдоль  $\mathbf{V}$ , ее угловая скорость  $\omega$ .

Законы сохранения импульса, энергии и момента импульса (относительно центра гантельки):

$$\begin{aligned} mV &= mv + 2mu, \\ \frac{1}{2}mV^2 &= \frac{1}{2}mv^2 + mu^2 + \frac{1}{2}I\omega^2, \\ mVr &= mvr + I\omega, \end{aligned}$$

где  $m$  — масса шарика,  $r$  — его радиус,  $I = \frac{14}{5}mr^2$  — момент инерции гантельки.



Отсюда

$$\mathbf{v} = -\frac{1}{13}\mathbf{V}, \quad \mathbf{u} = \frac{7}{13}\mathbf{V}, \quad \omega = \frac{5}{13}\frac{V}{r}.$$

**9.8.** В настоящее время расстояния от центра инерции системы Земля–Луна до Земли и Луны равны  $\frac{m}{M+m}R$  и  $\frac{M}{M+m}R$  соответственно, а момент импульса системы

$$m\left(\frac{MR}{M+m}\right)^2\Omega_{\text{Л}} + M\left(\frac{mR}{M+m}\right)^2\Omega_{\text{Л}} + I\Omega_3 = J\Omega_{\text{Л}} + I\Omega_3, \\ J = \frac{Mm}{M+m}R^2, \quad (1)$$

где  $\Omega_{\text{Л}}$  и  $\Omega_3$  — угловые скорости вращения Луны вокруг Земли и Земли вокруг собственной оси ( $\Omega_3/\Omega_{\text{Л}} \approx 28$ ). При записи (1) мы считали Луну материальной точкой, а у Земли учитывали вращение вокруг центра инерции и вокруг собственной оси (с моментом инерции  $I = \frac{2}{5}Ma^2$ ).

В момент, когда сутки сравниваются с месяцем, угловая скорость вращения Земли  $\omega$  совпадает с угловой скоростью Луны, расстояние от Земли до Луны (по третьему закону Кеплера) станет равным  $R(\Omega_{\text{Л}}/\omega)^{2/3}$ , а момент импульса

$$\left[J\left(\frac{\Omega_{\text{Л}}}{\omega}\right)^{4/3} + I\right]\omega. \quad (2)$$

Из (1) и (2) найдем уравнение для  $x = \frac{\omega}{\Omega_3}$ :

$$x(1+k-x)^3 = k^3\frac{\Omega_{\text{Л}}}{\Omega_3}, \quad (3)$$

где  $k = \frac{J\Omega_{\text{Л}}}{I\Omega_3} = \frac{5}{2}\left(\frac{R}{a}\right)^2\frac{m}{M+m}\frac{\Omega_{\text{Л}}}{\Omega_3} \approx 3,8$ .

Уравнение (3), или  $x(4,8-x)^3 = 2,01$ , имеет два действительных корня:  $x_1 \approx 1/55$  и  $x_2 \approx 4$ . Первый из них отвечает будущему, второй — прошлому. Соответственно в первом случае месяц станет равным 55 современным суткам, во втором — был равен 6 часам. Расстояние от Земли до Луны станет равным  $1,6R$ , а было —  $2,6a$ .

(О более реалистических, чем рассмотренная, моделях эволюции системы Земля–Луна см., например, [24], гл. 2.)

**9.9.** а) Тело вращается с угловой скоростью  $\frac{2}{7}\omega$ ; в тепло перешло  $\frac{5}{7}$  начальной кинетической энергии.

б) Линия центров вращается с угловой скоростью  $\frac{\sqrt{2}}{7}\omega$  вокруг направления момента  $M$ , составляющего с ней угол  $45^\circ$ ; при этом тело вращается вокруг линии центров с угловой скоростью  $\frac{5}{14}\omega$ . В тепло перешло  $\frac{19}{28}$  начальной кинетической энергии.

$$9.10 \text{ а.} \quad f_{1,2} = m \left( g \pm \frac{v^2}{14r} \right).$$

**9.10 б.** Удобно воспользоваться подвижной системой координат с началом в точке  $A$  и осями  $x_1, x_2, x_3$ , параллельными ребрам  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $AA' = c$  параллелепипеда. В этой системе угловая скорость  $\Omega = \Omega \mathbf{n}$ , где  $\mathbf{n} = \mathbf{l}/l$ ,  $\mathbf{l} = (a, b, c)$ , а момент импульса параллелепипеда  $\mathbf{M} = (I_1\Omega_1, I_2\Omega_2, I_3\Omega_3)$ , где

$$I_1 = \frac{2}{3}m(b^2 + c^2), \quad I_2 = \frac{2}{3}m(a^2 + c^2), \quad I_3 = \frac{2}{3}m(a^2 + b^2)$$

— его главные моменты инерции. Вектор  $\mathbf{M}$  неподвижен относительно системы  $0x_1x_2x_3$ , т. е. в лабораторной системе вращается с угловой скоростью  $\Omega$ , так что  $\dot{\mathbf{M}} = [\Omega \mathbf{M}]$ .

Пусть силы, действующие на параллелепипед в точках  $A$  и  $C'$ , равны  $-\mathbf{f}$  и  $\mathbf{f}$  (силы тяжести мы не учитываем). Момент этих сил  $\mathbf{K} = [\mathbf{l}\mathbf{f}]$ . Уравнение движения  $\dot{\mathbf{M}} = \mathbf{K}$  приводит к равенству

$$\Omega[\mathbf{n} \mathbf{M}] = l[\mathbf{n} \mathbf{f}],$$

позволяющему определить  $\mathbf{f}_\perp$  — составляющую силы  $\mathbf{f}$ , перпендикулярную вектору  $\mathbf{n}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_\perp &= \frac{\Omega}{l} \mathbf{M}_\perp = \frac{\Omega}{l} \{ \mathbf{M} - \mathbf{n}(\mathbf{M}\mathbf{n}) \} = \\ &= \frac{2m\Omega^2}{3l^4} (a^4 + b^4 + c^4) \cdot (a, b, c) - \frac{2m\Omega^2}{3l^2} \cdot (a^3, b^3, c^3). \end{aligned}$$

Составляющая силы  $\mathbf{f}$ , параллельная диагонали  $AC'$ , не может быть найдена в модели, рассматривающей параллелепипед (и шарниры) как недеформируемое твердое тело. Легко видеть, что прилагая к параллелепипеду в точках  $A$  и  $C'$  силы  $N\mathbf{n}$  и  $-N\mathbf{n}$ , мы не повлияем на его движение.

Таким образом, силы, приложенные к шарнирам  $A$  и  $C'$ , равны  $\mathbf{f}$  и  $-\mathbf{f}$ ,

$$\mathbf{f} = -\frac{2m\Omega^2}{3l^2} (a^3, b^3, c^3) + N'(a, b, c),$$

где  $N'$  — неопределимая величина. (Мы ввели  $N' = N - \frac{2m\Omega^2}{l^5}(a^4, b^4, c^4)$ ). В лабораторной системе вектор  $\mathbf{f}_\perp$  вращается с угловой скоростью  $\Omega$ .

**9.11.** Момент инерции эллипсоида (см. [1], § 32, задача 2e) относительно оси вращения  $I_3 = \frac{2M}{5}a^2$ ; относительно любой перпендикулярной ей оси, проходящей через центр масс,  $I_1 = \frac{M(a^2 + c^2)}{5}$  ( $M$  — масса эллипсоида).

Налетающая частица массы  $m \ll M$  передает эллипсоиду импульс  $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z) = mv(0, -1, 0)$  и момент импульса  $\mathbf{M} = mv(\rho_1, 0, -\rho_2)$ .

В системе, движущейся со скоростью  $\frac{\mathbf{p}}{M+m}$ , найдем (см. [1], § 33), что эллипсоид будет вращаться вокруг полуоси  $c$  с угловой скоростью  $\Omega_3 = \frac{M_z}{I_3} = -\frac{5mv\rho_2}{2Ma^2}$ , одновременно прецессируя вокруг направления  $\mathbf{M}$  с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{|\mathbf{M}|}{I_1} = \frac{5mv\sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2}}{M(a^2 + c^2)}.$$

**9.12.** Обозначим угловую скорость вращения диска вокруг его оси  $\dot{\psi}$ , угол между этой осью и направлением на север  $\varphi$ . Угловая скорость диска в инерциальной системе  $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Omega} + \dot{\varphi} + \dot{\psi}$ , ее проекции: на ось диска  $\omega_3 = \dot{\psi} + \Omega \cos \alpha \cos \varphi$ , на вертикаль  $\omega_1 = \dot{\varphi} + \Omega \sin \alpha$ , на горизонтальную ось, перпендикулярную оси диска,  $\omega_2 = \Omega \cos \alpha \sin \varphi$ . Функция Лагранжа равна кинетической энергии (учтем, что  $I_1 = I_2$ ):

$$L = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi} + \Omega \sin \alpha)^2 + \frac{1}{2}I_1\Omega^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi} + \Omega \cos \alpha \cos \varphi)^2.$$

Исследовать движение удобно, используя интегралы движения  $p_\psi$  и  $E = p_\psi \dot{\psi} + p_\varphi \dot{\varphi} - L$ :

$$p_\psi = I_3(\dot{\psi} + \Omega \cos \alpha \cos \varphi),$$

$$E = \frac{1}{2}I_1(\dot{\varphi}^2 - \Omega^2 \sin^2 \alpha) - \frac{1}{2}I_1\Omega^2 \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi + \frac{1}{2}I_3(\dot{\psi}^2 - \Omega^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi).$$

Исключив  $\dot{\psi}$ , находим

$$E = \frac{1}{2}I_1\dot{\varphi}^2 + U_{\text{эфф}}(\varphi) + \text{const},$$

где

$$U_{\text{эфф}}(\varphi) = -p_\psi \Omega \cos \alpha \cos \varphi + \frac{1}{2}I_1\Omega^2 \cos^2 \alpha \cos^2 \varphi.$$

Ограничимся случаем  $\dot{\psi} \gg \Omega$ . Тогда  $p_\psi \approx I_3 \dot{\psi}$ ,

$$U_{\text{эфф}}(\varphi) \approx -p_\psi \Omega \cos \alpha \cos \varphi.$$

Функция  $U_{\text{эфф}}(\varphi)$  имеет минимум при  $\varphi = 0$  (т. е. в направлении на север). Ось гироскопа колеблется около этого направления. Для малых колебаний

$$U_{\text{эфф}}(\varphi) = \frac{1}{2} I_3 \dot{\psi} \Omega \cos \alpha \cdot \varphi^2 + \text{const}$$

и частота колебаний оси равна  $\sqrt{\frac{I_3}{I_1} \Omega \dot{\psi} \cos \alpha}$ . Например, для гироскопа, делающего около 10 тысяч оборотов в минуту, период колебаний приблизительно полминуты (для  $\frac{I_3}{I_1} \cos \alpha \sim 1$ ).

Каким образом можно учесть момент инерции рамки?

**9.13.** Удобно использовать подвижную систему координат с осью  $x$ , проходящей через точку касания диска с поверхностью стола.

В этой системе

$$\frac{d' \mathbf{M}}{dt} + [\dot{\varphi}, \mathbf{M}] = \mathbf{K}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{M}$  — момент импульса волчка относительно неподвижной точки  $O$ ,  $\mathbf{K}$  — момент действующих на него сил (ср. [1], § 36). Проекция (1) на ось  $x$

$$\dot{M}_x - \dot{\varphi} M_y = K_x.$$

Очевидно,  $M_y = 0$ ,  $K_x = 0$ , так что  $M_x = \text{const}$ .

Пусть  $I_1 = I_2 \neq I_3$  — главные моменты инерции волчка относительно точки  $O$ . В начальный момент

$$M = \Omega I_3, \quad M_x = \Omega I_3 \cos \theta.$$

Когда проскальзывание прекратится, ось  $x$  станет мгновенной осью вращения, т. е. угловая скорость волчка  $\omega$  будет направлена вдоль оси  $x$ , а  $M_x = I_3 \omega \cos^2 \theta + I_1 \omega \sin^2 \theta$ . Таким образом,

$$\omega = \frac{\Omega I_3 \cos \theta}{I_3 \cos^2 \theta + I_1 \sin^2 \theta}.$$

Отметим, что после прекращения проскальзывания  $\dot{\varphi} = -\omega \operatorname{tg} \theta$ .

**9.14.** Пусть  $a = b \neq c$  — полуоси эллипсоида,  $R, \Theta, \Phi$  — сферические координаты центра инерции эллипсоида,  $\theta, \varphi, \psi$  — эйлеровы углы, причем ось  $x_3$  движущейся системы направлена вдоль полуоси  $c$ . Кинетическая энергия тела (см. [1], § 35)

$$T = \frac{m}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\Theta}^2 + R^2\dot{\Phi}^2 \sin^2 \Theta) + \frac{I_1}{2}(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{I_3}{2}(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2, \quad (1)$$

где  $I_1 = I_2 = \frac{m}{5}(a^2 + c^2)$  и  $I_3 = \frac{2m}{5}a^2$  — моменты инерции эллипсоида относительно осей  $x_1, x_2, x_3$ .

Предложенная потенциальная энергия взаимодействия эллипсоида с кулоновским центром может быть преобразована к виду

$$U = -\frac{\gamma m M}{R} - \frac{\gamma M D}{4} \cdot \frac{3 \cos^2 \alpha - 1}{R^3}, \quad (2)$$

где  $D = 2(I_1 - I_3)$ , а  $\alpha$  — угол между радиусом-вектором  $\mathbf{R}$  и осью  $x_3$ .

Единичный вектор  $\mathbf{e}_{x_3}$ , задающий направление оси, имеет компоненты  $\mathbf{e}_{x_3} = (\sin \theta \sin \varphi, -\sin \theta \cos \varphi, \cos \theta)$ . Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{\mathbf{R} \mathbf{e}_{x_3}}{R} = \cos \theta \cos \Theta + \sin \theta \sin \Theta \sin(\varphi - \Phi). \quad (3)$$

Из (1), (2) и (3) получается окончательное выражение для функции Лагранжа  $L = T - U$ .

**9.15.** Рассмотрим вначале влияние только Солнца. Начало системы координат совместим с Солнцем, ось  $X_3$  (см. обозначения предыдущей задачи) направим перпендикулярно к плоскости орбиты Земли, ось  $x_3$  — на север.

Можно ожидать, что угловая скорость прецессии земной оси  $\dot{\varphi}$  мала по сравнению со скоростями суточного  $\dot{\psi}$  и годового  $\dot{\Phi}$  вращения Земли. Поэтому в функции Лагранжа сохраним лишь члены первого порядка по  $\dot{\varphi}$ . Кроме того, положим постоянными величины  $R, \Theta = \pi/2$  и  $\dot{\Phi}$ , причем

$$\frac{2\pi}{\dot{\Phi}} = 2\pi \sqrt{\frac{R^3}{\gamma M}} = 1 \text{ год}, \quad (1)$$

и усредним  $\cos^2 \alpha$  за год:  $\langle \cos^2 \alpha \rangle = (1/2) \sin^2 \theta$ . После этого

$$L = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi}^2 + 2\dot{\psi}\dot{\phi} \cos \theta) - \frac{3\gamma M m (a^2 - c^2)}{20R^3} \sin^2 \theta.$$

Из сохранения  $p_\psi = I_3(\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)$  и  $p_\phi = I_3 \dot{\psi} \cos \theta$  следует, что  $\dot{\psi}$  и  $\theta = 23^\circ$  сохраняются (с точностью до величин порядка  $\dot{\psi}$ ). Уравнения движения по углу  $\theta$

$$I_1 \ddot{\theta} + I_3 \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \theta + \frac{3\gamma M m (a^2 - c^2)}{10R^3} \sin \theta \cos \theta = 0$$

с учетом того, что  $\ddot{\theta} \sim \dot{\theta}^2 \sim \dot{\phi}^2$ , дает

$$\dot{\phi} = -\frac{3\gamma M}{4R^3 \dot{\psi}} \frac{a^2 - c^2}{a^2} \cos \theta.$$

Подставляя соотношение (1) и  $\frac{a^2 - c^2}{a^2} \approx \frac{2(a - c)}{a}$ , получим

$$\dot{\phi} \approx -\frac{3}{2} \frac{a - c}{a} \frac{\dot{\phi}^2}{\dot{\psi}} \cos \theta \approx -16'' \text{ в год.}$$

Скорость прецессии, вызываемой Луной, получается из (2) заменой массы Солнца  $M$  на массу Луны и  $R$  — расстоянием от Земли до Луны и оказывается равной  $-31''$  в год. Полная скорость  $\dot{\phi} = -48''$  в год. Наблюдаемая величина  $\dot{\phi}_{\text{эксп.}} = -50,2''$  в год (см. [24], гл. 2).

Таким образом, земная ось вращается вокруг оси  $X_3$  с периодом около 26 тысяч лет в направлении, противоположном вращению Земли вокруг Солнца (так называемое предварение равноденствий).

**9.16.**

$$\dot{M}_1 + \left( \frac{1}{I_2} - \frac{1}{I_3} \right) M_2 M_3 = K_1,$$

$$\dot{M}_2 + \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) M_3 M_1 = K_2,$$

$$\dot{M}_3 + \left( \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) M_1 M_2 = K_3,$$

при  $I_1 = I_2$

$$M_1 = B \cos(\omega t + \varphi), \quad M_2 = B \sin(\omega t + \varphi), \quad M_3 = \text{const},$$

$$\omega = \left( \frac{1}{I_3} - \frac{1}{I_1} \right) M_3 \text{ (см. [1], § 36, а также ср. с задачей 10.20).}$$

**9.17.** Рассмотрим движение вокруг оси, близкой к оси инерции  $x_1$ . Из уравнений Эйлера (см. [1], формула (36.5))

$$\dot{\Omega}_1 + \frac{I_3 - I_1}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 = 0$$

получаем  $\Omega_1 = \text{const}$  с точностью до членов, пропорциональных  $\Omega_{2,3}/\Omega_1 \ll 1$ . Два других уравнения при этом условии становятся линейными относительно  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$ . Предполагая

$$\Omega_{2,3} \propto e^{st}, \quad (1)$$

получаем для  $s$  уравнение

$$s^2 = \frac{(I_1 - I_3)(I_2 - I_1)}{I_2 I_3} \Omega_1^2. \quad (2)$$

При  $I_2 < I_1 < I_3$  или  $I_3 < I_1 < I_2$  уравнение (2) имеет действительные корни, что, согласно (1), соответствует неустойчивости вращения относительно оси  $x_1$ .

Если же момент инерции  $I_1$  является наибольшим или наименьшим, то уравнение (2) имеет мнимые корни, т. е. изменение  $\Omega_2$  и  $\Omega_3$  имеет характер осцилляций и вращение вокруг оси  $x_1$  устойчиво.

**9.18.** Движение шара определяется уравнениями

$$m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} + \mathbf{f}, \quad (1)$$

$$I\dot{\boldsymbol{\omega}} = [\mathbf{a}\mathbf{f}], \quad (2)$$

$$\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{a}] = 0, \quad (3)$$

где  $m$  — масса шара,  $I = \frac{2}{5}ma^2$  — его момент инерции,  $a$  — радиус шара, проведенный в точку его касания с цилиндром,  $\mathbf{f}$  — сила, приложенная к шару в этой точке (сумма сил реакции и трения),  $\mathbf{v}$  — скорость и  $\boldsymbol{\omega}$  — угловая скорость шара.

Удобно воспользоваться цилиндрическими координатами с осью  $z$ , направленной по оси цилиндра. При этом необходимо учитывать, что проекция скорости изменения любого вектора  $\mathbf{A}$  на подвижные оси определяется формулами

$$\begin{aligned} (\dot{\mathbf{A}})_{\varphi} &= \dot{A}_{\varphi} + [\dot{\varphi}\mathbf{A}]_{\varphi} = \dot{A}_{\varphi} + \dot{\varphi}A_r, \\ (\dot{\mathbf{A}})_r &= \dot{A}_r + [\dot{\varphi}\mathbf{A}]_r = \dot{A}_r - \dot{\varphi}A_{\varphi} \end{aligned} \quad (4)$$

( $r = b - a$ ,  $\varphi, z$  — координаты центра шара,  $\dot{\varphi} = v_\varphi/r$ ). Из уравнений

$$m\dot{v}_\varphi = f_\varphi, \quad I\dot{\omega}_z = af_\varphi, \quad v_\varphi + a\omega_z = 0$$

получаем

$$v_\varphi = \text{const}, \quad \omega_z = \text{const}, \quad f_\varphi = 0.$$

Из уравнений

$$\begin{aligned} m\dot{v}_z &= -mg + f_z, & v_z - a\omega_\varphi &= 0, \\ I(\dot{\omega}_\varphi + \dot{\varphi}\omega_r) &= -af_z, & I(\dot{\omega}_r - \dot{\varphi}\omega_\varphi) &= 0 \end{aligned}$$

следует

$$(I + ma^2)\ddot{\omega}_\varphi + I\dot{\varphi}^2\omega_\varphi = 0,$$

откуда

$$\begin{aligned} \omega_\varphi &= C \cos(\Omega t + \alpha), & \Omega &= \sqrt{\frac{I}{I + ma^2}}\dot{\varphi} = \sqrt{\frac{2}{7}}\frac{v_\varphi}{r}, \\ \omega_r &= -\frac{5gr}{2av_\varphi} + \sqrt{\frac{7}{2}}C \sin(\Omega t + \alpha), \\ z &= z_0 - a\frac{C}{\Omega} \sin(\Omega t + \alpha). \end{aligned}$$

Таким образом, шар совершает гармонические колебания по высоте, и в такт этим колебаниям изменяется радиальная компонента угловой скорости.

**9.19.** а) В качестве обобщенных координат выбираем координаты  $X, Y$  центра и эйлеровы углы  $\varphi, \theta, \psi$  ([1], § 35). Ось  $Z$  вертикальна, подвижная ось  $x_3$  направлена по оси диска. Линия пересечения плоскости диска с плоскостью  $XY$  (линия узлов) составляет угол  $\varphi$  с осью  $X$ . Функция Лагранжа

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + a^2\dot{\theta}^2 \cos^2 \theta) + \frac{1}{2}I_1(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) + \\ &+ \frac{1}{2}I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 - mga \sin \theta, \end{aligned}$$

где  $I_1 = I_2$  и  $I_3$  — моменты инерции диска относительно осей  $x_1, x_2, x_3$ ,  $a$  — радиус,  $m$  — масса диска (высота центра диска над плоскостью  $Z = a \sin \theta$ ).



Интегралами движения являются обобщенные импульсы

$$\begin{aligned} m\dot{X} &= p_X, \quad m\dot{Y} = p_Y, \\ I_1\dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3 \cos \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) &= p_\varphi \equiv M_Z, \\ I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) &= p_\psi \equiv M_3 \end{aligned} \quad (1)$$

и энергия. В системе координат, движущейся с постоянной скоростью  $(\dot{X}, \dot{Y}, 0)$ , центр диска движется только в вертикальном направлении. Из (1) находим

$$\dot{\varphi} = \frac{M_Z - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{M_3}{I_3} - \frac{M_Z - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \cos \theta, \quad (2)$$

и, подставляя в интеграл энергии, получаем

$$E = \frac{1}{2}(I_1 + ma^2 \cos^2 \theta)\dot{\theta}^2 + \frac{M_3^2}{2I_3} + \frac{(M_Z - M_3 \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + mga \sin \theta. \quad (3)$$

Отсюда через квадратуры определяется зависимость  $\theta(t)$ , а затем с помощью (2) зависимость  $\varphi(t)$ ,  $\psi(t)$ .

Угол наклона диска совершает колебания, и в такт с ними изменяются скорости прецессии  $\dot{\varphi}$  и вращения вокруг оси  $\dot{\psi}$ . Уравнения (2), (3) подобны уравнениям движения тяжелого симметрического волчка (см., например, уравнения (4)–(7) из [1], § 35, задача 1).

Качение диска устойчиво при  $\Omega_3^2 > mgaI_1/I_3^2$ , верчение — при  $\Omega_Z^2 > mga/I_1$ .

б) В отсутствие проскальзывания на диск, кроме сил тяжести  $mg$  и реакции опоры  $\mathbf{R}$ , действует еще сила трения  $\mathbf{f}$ .

Уравнение

$$\dot{\mathbf{M}} - [\mathbf{aR}] = [\mathbf{af}]$$

удобно записать в проекциях на оси  $Z$ ,  $x_3$  и  $\xi$  (ось  $\xi$  — линия узлов)<sup>1</sup>:

$$\dot{M}_Z = f_\eta a \cos \theta, \quad \dot{M}_3 = f_\xi a, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = f_\xi a \sin \theta. \quad (5)$$

<sup>1</sup>В отсутствие силы трения эти уравнения представляют собой уравнения Лагранжа для углов Эйлера.

Здесь  $\mathbf{a}$  — вектор, проведенный из центра диска в точку его соприкосновения с плоскостью.

Запишем уравнение

$$m\mathbf{V} = \mathbf{f} + \mathbf{R} + mg$$

в проекциях на оси  $\xi$  и  $\eta$ , где ось  $\eta$  горизонтальна и перпендикулярна оси  $\xi$  (см. формулу (4) предыдущей задачи):

$$\begin{aligned} f_\xi &= m(\dot{\mathbf{V}})_\xi = m(\dot{V}_\xi + \dot{\varphi}V_\eta), \\ f_\eta &= m(\dot{\mathbf{V}})_\eta = m(\dot{V}_\eta - \dot{\varphi}V_\xi). \end{aligned} \quad (6)$$

Условие качения без проскальзывания  $\mathbf{V} + [\boldsymbol{\Omega}\mathbf{a}] = 0$  приводит к равенствам

$$V_\xi = -a(\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta), \quad V_\eta = a\dot{\theta}. \quad (7)$$

Подставляя (1), (6), (7) в (4), (5), получим систему уравнений относительно углов Эйлера. Движение без проскальзывания и без отрыва диска от плоскости возможно, если

$$|f| \leq \mu m(g + \ddot{Z}), \quad g + \ddot{Z} \geq 0$$

( $\mu$  — коэффициент трения).

Полагая  $\dot{\theta} = 0$ , получаем  $\ddot{\varphi} = \ddot{\psi} = 0$ , причем  $\theta$ ,  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$  связаны соотношением

$$I'_3 \dot{\varphi}(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \sin \theta - I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + mga \cos \theta = 0 \quad (8)$$

(здесь и далее  $I'_{1,3} = I_{1,3} + ma^2$ ). Центр диска, двигаясь с постоянной по величине скоростью  $V = a|\Omega_3| = a|\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta|$ , описывает окружность радиуса  $R = V/|\dot{\varphi}|$ . Условия (8) можно представить также в виде

$$I'_3 R V^2 = |I_1 a V^2 \cos \theta + m g a^2 R^2 \operatorname{ctg} \theta|.$$

В частности, если масса диска сосредоточена в его центре ( $I_1 = I_3 = 0$ ), то получаем элементарное соотношение:  $V^2 = gR|\operatorname{ctg} \theta|$ .

Гироскопические эффекты, возникающие при отличных от нуля  $I_{1,3}$ , могут оказаться весьма значительными. Например, для однородного диска ( $2I_1 = I_3 = \frac{1}{2}ma^2$ ) в случае  $R \gg a$  получаем  $\frac{3}{2}V^2 = gR|\operatorname{ctg} \theta|$ ; для обруча ( $2I_1 = I_3 = ma^2$ ) в том же случае  $2V^2 = gR|\operatorname{ctg} \theta|$ .

При качении диска в вертикальном положении

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\psi} = \Omega_3 = \text{const.} \quad (9)$$

Для исследования устойчивости такого движения положим в уравнениях (1), (4)–(7)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \beta \ll 1, \quad \dot{\varphi} \sim \dot{\beta} \sim \beta \Omega_3 \ll \Omega_3, \quad \ddot{\varphi} \sim \ddot{\beta} \sim \dot{\Omega}_3 \ll \dot{\varphi} \Omega_3$$

и сохраним только члены первого порядка малости. Получаем

$$\begin{aligned} M_Z = I_1 \dot{\varphi} + I_3 \Omega_3 \beta = \text{const}, \quad \Omega_3 = \text{const}, \\ I_1' \ddot{\beta} + I_3' \Omega_3 \dot{\varphi} - mga \beta = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

откуда

$$I_1' \ddot{\beta} + \left( \frac{I_3 I_3'}{I_1} \Omega_3^2 - mga \right) \beta = \frac{I_3'}{I_1} M_Z \Omega_3.$$

Если

$$\Omega_3^2 > \frac{I_1 mga}{I_3 I_3'}, \quad (11)$$

то при отклонении угла  $\theta$  от  $\pi/2$  возникают малые колебания  $\beta$  и  $\dot{\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{I_3' \Omega_3 M_Z}{I_1 \omega^2} + \beta_0 \cos(\omega t + \delta), \\ \dot{\varphi} &= -\frac{mga M_Z}{I_1^2 \omega^2} - \frac{I_3 \Omega_3 \beta_0}{I_1} \sin(\omega t + \delta), \end{aligned}$$

где  $\omega^2 = \frac{I_3 I_3'}{I_1 I_1'} \Omega_3^2 - \frac{Mga}{I_1'}$ .

Направление движения диска также испытывает малые колебания, причем диск движется не вблизи прямой, а вблизи окружности радиуса  $a \Omega_3 I_1^2 \omega^2 / mga M_Z$ .

Таким образом, наличие малого отклонения начальных условий от (9) может привести либо к малым колебаниям вблизи «равновесного» движения по прямой (если  $M_z = 0, \beta_0 \neq 0$ ) либо к новому «равновесному» движению (если  $M_z \neq 0, \beta_0 = 0$ ).

Если неравенство (11) не выполнено, то движение неустойчиво.

Можно сказать, что движение происходит с  $\theta = \text{const}$ , если в «пространстве»  $\theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$  точка лежит на поверхности, определяемой уравнением (8). Нетрудно убедиться, что при условии (11) движение устойчиво относительно возмущений, выводящих точку  $(\theta, \dot{\varphi}, \dot{\psi})$  с поверхности (8) и безразлично относительно ее перемещений по этой поверхности. Аналогично обстоит дело и с устойчивостью движения диска на гладкой плоскости (нужно только заменить  $I'_{1,3}$  и  $I_{1,3}$ ).

Верчение диска вокруг вертикального диаметра устойчиво, если  $\Omega_Z^2 > mga/I'_1$ .

в) Отсутствие вращения вокруг вертикальной оси (верчения) приводит к условию

$$\Omega_Z = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta = 0. \quad (12)$$

На диск в этом случае действует добавочный «момент трения верчения»  $N$ , направленный вертикально, и вместо (4) получаем

$$\dot{M}_Z = f_\xi a \cos \theta + N, \quad \dot{M}_3 = f_\xi a + N \cos \theta. \quad (13)$$

Интегрирование уравнений движения относительно легко сводится к квадратурам (в отличие от уравнений пункта б)).

Движение с постоянным углом наклона возможно, если, кроме условия (8), выполняется и условие (12), т. е.  $\dot{\varphi}$  и  $\dot{\psi}$  определяются углом  $\theta$ . В этом случае

$$R = a |\sin \theta \operatorname{tg} \theta|, \quad V^2 = \frac{mga^3 \sin \theta}{I'_3 - I_1 \operatorname{ctg}^2 \theta}.$$

Качение диска в вертикальном положении устойчиво при  $\Omega_3^2 > mga/I'_3$ .

г) При наличии малого наклона плоскости к функции Лагранжа следует добавить член  $\delta L = -mg\alpha X$  (ось  $X$  направлена вверх вдоль плоскости, ось  $Y$  горизонтальна, ось  $Z$  перпендикулярна плоскости). Полагая в (1), (4)–(7)

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta, \quad \beta \ll 1, \quad \dot{\psi} \sim \dot{\beta} \ll \Omega_Z, \quad \ddot{\psi} \sim \ddot{\beta} \sim \dot{\Omega}_Z \ll \dot{\psi} \Omega_Z$$

и добавляя вклад  $\delta L$ , получаем

$$\begin{aligned} I'_1 \ddot{\beta} + (I_1 - I'_3) \Omega_Z^2 \beta - I'_3 \Omega_Z \dot{\psi} - mga \beta &= mga \alpha \sin \Omega_Z t, \\ I'_3 \ddot{\psi} + (I_3 + 2ma^2) \Omega_Z \dot{\beta} &= -mga \alpha \cos \Omega_Z t, \end{aligned}$$

откуда

$$\psi = -\left(2 + \frac{2ma^2}{I'_3} + \frac{mga}{I'_3\Omega_Z^2}\right)\alpha \cos \Omega_Z t, \quad \beta = -2\alpha \sin \Omega_Z t.$$

Подставляя (7) и  $\theta$ ,  $\varphi = \Omega_Z t$ ,  $\psi$  в

$$\dot{X} = V_\xi \cos \varphi - V_\eta \sin \varphi, \quad \dot{Y} = V_\xi \sin \varphi + V_\eta \cos \varphi$$

и усредняя по периоду вращения, находим

$$\langle \dot{X} \rangle = 0, \quad \langle \dot{Y} \rangle = -\left(1 + \frac{ma^2}{I'_3} + \frac{mga}{2I'_3\Omega_Z^2}\right)\alpha a \Omega_Z,$$

т. е. диск смещается, не теряя высоты.

**9.20.** а) Положение шара определяется координатами его центра масс  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и углами Эйлера  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  (см. [1], § 35), которые задают положения главных осей инерции. Ось  $Z$  направлена вверх, ось  $x_3$  — от центра масс к геометрическому центру шара, для которого  $x_3 = b$ , радиус шара  $a$ . Исследование движения шара проводится так же, как и в предыдущей задаче.

Если  $M_Z \neq M_3$ , то  $U_{\text{эфф}}(\theta)$  имеет минимум при  $\theta_0 \neq \theta$ ,  $\pi$  и при энергии  $E = U_{\text{эфф}}(\theta_0)$  происходит устойчивое вращение шара с постоянным углом  $\theta = \theta_0$ , при этом  $Z = a - b \cos \theta_0$ . Точка шара, которая в данный момент соприкасается с плоскостью, имеет скорость  $v = (b\dot{\varphi} + a\dot{\psi}) \sin \theta_0$ , направленную вдоль линии узлов.

Учтем теперь малую силу сухого трения  $f$ . Она направлена в сторону, противоположную  $v$ , и приведет к изменению угла  $\theta_0$ . При  $v \geq 0$

$$\dot{M}_Z = \mp f b \sin \theta_0, \quad \dot{M}_3 = \mp f a \sin \theta_0, \quad (1)$$

откуда

$$M_Z a - M_3 b = C = \text{const.} \quad (2)$$

Для быстро вращающегося шара  $M \approx M_3$ ,  $M_Z \approx M \cos \theta_0$ , или с учетом (2)

$$M(a \cos \theta_0 - b) = C. \quad (3)$$

Отсюда видно, что при уменьшении момента импульса из-за трения угол  $\theta_0$  должен уменьшаться, если  $a \cos \theta_0 - b > 0$ , и увеличиваться, если  $a \cos \theta_0 - b < 0$ . При этом в силу (1), (3)  $\dot{\theta}_0 = -fb/aC(a \cos \theta_0 - b)^2$ .

Центр масс медленно движется вдоль оси  $Z$ , а в плоскости  $XY$  переменная сила трения  $f_X = -f \cos \varphi$ ,  $f_Y = -f \sin \varphi$  вызывает вращение центра масс по малой окружности с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$ . Конечно, даже малая сила трения приведет со временем к тому, что проскальзывание исчезнет и скорость нижней точки шара станет равной нулю.

б) Пусть  $\mathbf{R}_c = (X + b \sin \theta \sin \varphi, Y - b \sin \theta \cos \varphi, a)$  — координаты геометрического центра шара;  $\Omega = (\Omega_X, \Omega_Y, \Omega_Z) = (\dot{\theta} \cos \varphi + \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi, \dot{\theta} \sin \varphi - \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi, \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta)$  — угловая скорость вращения шара и  $\mathbf{a} = (0, 0, -a)$  — радиус, проведенный из геометрического центра шара в точку касания. Тогда условие качения шара без проскальзывания  $\dot{\mathbf{R}}_c + [\Omega \mathbf{a}] = 0$  представляет собой неголономную связь:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \dot{\theta}(a - b \cos \theta) \sin \varphi - (a\dot{\psi} + b\dot{\varphi}) \sin \theta \cos \varphi, \\ \dot{Y} &= -\dot{\theta}(a - b \cos \theta) \cos \varphi - (a\dot{\psi} + b\dot{\varphi}) \sin \theta \sin \varphi.\end{aligned}\quad (4)$$

Уравнения движения

$$m\ddot{X} = \lambda_1, \quad m\ddot{Y} = \lambda_2, \quad (5)$$

$$\dot{M}_Z = (\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi) b \sin \theta, \quad (6)$$

$$\dot{M}_3 = (\lambda_1 \cos \varphi + \lambda_2 \sin \varphi) a \sin \theta, \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = (-\lambda_1 \sin \varphi + \lambda_2 \cos \varphi)(a - b \cos \theta) \quad (8)$$

содержат в правых частях силы трения и моменты этих сил. Множители Лагранжа  $\lambda_1, \lambda_2$  с помощью условий связи (4) могут быть выражены через углы Эйлера. Так, проекции силы трения на линию узлов  $f_{\parallel}$  и на перпендикулярное направление  $f_{\perp}$  равны

$$f_{\parallel} = m\dot{\theta}\dot{\varphi}(a - b \cos \theta) - m \frac{d}{dt} [(a\dot{\psi} + b\dot{\varphi}) \sin \theta], \quad (9)$$

$$f_{\perp} = -m \frac{d}{dt} [\dot{\theta}(a - b \cos \theta)] - m\dot{\varphi}(a\dot{\psi} + b\dot{\varphi}) \sin \theta. \quad (10)$$

Заметим, что (6), (7) совпадут с (1), если в уравнениях (1) заменить силу сухого трения  $\mp f$  на силу трения покоя  $f_{\parallel}$  (9). Как и раньше,  $M_z a - M_3 b = C$  является интегралом движения (2).

**9.21.** При решении задачи необходимо учесть, что высота тела над землей  $h$  мала по сравнению с радиусом Земли  $R$  и центробежное ускорение  $R\Omega^2$  ( $\Omega$  — угловая скорость Земли) мало по сравнению с ускорением

свободного падения на поверхности Земли  $g$ . Таким образом, в задаче есть два малых параметра:

$$\varepsilon_1 = h/R \lesssim \varepsilon_2 = R\Omega^2/g \sim 0,01.$$

В уравнении движения ( $\gamma$  — гравитационная постоянная,  $M$  — масса Земли)

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\gamma M \frac{\mathbf{R} + \mathbf{r}}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^3} + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] + [\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{R} + \mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}]] \quad (1)$$

разложим первое слагаемое в ряд по малому параметру  $r/R \lesssim \varepsilon_1$ :

$$\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{g} + 2[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] + \mathbf{g}_1 + [\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}]], \quad \mathbf{r}(0) = \mathbf{h}, \quad \mathbf{v}(0) = 0, \quad (2)$$

$$\mathbf{g} = -\gamma M \frac{\mathbf{R}}{R^3} + [\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{R}\boldsymbol{\Omega}]], \quad \mathbf{g}_1 = \frac{\gamma M}{R^2} \left( 3\mathbf{R} \frac{\mathbf{r}\mathbf{R}}{R^3} - \frac{\mathbf{r}}{R} \right) [1 + O(\varepsilon_1)].$$

Кориолисово ускорение  $2[\mathbf{v}\boldsymbol{\Omega}] \sim gt\boldsymbol{\Omega} \sim \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}g$  и  $g_1 \sim \varepsilon_1g$  имеют первый порядок малости, а  $[\boldsymbol{\Omega}[\mathbf{r}\boldsymbol{\Omega}]] \sim \varepsilon_1\varepsilon_2g$  — второй.

Вертикаль  $\mathbf{h}$  антипараллельна вектору  $\mathbf{g}$  и составляет малый угол  $\alpha = \varepsilon_2 \sin \lambda \cos \lambda$  с направлением вектора  $\mathbf{R}$  (здесь  $\lambda$  — северная широта (геоцентрическая) — угол между плоскостью экватора и вектором  $\mathbf{R}$ ). Выбираем ось  $z$  по вертикали вверх, ось  $x$  — по меридиану к югу, ось  $y$  — по широте к востоку, тогда

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g), \quad \mathbf{R} = R(\sin \alpha, 0, \cos \alpha), \quad \boldsymbol{\Omega} = \Omega(-\cos(\alpha + \lambda), 0, \sin(\alpha + \lambda))$$

В нулевом приближении частица движется с ускорением  $-g$  вдоль оси  $z$ . В первом приближении кориолисово ускорение приводит лишь к отклонению на восток, причем величина смещения  $y \sim \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}gt^2 \sim \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}h$ . Ускорение  $\mathbf{g}_1$  имеет вдоль  $z$  составляющие  $\sim \varepsilon_1g$ , а вдоль  $x$  и  $y$  — лишь второго порядка, поэтому в первом приближении влияние  $\mathbf{g}_1$  приведет лишь к увеличению времени падения с высоты  $h$  на величину  $\sim \varepsilon_1\sqrt{2h/g}$ . Отклонение к югу, таким образом, возникает лишь во втором порядке. Запишем уравнение (2) в проекциях на выбранные оси, удерживая для компонент  $z, y, x$  слагаемые нулевого, первого и второго порядков малости соответственно:

$$\begin{aligned} \ddot{z} &= -g, \quad \ddot{y} = -2\dot{z}\Omega \cos \lambda, \\ \ddot{x} &= 2\dot{y}\Omega \sin \lambda + g(3z \sin \alpha - x)/R + \Omega^2 z \sin \lambda \cos \lambda. \end{aligned}$$

Решая методом последовательных приближений, найдем

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2, \quad y = \frac{1}{3}gt^3\Omega \cos \lambda, \quad x = 2ht^2\Omega^2 \sin \lambda \cos \lambda.$$

Подставляя время падения  $t = \sqrt{2h/g}$ , найдем отклонения к востоку и югу

$$y = \frac{1}{3}\sqrt{8\varepsilon_1\varepsilon_2}h \cos \lambda, \quad x = 2\varepsilon_1\varepsilon_2h \sin 2\lambda.$$

**9.22.** Воспользуемся системой отсчета, вращающейся вместе с сосудом; ось  $x$  направим вдоль  $AB$ , начало координат поместим в неподвижной точке — пересечении осей  $AB$  и  $CD$ . Угловая скорость системы  $\Omega = \omega_1 + \omega_2 = (\omega_2, \omega_1 \cos \omega_2 t, -\omega_1 \sin \omega_2 t)$ . На каждую частицу жидкости массы  $m$  в этой системе отсчета наряду с силой тяжести  $mg$  действуют силы инерции (см. [1], § 39): сила Кориолиса  $2m[\mathbf{v}\Omega]$ , центробежная сила  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{m[\Omega \mathbf{r}]^2}{2}$  и сила  $m[\mathbf{r}\dot{\Omega}]$ , где  $\dot{\Omega}$  — скорость изменения вектора  $\Omega$  в неподвижной системе отсчета.

При затвердевании смолы скорости частиц (относительно сосуда) обращаются в нуль и сила Кориолиса исчезает. Остальные три слагаемые нужно усреднить по периодам вращения:

$$\langle mg \rangle = -mg(\langle \cos \omega_1 t \rangle, \langle \sin \omega_1 t \sin \omega_2 t \rangle, \langle \sin \omega_1 t \cos \omega_2 t \rangle) = 0,$$

если  $\omega_1 \neq \omega_2$ ,

$$\langle m[\mathbf{r}\dot{\Omega}] \rangle = m[\mathbf{r}\langle \dot{\Omega} \rangle], \quad \langle \dot{\Omega} \rangle = \langle [\omega_1 \omega_2] \rangle = [\langle \omega_1 \rangle \omega_2] = 0.$$

Наконец,

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{m}{2} [\Omega \mathbf{r}]^2 \right\rangle = \frac{m}{2} \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}},$$

где

$$\begin{aligned} U &= \langle [\Omega \mathbf{r}]^2 \rangle = \langle \Omega^2 r^2 - (\Omega \mathbf{r})^2 \rangle = \\ &= (\omega_1^2 + \omega_2^2) r^2 - \langle (x\omega_2 + y\omega_1 \cos \omega_2 t - z\omega_1 \sin \omega_2 t)^2 \rangle = \\ &= \omega_1^2 x^2 + \left( \frac{\omega_1^2}{2} + \omega_2^2 \right) (y^2 + z^2). \end{aligned} \quad (1)$$

Поверхность жидкости расположится по линии уровня  $U(\mathbf{r}) = \text{const}$ . Смола затвердеет в форме эллипсоида вращения.

Что изменится в этом результате при  $\omega_1 = \omega_2$ ?

При  $g = 0$  и  $\omega_2 \rightarrow 0$  из (1) получается, очевидно, неправильное решение. Почему?



$$9.23. \quad t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E + M\Omega - U_{\text{эфф}}}},$$

$$\varphi = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{\left(\frac{M}{r^2} - \Omega\right) dr}{\sqrt{E + M\Omega - U_{\text{эфф}}}},$$

где  $E$  — энергия,  $M$  — момент импульса во вращающейся системе отсчета,  $U_{\text{эфф}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$ . Напомним, что  $E = E_0 - M\Omega$ ,  $M = M_0$ , где  $E_0$  и  $M_0$  — энергия и момент импульса в инерциальной системе.

Интересно, что центробежная потенциальная энергия  $-m\Omega^2 r^2/2$  не входит в  $U_{\text{эфф}}$ .

**9.24.** В системе координат, связанной с рамкой, функция Лагранжа данной задачи совпадает с рассмотренной в задаче 6.36 (при  $z = 0$  и с параметрами  $\omega_{\mathcal{H}} = -2\Omega$ ,  $\omega_{1,2}^2 = \frac{2}{m} \left(k_{1,2} + \frac{f_{1,2}}{l}\right) - \Omega^2$ ). При  $\omega_{1,2}^2 > 0$  движение частицы совпадает с движением анизотропного осциллятора в магнитном поле  $\mathcal{H} = -2mc\Omega/e$ . Траектория частицы для случая  $\omega_1 = \omega_2$  изображена на рис. 97 к задаче 2.32. В частности, если  $\omega_1 = \omega_2 = 0$ , движение частицы совпадает с движением свободной частицы в магнитном поле  $x = x_0 + a \cos \omega_{\mathcal{H}} t$ ,  $y = y_0 - a \sin \omega_{\mathcal{H}} t$ , т. е. частица равномерно движется по окружности радиуса  $a$  с центром в точке  $(x_0, y_0)$ . Интересно разобраться, какому движению частиц в неподвижной системе координат соответствует последний случай, в частности при  $a = 0$  или при  $x_0 = y_0 = 0$ .

Если центробежная сила превысит силы возвращающие, действующие со стороны обеих пружинок,  $\omega_{1,2}^2 < 0$ , то частица по-прежнему совершает малые колебания. Хотя потенциальная энергия имеет при  $x = y = 0$  максимум, устойчивость этого положения равновесия обеспечивается силой Кориолиса.

Если же  $\omega_1^2$  и  $\omega_2^2$  имеют разные знаки (т. е.  $x = y = 0$  — седловая точка для потенциальной энергии), то это положение равновесия неустойчиво.

Интересно сопоставить эти результаты с ответом задачи 5.4. В системе отсчета, вращающейся с угловой скоростью  $\Omega$ , точка  $r_0$ ,  $\varphi_0$  лежит на гребне «потенциального цирка»; потенциальная энергия  $U = -\frac{\alpha}{r^n} - \frac{m\Omega^2 r^2}{2}$  имеет максимум относительно смещения в направлении радиуса-вектора и не изменяется при смещении в азимутальном направлении. В этом случае одно из нормальных колебаний происходит с частотой  $\omega$ , частота же другого

обращается в нуль: положение равновесия безразлично относительно некоторых возмущений (например, изменения  $\varphi_0$ ).

### 9.25. Функция Лагранжа

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}(\mathbf{v} + [\boldsymbol{\omega}\mathbf{r}])^2 + m\mathbf{g}\mathbf{r} = \\ &= \frac{m}{2}\left[(\dot{x} - \omega y)^2 + (\dot{y} + \omega x)^2 + \dot{z}^2 - g\left(\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b}\right)\right]. \end{aligned}$$

Для малых колебаний можно опустить  $\dot{z}$ , тогда уравнения движения

$$\begin{aligned} \ddot{x} - 2\omega\dot{y} + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)x &= 0, \\ \ddot{y} + 2\omega\dot{x} + \left(\frac{g}{b} - \omega^2\right)y &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Ищем решение в виде

$$x = Ae^{i\Omega t}, \quad y = Be^{i\Omega t}$$

и для  $\Omega^2$  получаем уравнение

$$\Omega^4 - \left(\frac{g}{a} + \frac{g}{b} + 2\omega^2\right)\Omega^2 + \left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{b} - \omega^2\right) = 0.$$

Легко убедиться, что корни его действительны. Однако при

$$\left(\frac{g}{a} - \omega^2\right)\left(\frac{g}{b} - \omega^2\right) < 0$$

один из корней  $\Omega_1^2 < 0$ , так что соответствующее движение

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{|\Omega_1|t} + A_2 e^{-|\Omega_1|t}, \\ y &= B_1 e^{|\Omega_1|t} + B_2 e^{-|\Omega_1|t} \end{aligned}$$

приводит к уходу частицы от начала координат. Это и означает, что нижнее положение частицы неустойчиво. Считая для определенности  $a > b$ , получаем область неустойчивости

$$\frac{g}{a} < \omega^2 < \frac{g}{b}.$$

Обратим внимание на то, что при  $\omega^2 > g/b$  движение устойчиво, хотя потенциальная энергия во вращающейся системе отсчета

$$U = -\frac{m}{2}\left(\omega^2 - \frac{g}{a}\right)x^2 - \frac{m}{2}\left(\omega^2 - \frac{g}{b}\right)y^2$$

представляет не потенциальную яму, а потенциальный горб. Устойчивость в этом случае обеспечивается действием сил Кориолиса.

**9.26.** а) Потенциальная энергия (включая центробежную)

$$U(x) = k(x - a)^2 - \frac{m\gamma^2 x^2}{2}.$$

Условие  $U'(x_0) = 0$  определяет положение равновесия

$$x_0 = \frac{2ka}{2k - m\gamma^2}.$$

Интересно, что при частоте вращения  $\gamma$ , большей частоты собственных колебаний частицы  $\sqrt{2k/m}$ , оказывается  $x_0 < 0$ , а при  $m\gamma^2 \gg 2k$  положение равновесия близко к оси вращения.

Знак  $U''(x_0) = 2k - m\gamma^2$  определяет устойчивость положения равновесия: при  $m\gamma^2 < 2k$  равновесие устойчиво; при  $m\gamma^2 > 2k$  — неустойчиво.

б) Очевидно, положение равновесия такое же, как в пункте а). Для исследования устойчивости рассмотрим потенциальную энергию при малых смещениях из положения равновесия:

$$U(x, y, z) = U(x_0, 0, 0) + \frac{k_2 y^2}{2} + \frac{k_3 z^2}{2} + k_1 \frac{(x - x_0)^2}{2},$$

где

$$k_1 = 2k - m\gamma^2,$$

$$k_2 = \frac{f + k(x_0 - a)}{l + x_0 - a} + \frac{f - k(x_0 - a)}{l - x_0 + a} - m\gamma^2 = -m\gamma^2 + k_3.$$

Сравнение с задачей 9.24 приводит к заключению, что равновесие неустойчиво лишь в том случае, если  $k_1$  и  $k_2$  имеют разные знаки. В частности, при  $m\gamma^2 \gg 2k + 2f/l$  равновесие устойчиво, в отличие от результатов пункта а). Если же  $k_1 k_2 < 0$ , то отклонение частицы от точки  $(x_0, 0, 0)$  нарастает со временем (пока не станет существенным воздействие стенок рамки, которое мы не рассматриваем).

**9.27.** Воспользуемся декартовыми координатами во вращающейся системе отсчета. Начало координат поместим в центр масс, система вращается с угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси  $z$ , а звезды расположены на оси  $x$  (рис. 152).

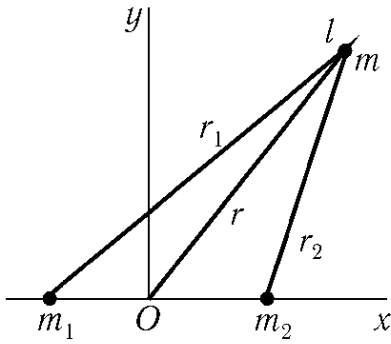


Рис. 152

Пусть расстояния от звезд до центра масс  $a_{1,2} = \mp \frac{m_{2,1}a}{m_1 + m_2}$ , где  $m_{1,2}$  — массы звезд,  $a$  — расстояние между ними. Из равенства

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} a \omega^2 = \frac{\gamma m_1 m_2}{a^2}$$

( $\gamma$  — гравитационная постоянная) получаем

$$\omega^2 = \gamma \frac{m_1 + m_2}{a^3}.$$

Потенциальная энергия тела массы  $m$  (включая центробежную энергию)

$$U(x, y, z) = -\frac{\gamma m m_1}{r_1} - \frac{\gamma m m_2}{r_2} + \frac{m \omega^2}{2} (x^2 + y^2),$$

где  $r_{1,2}$  — расстояние до звезд,  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  — радиус-вектор тела. Положение равновесия тела определяется условием  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0$ , или

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \gamma m \left( \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - \frac{m_1 + m_2}{a^3} \right) x - \gamma m \left( \frac{m_1 a_1}{r_1^3} + \frac{m_2 a_2}{r_2^3} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \gamma m \left( \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} - \frac{m_1 + m_2}{a^3} \right) y = 0,$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \gamma m \left( \frac{m_1}{r_1^3} + \frac{m_2}{r_2^3} \right) z = 0.$$

Отсюда  $z = 0$  и (при  $y \neq 0$ )  $r_1 = r_2 = a$ .

Таким образом, звезды и точка равновесия находятся в вершинах правильного треугольника. Есть две такие точки, так называемые точки Лагранжа,  $x_0 - a_1 = a_2 - x_0 = \frac{a}{2}$ ,  $y_0 = \pm \frac{a\sqrt{3}}{2}$ ,  $z_0 = 0$ .

Вблизи точек Лагранжа

$$\begin{aligned}
 U(x_0 + x_1, y_0 + y_1, z_0 + z_1) = \\
 = U(x_0, y_0, z_0) - \frac{3}{8}m\omega^2 x_1^2 - 2m\alpha x_1 y_1 - \frac{9}{8}m\omega^2 y_1^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 z_1^2, \\
 \alpha = \pm \frac{3\sqrt{3}}{4a^3} \gamma (m_1 - m_2).
 \end{aligned}$$

Движение в направлении  $z$ , очевидно, устойчиво. Уравнения движения в плоскости  $x, y$

$$\ddot{x}_1 - \frac{3}{4}\omega^2 x_1 - 2\alpha y_1 - 2\omega \dot{y}_1 = 0,$$

$$\ddot{y}_1 - \frac{9}{4}\omega^2 y_1 - 2\alpha x_1 + 2\omega \dot{x}_1 = 0.$$

Подстановка  $x = Ae^{i\Omega t}$ ,  $y = Be^{i\Omega t}$  приводит к уравнению для  $\Omega$ :

$$\Omega^4 - \omega^2 \Omega^2 + \frac{27}{16}\omega^4 - 4\alpha^2 = 0.$$

Его корни действительны при  $64\alpha^2 \geq 23\omega^4$ , т. е. при

$$(m_1 + m_2)^2 \geq 27m_1 m_2.$$

Это условие выполняется, если масса одной звезды больше другой не менее чем в 25 раз. В этом случае движение тел в окрестности точек Лагранжа устойчиво. Устойчивость движения обеспечивается силами Кориолиса (ср. с задачей 9.25).

На оси  $x$  есть еще три точки, в которых  $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} = 0$ , однако движение вблизи них неустойчиво.

Для системы Солнце–Юпитер в точках Лагранжа наблюдаются астероиды.

**9.28.** Будем рассматривать колебания в системе отсчета, вращающейся вместе с молекулой. Функция Лагранжа получается из (1) задачи 6.49 заменой  $\mathbf{u}_a$  на  $\mathbf{u}_a + [\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{r}_{a0} + \mathbf{u}_a]$ , а угловая скорость вращения системы отсчета  $\boldsymbol{\Omega}$  выбирается равной угловой скорости вращения молекулы в отсутствие колебаний  $\boldsymbol{\Omega} m \sum r_{a0}^2 = \mathbf{M}$ . Условие (3) задачи 6.49, эквивалентное требованию  $y_1 + y_2 + y_3 = 0$ , отсутствует. Введя  $q_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}(y_1 + y_2 + y_3)$  и пренебрегая квадратичными по  $\boldsymbol{\Omega}$  членами<sup>1</sup>, можем представить функцию

<sup>1</sup>Учет этих поправок привел бы к заменам:

$$k \rightarrow k - \frac{m\Omega^2}{6}, \quad l \rightarrow l \left(1 + \frac{m\Omega^2}{2k}\right), \quad \Omega \rightarrow \Omega \left(1 - \frac{m\Omega^2}{k}\right).$$

Лагранжа в виде

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_2^2 + 2\dot{q}_3^2 + \dot{q}_4^2) - \frac{3k}{2}(q_1^2 + q_2^2 + q_3^2) + m\Omega(q_1\dot{q}_4 - q_4\dot{q}_1) + \frac{2}{3}m\Omega(q_2\dot{q}_3 - q_3\dot{q}_2).$$

Уравнения движения приводят к нормальным колебаниям

$$q_1^{(1)} = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \quad q_4^{(1)} = 2 \frac{\Omega}{\omega_1} A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1),$$

$$q_{2,3}^{(1)} = 0, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{3k}{m}},$$

$$q_2^{(2,3)} = A_{2,3} \cos(\omega_{2,3} t + \varphi_{2,3}), \quad q_3^{(2,3)} = \pm A_{2,3} \sin(\omega_{2,3} t + \varphi_{2,3}),$$

$$q_{1,4}^{(2,3)} = 0, \quad \omega_{2,3} = \sqrt{\frac{3k}{2m}},$$

$$q_1^{(4)} = \frac{2\Omega}{\omega_1^2} C, \quad q_{2,3}^{(4)} = 0, \quad q_4^{(4)} = Ct + D.$$

Вместо условия (3) задачи 6.49 получаем

$$\sum_a \{[\mathbf{r}_{a0} \dot{\mathbf{u}}_a] + 2\Omega(\mathbf{r}_{a0} \mathbf{u}_a)\} = 0,$$

или  $\dot{q}_4 - 2\Omega q_1 = 0$ , что соответствует выбору  $C = 0$ . Постоянную  $D$ , определяющую начальный поворот молекулы относительно вращающейся системы отсчета, также удобно положить равной нулю.

Как выглядят колебания, если во вращающейся системе отклонения в начальный момент имеют вид, изображенный на рис. 133, а начальные скорости равны нулю?

## § 10. Уравнения Гамильтона. Скобки Пуассона

**10.1.** Пусть  $\varepsilon$  — вектор бесконечно малого смещения; при этом

$$\mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}'_a = \mathbf{r}_a + \varepsilon, \quad \mathbf{p}_a \rightarrow \mathbf{p}'_a = \mathbf{p}_a, \\ H(\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a) = H(\mathbf{r}'_a, \mathbf{p}'_a).$$

Отсюда  $\sum_a \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_a} = 0$ . Используя уравнение Гамильтона, получаем:

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_a \dot{\mathbf{p}}_a = - \sum_a \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_a} = 0, \quad \mathbf{P} = \text{const.}$$

При бесконечно малом повороте  $\delta\varphi$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a \rightarrow \mathbf{r}'_a &= \mathbf{r}_a + [\delta\varphi \mathbf{r}_a], \quad \mathbf{p}_a \rightarrow \mathbf{p}'_a = \mathbf{p}_a + [\delta\varphi \mathbf{p}_a], \\ H(\mathbf{r}_a, \mathbf{p}_a) &= H(\mathbf{r}'_a, \mathbf{p}'_a) \quad \sum_a \left\{ \frac{\partial H}{\partial \mathbf{r}_a} [\delta\varphi \mathbf{r}_a] + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_a} [\delta\varphi \mathbf{p}_a] \right\} = 0 = \\ &= \sum_a \{ -\dot{\mathbf{p}}_a [\delta\varphi \mathbf{r}_a] + \dot{\mathbf{r}}_a [\delta\varphi \mathbf{p}_a] \} = -\delta\varphi \sum_a \frac{d}{dt} [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a], \end{aligned}$$

или

$$\mathbf{M} = \sum_a [\mathbf{r}_a \mathbf{p}_a] = \text{const.}$$

$$10.2. \quad H = \frac{p_\theta^2}{2I_1} + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{2I_3}.$$

$$10.3. \quad H = \frac{p^2}{2(1+2\beta x)} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3. \text{ В частности, для малых колебаний } (|\alpha x| \ll \omega^2, |\beta x| \ll 1)$$

$$H = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \alpha x^3 - \beta x p^2 + 2\beta^2 x^2 p^2 - \dots,$$

и с точностью до линейных по  $\alpha, \beta$  членов добавка к функции Гамильтона гармонического осциллятора связана с добавкой к функции Лагранжа соотношением  $\delta H = -\delta L$  (ср. [1], § 40).

$$10.4 \text{ а.} \quad x = a \cos(\omega t + \varphi), p = -\omega_0 a \sin(\omega t + \varphi), \text{ где } \omega = (1 + 2\lambda E_0)\omega_0, E_0 = \frac{1}{2}\omega_0^2 a^2.$$

10.4 б.  $p = p_0 + Ft, x = x_0 + \frac{A}{F}(\sqrt{p_0 + Ft} - \sqrt{p_0})$ . Данная функция Гамильтона приближенно описывает движение заряженного вихревого кольца в жидком гелии при наличии однородного электрического поля вдоль оси  $x$  [32]. Характерная особенность такого движения — импульс вихря растет со временем, а скорость его движения падает  $\dot{x} = A/(2\sqrt{p_0 + Ft})$ .

$$10.5. \quad \dot{\mathbf{r}} = \frac{c\mathbf{p}}{np}, \quad \dot{\mathbf{p}} = \frac{cp}{n^2} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}, \quad p = |\mathbf{p}|.$$

Предложенная функция Гамильтона описывает распространение света в прозрачной среде с показателем преломления  $n$  в приближении геометрической оптики (см. [3], § 65). «Частицей» является волновой пакет,  $\mathbf{r}(t)$  есть

закон именно его движения;  $\dot{\mathbf{r}}$  — это групповая скорость, а вектор  $\mathbf{p}$ , перпендикулярный к волновому фронту, определяет волновой вектор.

Траектория при  $n(\mathbf{r}) = ax$

$$x = C_1 \operatorname{ch}\left(\frac{y}{C_1} + C_2\right),$$

где  $C_1, C_2$  определяются начальной и конечной точками траектории.

$$10.6. \quad \text{а) } L = \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{a})^2}{2}; \quad \text{б) } L = 0;$$

подобные «частицы» нельзя описывать с помощью функции Лагранжа (см. [2], § 53).

10.7. Данный векторный потенциал определяет магнитное поле  $\mathcal{H}$ , направленное параллельно оси  $z$ .

Функция Гамильтона

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left( p_y - \frac{e}{c} \mathcal{H} x \right)^2.$$

Так как  $H$  не зависит от  $y$  и  $z$ , имеем  $p_y = \text{const}$ ,  $p_z = \text{const}$ . Представив  $H$  в виде  $H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}(x - x_0)^2 + \frac{p_z^2}{2m}$ , где  $\omega = \frac{e\mathcal{H}}{mc}$ ,  $x_0 = \frac{cp_y}{e\mathcal{H}}$ , видим, что для  $x, p_x$  получается такая же функция Гамильтона, как для гармонического осциллятора. Поэтому

$$x = a \cos(\omega t + \varphi) + x_0, \quad p_x = -m\omega a \sin(\omega t + \varphi).$$

Для определения  $y$  и  $z$  используем уравнения

$$\dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y} = \frac{1}{m} \left( p_y - \frac{e}{c} \mathcal{H} x \right) = -\omega a \cos(\omega t + \varphi), \quad \dot{z} = \frac{p_z}{m},$$

откуда

$$y = -a \sin(\omega t + \varphi) + y_0, \quad z = \frac{p_z}{m} t + z_0.$$

Частица движется по винтовой линии с осью, параллельной  $\mathcal{H}$ . Обобщенный импульс  $p_y$  определяет расстояние этой оси от плоскости  $yz$ .



**10.8.** Магнитное поле направлено по оси  $z$  и равно  $2hx$ . Движение по оси  $z$  равномерное. Отвлекаясь от него, рассмотрим движение в плоскости  $xy$ . Функция Гамильтона

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{1}{2m} \left( p_y - \frac{eh}{c} x^2 \right)^2$$

не зависит от  $y$  и  $t$ . Поэтому интегралами движения являются обобщенный импульс  $p_y$  и энергия  $E$ :

$$p_y = m\dot{y} + \frac{eh}{c} x^2,$$

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U_{\text{эфф}}(x), \quad U_{\text{эфф}}(x) = \frac{1}{2m} \left( p_y - \frac{eh}{c} x^2 \right)^2.$$

Для  $p_y \leq 0$  график  $U_{\text{эфф}}(x)$  изображен на рис. 153, а примерный вид траектории — на рис. 154. Следует учесть, что скорость

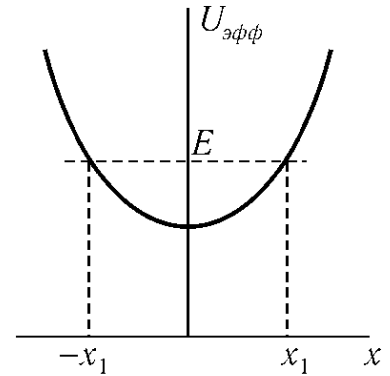


Рис. 153

$$\dot{y} = -\frac{|p_y|}{m} - \frac{eh}{mc} x^2$$

всюду отрицательна и колеблется вблизи значения  $p_y/m$ .

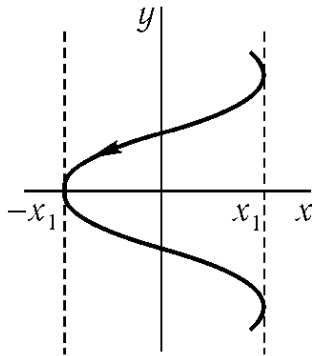


Рис. 154

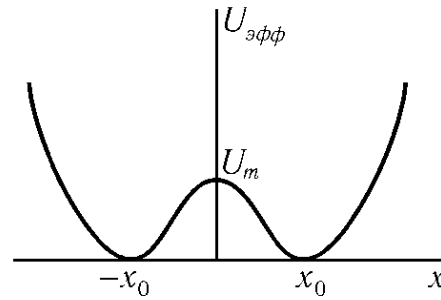


Рис. 155

Для  $p_y > 0$  график

$$U_{\text{эфф}}(x) = \frac{e^2 h^2}{2mc^2} (x^2 - x_0^2)^2, \quad x_0 = \sqrt{\frac{p_y c}{eh}}$$

изображен на рис. 155. Скорость

$$\dot{y} = \frac{eh}{mc} (x_0^2 - x^2)$$

при любом значении  $E$  принимает как положительные, так и отрицательные значения. Примерный вид траекторий изображен на рис. 156, случаям  $a-d$  соответствуют уменьшающиеся значения энергии.

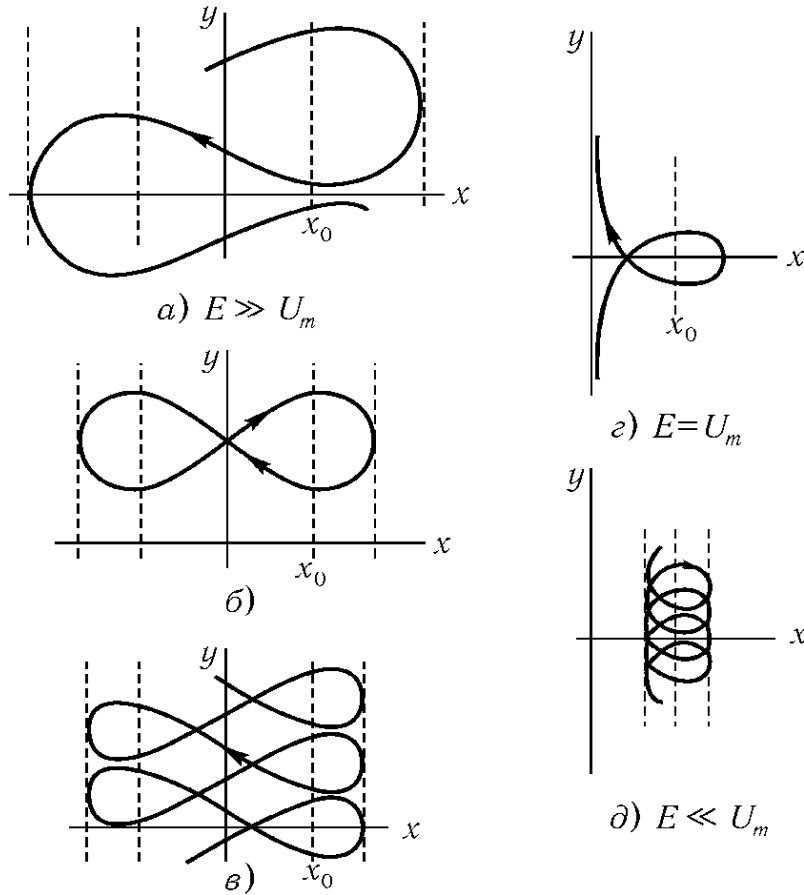


Рис. 156

При больших энергиях  $E \gg U_m = p_y^2/2m$  размах колебаний по оси  $x$  велик и среднее за период значение  $\langle x^2 \rangle$  больше  $x_0^2$ . Поэтому среднее значение

$$\langle \dot{y} \rangle = \frac{eh}{mc}(x_0^2 - \langle x^2 \rangle)$$

отрицательно (см. рис. 156,  $a$ ). При уменьшении энергии  $\langle \dot{y} \rangle$  возрастает до нуля (рис. 156,  $б$ ), а затем становится положительным (рис. 156,  $в$ ). При энергии  $E = U_m$  частица, имеющая в начальный момент  $x > x_0$  и  $\dot{x} < 0$ , асимптотически приближается к оси  $y$  (рис. 156,  $г$ ).

Наконец, при  $E < U_m$  частица движется либо в области вблизи  $(-x_0)$ , либо в области вблизи  $x_0$  (рис. 156,  $д$ ).

Можно показать, что  $\langle \dot{y} \rangle$  при этом больше нуля. При  $|x - x_0| \ll x_0$  частица движется по окружности, центр которой медленно дрейфует вдоль

оси  $y$ . Чтобы найти скорость дрейфа, необходимо при вычислении  $\langle x^2 \rangle$  учитывать первые ангармонические поправки

$$x = x_0 + a \cos \omega t - \frac{a^2}{4x_0}(3 - \cos 2\omega t),$$

что дает

$$\langle \dot{y} \rangle = \frac{cE}{2hx_0^2 e}$$

(ср. с задачей 8.14).

**10.9.** Введя координаты центра масс  $\mathbf{R}$  и относительного движения  $\mathbf{r}$  (ср. с задачами 2.25 и 2.26), представим функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{e}{2c} [\mathcal{H} \mathbf{r}] \dot{\mathbf{R}} + L_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) + \frac{e}{2c} [\mathcal{H} \mathbf{R}] \dot{\mathbf{r}}, \quad (1)$$

$$M = m_1 + m_2,$$

где

$$L_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}) = \frac{m}{2} \dot{\mathbf{r}}^2 + \frac{e}{2c} [\mathcal{H}' \mathbf{r}] \dot{\mathbf{r}} + \frac{e^2}{r} \quad \left( \mathcal{H}' = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} \mathcal{H} \right)$$

( $m$  — приведенная масса).

Последнее слагаемое в (1) перепишем в виде

$$\frac{e}{2c} [\mathcal{H} \mathbf{R}] \dot{\mathbf{r}} = \frac{e}{2c} [\mathcal{H} \mathbf{r}] \dot{\mathbf{R}} + \frac{d}{dt} \frac{e}{2c} [\mathcal{H} \mathbf{R}] \dot{\mathbf{r}}.$$

Отбрасывая полную производную по времени, имеем

$$L = \frac{M}{2} \dot{\mathbf{R}}^2 + \frac{e}{c} [\mathcal{H} \mathbf{r}] \dot{\mathbf{R}} + L_1(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}).$$

Эта функция Лагранжа не зависит явно от  $\mathbf{R}$ , поэтому сохраняется обобщенный импульс

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{R}}} = M \dot{\mathbf{R}} + \frac{e}{c} [\mathcal{H} \mathbf{r}] = \text{const}. \quad (2)$$

Функция Гамильтона системы имеет вид

$$H = \frac{1}{2M} \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} [\mathcal{H} \mathbf{r}] \right)^2 + \frac{1}{2m} \left( \mathbf{p} - \frac{e}{2c} [\mathcal{H}' \mathbf{r}] \right)^2 - \frac{e^2}{r}.$$

Отсюда с учетом (2) видно, что частица массы  $m$  движется в однородном магнитном поле  $\mathcal{H}'$  и в силовом поле с потенциальной энергией

$$U = -\frac{e^2}{r} + \frac{1}{2m} \left( \mathbf{P} - \frac{e}{c} [\mathcal{H} \mathbf{r}] \right)^2.$$

Если направить ось  $z$  по  $\mathcal{H}$ , то

$$U = -\frac{e^2}{r} + \frac{1}{2} m \omega^2 [(x-a)^2 + (y-b)^2] + \text{const},$$

$$\omega = \frac{e\mathcal{H}}{c\sqrt{m_1 m_2}}, \quad a = -\frac{cP_x}{e\mathcal{H}}, \quad b = \frac{cP_y}{e\mathcal{H}}.$$

После нахождения  $\mathbf{r}(t)$  закон движения центра масс определяется из уравнения (2)

$$\mathbf{R}(t) = \frac{\mathbf{P}t}{M} - \frac{e}{Mc} \left[ \mathcal{H} \int_0^t \mathbf{r}(t) dt \right] + \mathbf{R}_0.$$

**10.10.**

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + e\mathcal{E}t, \quad \varepsilon(\mathbf{p}) - e\mathcal{E}\mathbf{r} = \varepsilon_0,$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)e\mathcal{E} = \varepsilon(\mathbf{p}_0 + e\mathcal{E}t) - \varepsilon(\mathbf{p}_0).$$

Здесь  $\mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{p}_0$  и  $\varepsilon_0$  — постоянные.

**10.11.**

$$\dot{\mathbf{p}} = e\mathcal{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathcal{H}].^1$$

**10.12.** а)  $\varepsilon(\mathbf{p}) = E$ ,  $p_{\mathcal{H}} = \text{const}$ , где  $p_{\mathcal{H}}$  — проекция импульса на направление магнитного поля  $\mathcal{H}$ . Траектория в импульсном пространстве определяется линией пересечения двух поверхностей:  $\varepsilon(\mathbf{p}) = E$  и  $p_{\mathcal{H}} = \text{const}$ .

б) Из уравнения движения  $\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c} [\dot{\mathbf{r}}\mathcal{H}]$  видно, что проекция траектории электрона на плоскость, перпендикулярную к магнитному полю  $\mathcal{H}$ , получается из траектории в импульсном пространстве поворотом на угол  $\pi/2$  вокруг  $\mathcal{H}$  и изменением масштаба в  $\frac{c}{e\mathcal{H}}$  раз.

<sup>1</sup>Подробнее о движении электронов в металле (задачи 10.9–10.13) см., например, [18], [25], § 4.

10.13.

$$T = -\frac{c}{e\mathcal{H}} \oint \frac{dp}{|\mathbf{v}_\perp|}, \quad S = \int_{E_{\min}}^E dE \oint \frac{dp}{|\mathbf{v}_\perp|}, \quad T = -\frac{\partial S}{\partial E},$$

где  $\mathbf{v}_\perp$  — ортогональная к  $\mathcal{H}$  составляющая вектора  $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}$ .

$$10.14. \quad \text{а) } -\sum_k e_{ijk} x_k,^1 \quad -\sum_k e_{ijk} p_k, \quad -\sum_k e_{ijk} M_k.$$

б)  $\mathbf{ab}$ ,

$$\begin{aligned} \{\mathbf{aM}, \mathbf{br}\} &= \left\{ \sum_i a_i M_i, \sum_j b_j x_j \right\} = \sum_{ij} a_i b_j \{M_i, x_j\} = \\ &= -\sum_{ijk} a_i b_j e_{ijk} x_k = -[\mathbf{ab}]\mathbf{r}, \quad -[\mathbf{ab}]\mathbf{M}. \end{aligned}$$

в)  $0, n\mathbf{r}r^{n-2}, 2\mathbf{a}(\mathbf{ar})$ .

10.15.  $\{A_i, A_j\} = -\sum_k e_{ijk} A_k, \{A_i, A_4\} = 0$ , здесь  $i, j, k$  принимают значения 1, 2, 3 (ср. с задачей 10.14 а).

$$10.16. \quad \begin{aligned} \{M_i, \Lambda_{jk}\} &= -\sum_l e_{ijl} \Lambda_{lk} - \sum_l e_{ikl} \Lambda_{lj}, \\ \{\Lambda_{jk}, \Lambda_{il}\} &= \delta_{ij} M_{lk} + \delta_{ik} M_{lj} + \delta_{jl} M_{ik} + \delta_{kl} M_{ij}, \end{aligned}$$

где  $M_{kl} = p_k x_l - p_l x_k$

10.17. При повороте системы как целого на бесконечно малый угол  $\varepsilon$  вокруг оси  $z$  изменение  $\delta\varphi$  любой функции координат и импульсов в первом порядке по  $\varepsilon$  равно

$$\begin{aligned} \delta\varphi &= \varphi(x-\varepsilon y, y+\varepsilon x, z, p_x-\varepsilon p_y, p_y+\varepsilon p_x, p_z) - \varphi(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \\ &= \varepsilon \left( -\frac{\partial\varphi}{\partial x} y + \frac{\partial\varphi}{\partial y} x - \frac{\partial\varphi}{\partial p_x} p_y + \frac{\partial\varphi}{\partial p_y} p_x \right) = \varepsilon \{M_z, \varphi\}. \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> $e_{ijk}$  — полностью антисимметричный тензор,

$$e_{123} = e_{231} = e_{321} = 1, \quad e_{132} = e_{321} = e_{213} = -1;$$

остальные компоненты  $e_{ijk}$  равны нулю.

Если  $\varphi$  — скаляр, то его изменение при повороте равно нулю. Поэтому  $\{\varphi, M_z\} = 0$ . Если  $\varphi = f_x$  — компонента векторной функции, то ее изменение при повороте  $\delta f_x = -\varepsilon f_y$ , значит,

$$\{M_z, f_x\} = -f_y \quad \text{или} \quad \{M_z, \mathbf{f}\} = [\mathbf{n}\mathbf{f}]$$

(ср. [1], § 42, задачи 3,4). Чему равны скобки Пуассона  $\{M_z, T_{xx}\}$ , где  $T_{xx}$  — компонента тензорной функции?

$$10.18. \quad [\mathbf{f}, \mathbf{aM}] = [\mathbf{f}, \mathbf{a}], \quad \{\mathbf{fM}, \mathbf{lM}\} = [\mathbf{fl}]\mathbf{M} + \sum_{ik} M_i M_k \{f_i, l_k\}.$$

10.19. Полагая во второй формуле предыдущей задачи  $\mathbf{f} = \mathbf{e}_\zeta$  и  $\mathbf{l} = \mathbf{e}_\xi$ , где  $\mathbf{e}_\zeta$  и  $\mathbf{e}_\xi$  — орты осей  $\zeta$  и  $\xi$  в подвижной системе координат, получим

$$\{M_\zeta, M_\xi\} = +M_\eta. \quad (1)$$

Это равенство отличается знаком правой части от аналогичного соотношения для проекций момента на оси неподвижной системы координат

$$\{M_z, M_x\} = -M_y. \quad (2)$$

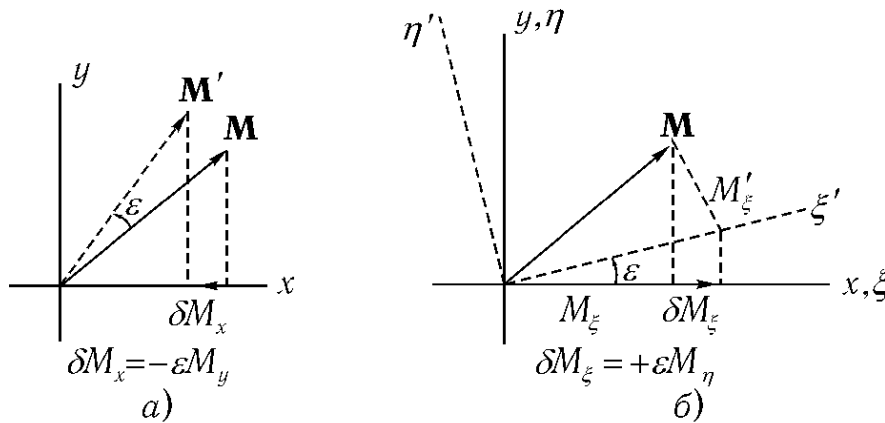


Рис. 157

Как было показано в задаче 10.17 (см. также [4], § 8.7), скобки Пуассона (2) характеризуют изменение компоненты  $M_x$  при повороте системы как целого на бесконечно малый угол  $\varepsilon$  (рис. 157, а)  $\delta M_x = \varepsilon \{M_z, M_x\} = -\varepsilon M_y$ . Скобки Пуассона (1), равные

$$\{\mathbf{e}_\zeta \mathbf{M}, \mathbf{e}_\xi \mathbf{M}\} = \{M_\zeta \mathbf{e}_\xi\} \mathbf{M},$$

характеризуют изменение проекции неподвижного вектора  $\mathbf{M}$  на ось  $\mathbf{e}_\xi$  при бесконечно малом повороте подвижной системы координат вокруг оси  $\zeta$  (рис. 157, б; на рисунке оси  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  совпадают до поворота с осями  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ).

**10.20.**  $\dot{M}_\alpha = \sum_{\beta\gamma\delta} e_{\alpha\beta\gamma} (I^{-1})_{\gamma\delta} M_\beta M_\delta$ , в частности, если выбрать по-

движную систему так, чтобы тензор инерции  $I^{\alpha\beta}$  был диагонален, получим уравнения Эйлера (см. [1], § 36 с учетом соотношения  $M_\alpha = I_\alpha \Omega_\alpha$ ).

**10.21.** Уравнения движения

$$\dot{M}_i = \{H, M_i\} = \gamma e_{ijk} M_j \mathcal{H}_k, \quad \text{или} \quad \dot{\mathbf{M}} = -\gamma [\mathcal{H} \mathbf{M}],$$

т. е. вектор  $\mathbf{M}$  вращается с угловой скоростью  $-\gamma \mathcal{H}$ .

а) Вектор  $\mathbf{M}$  прецессирует вокруг направления  $\mathcal{H}$ :

$$\begin{aligned} M_x &= M_x(0) \cos \gamma \mathcal{H}_0 t + M_y(0) \sin \gamma \mathcal{H}_0 t, \\ M_y &= -M_x(0) \sin \gamma \mathcal{H}_0 t + M_y(0) \cos \gamma \mathcal{H}_0 t, \\ M_z &= M_z(0). \end{aligned}$$

б) Вектор  $\mathbf{M}$  вращается с угловой скоростью  $-\gamma \mathcal{H}$ , которая в свою очередь вращается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega$ . Удобно воспользоваться вращающейся системой отсчета, в которой вектор  $\mathcal{H}$  неподвижен. В этой системе компоненты угловой скорости вектора  $\mathbf{M}$  равны

$$\omega'_x = -\gamma \mathcal{H}_1, \quad \omega'_y = 0, \quad \omega'_z = -\gamma \mathcal{H}_1 - \omega \equiv \varepsilon.$$

При заданном начальном условии компоненты  $\mathbf{M}$  во вращающейся системе

$$\begin{aligned} M'_x &= -a \frac{\varepsilon}{\lambda} M_0 (1 - \cos \lambda t), \\ M'_y &= a M_0 \sin \lambda t, \\ M'_z &= \left( \frac{\varepsilon^2}{\lambda^2} + a^2 \cos \lambda t \right) M_0, \end{aligned}$$

где  $\lambda = \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2 \mathcal{H}_1^2}$ ,  $a = \gamma \mathcal{H}_1 / \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2 \mathcal{H}_1^2}$ .

В неподвижной системе

$$\begin{aligned} M_x &= M'_x \cos \omega t - M'_y \sin \omega t, \\ M_y &= M'_x \sin \omega t + M'_y \cos \omega t, \\ M_z &= M_z. \end{aligned}$$

При  $\mathcal{H}_1 \ll \mathcal{H}_0$  зависимость амплитуд  $M_{x,y}$  от  $\omega$  носит резонансный характер: вообще говоря, эти амплитуды малы  $\sim M_0 \mathcal{H}_1 / \mathcal{H}_0$ , но при  $|\varepsilon| = |\omega + \gamma \mathcal{H}_0| \lesssim \gamma \mathcal{H}_1$  они резко возрастают, достигая значений  $\sim M_0$ . В частности, при  $\omega = -\gamma \mathcal{H}_0$

$$\begin{aligned} M_x &= -M_0 \sin \gamma \mathcal{H}_1 t \sin \gamma \mathcal{H}_0 t, \\ M_y &= M_0 \sin \gamma \mathcal{H}_1 t \cos \gamma \mathcal{H}_0 t, \\ M_z &= M_0 \cos \gamma \mathcal{H}_1 t. \end{aligned}$$

$$10.22. \quad \{v_i, v_j\} = -\frac{e}{m^2 c} \sum_k e_{ijk} \mathcal{H}_k.$$

$$10.23. \quad \text{а) } \mathbf{p}(t) = \mathbf{p} + \mathbf{F}t, \quad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}t}{m} + \frac{\mathbf{F}t^2}{2m};$$

б)

$$\begin{aligned} p(t) &= p \cos \omega t - m\omega q \sin \omega t, \\ q(t) &= q \cos \omega t + \frac{p}{m\omega} \sin \omega t. \end{aligned}$$

Разумеется, эти величины проще вычислить, не используя скобок Пуассона. Но предложенный метод легко может быть перенесен в квантовую механику (см. [26], § 34).

10.25. а) Согласно предыдущей задаче

$$\frac{df}{dt} = \{H, f\} = \frac{\partial H}{\partial f} \{f, f\} = 0.$$

б) Функция Гамильтона

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} f(\theta, p_\theta, p_\varphi),$$

где

$$f(\theta, p_\theta, p_\varphi) = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} + 2ma \cos \theta.$$

Интегралы движения:  $E$ ,  $p_\varphi$  и, согласно предыдущему,  $f$ .



$$10.26. \quad \text{а)} \quad \{A_i, A_j\} = \frac{2H}{m} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} M_k,$$

$$\{A_i, M_j\} = - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} A_k;$$

$$\text{б)} \quad \{H, \mathbf{J}_{1,2}\} = 0, \quad \{J_{1i}, J_{2j}\} = 0,$$

$$\{J_{1i}, J_{1j}\} = - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} J_{1k}, \quad \{J_{2i}, J_{2j}\} = - \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} J_{2k},$$

$$H = - \frac{m\alpha^2}{4(\mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2)}.$$

Векторы  $\mathbf{J}_1$  и  $\mathbf{J}_2$  — независимые интегралы движения. Каждый из них имеет такие же скобки Пуассона для своих компонент, как и обычный момент импульса. Наличие двух таких «моментов» тесно связано с так называемой «скрытой симметрией» атома водорода (см. [27], гл. I, § 5).

## § 11. Канонические преобразования

$$11.1. \quad \text{а)} \quad q = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q,$$

$$\dot{Q} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \sin 2Q, \quad \dot{P} = -P \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2Q.$$

В данном случае  $P$  и  $Q$  — переменные действие-угол. Эти переменные удобнее, чем  $p$  и  $q$  для решения задачи методом теории возмущений, если частота  $\omega$  меняется медленно:  $|\dot{\omega}| \ll \omega^2$  (см. задачу 13.10).

$$\text{б)} \quad q = \frac{F}{m\omega^2} + \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad p = \sqrt{2m\omega P} \cos Q,$$

$$\dot{Q} = \omega + \dot{F} \sqrt{\frac{m\omega}{2P}} \cos Q, \quad \dot{P} = \dot{F} \sqrt{2m\omega P} \sin Q.$$

$$11.2. \quad \Psi(p, Q) = -Q \left( 1 + \ln \frac{p^2}{4Q} \right).$$

11.3. Функция  $\Phi(q_1, q_2, \dots, q_s, P_1, P_2, \dots, P_s)$  определяет каноническое преобразование, если  $\det \frac{\partial^2 \Phi}{\partial q_i \partial P_k} \neq 0$ .

**11.4.** Пусть  $Q = q \cos \alpha - p \sin \alpha$ ,  $P = q \sin \alpha + p \cos \alpha$ . Тогда  $\{P, Q\}_{p,q} = -\{q, p\}_{p,q} \sin^2 \alpha + \{p, q\}_{p,q} \cos^2 \alpha = 1$ . Для системы с одной степенью свободы этого достаточно, чтобы преобразование было каноническим.

**11.5.** Нетрудно сообразить (и это подтверждается последующими вычислениями), что каноническое преобразование должно быть близко к тождественному и члены  $ax^2P$  и  $bP^3$  в производящей функции малы. Чтобы разрешить соотношения

$$p = P + 2axP, \quad Q = x + ax^2 + 3bP^2,$$

определяющие каноническое преобразование, относительно  $x$  и  $p$ , заменяем в малых членах  $x$  на  $Q$  и  $p$  на  $P$ :

$$p = P + 2aQP, \quad x = Q - aQ^2 - 3bP^2. \quad (1)$$

Подобным же образом поступаем, выражая функцию Гамильтона в новых переменных:

$$H'(Q, P) = \frac{P^2}{2} + \frac{\omega^2 Q^2}{2} + \alpha Q^3 + \beta QP^2 + 2aQP^2 - a\omega^2 Q^3 - \\ - 3b\omega^2 QP^2 + \text{члены четвертой степени по } Q, P.$$

Полагая  $\alpha - a\omega^2 = 0$ ,  $\beta + 2a - 3b\omega^2 = 0$ , обратим в нуль и члены третьей степени. Таким образом, в указанном в условии задачи приближении  $Q = A \cos \omega t$ ,  $P = -\omega A \sin \omega t$  и согласно (1)  $x = A \cos \omega t - \alpha \omega^{-2} A^2 - (\beta + \alpha \omega^{-2}) A^2 \sin^2 \omega t$  (ср. [1], § 28).

**11.6.** Приведя функцию Гамильтона к виду, рассмотренному в задаче 10.4, получаем  $x = Q - \frac{5\beta}{8\omega_0^2} Q^3 - \frac{9\beta}{8\omega_0^4} QP^2$ , где  $Q = A \cos \omega t$ ,  $P = -\omega_0 A \sin \omega t$ ,  $\omega = \omega_0 + \frac{3\beta}{2\omega_0} A^2$  (ср. [1], § 28).

**11.7.** 
$$H'(P, Q) = H(P, Q).$$

При  $X = A \sin(\omega t + \varphi)$ ,  $Y = 0$  — осциллятор совершает движение по эллипсу

$$x = A \cos \lambda \sin(\omega t + \varphi), \\ y = A \sin \lambda \cos(\omega t + \varphi).$$

**11.8.** Для того чтобы сделать запись менее громоздкой, удобно временно положить  $m = \omega = e = c = 1$ . В окончательных выражениях эти множители легко будет восстановить. Преобразование задачи (11.7) представляет собой поворот в плоскости  $x p_y$  и  $y p_x$ , поэтому оно сохраняет вид части функции Гамильтона, равной

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + p_x^2 + p_y^2).$$

Добавка же, возникающая от членов  $\frac{1}{2}\mathcal{H}^2 x^2 - \mathcal{H} x p_y$ , равна

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\mathcal{H}^2(X^2 \cos^2 \lambda + P_Y^2 \sin^2 \lambda + 2X P_Y \sin \lambda \cos \lambda) + \\ + \mathcal{H}(X^2 - P_Y^2) \sin \lambda \cos \lambda - \mathcal{H}(\cos^2 \lambda - \sin^2 \lambda)X P_Y. \end{aligned}$$

Недиагональный член  $X P_Y$  исчезнет, если положить

$$\sin^2 \lambda - \cos^2 \lambda + \mathcal{H} \sin \lambda \cos \lambda = 0, \quad \text{т. е.} \quad \operatorname{tg} 2\lambda = \frac{2}{\mathcal{H}}.$$

После несложных преобразований функция Гамильтона приводится к виду

$$H = \frac{1}{2m}(P_X^2 + P_Y^2 \operatorname{ctg}^2 \lambda) + \frac{m\omega^2}{2}(X^2 \operatorname{tg}^2 \lambda + Y^2). \quad (1)$$

Таким образом, переменные  $X$ ,  $Y$  испытывают гармонические колебания с частотами, равными соответственно

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega \operatorname{tg} \lambda &= \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{e\mathcal{H}}{2mc}\right)^2} - \frac{e\mathcal{H}}{2mc}, \\ \omega_2 = \omega \operatorname{ctg} \lambda &= \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{e\mathcal{H}}{2mc}\right)^2} + \frac{e\mathcal{H}}{2mc} \end{aligned}$$

(ср. [2], § 21, задача). Каждой из координат  $X$ ,  $Y$  соответствует движение по эллипсу; произвольное колебание — суперпозиция двух таких движений (ср. задачи 6.36, 11.7).

Интересно, что при  $\mathcal{H} \rightarrow 0$  оказывается  $\lambda = \pi/4$  (а отнюдь не  $\lambda = 0$ ). Это значит, что даже при очень слабом поле  $\mathcal{H}$  «нормальными» оказываются колебания, «поляризованные по кругу». Колебания же, отвечающие координатам  $X(Y)$  при  $\lambda = 0$ , которые в отсутствие поля  $\mathcal{H}$  были бы

линейными, при наличии поля  $\mathcal{H}$  медленно изменяют направление поляризации.

Если магнитное поле переменное, то к функции Гамильтона (1) следует добавить частную производную по времени производящей функции

$$\Phi = -m\omega xy \operatorname{ctg} \lambda - \frac{P_X P_Y}{m\omega} \operatorname{tg} \lambda + \frac{xP_X + yP_Y}{\cos \lambda}$$

(выразив ее через  $X, Y, P_X, P_Y$ ) (см. также сноску к решению задачи 13.25).

**11.9.** Полагая в каноническом преобразовании предыдущей задачи  $\omega = \omega_2$ ,  $\operatorname{tg} 2\lambda = \frac{2\omega_{\mathcal{H}}\omega_2}{\omega_{\mathcal{H}}^2 + \omega_1^2 - \omega_2^2}$ , получим

$$H' = \frac{1}{2m} \left( P_X^2 + \frac{\Omega_2^2}{\omega_2^2} P_Y^2 + p_z^2 \right) + \frac{m}{2} (\Omega_1^2 X^2 + \omega_2^2 Y^2 + \omega_3^2 z^2),$$

где  $\Omega_{1,2}$  определены в задаче 6.36.

**11.10.** Преобразование ( $\lambda = \pi/4$ )

$$q_{s1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( X_s + \frac{P_{Ys}}{Nm\omega_s} \right), \quad q_{s2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( Y_s + \frac{P_{Xs}}{Nm\omega_s} \right)$$

сохраняет вид функции Гамильтона (ср. с задачей 11.7)

$$\begin{aligned} H &= \frac{p_0^2}{2Nm} + \sum_{s=1}^R \left[ \frac{p_{s1}^2 + p_{s2}^2}{2Nm} + \frac{Nm\omega_s^2}{2} (q_{s1}^2 + q_{s2}^2) \right] = \\ &= \frac{p_0^2}{2Nm} + \sum_{s=1}^R \left[ \frac{P_{Xs}^2 + P_{Ys}^2}{2Nm} + \frac{Nm\omega_s^2}{2} (X_s^2 + Y_s^2) \right]. \end{aligned}$$

Колебание, соответствующее  $X_s = A \cos(\omega_s t + \beta)$ , есть

$$x_n = \frac{A}{\sqrt{2}} \sin(\omega_s t + n\varphi_s + \beta),$$

а соответствующее  $Y_s = B \cos(\omega_s t + \beta)$  — есть колебание

$$x_n = \frac{B}{\sqrt{2}} \sin(-\omega_s t + n\varphi_s - \beta).$$

**11.11.** Новая функция Гамильтона  $H' = \omega P_1$ . Уравнения движения в новых переменных имеют вид

$$\dot{P}_1 = \dot{P}_2 = \dot{Q}_2 = 0, \quad \dot{Q}_1 = \omega.$$

Как изменится вид функции Гамильтона  $H'$ , если  $\mathcal{H}$  зависит от времени?

**11.12.** Предложенное преобразование  $p = \alpha P$ ,  $r = Q/\alpha$  есть преобразование подобия.

**11.13.** Градиентное преобразование  $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f(\mathbf{r}, t)$ ,  $\varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$  можно представить как каноническое преобразование  $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ ,  $\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \frac{e}{c} \nabla f$ ,  $H' = H - \frac{e}{c} \frac{\partial f}{\partial t}$  с помощью производящей функции

$$\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} - \frac{e}{c} f(\mathbf{r}, t).$$

**11.14.**  $\Phi(q, P) = qP - f(q, t)$ .

**11.15.** б)  $F_\tau(q, Q) = \frac{F\tau}{2}(q + Q) + \frac{m}{2\tau}(q - Q)^2$ ;

в)  $F_\tau(q, Q) = \frac{m\omega}{2 \sin \omega\tau} [2qQ - (q^2 + Q^2) \cos \omega\tau]$ .

**11.16.** а)  $\mathbf{Q} = \mathbf{r} + \delta\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{p}$  — сдвиг системы как целого на  $\delta\mathbf{a}$  (или сдвиг системы координат на  $-\delta\mathbf{a}$ ).

б) С точностью до бесконечно малых первого порядка включительно

$$\mathbf{Q} = \mathbf{r} + [\delta\varphi, \mathbf{r}], \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} + [\delta\varphi, \mathbf{p}].$$

Преобразование представляет собой поворот системы координат на угол  $-\delta\varphi$ .

в)  $Q(t) = q(t + \delta\tau)$ ,  $P(t) = p(t + \delta\tau)$ ,  $H'(P, Q, t) = H(p, q, t + \delta\tau)$ .

Преобразование представляет собой сдвиг во времени на  $\delta\tau$  (ср. [1], § 45).

г)  $\mathbf{Q} = \mathbf{r} + 2\mathbf{p}\delta\alpha$ ,  $\mathbf{P} = \mathbf{p} - 2\mathbf{r}\delta\alpha$ .

Преобразование представляет собой поворот на угол  $2\delta\alpha$  в каждой паре плоскостей  $x_i p_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) в фазовом пространстве.

**11.18.** а)  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}) = \mathbf{rP} + \mathbf{nP}\delta a + \mathbf{n}[\mathbf{rP}]\delta\varphi$ , где  $\delta a$  — смещение вдоль направления  $\mathbf{n}$ , а  $\delta\varphi = \frac{2\pi}{h}\delta a$  — угол поворота вокруг  $\mathbf{n}$  ( $h$  — шаг винта);

б)  $\Phi(r, P, t) = \mathbf{rP} - \mathbf{VP}t + m\mathbf{rV}$ ;

в)  $\Phi(\mathbf{r}, \mathbf{P}, t) = \mathbf{rP} - t\delta\Omega[\mathbf{rP}]$ .

**11.19.**  $\delta f(q, p) = \lambda \{W, f\}_{p,q}$ .

В самом деле, подставляя значения новых переменных  $P = p - \lambda \frac{\partial W}{\partial q}$  и  $Q = q + \lambda \frac{\partial W}{\partial p}$  в  $f(Q, P)$  и разлагая полученное выражение по степеням  $\lambda$ , получим с точностью до первого порядка включительно

$$\delta f(q, p) = \lambda \frac{\partial f}{\partial q} \frac{\partial W(q, p)}{\partial p} - \lambda \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial W(q, p)}{\partial q}.$$

**11.20.** Полагая в предыдущей задаче  $\Phi = \mathbf{rP} + \lambda \mathbf{rP}$ , получим преобразование подобия с  $\alpha = 1 + \lambda$  (см. задачу 11.12). Предложенная функция Гамильтона такова, что  $H'(\mathbf{P}, \mathbf{Q}) = \alpha^2 H(\mathbf{P}, \mathbf{Q})$ , и поэтому  $\lambda \{H, \mathbf{rp}\} = H' - H = 2\lambda H (\lambda \rightarrow 0)$ . С другой стороны,  $\{H, \mathbf{rp}\} = \frac{d}{dt}(\mathbf{rp})$ . Отсюда  $\mathbf{rp} - 2Et = \text{const}$  (ср. с задачей 4.13 б).

**11.22.** Пусть  $\delta_1 q$  и  $\delta_1 p^1$  — изменения координат и импульсов, связанные с преобразованием, задаваемым  $\Phi_1$ . Тогда

$$f(q + \delta_1 q, p + \delta_1 p) = f(q, p) + \lambda_1 \{W_1(q, p), f(q, p)\} + \lambda_1^2 \varphi_1(q, p). \quad (1)$$

К каждому из слагаемых правой части (1) применим далее преобразование, задаваемое функцией  $\Phi_2$ ,

$$\begin{aligned} f(q + \delta_{21} q, p + \delta_{21} p) &= f + \lambda_2 \{W_2, f\} + \lambda_1 \{W_1, f\} + \\ &+ \lambda_1 \lambda_2 \{W_2, \{W_1, f\}\} + \lambda_1^2 \varphi_1 + \lambda_2^2 \varphi_2. \end{aligned} \quad (2)$$

Преобразование  $\lambda_1^2 \varphi_1(q, p)$  дает добавку выше второго порядка малости. Результат применения этих преобразований в обратном порядке

$$\begin{aligned} f(q + \delta_{12} q, p + \delta_{12} p) &= f + \lambda_1 \{W_1, f\} + \lambda_2 \{W_2, f\} + \\ &+ \lambda_1 \lambda_2 \{W_1, \{W_2, f\}\} + \lambda_1^2 \varphi_1 + \lambda_2^2 \varphi_2 \end{aligned} \quad (3)$$

отличается от (2) только членами второго порядка, пропорциональными  $\lambda_1 \lambda_2$ . Вычитая (3) из (2), получим

$$\lambda_1 \lambda_2 (\{W_2, \{W_1, f\}\} - \{W_1, \{W_2, f\}\}) = \lambda_1 \lambda_2 \{f, \{W_1, W_2\}\}.$$

---

<sup>1</sup>Укажем, например, изменение импульса с точностью до второго порядка:

$$\delta_1 p = P - p = -\lambda_1 \frac{\partial W_1(q, P)}{\partial q} = -\lambda_1 \frac{\partial W_1(q, p)}{\partial q} + \lambda_1^2 \frac{\partial^2 W_1(q, p)}{\partial p \partial q} \frac{\partial W_1(q, p)}{\partial q}.$$

Поэтому, в частности, сдвиги  $\lambda W = \delta \mathbf{a} \mathbf{P}$  (см. задачу 11.16) перестановочны, а повороты вокруг разных осей  $\lambda W = \delta \varphi [\mathbf{r} \mathbf{P}]$  — нет.

Справедливо ли утверждение, обратное сформулированному в задаче?

**11.23.** Каноническое преобразование с переменным параметром  $\lambda$  можно рассматривать как «движение», причем  $\lambda$  играет роль времени, а  $W(q, p)$  — функция Гамильтона (ср. с задачей 11.16 в). Уравнения «движения»

$$\frac{dQ}{d\lambda} = \frac{\partial W(Q, P)}{\partial P}, \quad \frac{dP}{d\lambda} = -\frac{\partial W(Q, P)}{\partial Q}.$$

Эти уравнения легко получить и формально из результата задачи 11.19.

а) Бесконечно малое изменение координат и импульсов при данном каноническом преобразовании имеет вид

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{r} &= -\frac{\lambda}{N} \{W, \mathbf{r}\} = \frac{\lambda}{N} \{\mathbf{M} \mathbf{a}, \mathbf{r}\} = -[\mathbf{n}, \mathbf{r}] \delta \varphi, \\ \delta \mathbf{p} &= -[\mathbf{n}, \mathbf{p}] \delta \varphi, \end{aligned}$$

где  $\mathbf{M} = [\mathbf{r}, \mathbf{p}]$ ,  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{a}$ ,  $\delta \varphi = -\frac{\lambda a}{N}$ . Это преобразование представляет собой поворот системы координат на угол  $\delta \varphi$  вокруг направления  $\mathbf{n}$ . Направив ось  $z$  по  $\mathbf{a}$ , получаем окончательно

$$X = x \cos \varphi - y \sin \varphi, \quad Y = y \cos \varphi + x \sin \varphi, \quad Z = z$$

и аналогичные формулы для компонент импульса.

б) Бесконечно малое изменение координат и импульсов при каноническом преобразовании, задаваемом  $A_1$ , имеет вид

$$\delta x = p_x \delta \varphi, \quad \delta y = -p_y \delta \varphi, \quad \delta p_x = -x \delta \varphi, \quad \delta p_y = y \delta \varphi,$$

где  $\delta \varphi = \frac{\lambda}{2N}$ . Это преобразование представляет собой поворот на угол  $+\delta \varphi$  в плоскости  $x p_x$  и на угол  $-\delta \varphi$  в плоскости  $y p_y$ . Поэтому

$$\begin{aligned} X &= x \cos \varphi + p_x \sin \varphi, & Y &= y \cos \varphi - p_y \sin \varphi, \\ P_X &= -x \sin \varphi + p_x \cos \varphi, & P_Y &= y \sin \varphi + p_y \cos \varphi. \end{aligned}$$

Аналогично  $A_2(A_3)$  задает поворот на угол  $\varphi(-\varphi)$  в плоскостях  $x p_y$  и  $y p_x$  ( $x y$  и  $p_x p_y$ ) и  $A_4$  — поворот на угол  $4\varphi$  в плоскостях  $x p_x$  и  $y p_y$ .

Отнюдь не любой поворот в фазовом пространстве является каноническим преобразованием. Например, поворот в плоскости  $xp_y$  — не каноническое преобразование.

Интересно сравнить движение двумерного изотропного гармонического осциллятора (функция Гамильтона  $H = \frac{1}{2}A_4$ ) и движение частицы в плоскости  $xu$  в произвольном поле, обладающем осевой симметрией,  $U(x^2 + y^2)$ . В обоих случаях интегралами является момент импульса  $2A_3$ , сохранение которого связано с инвариантностью системы по отношению к поворотам вокруг оси  $z$ . Для осциллятора, кроме того, есть интегралы движения  $A_1$  и  $A_2$ , сохранение которых связано со «скрытой» симметрией — инвариантностью функции Гамильтона относительно определенных поворотов в фазовом пространстве. В этом смысле осциллятор подобен частице в трехмерном центральном поле, для которой есть три интеграла движения  $M_{x,y,z}$ .

Наличие дополнительных интегралов движения у осциллятора приводит к тому, что точка  $(x, y, p_x, p_y)$  в фазовом пространстве движется по замкнутой линии, в то время как для частицы в поле  $U(x^2 + y^2)$  фазовая траектория «заполняет» двумерную поверхность (см. [1], § 52).

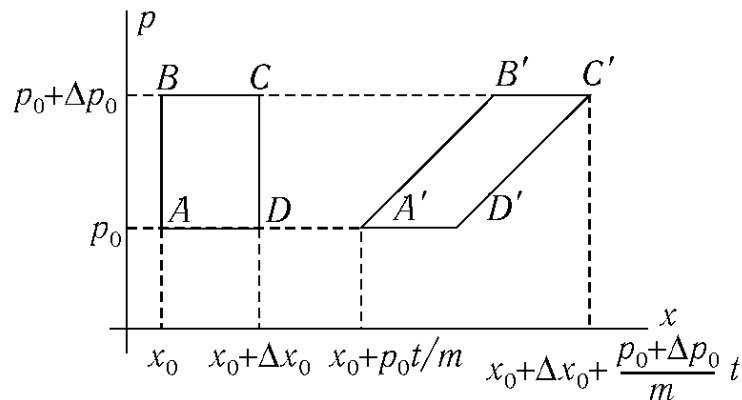


Рис. 158

**11.24.** а) В импульсном и фазовом пространстве выделенный объем с течением времени не меняется, в координатном пространстве происходит его «расплывание». Так, если в начальный момент состояние системы изображалось прямоугольником  $ABCD$  (рис. 158), то через время  $t$ , он перейдет в параллелограмм  $A'B'C'D'$  ( $AD = A'D'$ ), причем расстояние по оси  $x$  между точками  $A'$  и  $C'$  равно  $\Delta x = \Delta x_0 + \frac{\Delta p_0}{m}t$ . Со временем этот параллелограмм вырождается в узкую полосу большой длины.



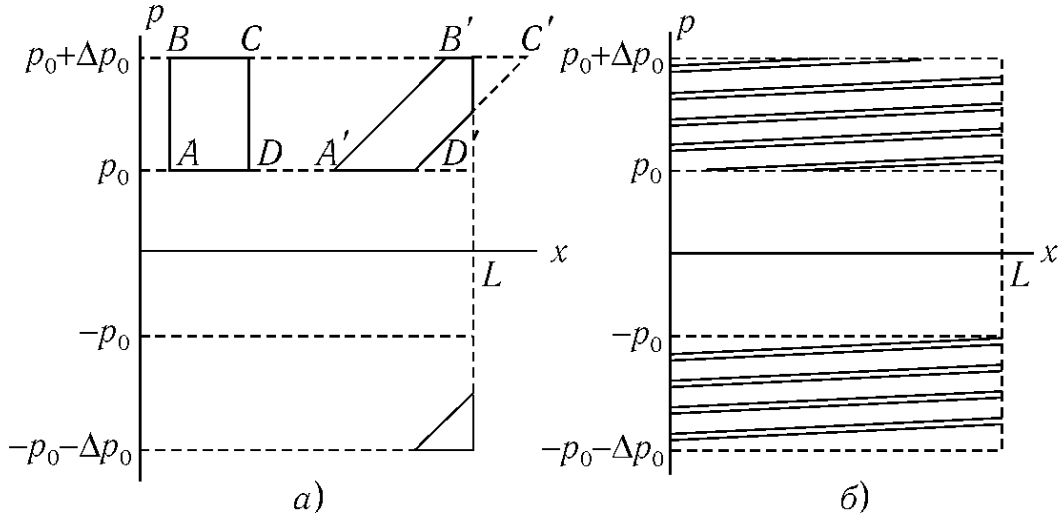


Рис. 159

б) Если в точке  $x = L$  расположена стенка, то выделенный фазовый объем уже не будет параллелограммом  $A'B'C'D'$ , а будет иметь вид, изображенный на рис. 159, а. С течением времени первоначальный фазовый объем  $ABCD$  превратится в ряд очень узких параллельных полосок, которые почти равномерно распределятся внутри двух прямоугольников  $0 \leq x \leq L$ ,  $p_0 \leq p \leq p_0 + \Delta p_0$  и  $0 \leq x \leq L$ ,  $-p_0 - \Delta p_0 \leq p \leq -p_0$  (рис. 159, б).

в) Фазовая траектория для осциллятора с энергией  $E$  и частотой  $\omega$  — эллипс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$  с полуосями  $a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$ ,  $b = \sqrt{\frac{2E}{m}}$ . Все точки выделенного фазового объема движутся по таким эллипсам и через период  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  возвращаются в исходное состояние. Размеры выделенного «объема» по координатам  $\Delta x$  и импульсам  $\Delta p$  пульсируют с частотой  $2\omega$ . В отличие от предыдущего пункта, здесь не происходит расплывания выделенного фазового объема по всей доступной области фазового пространства.

г) Для осциллятора с трением (сила трения  $F_{\text{тр}} = -2m\lambda\dot{x}$ )

$$x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \varphi),$$

$$p = m\dot{x} = -mae^{-\lambda t}[\omega \sin(\omega t + \varphi) + \lambda \cos(\omega t + \varphi)],$$

и колебания со временем затухают, поэтому фазовая траектория представляет собой спираль

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{p + \omega\lambda x}{ma\omega}\right)^2 = e^{-2\lambda t}.$$

Выделенный фазовый объем с течением времени уменьшается до нуля.

Несохранение фазового объема здесь связано с тем, что система не является канонической — для полного ее описания необходимо задавать не только функцию Лагранжа  $L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2)$ , но и диссипативную функцию  $F = \frac{1}{2} m \lambda \dot{x}^2$  (см. [1], § 25).

Если же для данной системы выбрать «функцию Лагранжа» в виде

$$L' = \frac{m}{2} e^{2\lambda t} (\dot{x}^2 - \omega_0^2 x^2)$$

(ср. с задачей 4.17), то для соответствующих канонических переменных  $x$  и  $p' = \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}}$  выделенный фазовый объем будет сохраняться, однако в этом случае обобщенный импульс  $p' = m x e^{2\lambda t}$  не имеет, как прежде, простого физического смысла.

д) Так как период движения в этом случае зависит от энергии, выделенная область фазового пространства с течением времени растягивается, «заполняя» всю доступную область фазового пространства (ср. с пунктом б)).

Пусть вначале выделена область  $x_0 < x < x_0 + \Delta x$ ,  $p_0 < p < p_0 + \Delta p$ . Нетрудно оценить время, через которое самые быстрые частицы сделают на одно колебание больше (или меньше), чем самые медленные:

$$\tau \sim \frac{T^2}{\Delta T}, \quad \Delta T \sim \frac{dT}{dE} \Delta E, \quad \Delta E \sim \frac{p_0 \Delta p}{m} + \left| \frac{dU(x_0)}{dx} \right| \Delta x.$$

е) Пусть имеется  $N$  частиц таких, что точки фазового пространства, изображающие их состояние, распределены в начальный момент с плотностью  $Nw(x_0, p_0, 0)$  и перемещаются согласно уравнениям

$$\begin{aligned} x &= f(x_0, p_0, t), \\ p &= \varphi(x_0, p_0, t). \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь

$$f(x_0, p_0, t) = x_0 + \frac{p_0}{m} t, \quad \varphi(x_0, p_0, t) = p_0$$

для свободного движения и

$$\begin{aligned} f(x_0, p_0, t) &= x_0 \cos \omega t + \frac{p_0}{m\omega} \sin \omega t, \\ \varphi(x_0, p_0, t) &= -m\omega x_0 \sin \omega t + p_0 \cos \omega t \end{aligned}$$

для гармонических осцилляторов. Тогда количество частиц в выделенной области фазового пространства, все точки которой движутся по такому же закону, остается постоянным; в частности, для бесконечно малого фазового объема  $dx dp$  имеем

$$Nw(x, p, t) dx dp = Nw(x_0, p_0, 0) dx_0 dp_0.$$

Согласно теореме Лиувилля (см. [1], § 46)

$$\frac{\partial(x, p)}{\partial(x_0, p_0)} = 1, \text{ поэтому}$$

$$w(x, p, t) = w(x_0, p_0, 0). \quad (2)$$

Выражая из (1)  $x_0$  и  $p_0$

$$x_0 = f(x, p, -t), \quad p_0 = \varphi(x, p, -t)$$

и подставляя в (2), получаем

$$w(x, p, t) = w(f(x, p, -t), \varphi(x, p, -t), 0),$$

или

$$w(x, p, t) = \frac{\exp[-\alpha(x - X)^2 - \beta(x - X)(p - P) - \gamma(p - P)^2]}{2\pi\Delta p_0\Delta x_0},$$

где  $X = f(X_0, P_0, t)$ ,  $P = \varphi(X_0, P_0, t)$ , а коэффициенты  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  для свободных частиц

$$\alpha = \frac{1}{2\Delta x_0^2}, \quad \beta = -\frac{t}{m\Delta x_0^2},$$

$$\gamma = \frac{1}{2\Delta p_0^2} + \frac{t^2}{2m^2\Delta x_0^2},$$

и для осцилляторов

$$\alpha = \frac{\cos^2 \omega t}{2\Delta x_0^2} + \frac{m^2 \omega^2 \sin^2 \omega t}{2\Delta p_0^2},$$

$$\beta = \frac{\cos^2 \omega t}{2\Delta p_0^2} + \frac{\sin^2 \omega t}{2m^2 \omega^2 \Delta x_0^2},$$

$$\gamma = \sin \omega t \cos \omega t \left( \frac{m\omega}{\Delta p_0^2} - \frac{1}{m\omega \Delta x_0^2} \right).$$

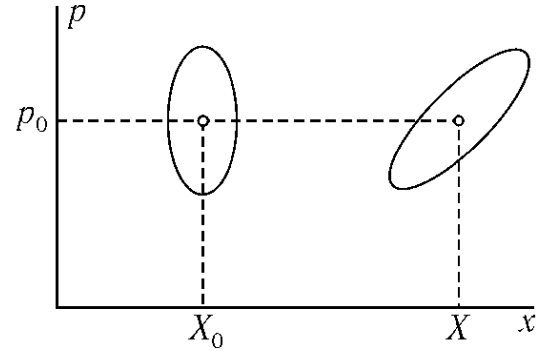


Рис. 160

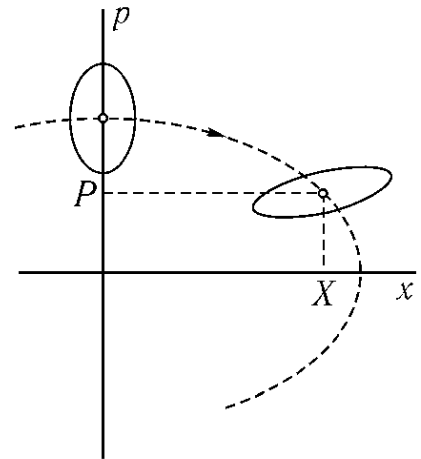


Рис. 161

На рис. 160, 161 показано, как перемещаются области фазового пространства, в которых  $2\pi\Delta x_0\Delta p_0 w(x, p, t) \geq \frac{1}{2}$  (для свободных частиц и осцилляторов соответственно). Эти области представляют собой эллипсы, деформирующиеся со временем<sup>1</sup>. Центры их перемещаются по такому же закону (1), как и частицы. В случае свободного движения этот эллипс неограниченно растягивается, в случае же движения осцилляторов — лишь пульсирует. Заметим, что распределения по координатам и по импульсам уже не являются независимыми ( $w(x, p, t)$  не разбивается на два множителя вида  $w_1(x, t)w_2(p, t)$ ).

Представляет интерес рассмотреть функции распределения по координатам (независимо от значений импульса)

$$w(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, p, t) dp$$

и по импульсам

$$\tilde{w}(p, t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(x, p, t) dx.$$

Эти распределения оказываются гауссовскими с максимумами в  $X$  и  $P$  соответственно:

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta x} e^{-\frac{(x-X)^2}{2\Delta x^2}},$$

$$\tilde{w}(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta p} e^{-\frac{(p-P)^2}{2\Delta p^2}},$$

где для свободного движения

$$\Delta x^2 = \Delta x_0^2 + \frac{\Delta p_0^2}{m^2} t^2, \quad \Delta p^2 = \Delta p_0^2,$$

а для осцилляторов

$$\Delta x^2 = \Delta x_0^2 \cos^2 \omega t + \frac{\Delta p_0^2}{m^2 \omega^2} \sin^2 \omega t,$$

$$\Delta p^2 = \Delta p_0^2 \cos^2 \omega t + m^2 \omega^2 \Delta x_0^2 \sin^2 \omega t.$$

<sup>1</sup>Если масштабы по осям  $p$  и  $x$  в фазовом пространстве гармонических осцилляторов выбраны так, что  $m\omega = 1$ , то фазовые траектории представляют собой окружности, а выделенная область в фазовом пространстве вращается вокруг начала координат, не деформируясь.

**11.25.** а)  $\{a^*, a\} = -i$ ,  $H_0 = \omega a^* a$ .

б) Переменные  $P$  и  $Q$  канонические, поскольку  $\{P, Q\} = 1$ . Из равенства  $dF = p(x, Q) dx - P(x, Q) dQ$  определяется производящая функция

$$F(x, Q, t) = \frac{i}{2} m \omega x^2 + \frac{i}{2} Q^2 e^{-2i\omega t} - i \sqrt{2m\omega} x Q e^{-i\omega t}.$$

Новая функция Гамильтона

$$H'_0(Q, P) = H_0 + \frac{\partial F(x, Q, t)}{\partial t} = 0.$$

в) Выделив в

$$x^4 = \left( \frac{Q e^{-i\omega t} - i P e^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}} \right)^4$$

слагаемое  $-3Q^2 P^2 / 2m^2 \omega^2$ , не содержащее времени, получаем усредненную функцию Гамильтона

$$\langle H'(Q, P) \rangle = -\frac{3\beta}{8m\omega^2} Q^2 P^2.$$

В дальнейшем скобки  $\langle \rangle$ , обозначающие усреднение, опускаем.

Очевидно, что  $-iQP = |Q_0|^2 = |a|^2$  — интеграл движения.

Уравнения Гамильтона

$$\dot{Q} = -i\varepsilon Q, \quad \dot{P} = i\varepsilon P, \quad \varepsilon = \frac{3\beta|Q_0|^2}{4m\omega^2},$$

откуда

$$Q = Q_0 e^{-i\varepsilon t}, \quad P = iQ_0^* e^{i\varepsilon t},$$

так что

$$x = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}} (Q_0 e^{-i\omega' t} + Q_0^* e^{i\omega' t}) = x_0 \cos(\omega' t + \varphi).$$

Влияние добавки  $\delta U$  сводится к изменению частоты

$$\omega' = \omega + \frac{3\beta|Q_0|^2}{4m\omega^2} = \omega + \frac{3\beta x_0^2}{8\omega}$$

(ср. с задачей 8.1).

г) Новая функция Гамильтона

$$H'(Q, P, t) = m^2 \omega^2 \alpha \left( \frac{Qe^{-i\omega t} - iP e^{i\omega t}}{\sqrt{2m\omega}} \right)^4 \frac{e^{4i\omega t} + e^{-4i\omega t}}{2}$$

после усреднения сводится к

$$\langle H'(Q, P) \rangle = \frac{\alpha}{8} (Q^4 + P^4).$$

Для переменной  $\xi = -iQP = |a|^2$ , пропорциональной квадрату амплитуды колебания, уравнение движения

$$\dot{\xi} = \{ \langle H' \rangle, \xi \} = -\frac{i\alpha}{2} (P^4 - Q^4).$$

Учитывая, что

$$\frac{\alpha}{4} (Q^4 + P^4) = A = \text{const},$$

находим

$$\dot{\xi}^2 = -4A^2 + \alpha^2 \xi^4.$$

Таким образом,  $\xi$  изменяется так же, как координата частицы (с массой, равной единице) в поле  $V(\xi) = -\frac{\alpha^2}{2} \xi^4$  при энергии  $-2A^2$  (ср. с задачей 1.2). Амплитуда за конечное время возрастает до бесконечной величины (так называемый взрывной рост амплитуды).

Разумеется, использование усредненной функции Гамильтона справедливо только при  $|\dot{\xi}| \ll \omega \xi$ , т. е. при  $\xi \ll \omega/\alpha$ .

**11.26.** Вводим новые переменные:

$$a = \frac{m\omega x + ip_x}{\sqrt{2m\omega}} e^{i\omega t}, \quad b = \frac{m\omega_2 y + ip_y}{\sqrt{2m\omega_2}} e^{i\omega_2 t}, \quad c = \frac{m\omega_3 z + ip_z}{\sqrt{2m\omega_3}} e^{i\omega_3 t},$$

( $\omega = \omega_2 + \omega_3$ ) и канонические сопряженные им импульсы  $ia^*$ ,  $ib^*$ ,  $ic^*$ . Новая функция Гамильтона, усредненная по периодам  $2\pi/\omega_{2,3}$ ,

$$\begin{aligned} \langle H' \rangle &= \varepsilon |a|^2 + \eta (a^* b c + a b^* c^*), \\ \varepsilon &= \omega_1 - \omega, \quad \eta = \frac{\alpha}{4\sqrt{2m\omega\omega_2\omega_3}}. \end{aligned}$$

Уравнения движения

$$\dot{a} = -i\varepsilon a - i\eta bc,$$

$$\dot{b} = -i\eta ac^*,$$

$$\dot{c} = -i\eta ab^*$$

имеют интегралы<sup>1</sup>

$$\langle H' \rangle = A, \quad |a|^2 + |b|^2 = B, \quad |a|^2 + |c|^2 = C.$$

Уравнение

$$\frac{d}{dt}|a|^2 = i\eta(ab^*c^* - a^*bc)$$

можно представить в виде, удобном для качественного исследования:

$$\dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0,$$

где  $\xi = |a|^2$ ,

$$V(\xi) = (A - \varepsilon\xi)^2 - 4\eta^2\xi(B - \xi)(C - \xi).$$

В начальный момент  $c = 0$ , поэтому  $A = \varepsilon C$ ,  $B < C$  и

$$V(\xi) = (C - \xi)^2(\varepsilon^2 - 4\xi) - 4\eta^2\xi(C - B)(C - \xi).$$

Графики  $V(\xi)$  для случаев  $\varepsilon^2 < 4\eta^2 C$  и  $\varepsilon^2 > 4\eta^2 C$  приведены на рис. 162, а и б.

В первом случае  $\xi$  испытывает колебания, так что происходят биения. Энергия периодически перекачивается от осциллятора  $x$  к осцилляторам  $y$ ,  $z$  и обратно. Во втором случае (т.е. при большой «расстройке»  $\varepsilon$  и малых начальных амплитудах) колебания  $y$  и  $z$  не возбуждаются.

Подробно об этой задаче см. [22].

**11.27.** а)  $\langle H' \rangle = \varepsilon|a|^2 + \mu|a|^4 + \eta(a^2 + a^{*2}),$

где

$$\varepsilon = \omega - \gamma, \quad \mu = \frac{3\beta}{8m\omega^2}, \quad \eta = \frac{\hbar\omega}{8}.$$

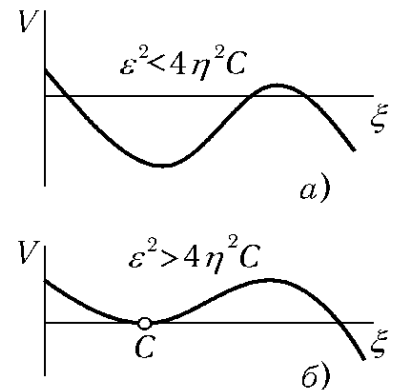


Рис. 162

<sup>1</sup>Интегралы  $B$  и  $C$  называют интегралами Мэнли – Роу.

## б) Уравнения движения

$$\begin{aligned} -\dot{a} &= i(\varepsilon + 2\mu|a|^2)a + 2i\eta a^*, \\ \dot{a}^* &= i(\varepsilon + 2\mu|a|^2)a^* + 2i\eta a \end{aligned}$$

имеют постоянные решения

$$a_0 = 0, \quad |a_1|^2 = \frac{2\eta - \varepsilon}{2\mu}.$$

Для  $\xi = |a|^2$  получаем уравнение

$$\dot{\xi} = -2i\eta(a^{*2} - a^2).$$

Учитывая, что  $\langle H' \rangle = \varepsilon\xi + \mu\xi^2 + \eta(a^2 + a^{*2}) = C = \text{const}$ , получаем

$$\dot{\xi}^2 + V(\xi) = 0,$$

где  $V(\xi) = 4\eta^2[(a^{*2} + a^2)^2 - 4|a|^4] = 4(C - \varepsilon\xi - \mu\xi^2)^2 - 16\eta^2\xi^2$ . В интересующем нас случае, согласно начальным условиям, величина  $C$  мала. В области резонанса  $|\varepsilon| < 2\eta$  график  $V(\xi)$  (рис. 163) позволяет заметить, что  $\xi$  испытывает колебания в пределах от нуля до  $\xi_m \approx 2|a_1|^2$ .

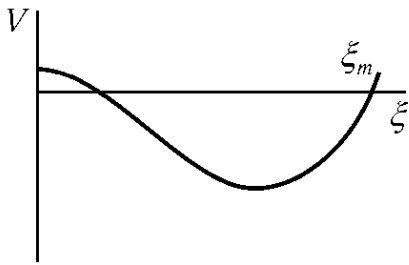


Рис. 163

Таким образом, переход к установившемуся режиму колебаний  $\xi = |a_1|^2$  (ср. с задачей 8.7) может быть обеспечен лишь каким-то неучтенным нами механизмом, например трением, и быть весьма длительным. Подчеркнем, что этот переходной процесс имеет характер биений даже при нулевой «расстройке»,  $\varepsilon = 0$ , в отличие от переходного процесса в линейных колебаниях (см. задачу 5.11).

## 11.28. Усредненная функция Гамильтона

$$\langle H'(Q, P, t) \rangle = H'(Q, P) = \frac{m\omega^2}{2} \left( \varepsilon - \frac{h}{2} \right) Q^2 + \frac{1}{2m} \left( \varepsilon + \frac{h}{2} \right) P^2.$$

Величина  $\sqrt{Q^2 + P^2/m^2\omega^2}$  представляет собой амплитуду колебания. Переменные  $Q$  и  $P$  мало изменяются за период  $2\pi/\gamma$ . Это легко видеть из уравнений Гамильтона, содержащих малые параметры  $\varepsilon$  и  $h$ .



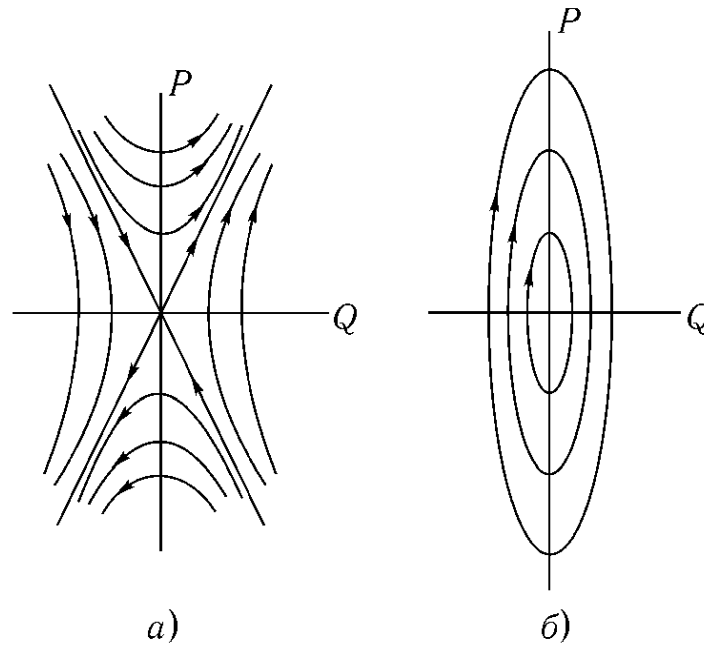


Рис. 164

На плоскости  $Q, P$  точка, изображающая состояние системы, движется по линии  $H'(Q, P) = C = \text{const}$ . На рис. 164, *a* и *б* приведены семейства таких линий для области параметрического резонанса  $|\varepsilon| < h/2$  и ее окрестности  $|\varepsilon| > h/2$ . В первом случае амплитуда в конечном счете неограниченно растет, во втором — испытывает биения (ср. с задачей 8.8).

**11.29. а)** Легко проверить (ср. с задачей 11.4), что данное преобразование — каноническое.

При  $V = 0$  движение  $x$ -осциллятора изображается движением точки по окружности в плоскости  $x, p_x/m\omega_1$  с частотой  $\omega_1$ . Радиус этой окружности

$$a = \sqrt{x^2 + \frac{p_x^2}{m^2\omega_1^2}}$$

совпадает с амплитудой колебаний по оси  $x$ . В плоскости  $X, P_x/m\omega_1$  это будет неподвижная точка  $X = x(0), P_x = p_x(0)$ . Таким образом, новые переменные при  $V = 0$  не зависят от времени и потому  $H'_0 = 0$ .<sup>1</sup>

При  $V \neq 0$  эти переменные зависят от времени, но так как новая функция Гамильтона  $H' = H'_0 + V = V$  мала, то усредненное движение в

<sup>1</sup>Из уравнений Гамильтона для новых переменных (например,  $\dot{X} = \partial H'_0 / \partial P_x = 0$ ) следует, что  $H'_0$  не зависит от них и потому  $H'_0 = f(t)$ , где  $f(t)$  — произвольная функция времени, которую мы, не теряя общности, можем положить равной нулю.

этих переменных медленное. Действительно, после усреднения

$$\langle H' \rangle = -\frac{\beta}{4\omega_1\omega_2} (\omega_1 X P_y - \omega_2 Y P_x),$$

и из уравнений Гамильтона

$$\dot{X} = \frac{\beta}{4\omega_1} Y, \quad \dot{Y} = -\frac{\beta}{4\omega_2} X$$

легко получить

$$X = A \cos(\gamma t + \varphi), \quad Y = -\sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} A \sin(\gamma t + \varphi), \quad \gamma = \frac{\beta}{4\sqrt{\omega_1\omega_2}} \ll \omega_{1,2}.$$

Аналогично для новых импульсов имеем

$$P_x = m\omega_1 B \cos(\gamma t + \psi), \quad P_y = -m\sqrt{\omega_1\omega_2} B \sin(\gamma t + \psi).$$

Таким образом, в плоскости  $X, P_x/m\omega_1$  происходит медленное (с частотой  $\gamma$ ) движение по эллипсу, что отвечает колебаниям по оси  $x$  с медленно изменяющейся амплитудой

$$a(t) = \sqrt{X^2 + (P_x/m\omega_1)^2} = \sqrt{A^2 \cos^2(\gamma t + \varphi) + B^2 \cos^2(\gamma t + \psi)},$$

т. е. биениям. Аналогично амплитуда колебаний по оси  $y$  равна

$$b(t) = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \sqrt{A^2 \sin^2(\gamma t + \varphi) + B^2 \sin^2(\gamma t + \psi)}.$$

Отсюда видно, что энергии  $x$ - и  $y$ -осцилляторов  $E_x = \frac{1}{2}m\omega_1^2 a^2(t)$  и  $E_y = \frac{1}{2}m\omega_2^2 b^2(t)$  и их сумма  $E = E_x + E_y$  не сохраняются. Однако сохраняется величина, которую можно назвать полным числом квантов,

$$n = \frac{E_x}{\hbar\omega_1} + \frac{E_y}{\hbar\omega_2} = \frac{m\omega_1}{2\hbar} C^2,$$

где  $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ , а  $\hbar$  — постоянная Планка.

В частности, при  $\varphi = \psi = 0$  амплитуда биений доходит до нуля

$$x = X \cos \omega_1 t + \frac{P_x}{m\omega_1} \sin \omega_1 t = C \cos \gamma t \cos(\omega_1 t + \varphi_0),$$

$$y = -C \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} \sin \gamma t \cos(\omega_2 t + \varphi_0), \quad \text{tg } \varphi_0 = -\frac{B}{A},$$

а энергия колеблется с частотой  $2\gamma$ :

$$E = \frac{1}{2}m\omega_1 C^2 (\omega_1 \cos^2 \gamma t + \omega_2 \sin^2 \gamma t).$$

Интересно отметить, что даже слабая связь  $|V| \ll H_0 = E$  приводит к большим изменениям энергии  $\Delta E \sim E$ . Так при  $\varphi = \psi = 0$  и  $\omega_1 \gtrsim \omega_2$  имеем

$$\Delta E = \frac{1}{2}m\omega_1(\omega_1 - \omega_2)C^2 \sim \langle E \rangle = \frac{1}{4}m\omega_1(\omega_1 - \omega_2)C^2.$$

Укажем, наконец, что эта задача совпадает с задачей 11.26 о трех осцилляторах со взаимодействием  $\frac{1}{2}m\alpha xyz$  в пределе настолько большой энергии  $z$ -осциллятора  $E_z \gg E_{x,y}$ , что биения  $x$ - и  $y$ -осцилляторов почти не сказываются на его движении

$$z = z_0 \sin \omega_3 t, \quad \omega_3 = \omega_1 - \omega_2.$$

При этом  $\beta = \frac{1}{2}\alpha z_0$ , а  $n\hbar$  совпадает с одним из интегралов Мэнли–Роу (с интегралом  $B$  в обозначениях задачи 11.26). Третий осциллятор играет роль большого резервуара энергии, с которым  $x$ - и  $y$ -осцилляторы обмениваются энергией.

**б)** Новые канонические переменные экспоненциально возрастают со временем

$$X = Ae^{\gamma t} + Be^{-\gamma t}, \quad Y = \sqrt{\frac{\omega_1}{\omega_2}} (Ae^{\gamma t} - Be^{-\gamma t}),$$

$$P_x = m\omega_1 (De^{\gamma t} + Fe^{-\gamma t}), \quad P_y = -m\sqrt{\omega_1\omega_2} (De^{\gamma t} - Fe^{-\gamma t}),$$

что соответствует экспоненциально растущим амплитудам колебаний по осям  $x$  и  $y$ . В этом случае сохраняется разность числа квантов

$$\frac{E_x}{\hbar\omega_1} - \frac{E_y}{\hbar\omega_2} = \frac{2m\omega_1}{\hbar} (AB + DF).$$

## § 12. Уравнение Гамильтона–Якоби

**12.2.** Очевидно, что траектория — плоская кривая. Переменные в уравнении Гамильтона–Якоби разделяются, если воспользоваться полярными координатами, направив полярную ось  $z$  вдоль  $\mathbf{a}$ . Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби

$$S = -Et \pm \int \sqrt{\beta - 2ma \cos \theta} d\theta \pm \int \sqrt{2mE - \beta/r^2} dr. \quad (1)$$

Для уточнения знаков в (1) воспользуемся соотношениями

$$p_r = m\dot{r} = \frac{\partial S}{\partial r} = \pm \sqrt{2mE - \frac{\beta}{r^2}}, \quad (2)$$

$$p_\theta = mr^2\dot{\theta} = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \pm \sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}. \quad (3)$$

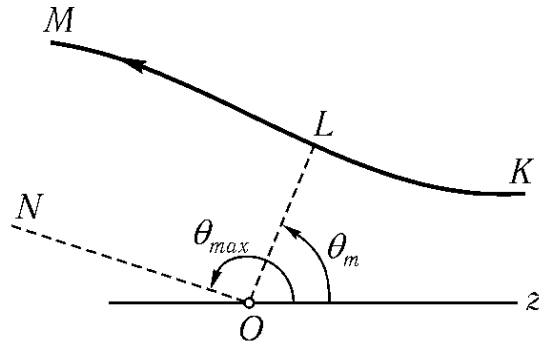


Рис. 165

На начальном участке траектории  $\dot{r} < 0$ ,  $\dot{\theta} > 0$  (мы предполагаем, что траектория расположена над осью  $z$ , рис. 165). Поэтому перед первым радикалом в (1) нужно сохранить нижний знак, а перед вторым — верхний. Равенство  $\frac{\partial S}{\partial \beta} = B$  — это уравнение траектории

$$\int_0^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}} + \int_\infty^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE - \beta/r^2}} = B. \quad (4)$$

Нижние пределы интегралов можно выбрать произвольно, пока не определена постоянная  $B$ . При нашем выборе из условия  $\theta \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$  следует  $B = 0$ .

Постоянная  $\beta$  есть интеграл движения нашей задачи и из (3)  $\beta = p_\theta^2 + 2ma \cos \theta$ . Она выражается через параметры частицы при  $r \rightarrow \infty$  и  $\theta \rightarrow 0$ , т. е. до столкновения, когда  $p_\theta = m\nu\rho$  ( $\rho$  — прицельный параметр),  $\beta = 2m(E\rho^2 + a)$ .

При изменении  $r$  от  $\infty$  до  $r_m = \sqrt{\frac{\beta}{2mE}} = \sqrt{\rho^2 + \frac{a}{E}}$ , определяемого условием  $p_r = 0$ ,  $\theta$  изменяется от нуля до  $\theta_m$  такого, что

$$\int_0^{\theta_m} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}} + \int_\infty^{r_m} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE - \beta/r^2}} = 0. \quad (5)$$

Дальнейший рост  $\theta$  сопровождается ростом  $r$ . При этом  $p_r$  меняет знак. Уравнение участка траектории  $LM$

$$\int_{\theta_m}^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}} - \int_{r_m}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE - \beta/r^2}} = 0. \quad (6)$$

Удобнее переписать, сложив (5) и (6):

$$\int_0^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}} - \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE - \beta/r^2}} - \int_{r_m}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE - \beta/r^2}} = 0. \quad (7)$$

При  $r \rightarrow \infty$  траектория асимптотически приближается к прямой, параллельной  $ON$ . Угол  $\theta_{\max}$  можно найти из равенства<sup>1</sup>

$$\int_0^{\theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}} = 2 \int_{r_m}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE - \beta/r^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}. \quad (8)$$

Равенство  $\frac{\partial S}{\partial E} = A$  определяет зависимость  $r(t)$ . Выбирая  $A$  так, чтобы  $r(0) = r_m$ , получаем

$$r = \sqrt{v^2 t^2 + r_m^2} = \sqrt{\rho^2 + \frac{a}{E} + v^2 t^2}. \quad (9)$$

Интеграл по  $r$  в (4) и (7) вычисляется элементарно, а по  $\theta$  сводится к эллиптическому.

При  $E\rho^2 \gg a$  можно разложить подынтегральное выражение в (4) и (7) по степеням  $\frac{2ma}{\beta} \approx \frac{a}{E\rho^2}$ . С точностью до первого порядка

$$r \sin \theta = r_m \left( 1 - \frac{a}{2E\rho^2} \cos \theta \right) \quad (10)$$

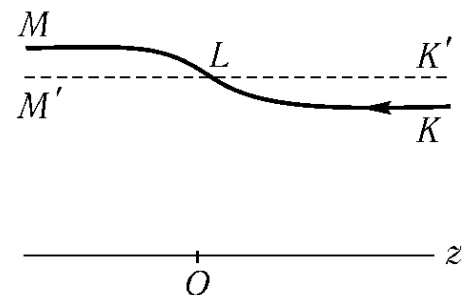


Рис. 166

(рис. 166).

<sup>1</sup>Обратим внимание на следующий прием, позволяющий обойти вычисление интеграла по  $r$  в (8). Этот интеграл не зависит от  $a$  и, следовательно, равен левой части (8) также и при  $a = 0$ . А в этом случае очевидно, что  $\theta_{\max} = \pi$ , интеграл по  $\theta$  вычисляется тривиально.

В этом приближении угол отклонения скорости частицы после рассеяния равен нулю. Объясняется это тем, что действие силы на разных участках траектории (в нулевом приближении это прямая  $K'M'$ ) частично, а в первом приближении полностью компенсируется.

**12.3.** а) Для определения угла отклонения частицы нужно провести разложение по  $a/E\rho^2$  в (8) задачи 12.2 до второго порядка. Получаем уравнение

$$\theta_{\max} + \frac{ma}{\beta} \sin \theta_{\max} + \frac{3}{4} \left( \frac{ma}{\beta} \right)^2 \left( \theta_{\max} + \frac{1}{2} \sin 2\theta_{\max} \right) = \pi. \quad (1)$$

Решая его с точностью до  $\left( \frac{ma}{\beta} \right)^2$ , находим<sup>1</sup> угол отклонения

$$\chi = \pi - \theta_{\max} = \frac{3}{4} \pi \left( \frac{ma}{\beta} \right)^2 = 3\pi \left( \frac{a}{4E\rho^2} \right)^2. \quad (2)$$

Сечение рассеяния

$$d\sigma = \pi |d\rho^2| = \frac{\sqrt{3\pi} a d\theta}{16E\chi^{5/2}}. \quad (3)$$

Зависимость от  $\chi$  получается такой же, как при рассеянии на малые углы в поле  $\gamma/r^4$ , убывающем гораздо быстрее, чем  $U(\mathbf{r})$ .

$$\text{б) } d\sigma = \frac{\pi b d\theta}{8E\chi^3}.$$

в) При условии  $E\rho^2 \gg |b(\theta)|$  для всех  $\theta$  имеем вместо (10) задачи 12.2 с точностью до второго порядка

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{m}{\beta} \int_0^\beta b(\theta) d\theta + \frac{3}{2} \frac{m^2}{\beta^2} \int_0^\theta b^2(\theta) d\theta = \\ &= \begin{cases} \arcsin \frac{r_m}{r} & \text{при } 0 < \theta < \theta_m, \\ \pi - \arcsin \frac{r_m}{r} & \text{при } \theta_m < \theta < \theta_{\max}. \end{cases} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup> Ищем  $\theta_{\max}$  в виде  $\theta_{\max} = \theta_0 + \theta_1 + \theta_2 + \dots$ , где  $\theta_1 \sim \left( \frac{ma}{\beta} \right) \theta_0$ . Уравнение (1) в нулевом приближении  $\theta_0 = \pi$ ; в первом приближении  $\theta_1 + \left( \frac{ma}{\beta} \right) \sin \theta_0 = 0$ , откуда  $\theta_1 = 0$ ; во втором приближении

$$\theta_2 + \frac{ma}{\beta} \theta_1 \cos \theta_0 + \frac{3}{4} \left( \frac{ma}{\beta} \right)^2 \left( \theta_0 + \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right) = 0,$$

откуда следует (2).

Если

$$\int_0^\pi b(\theta) d\theta = \pi \langle b \rangle \neq 0,$$

то сечение

$$d\sigma = \frac{\pi \langle b \rangle}{4E\chi^3} do,$$

такое же, как сечение рассеяния на малые углы в центральном поле

$$U = \frac{\langle b \rangle}{r^2}.$$

Если же  $\langle b \rangle = 0$ , то  $d\sigma = \frac{\sqrt{3\pi}}{8E\chi^{5/2}} \sqrt{\frac{\langle b^2 \rangle}{2}} do.$

**12.4.** а) Переменные в уравнении Гамильтона–Якоби разделяются, если выбрать сферические координаты с осью  $z$ , параллельной  $\mathbf{a}$ . Обобщенные импульсы

$$\begin{aligned} p_r &= m\dot{r} = -\sqrt{2mE - \beta/r^2}, \\ p_\theta &= mr^2\dot{\theta} = \pm\sqrt{\beta - 2ma\cos\theta - p_\varphi^2/\sin^2\theta}, \\ p_\varphi &= mr^2\dot{\varphi}\sin^2\theta = \text{const.} \end{aligned} \quad (1)$$

Постоянную  $\beta = p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} + 2ma\cos\theta$  легко найти, заметив, что  $p_\theta^2 + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2\theta} = M^2$ , где  $M$  — полный момент частицы; его удобно вычислить при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow \pi - \alpha$  ( $\alpha$  — угол между  $\mathbf{v}_\infty$  и  $\mathbf{a}$ ), т. е. до столкновения:  $\beta = 2m(E\rho^2 - a\cos\alpha)$

Согласно (1) падение в центр возможно при условии  $\beta < 0$ , или

$$\rho^2 < (a/E)\cos\alpha. \quad (2)$$

Таким образом, падение возможно, если  $\alpha < \pi/2$ ; в этом случае сечение падения  $\sigma = (\pi a/E)\cos\alpha$ . Усреднение по возможным направлениям  $\mathbf{a}$  дает

$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{\pi a}{E} \cos\alpha \cdot 2\pi \sin\alpha d\alpha = \frac{\pi a}{4E}$ . Интересно, что площадка, определяемая условием (2), представляет собой круг с центром на оси пучка частиц (хотя поле не обладает симметрией относительно этой оси).

$$\text{б)} \quad \sigma = \begin{cases} \frac{\pi a}{E} \cos \alpha - \frac{\pi \lambda^2}{4E^2} & \text{при } 0 < \alpha < \alpha_m = \arccos \frac{\lambda^2}{4aE} \\ 0 & \text{при } \alpha_m < \alpha < \pi. \end{cases}$$

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\pi a}{4E} + \frac{\pi \lambda^4}{64aE^3} - \frac{\pi \lambda^2}{8E^2}.$$

$$\text{в)} \quad \sigma = \begin{cases} \frac{\pi a}{E} \cos \alpha - 2\pi \sqrt{\frac{\gamma}{E}} & \text{при } 0 < \alpha < \alpha_m = \pi - \left( \arccos \frac{\sqrt{\gamma E}}{a} \right)^2 \\ 0 & \text{при } \alpha_m < \alpha < \pi. \end{cases}$$

$$\langle \sigma \rangle = \frac{a}{4E} + \sqrt{\frac{\gamma}{E}} + \frac{3\gamma}{a}.$$

$$\text{г)} \quad \sigma = -\frac{\pi b(\pi - \alpha)}{E}$$

при условии, что  $b(\pi - \alpha) < 0$ .

$$\text{12.5.} \quad \sigma = \begin{cases} \pi R^2 + \frac{\pi a}{E} \cos \alpha, & a \cos \alpha > -ER^2, \\ 0, & a \cos \alpha < -ER^2, \end{cases}$$

где  $\alpha$  — угол между  $\mathbf{v}_\infty$  и  $\mathbf{a}$ .

**12.6.** а) Используем те же обозначения, что и в задаче 12.2. Уравнение начального участка траектории ( $r \rightarrow \infty$ ,  $\theta \rightarrow \pi$ )

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}} = \int_r^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE - \beta/r^2}}, \quad (1)$$

причем

$$\beta = 2m(E\rho^2 - a). \quad (2)$$

В случае  $\beta > 0$  угол  $\theta$  убывает при изменении  $r$  от  $\infty$  до  $r_m$  и дальнейшем возрастании до  $\infty$ . Уравнение участка траектории после прохождения минимального расстояния до центра

$$\int_\theta^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}} = \frac{\pi}{2\sqrt{\beta}} + \int_{r_m}^r \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE - \beta/r^2}}. \quad (3)$$

Очевидно, что при  $E\rho^2 \gg a$  уравнение траектории (1) и (3) совпадает с уравнением (11) задачи 12.2.



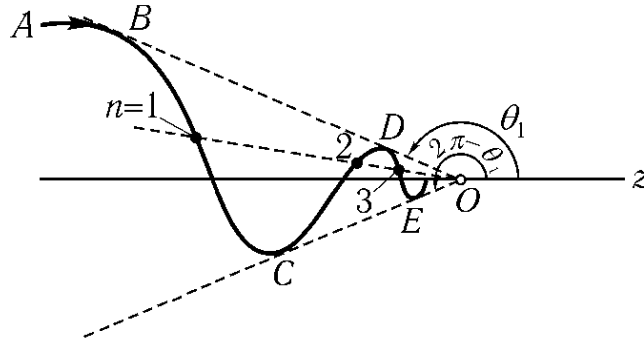


Рис. 167

При  $\beta < 0$  возможно падение в центр поля (заметим, что, согласно (2), допустимы только значения  $\beta \geq -2ma$ ). При этом  $r$  монотонно убывает от  $\infty$  до 0. Угол  $\theta$  убывает от  $\pi$  до  $\theta_1$ , при котором  $p_\theta$  обращается в нуль (участок траектории  $AB$ ; рис. 167). При этом  $\beta - 2ma \cos \theta_1 = 0$ . Затем угол возрастает до значения  $2\pi - \theta_1$  (участок траектории  $BC$ )

$$\int_r^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE - \beta r^{-2}}} = \int_{\theta_1}^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}} + \int_{\theta_1}^\theta \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}}. \quad (4)$$

В точке  $C$  импульс  $p_\theta$  вновь меняет знак и  $\theta$  убывает до значения  $\theta_1$  в точке  $D$ , затем вновь возрастает и т. д.

Уравнение всей траектории можно представить в виде

$$\int_r^\infty \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE - \beta r^{-2}}} = (-1)^n \int_\theta^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}} + 2n \int_{\theta_1}^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta}} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (5)$$

Одному значению  $\theta$  ( $\theta_1 < \theta < 2\pi - \theta_1$ ) соответствует бесконечно много значений  $r$  ( $n$  может принимать любое целое неотрицательное значение, так как интеграл в левой части (5) при  $r \rightarrow 0$  неограниченно возрастает). Таким образом, частица совершает бесконечно много колебаний между прямыми  $BD$  и  $CE$  прежде, чем упасть в центр.

В случае малых прицельных параметров  $E\rho^2 \ll a$  оказывается  $\pi - \theta \ll 1$ , так что в (5) можно заменить  $\cos \theta$  на  $-1 + \frac{1}{2}(\pi - \theta)^2$ . В результате получаем<sup>1</sup>

$$\theta = \pi - \rho \sqrt{\frac{2E}{a}} \sin \left[ \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arsh} \left( \frac{1}{r} \sqrt{\frac{a}{E}} \right) \right]. \quad (6)$$

<sup>1</sup>  $\operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ .

Закон движения  $r(t)$  определяется так же, как в задаче 12.2. Если  $\beta > 0$ , то справедлив закон, определяемый формулой (9) из задачи 12.2. Если  $\beta < 0$ , то

$$r(t) = v\sqrt{t^2 - \tau^2}, \quad v = \sqrt{2E/m}, \quad -\infty < t < \tau = \sqrt{|\beta|/2E}, \quad (7)$$

причем падение происходит в момент времени  $\tau$ .

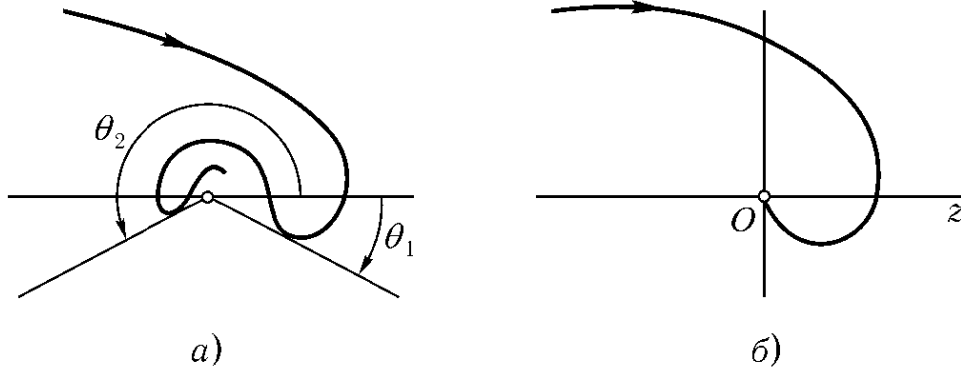


Рис. 168

б) Если  $\beta > 0$  ( $E\rho^2 > a$ ), то

$$\int_{\theta}^{\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 + \frac{2ma}{\beta}(1 + \sin \theta)}} = \begin{cases} \arcsin \frac{r_m}{r}, & \theta_m < \theta < \pi, \\ \pi - \arcsin \frac{r_m}{r}, & \theta_{\min} < \theta < \theta_m. \end{cases}$$

Если  $\beta < 0$  ( $E\rho^2 < a$ ), то

$$\left( \int_{\theta_1}^{\pi} \pm \int_{\theta_1}^{\theta} + 2l \int_{\theta_1}^{\theta_2} \right) \frac{d\theta}{\sqrt{\beta + 2ma(1 + \sin \theta)}} = \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{2mE - \beta/r^2}},$$

где  $l$  — число полных колебаний по углу (от  $\theta_1$  до  $\theta_2$  и обратно), совершенных частицей, знаки ( $\pm$ ) для движения против (по) часовой стрелке (рис. 168, а)

$$\theta_1 = -\arcsin \frac{E\rho^2}{a}, \quad \theta_2 = \pi + \arcsin \frac{E\rho^2}{a}.$$

Если  $\beta = 0$  ( $E\rho^2 = a$ ),

$$r = \frac{\rho}{\sqrt{2}} \ln \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi - \theta}{4}\right)}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}}, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \pi.$$

Частица движется по траектории рис. 168, б, причем закон движения  $r = -\sqrt{\frac{2E}{m}}t$  ( $t < 0$  падение происходит при  $t = 0$ ).

**12.7.** Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (см. [1] § 48)

$$S = -Et + p_\varphi \varphi \pm \int \sqrt{\beta - 2ma \cos \theta - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}} d\theta - \int \sqrt{2mE - \frac{\beta}{r^2}} dr.$$

Обобщенные импульсы те же, что и в задаче 12.4 а. Падение в центр возможно, если  $\beta = 2m(E\rho^2 - a \cos \alpha) < 0$  (что заведомо выполняется при  $\alpha^2 < 2E\rho^2/a \ll 1$ ).

Уравнения траектории

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\beta - 2ma \cos \theta - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}}}, \quad (1)$$

$$\frac{r_0}{r} = \mp \operatorname{sh} \int \frac{\sqrt{|\beta|} d\theta}{\sqrt{\beta - 2ma \cos \theta - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}}}, \quad (2)$$

$$r_0^2 = \frac{|\beta|}{2mE}$$

в общем случае не могут быть проинтегрированы в элементарных функциях. Но качественное описание движения легко дать, если заметить, что уравнение (1), связывающее между собой углы  $\theta$  и  $\varphi$ , с точностью до обозначений совпадает с уравнением траектории сферического маятника (см. [1], § 14, задача 1). Поэтому частица движется так, что точка пересечения ее радиуса-вектора с поверхностью сферы радиуса  $l$  описывает такую же кривую, как и сферический маятник длины  $l$  с энергией, равной  $\frac{\beta}{2ml^2}$  и моментом импульса, равным  $p_\varphi$  в поле тяжести  $g = -\frac{a}{ml^3}$ . Эта кривая заключена между двумя «параллельными» окружностями на сфере  $\theta = \theta_1$  и  $\theta = \theta_2$ .

При условии  $\alpha^2 < 2E\rho^2/a \ll 1$  уравнения (1) и (2) легко проинтегрировать:

$$\theta = \pi - \sqrt{\left(\varepsilon - \frac{\alpha^2}{2}\right) \cos\left(2\sqrt{\frac{ma}{|\beta|}} \operatorname{Arsh} \frac{r_0}{r}\right) + \varepsilon + \frac{\alpha^2}{2}}, \quad (3)$$

$$\theta = \pi - \frac{2\alpha\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{2\varepsilon + \alpha^2 + (2\varepsilon - \alpha^2) \cos 2\varphi}}, \quad \varepsilon = \frac{E\rho^2}{a}.$$

Из (3) видно, что частица, падая на центр, движется в области между двумя коническими поверхностями  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ , вращаясь вокруг оси  $z$ , причем один полный оборот вокруг оси  $z$  приходится на два полных колебания по углу  $\theta$ . Для сферического маятника в этом приближении траектория замкнута (представляет собой эллипс).

**12.8.** а) Уравнение траектории финитного движения (при котором нет падения в центр)

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos f(\theta), \quad (1)$$

где

$$p = \frac{\beta}{m\alpha}, \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E\beta}{m\alpha^2}}, \quad f(\theta) = \int \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2ma}{\beta} \cos \theta}},$$

а константы  $E$  и  $\beta$  удовлетворяют неравенствам  $E < 0$ ,  $\beta > 0$ .

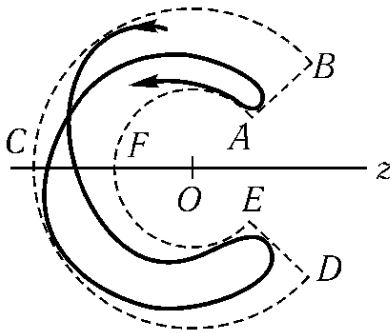


Рис. 169

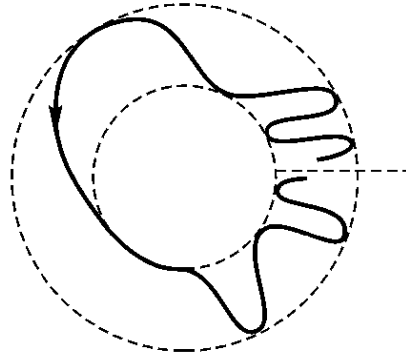


Рис. 170

Если  $0 < \beta < 2ma$ , то орбита «заполняет» область  $ABCDEF$  (рис. 169);  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $r_{1,2} = \frac{p}{1 \pm e}$ ,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ,  $\theta_1 = \arcsin \frac{\beta}{2ma}$ ,  $\theta_2 = 2\pi - \theta_1$ , т. е. проходит сколь угодно близко к любой точке этой области.

Если  $\beta = 2ma$ , то

$$f(\theta) = \sqrt{2} \ln \operatorname{tg}(\theta/4) + C_1 \quad (2)$$

и траектория расположена внутри кольца  $r_1 \leq r \leq r_2$  (рис. 170).

Если  $\beta > 2ma$ , то траектория заполняет кольцо  $r_1 \leq r \leq r_2$ . В частности, если  $\beta \ll 2ma$ , то

$$f(\theta) = \theta + \zeta \sin \theta + \frac{3}{4} \zeta^2 \theta + \frac{3}{8} \zeta^2 + C_2, \quad (3)$$

где  $\zeta = ma/\beta$ . Это — слабо деформированный прецессирующий эллипс, характер деформации которого связан с его ориентацией. Уравнение (3) применимо и при  $\theta \gtrsim \zeta^{-2}$ . Интересно сравнить его с результатами задачи 2.24.

**12.9.** Для движения в кольце  $r_1 \leq r \leq r_2$

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2ma}{\beta} \cos \theta}} = 2\pi \frac{n}{l}.$$

Для движения в области  $r_1 \leq r \leq r_2$ ,  $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \frac{2ma}{\beta} \cos \theta}} = \pi \frac{n}{l}$$

( $n$  и  $l$  — целые числа).

**12.10.** Переменные в уравнении Гамильтона – Якоби разделяются, если выбрать ось  $z$  вдоль вектора  $\mathbf{a}$  (см. [1], § 48, формула (48.9)). Движение по радиусу  $t = \sqrt{\frac{m}{2}} \int \frac{dr}{\sqrt{E - \frac{\alpha}{r} - \frac{\beta}{2mr^2}}}$  при  $\beta \geq 0$  такое же, как и движение

частицы в кулоновом поле  $-\alpha/r$  с моментом  $\beta$  и энергией  $E$ . При  $\beta < 0$  происходит падение частицы на центр. Уравнения траектории  $\frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = \text{const}$ ,  $\frac{\partial S}{\partial \beta} = \text{const}$ . Первое из них

$$\varphi = \pm \int \frac{p_\varphi d\theta}{\sin^2 \theta \sqrt{\beta - 2ma \cos \theta - \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta}}}$$

совпадает с уравнением траектории сферического маятника с энергией  $\beta/2ml^2$  и моментом  $M_z = p_\varphi$  в поле тяжести  $g = -a/ml^3$  (см. [1], § 14, задача 1). Второе уравнение связывает  $r$  и  $\theta$ . При анализе этого уравнения можно также воспользоваться аналогией со сферическим маятником.

**12.11.** а)  $|M_z| < \sqrt{mb/2}$ .

б) Финитное движение возможно при любом  $M_z$ .

**12.12.** б) Полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби (см. [1], § 48, задача 1)

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \int p_\xi(\xi) d\xi + \int p_\eta(\eta) d\eta,$$

где

$$p_\xi = \pm \sqrt{\frac{m}{2}(E - U_\xi(\xi))}, \quad U_\xi(\xi) = \frac{p_\varphi^2}{2m\xi^2} - \frac{m\alpha + \beta}{m\xi} - \frac{F}{2}\xi,$$

$$p_\eta = \pm \sqrt{\frac{m}{2}(E - U_\eta(\eta))}, \quad U_\eta(\eta) = \frac{p_\varphi^2}{2m\eta^2} - \frac{m\alpha - \beta}{m\eta} + \frac{F}{2}\eta.$$

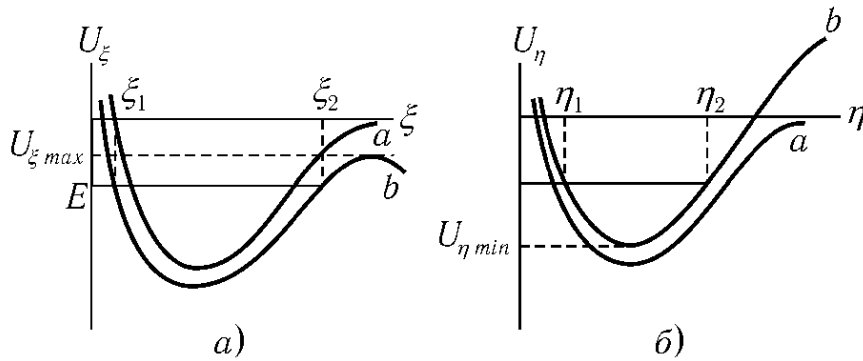


Рис. 171

Траектория и закон движения определяются уравнениями

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = B, \quad \frac{\partial S}{\partial p_\varphi} = C, \quad \frac{\partial S}{\partial E} = A,$$

т. е.

$$\begin{aligned} \int \frac{d\xi}{\xi p_\xi(\xi)} - \int \frac{d\eta}{\eta p_\eta(\eta)} &= B, \quad \varphi - \frac{p_\varphi}{2} \int \frac{d\xi}{\xi^2 p_\xi(\xi)} - \frac{p_\varphi}{2} \int \frac{d\eta}{\eta^2 p_\eta(\eta)} = C, \\ -t + \frac{m}{4} \int \frac{d\xi}{p_\xi(\xi)} + \frac{m}{4} \int \frac{d\eta}{p_\eta(\eta)} &= A. \end{aligned} \quad (1)$$

Для исследования характера движения нужно определить области допустимых при данных  $E$ ,  $p_\varphi$ ,  $\beta$  значений  $\xi$  и  $\eta$ . Графики эффективных потенциальных энергий  $U_\xi(\xi)$  и  $U_\eta(\eta)$  изображены на рис. 171.

Если  $F = 0$ , то при  $-m\alpha < \beta < m\alpha$  (см. кривые  $a$ ) и  $E < 0$  движение как по  $\xi$ , так и по  $\eta$  финитно, при  $E > 0$  — инфинитно. С появлением малой силы  $F > 0$  на графике  $U_\xi(\xi)$  появляется максимум (см. кривые  $b$ ); при  $U_{\eta \min} < E < U_{\xi \max}$  движение по-прежнему финитно. В «плоскости  $\rho z$ » движение ограничено областью  $\xi_1 \leq \xi \leq \xi_2$ ,  $\eta_1 \leq \eta \leq \eta_2$  (рис. 172); сама же плоскость  $\rho z$  вращается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\dot{\varphi}$ . Траектория заполняет область пространства, образуемую вращением фигуры  $ABCD$  вокруг оси  $z$  (см. также задачу 2.36). При  $U_{\xi \max} < E$  движение инфинитно.

С ростом  $F$  величина  $U_{\xi \max}$  уменьшается, а  $U_{\eta \min}$  растет. Когда окажется  $U_{\xi \max} < U_{\eta \min}$ , финитное движение станет невозможным (при  $\beta < -m\alpha + \frac{3}{2}(Fmp_\varphi^4)^{1/3}$  экстремумы  $U_{\xi \max}$  вообще отсутствуют).

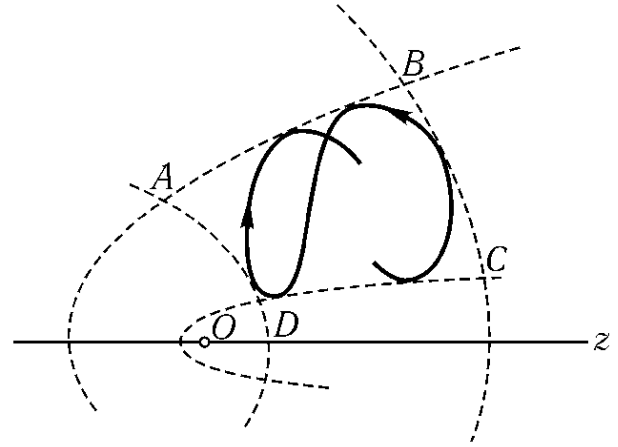


Рис. 172

**12.13.** В эллиптических координатах,  $\rho = \sigma \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}$ ,  $z = \sigma \xi \eta$ ,  $\sigma = \sqrt{b^2 - a^2}$ , потенциал

$$U = \begin{cases} \infty & \text{при } \xi > \xi_0 = b/\sigma, \\ 0 & \text{при } \xi < \xi_0 \end{cases}$$

зависит только от  $\xi$ , и переменные в уравнении Гамильтона – Якоби разделяются (см. [1], § 48).

Полный интеграл

$$S = -Et + p_\varphi \varphi \pm \int \sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma^2 A(\xi)}{\xi^2 - 1} - \frac{p_\varphi^2}{(1 - \xi^2)^2}} d\xi \pm \pm \int \sqrt{2m\sigma^2 E - \frac{\beta}{1 - \eta^2} - \frac{p_\varphi^2}{(1 - \eta^2)^2}} d\eta, \quad (1)$$

где

$$A(\xi) = (\xi^2 - \eta^2)U(\xi) = U(\xi).$$

Для частицы, пролетающей через начало координат,  $p_\varphi = 0$ . Из (1) получаем

$$p_\xi = \pm \sqrt{2m\sigma^2 E + \frac{\beta - 2m\sigma^2 A(\xi)}{\xi^2 - 1}} = \frac{m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)}{\xi^2 - 1} \dot{\xi}, \quad (2)$$

$$p_\eta = \pm \sqrt{2m\sigma^2 E - \frac{\beta}{1 - \eta^2}} = \frac{m\sigma^2(\xi^2 - \eta^2)}{1 - \eta^2} \dot{\eta}. \quad (3)$$

В начале координат ( $\eta = 0$ ,  $\xi = 1$ )

$$\dot{\eta} = \pm \frac{\sqrt{2m\sigma^2 E - \beta}}{m\sigma^2}, \quad \dot{\xi} = 0, \quad \dot{z} = \sigma(\dot{\xi}\eta + \dot{\eta}\xi) = \sigma\dot{\eta}$$

и из условия

$$\sqrt{\frac{2E}{m}} \cos \alpha = \frac{\sqrt{2m\sigma^2 E - \beta}}{m\sigma}$$

находим  $\beta = 2m\sigma^2 E \sin^2 \alpha$ .

Область недостижимых значений  $\eta$  определяется условием

$$2m\sigma^2 E - \beta/(1 - \eta^2) < 0 \quad \text{или} \quad |\eta| > |\cos \alpha|.$$

Итак, движение происходит в области  $|\eta| < |\cos \alpha|$ ,  $1 < \xi < \xi_0$  (заштрихованная на рис. 173 область).

**12.14.** Переменные в уравнении Гамильтона–Якоби разделяются в эллиптических координатах (см. [1], § 48, задача 2 при  $\alpha_1 = -\alpha_2 = \alpha$ ). Для частицы, летящей из бесконечности вдоль оси  $z$ , постоянная  $\beta = -2mE\rho^2 + 4m\alpha\sigma$ , где  $\rho$  — прицельный параметр.

При  $\beta < 0$  траектория качественно не отличается от траектории частицы, рассеиваемой в поле точечного диполя (см. задачу 12.6 б).

При  $\beta > 0$  частица «падает» на диполь (т. е. проходит в своем движении через отрезок  $O_1 O_2$ ) и вновь уходит на бесконечность. Если дополнительно  $p_\eta(\eta_1) = 0$  при  $\eta_1 < 0$ , то частица движется в области, ограниченной гиперболой  $\eta = \eta_1$  (рис. 174).

**12.15.** В уравнении Гамильтона–Якоби

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left[ \left( \frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} + \frac{e}{2c} \mathcal{H}(z)r \right)^2 \right] = 0 \quad (1)$$



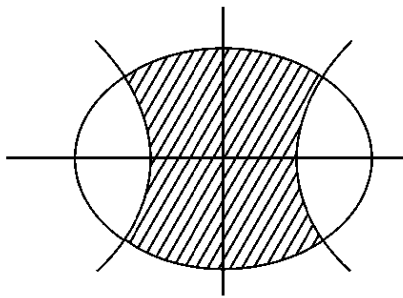


Рис. 173

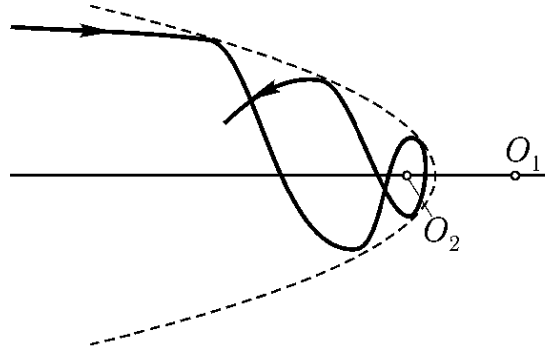


Рис. 174

отделяются время и угол  $\varphi$ :

$$S = -Et + p_\varphi \varphi + \tilde{S}(r, z). \quad (2)$$

Рассматривая далее только траектории, пересекающие ось  $z$ , положим  $p_\varphi = 0$ . Разделить переменные  $r$  и  $z$  в уравнении не удастся, и мы будем искать интеграл его приближенно, в виде разложения по  $r$ :

$$\tilde{S}(r, z) = S_0(z) + r\psi(z) + \frac{r^2}{2}\sigma(z) + \dots \quad (3)$$

Так как радиальный импульс

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \psi(z) + r\sigma(z) + \dots \quad (4)$$

для частицы, летящей вдоль оси  $z$  (при  $r = 0$ ), равен нулю, то для рассматриваемого пучка частиц  $\psi(z) = 0$ . Подставляя (3) в (1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $r$ , получаем (ср. [2], § 56, задача 2)

$$S_0(z) = pz, \quad (5)$$

$$p\sigma'(z) + \sigma^2 + \frac{e^2}{4c^2}\mathcal{H}^2(z) = 0. \quad (6)$$

Вне линзы (при  $|z| > a$ ,  $\mathcal{H}(z) = 0$ ) из (6) следует, что

$$\sigma(z) = \frac{p}{z + C_1} \quad \text{при} \quad z < -a, \quad (7)$$

$$\sigma(z) = \frac{p}{z + C_2} \quad \text{при} \quad z > a. \quad (8)$$

Уравнения траекторий

$$\frac{\partial S}{\partial C_{1,2}} = -\frac{pr^2}{2(z + C_{1,2})^2} = B_{1,2} \quad (9)$$

— уравнения прямых, пересекающих ось  $z$  в точках  $-C_{1,2}$ ,<sup>1</sup> т. е.  $z_0 = -C_1$ ,  $z_1 = -C_2$ . Из (6) получаем

$$p\sigma(a) - p\sigma(-a) + \int_{-a}^a \sigma^2 dz + \frac{e^2}{4c^2} \int_{-a}^a \mathcal{H}^2(z) dz = 0. \quad (10)$$

Поскольку  $|z_{0,1}| \gg a$ , из (7), (8) получаем

$$\sigma(\pm a) = -\frac{p}{z_{1,0}}. \quad (11)$$

Оценим  $\int_{-a}^a \sigma^2 dz$ . Согласно (6)  $\sigma(z)$  — монотонная функция. Поэтому

$$\int_{-a}^a \sigma^2 dz \lesssim \frac{2ap^2}{z_{1,0}^2} \ll p\sigma(\pm a).$$

Таким образом, из (10)

$$\frac{1}{|z_0|} + \frac{1}{z_1} = \frac{e^2}{4c^2 p^2} \int_{-a}^a \mathcal{H}^2(z) dz = \frac{1}{f}. \quad (12)$$

Условие  $|z_{0,1}| \gg a$  действительно соблюдается, если  $a \ll \frac{cp}{e\mathcal{H}}$ .

**12.16.** Все вычисления предыдущей задачи до формулы (6) включительно применимы и к этой задаче. Замена  $\sigma = f'/pf$  приводит (6) к виду

$$(1 + \kappa^2 z^2) f''(z) + \frac{e^2 \mathcal{H}^2}{2c^2} f = 0,$$

а затем замена

$$\kappa z = \operatorname{tg} \xi, \quad -\frac{\pi}{2} < \xi < \frac{\pi}{2}, \quad f(z) = \frac{\eta(\xi)}{\cos \xi}$$

дает

$$\eta''(\xi) + \lambda^2 \eta(\xi) = 0,$$

<sup>1</sup>При  $z$ , близких к  $C_{1,2}$ ,  $\sigma \rightarrow \infty$ , так что разложение (3) неприменимо. Однако уравнения траекторий (9) остаются справедливыми и в этой области.

где

$$\lambda^2 = 1 + \frac{e^2 \mathcal{H}^2}{4c^2 \kappa^2 p^2}.$$

Отсюда

$$\sigma = \sin \xi + \lambda \cos^2 \xi \operatorname{ctg}(\lambda \xi + \alpha)$$

и уравнение траекторий

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha} = -\frac{pr^2 \lambda \cos^2 \xi}{2 \sin^2(\lambda \xi + \alpha)} = B,$$

или

$$r \cos \xi = B' \sin(\lambda \xi + \alpha).$$

При  $r = 0$  оказывается  $\lambda \xi_n + \alpha = \pi n$ , откуда  $\alpha = -\lambda \operatorname{arctg}(\kappa z_0)$  и точки фокусировки

$$\kappa z_n = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg} \kappa z_0 + \frac{n\pi}{\lambda}\right).$$

В зависимости от величины  $\lambda$  имеется одна или несколько точек фокусировки.

### 12.17.

$$S(q, q_0, t, t_0) = f(q, \alpha(q, q_0, t, t_0), t) - f(q_0, \alpha(q, q_0, t, t_0), t_0),$$

где  $f(q, \alpha, t)$  — полный интеграл уравнения Гамильтона–Якоби, а зависимость  $\alpha(q, q_0, t, t_0)$  определяется уравнением (системой уравнений для случая многих степеней свободы)

$$\frac{\partial f(q, \alpha, t)}{\partial \alpha} = \frac{\partial f(q, \alpha, t_0)}{\partial \alpha}.$$

## § 13. Адиабатические инварианты

### 13.1. $E^2 l = \text{const.}$

Поясним полученный ответ. На колечко  $A$  действует сила  $\mathbf{F}$ , определяемая натяжением нити  $T$ . При малых углах отклонения маятника  $\varphi$  сила

$$F_x = mg\varphi, \quad F_y = \frac{1}{2}mg\varphi^2$$

(ось  $y$  направлена вертикально вверх, ось  $x$  в плоскости колебаний). Так как длина нити  $AB = l$  изменяется медленно, можно усреднить силу по периоду колебаний  $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$ ,  $\omega = \sqrt{g/l}$ , считая длину нити постоянной. Получаем

$$F_x = 0, \quad F_y = \frac{1}{4}mg\varphi_0^2.$$

При смещении колечка на  $dy = dl$  энергия убывает на  $F_y dy = \frac{1}{4}mg\varphi_0^2 dl$ . Так как  $E = \frac{1}{2}mgl\varphi_0^2$ , то

$$dE = -\frac{1}{2}\frac{E}{l}dl.$$

Отсюда  $E^2 l = \text{const.}$

**13.2.** После того, как частица столкнется с обеими стенками, ее скорость  $v$  изменится на  $2\dot{l}$ . Условие медленности означает, что  $|2\dot{l}| \ll v$ .

Выберем такое время  $\Delta t$ , что

$$\frac{2l}{v} \ll \Delta t \ll \frac{l}{|\dot{l}|}.$$

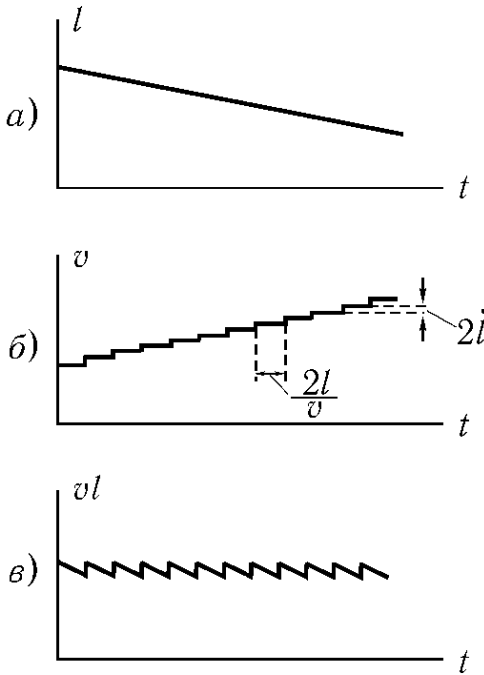


Рис. 175

Такое  $\Delta t$  существует в силу условия медленности. За это время произойдет  $v\Delta t/(2l)$  пар столкновений со стенками, и скорость изменится на

$$\Delta v = -v\dot{l}\frac{\Delta t}{l}.$$

Интегрируя, получаем  $vl = \text{const}$  или  $El^2 = \text{const}$ .

Интересно проследить подробнее как изменяется произведение  $vl$ . Это легко сделать, воспользовавшись графиками  $l(t)$  и  $v(t)$  (рис. 175 а,б). График  $I = vl$  представлен на рис. 175, в. Величина  $vl$  колеблется около приблизительно постоянного значения  $\langle vl \rangle$ , причем амплитуда колебаний имеет относительную величину  $\frac{\Delta I}{I} \sim \frac{\dot{l}}{v}$ .

Отклонение  $\langle vl \rangle$  от постоянной имеет высший порядок малости

$$\frac{d}{dt}\langle vl \rangle \sim \dot{l}^2.$$

**13.3.** Если бы  $g(t) = g - a(t)$  было постоянным, то закон движения шарика был бы

$$z(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \text{ (при } -\sqrt{2h/g} < t < \sqrt{2h/g}).$$

Изменение  $g(t)$  на  $\Delta g$  приводит к изменению потенциальной энергии на  $mz\Delta g$ , а за период — на  $m\langle z \rangle \Delta g$ , где  $\langle z \rangle = \frac{2}{3}h$  среднее по времени значение  $z$ .

Изменение полной энергии  $\Delta(mgh)$  происходит именно из-за изменения потенциальной энергии. Поэтому  $m\Delta g \frac{2}{3}h = \Delta(mgh)$  или  $g\Delta h + \frac{1}{3}h\Delta g = 0$ , откуда  $h \propto g^{-1/3}$ .

В предложенном выводе мы следуем, по существу, тем же путем, который можно применить в общем случае для доказательства сохранения  $\oint p dq$  (см. [1], §49).

Разумеется в этой задаче (как и в других предыдущих) можно было сразу же воспользоваться результатами общей теории.

Если плита медленно поднимается (но  $g(t) = \text{const}$ ), то  $h = \text{const}$ . Это очевидно, если скорость плиты постоянна (достаточно перейти в систему отсчета, связанную с плитой). Если же скорость изменяется, то результат, согласно общей теории зависящий лишь от высоты подъема плиты, измениться не может. При этом предполагается, что относительное изменение скорости за время  $\sqrt{2h/g}$  мало, плита поднимается плавно.

$$\mathbf{13.4.} \quad \text{а) } E = -A \left( 1 - \frac{\alpha I}{\sqrt{2mA}} \right)^2;$$

$$\text{б) } E = -U_0 \left( 1 - \frac{\alpha I}{\sqrt{2mU_0}} \right);$$

$$\text{в) } E = \alpha I \sqrt{\frac{2U_0}{m}} + \frac{\alpha I^2}{2m};$$

$$\text{г) } E = \left[ \sqrt{\frac{\pi}{2m}} \frac{I}{2} A^{1/n} \Gamma\left(\frac{1}{n} + \frac{3}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \right]^{2n/(n+2)}.$$

$$\mathbf{13.5.} \quad h \propto (\sin \alpha)^{2/3}.$$

$$\mathbf{13.6.} \quad a \propto (\sin \alpha)^{-1/4}.$$

$$\mathbf{13.7.} \quad I = \frac{8ml\sqrt{gl}}{\pi} \left[ E \left( \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) - \cos^2 \frac{\varphi_0}{2} K \left( \sin \frac{\varphi_0}{2} \right) \right].$$

**13.8.** Обозначим через  $x$  и  $X$  координаты частиц  $m$  и  $M$ , отсчитываемые от точки  $O$ . Движение легкой частицы можно приближенно рассматривать как движение между двумя стенками, одна из которых перемещается. Поскольку выполняется условие

$$|\dot{x}| \gg |\dot{X}|, \quad (1)$$

сохраняется усредненное по периоду произведение  $|\dot{x}|X = C$  (см. задачу 13.2). Исключая  $\dot{x}$  из закона сохранения энергии

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{M\dot{X}^2}{2} = E,$$

находим, что влияние легкой частицы на движение тяжелой равносильно появлению потенциальной энергии  $U(X) = \frac{mC^2}{2X^2}$ . Уравнение  $\frac{M\dot{X}^2}{2} + U(X) = E$  приводит к закону движения  $X = \sqrt{\frac{mC^2}{2E} + \frac{2E}{M}}(t - \tau)$ . Постоянные  $E$ ,  $C$  и  $\tau$  могут быть определены по начальным значениям  $X$ ,  $\dot{X}$  и  $\dot{x}$  (не зависят от  $x(0)$ ). После того как условие (1) будет нарушено, предлагаемый способ решения задачи будет неприменим.

Подобное приближение (называемое адиабатическим) находит широкое применение, например, в теории молекул.

**13.9.** Обозначим координаты тяжелых частиц  $X_{1,2}$ , а легкой  $x$ . При  $X_1 < x < X_2$  потенциальная энергия

$$U = (x - X_1)f + (X_2 - x)f = (X_2 - X_1)f.$$

Поэтому легкая частица свободно движется между тяжелыми, и

$$|\dot{x}|(X_2 - X_1) = C = \text{const}$$

(см. предыдущую задачу). С учетом этого из закона сохранения энергии для относительного движения тяжелых частиц ( $X = X_2 - X_1$ ) получаем

$$\frac{M}{4}\dot{X}^2 + \frac{mC^2}{2X^2} + fX = E.$$

Разлагая  $U_{\text{эфф}}(X) = \frac{mC^2}{2X^2} + fX$  вблизи минимума  $X_0 = (mC^2/f)^{1/3}$ , находим частоту малых колебаний «иона»

$$\omega^2 = \frac{2U''(X_0)}{M} = \frac{6f}{MX_0}.$$

**13.10.** В уравнениях для  $P$  и  $Q$ 

$$\dot{Q} = \omega + \frac{\dot{\omega}}{2\omega} \sin 2Q, \quad \dot{P} = -P \frac{\dot{\omega}}{\omega} \cos 2Q$$

разложим частоту в ряд по  $t$ . Ограничиваясь поправками первого порядка, получим

$$Q = (\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} \dot{\omega}_0 t^2 + \frac{\dot{\omega}_0}{2\omega_0} \int_0^t \sin 2Q(t) dt, \quad (1)$$

$$P = P_0 \left( 1 - \frac{\dot{\omega}_0}{\omega_0} \int_0^t \cos 2Q dt \right), \quad (2)$$

где  $\omega_0$  и  $\dot{\omega}_0$  — значения частоты и ее производной в момент времени  $t_0 = 0$ , причем  $\dot{\omega}_0 = \varepsilon^2 \omega_0^2$  и  $\varepsilon \ll 1$ .

Фаза  $Q$  и амплитуда  $A = \sqrt{\frac{2P}{m\omega_0}}$  возмущенного движения относительно мало отличаются от своих невозмущенных значений  $Q_0 = \omega_0 t + \varphi$  и  $A_0 = \sqrt{\frac{2P_0}{m\omega_0}}$  даже для промежутков времени, много больших периода колебаний  $2\pi/\omega$  (рис. 176).

Так, для моментов времени  $t \sim 1/\varepsilon \omega_0$  второй член в (1) порядка единицы, а третий — порядка  $\varepsilon$ , и поэтому

$$Q = \omega_0 t + \varphi + \frac{1}{2} \dot{\omega}_0 t^2, \quad P = P_0.$$

Но такое изменение фазы приведет к тому, что в переменных  $p, q$  возмущенное движение

$$q(t) = A_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{1}{2} \dot{\omega}_0 t^2\right)$$

будет существенно отличаться от невозмущенного

$$q_0(t) = A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

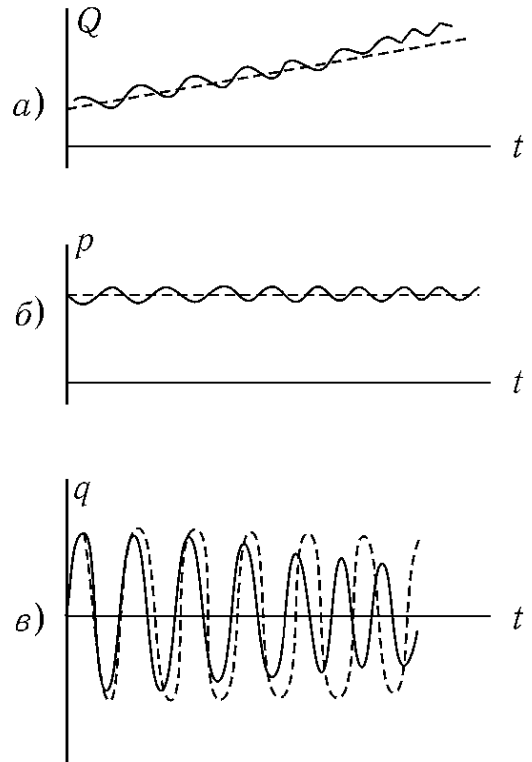


Рис. 176

так что разница

$$q(t) - q_0(t) \sim q_0(t).$$

При попытке строить теорию возмущений для переменных  $q$  и  $p$  мы получим для поправки первого порядка  $q_1(t)$  уравнение

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 = -2\omega_0 \dot{\omega}_0 t A_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

с растущей во времени резонансной силой. Поэтому полученное в такой теории решение справедливо лишь для малых промежутков времени порядка нескольких периодов колебаний

$$\frac{2\pi}{\omega_0} \ll \frac{1}{\varepsilon \omega_0}.$$

**13.12.** Преобразуем функцию Гамильтона системы

$$H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} - xF(t) = E(t) \quad (1)$$

к виду

$$\frac{m\omega^2}{2} \left( x - \frac{F}{m\omega^2} \right)^2 + \frac{p^2}{2m} - \frac{F^2}{2m\omega^2} = E(t).$$

Отсюда видно, что фазовая траектория представляет собой эллипс, смещенный вдоль оси  $x$  на расстояние  $F/m\omega^2$ , с полуосями

$$a = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2} + \frac{F^2}{m^2\omega^4}}, \quad b = \sqrt{2mE + \frac{F^2}{\omega^2}}.$$

Адиабатический инвариант с точностью до множителя  $\frac{1}{2\pi}$  совпадает с площадью этого эллипса

$$I = \frac{1}{2}ab = \frac{E + (F^2/2m\omega^2)}{\omega}. \quad (2)$$

Здесь

$$E + \frac{F^2}{2m\omega^2}$$

имеет смысл энергии колебаний вблизи смещенного положения равновесия (ср. с задачей 5.16). Подставляя в (2) значение  $E$  из (1), можем представить



результат в виде

$$I = \frac{m}{2\omega} \left| \dot{x} + i\omega \left( x + \frac{F}{m\omega^2} \right) \right|^2 =$$

$$= \frac{m}{2\omega} \left| \frac{1}{m} \int_0^t e^{i\omega(t-\tau)} F(\tau) d\tau + e^{i\omega t} [\dot{x}(0) + i\omega x(0)] - i \frac{F(t)}{m\omega} \right|^2.$$

(Здесь для величины  $\dot{x} + i\omega x$  использованы соотношения (22.9), (22.10) из [1]). Интегрируя по частям, получим

$$I(t) = I(0) + \frac{\dot{x}(0)}{\omega^2} \int_0^t F(t) \sin \omega t dt -$$

$$- \frac{1}{\omega} \left[ x(0) - \frac{F(0)}{m\omega^2} \right] \int_0^t \dot{F}(t) \cos \omega t dt + \frac{1}{2m\omega} \left| \int_0^t \dot{F}(t) e^{i\omega t} dt \right|^2.$$

Таким образом, если сила изменяется медленно, то  $I(t)$  осциллирует вблизи  $I(0)$ . Если  $F(t) \rightarrow \text{const}$  при  $t \rightarrow \infty$ , то полное изменение адиабатического инварианта  $I(\infty) - I(0)$  может быть очень малым (см. задачу 5.18).

**13.13.**  $PV^{5/3} = \text{const.}$

**13.14.** а)  $E = \frac{\pi^2}{2m} \left( \frac{I_1^2}{a^2} + \frac{I_2^2}{b^2} + \frac{I_3^2}{c^2} \right)$ , где  $a, b, c$  — длины ребер параллелепипеда, а  $I_k = \text{const.}$

б) Сохраняются абсолютные величины проекции скорости на каждое из ребер.

**13.15.** Переменные разделяются в сферических координатах. Момент импульса  $M$  сохраняется строго ( $M_z$  является, кроме того, адиабатическим инвариантом, соответствующим углу  $\varphi$ ). Адиабатический инвариант для радиального движения

$$I_r = \frac{1}{\pi} \int_{r_{\min}}^R \sqrt{2mE - \frac{M^2}{r^2}} dr. \quad (1)$$

Зависимость  $E(R)$  можно выяснить, не вычисляя интеграла (1). Замена  $r = Rx$  дает

$$I_r = \frac{1}{\pi} \int_{x_{\min}}^1 \sqrt{2mER^2 - \frac{M^2}{x^2}} dx = I_r(ER^2, M), \quad (2)$$

откуда  $ER^2 = \text{const}$ . Поэтому для угла падения  $\alpha$

$$\sin \alpha = \frac{r_{\min}}{R} = \frac{M}{\sqrt{2mER}} = \text{const}.$$

**13.16.** а)  $E \propto \gamma^{\frac{2}{2-n}}$ ; б)  $E \propto \gamma^{-1}$ .

**13.17.** Приравнявая значения адиабатического инварианта до и после включения поля

$$\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{E - \frac{M^2}{2mr^2} - U(r)} dr = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{E + \frac{M^2}{2mr^2} - U - \delta U} dr$$

получаем

$$\delta E = \langle \delta U \rangle = \frac{2}{T} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\delta U dr}{\sqrt{\frac{2}{m} \left( E - \frac{M^2}{2mr^2} - U \right)}}.$$

**13.18.**  $E = I_1 \Omega_1 + I_2 \Omega_2$  (обозначения задачи 6.5 а). Траектория заполняет прямоугольник  $|Q_1| \leq \sqrt{I_1 \Omega_1^{-1}}$ ,  $|Q_2| \leq \sqrt{I_2 \Omega_2^{-1}}$ .

Условия применимости теории адиабатических инвариантов:

$$|\dot{\Omega}_i| \ll \Omega_i^2, \quad |\ddot{\Omega}_i| \ll \Omega_i |\dot{\Omega}_i| \quad (i = 1, 2).$$

Вне области вырождения эти условия сводятся к таким же условиям, наложенным на  $\omega_1(t)$ . В области вырождения ( $|\omega_1^2 - \omega_2^2| \sim \alpha$ ) второе условие оказывается более жестким и дает  $|\dot{\omega}_1| \ll \alpha$  (область вырождения проходит за время, гораздо большее периода биений).

**13.19.** В отсутствие связи  $\alpha xy$  система распадается на два независимых осциллятора с координатами  $x$  и  $y$ . Соответствующие адиабатические инварианты  $I_x = \frac{E_x}{\omega_1}$ ,  $I_y = \frac{E_y}{\omega_2}$ , где  $E_x$  и  $E_y$  — энергии этих осцилляторов.

При учете связи система состоит из двух независимых осцилляторов с координатами  $Q_1$  и  $Q_2$ . Если частота изменяется достаточно медленно, то сохраняются

$$I_1 = \frac{E_1}{\Omega_1}, \quad I_2 = \frac{E_2}{\Omega_2}.$$

Вне области вырождения нормальные колебания сильно локализованы, а именно при  $\omega_1 < \omega_2$  оказывается  $Q_1 = x$ ,  $Q_2 = y$ , а при  $\omega_1 > \omega_2$   $Q_1 = +y$ ,  $Q_2 = -x$ . Таким образом, при  $\omega_1 < \omega_2$  оказывается  $I_x = I_1$ ,  $I_y = I_2$ , при  $\omega_2 < \omega_1$  наоборот,  $I_x = I_2$ ,  $I_y = I_1$  (рис. 177).

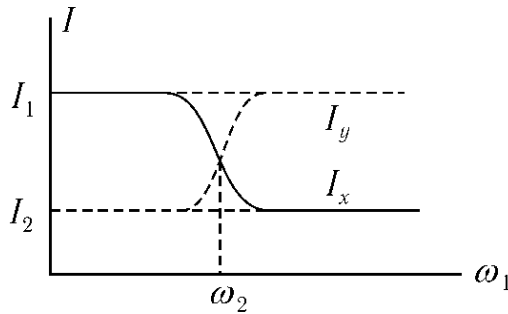


Рис. 177

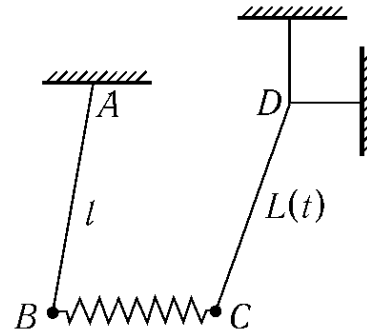


Рис. 178

Проиллюстрируем это следующим примером. Два маятника, длина одного из которых может медленно изменяться, связаны пружинкой малой жесткости (рис. 178). При значительной разнице длин маятников  $l$  и  $L$  нормальные колебания почти совпадают с колебаниями одного или другого маятника.

Пусть вначале маятник  $AB$  колеблется с амплитудой  $\varphi_0$ , а маятник  $CD$  — с очень малой. При уменьшении  $L$  амплитуда колебаний маятника  $CD$  остается малой, пока длина его не станет почти равна  $l$ . При  $L \approx l$  амплитуда его возрастает (а при  $l = L$  оба маятника будут колебаться с амплитудами, равными  $\frac{\varphi_0}{\sqrt{2}}$  в противофазе). С дальнейшим убыванием  $L$  почти вся энергия перейдет к маятнику  $CD$ , и амплитуда его станет равной  $\varphi_1 = \varphi_0 \left(\frac{l}{L}\right)^{3/4}$ , как для отдельного маятника.

При сравнительно быстром прохождении области вырождения  $\dot{\omega}_1 \gg \alpha$  подобной перекачки энергии между осцилляторами не происходит. Если, кроме того,  $\dot{\omega}_1 \ll \omega_1^2$ ,  $\ddot{\omega}_1 \ll \omega_1 \dot{\omega}_1$ , то сохраняются  $I_x$  и  $I_y$ .

### 13.20. Из уравнений движения

$$\ddot{x} + \omega_1^2 x + 2\beta xy = 0, \quad (1)$$

$$\ddot{y} + \omega_2^2 y + \beta x^2 = 0, \quad (2)$$

легко обнаружить, что связь осцилляторов приводит к большой передаче энергии при  $2\omega_1 \approx \omega_2$ .

Пусть  $x = a(t) \cos(\omega_1 t + \varphi)$ ,  $y = b(t) \cos(\omega_2 t + \psi)$ . Если  $a \gg b$ , то член  $\beta x^2 = \frac{1}{2}\beta a^2 + \frac{1}{2}\beta a^2 \cos(2\omega_1 + 2\varphi)$  в (2) играет роль вынуждающей силы, приводящей к резонансному росту  $y$ . Если же  $a \ll b$ , то член  $2\beta xy = 2\beta b x \cos(\omega_2 t + \psi)$  в (1) приводит к параметрической раскачке колебаний  $x$ . Подробное исследование системы (1) и (2) можно найти в задаче 8.10.

Область резонансного взаимодействия:  $|2\omega_1 - \omega_2| \lesssim \beta b \omega_1^{-1}$ .

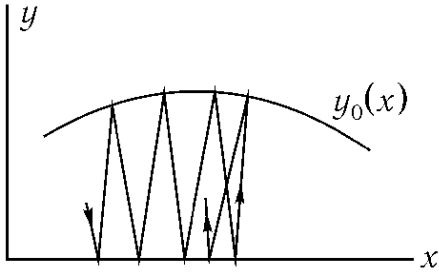


Рис. 179

Сильное резонансное взаимодействие осцилляторов имеет место, вообще говоря, при условиях  $n\omega_1 = m\omega_2$ , где  $n$  и  $m$  — целые числа. Однако ширины областей частот, в которых осуществляются эти резонансы, при не очень малых  $n$  и  $m$  чрезвычайно малы (см. [1], § 29). Поэтому их влиянием на движение осцилляторов можно пренебречь при  $\dot{\omega}_1$  не слишком малых (хотя и достаточно малых для того, чтобы можно было использовать теорию адиабатических инвариантов).

**13.21.** Пусть частица, движущаяся в плоскости  $xy$  под малым углом к оси  $y$  ( $|\dot{x}| \ll |\dot{y}|$ ), отражается от оси  $x$  и от кривой  $y_0(x)$  (рис. 179).

Если считать закон движения в направлении оси  $x$  известным, то можно исследовать движение в направлении оси  $y$ , рассматривая  $x(t)$  как медленно изменяющийся параметр. Сохраняется адиабатический инвариант  $\oint p_y dy = 2|p_y|y_0(x) = 2\pi I$ , и это равенство определяет зависимость  $p_y(x)$ .

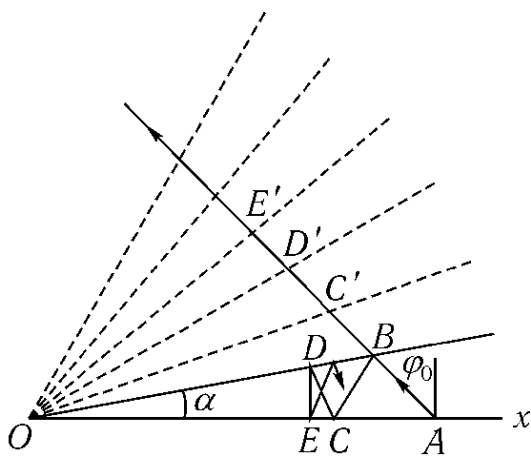


Рис. 180

Для определения же  $x(t)$  можно использовать закон сохранения энергии  $m^2 \dot{x}^2 + p_y^2(x) = 2mE$ . Минимальное расстояние  $x_{\min}$  определяется условием  $p_y^2(x_{\min}) = 2mE$ . Подставляя  $y_0(x) = x \tan \alpha$ ,  $2\pi I = 2\sqrt{2mEl} \tan \alpha \cos \varphi_0$  получаем  $x_{\min} = l \cos \varphi_0$ .

Решение задачи методом отражений очевидно из рис. 180. Этот метод дает точное решение, применимое при любых углах  $\alpha$  и  $\varphi_0$ , но не может быть обобщен на случаи, когда  $y_0(x)$  не является прямой.

**13.22.**  $\tan \alpha x_m = \tan \varphi$ ,  $T = \frac{2\pi}{\alpha v \sqrt{\cos 2\varphi}}$ .

**13.23.** а) Задача о движении частицы в магнитном поле при указанном выборе векторного потенциала сводится к задаче о движении гармонического осциллятора (см. задачу 10.7). Адиабатический инвариант

$$I = \frac{E - p_z^2/2m}{\omega} \propto \frac{v_\perp^2}{\mathcal{H}} \propto \pi a^2 \mathcal{H},$$

где  $a = \frac{cmv_\perp}{e\mathcal{H}}$  — радиус орбиты частицы (см. [2], § 21).

Соотношение  $I \propto \pi a^2 \mathcal{H}$  допускает простую интерпретацию: радиус орбиты изменяется так, что поток магнитного поля через площадку, охватываемую ею, остается постоянным. Расстояние центра орбиты от плоскости  $yz$ , равное  $x_0 = \frac{cp_y}{e\mathcal{H}}$  с ростом  $\mathcal{H}$  уменьшается.

Возникновение дрейфа орбит связано с появлением электрического поля  $\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = (0, -\frac{1}{c} x \dot{\mathcal{H}}, 0)$  при изменении магнитного поля (ср. [2], § 22).

Векторы электрического поля  $\mathcal{E}$  и скорости  $\mathbf{v}_{\text{др}}$  для различных положений орбиты частицы показаны на рис. 181.

б) Функция Гамильтона в цилиндрических координатах

$$H = \frac{p_z^2}{2m} + \frac{p_r^2}{2m} + \frac{1}{2mr^2} \left( p_\varphi - \frac{e\mathcal{H}}{2c} r^2 \right)^2.$$

Интегралами движения являются  $p_z$  и  $p_\varphi$ .

Адиабатический инвариант для радиального движения

$$\pi I_r = \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \sqrt{2mE_\perp - \frac{1}{r^2} \left( p_\varphi - \frac{e\mathcal{H}}{2c} r^2 \right)^2} dr$$

после замены  $r = \mathcal{H}^{-1/2} \zeta$  принимает вид

$$\int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \sqrt{\frac{2mE_\perp}{\mathcal{H}} - \frac{1}{\zeta^2} \left( p_\varphi - \frac{e}{2c} \zeta^2 \right)^2} d\zeta = \pi I_r \left( p_\varphi, \frac{E_\perp}{\mathcal{H}} \right).^1$$

<sup>1</sup>Интересно, что  $I_r$  фактически не зависит от  $p_\varphi$  при  $p_\varphi > 0$ . Действительно,  $\frac{\partial I_r}{\partial p_\varphi}$  представляет собой изменение угла  $\Delta\varphi$  за время одного радиального колебания, а при  $p_\varphi > 0$  начало координат лежит вне траектории (см. рис. 98, б), и потому  $\Delta\varphi = 0$ .

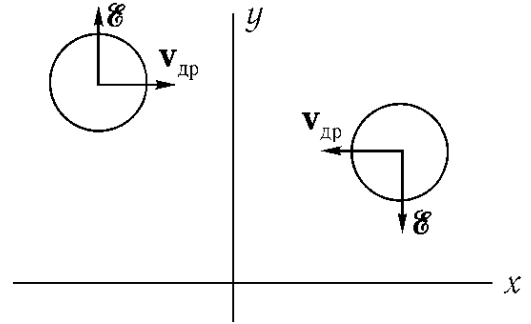


Рис. 181

Поэтому  $E_{\perp}/\mathcal{H} = \text{const}$ , т.е. энергия поперечного движения изменяется так же, как в пункте а). Расстояние центра орбиты от начала координат

$$r_0 = \frac{r_{\max} + r_{\min}}{2} = \frac{\zeta_{\max} + \zeta_{\min}}{2\sqrt{\mathcal{H}}} \propto \frac{1}{\sqrt{\mathcal{H}}}.$$

С ростом  $\mathcal{H}$  центр орбиты приближается к началу координат (рис. 182).

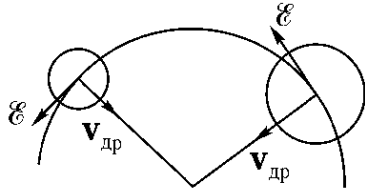


Рис. 182

При изменении  $\mathcal{H}$  появляется электрическое

$$\text{поле} \quad \mathcal{E}_{\varphi} = -\frac{r}{2c} \dot{\mathcal{H}}, \quad \mathcal{E}_r = \mathcal{E}_z = 0,$$

силовые линии которого представляют собой замкнутые окружности.

В реальных условиях однородное магнитное поле может существовать только в ограниченной области пространства. Электрическое поле, появляющееся при изменении магнитного, очень сильно зависит от формы этой области и условий на ее границе (см. [2], § 21). Например, поле, рассмотренное в случае а), осуществляется вблизи проводящей плоскости с током, в случае б) — в соленоиде<sup>1</sup>.

Сильная зависимость характера движения частицы от слабого поля  $\mathcal{E}$  даже в случае предельно малых  $\mathcal{H}$  объясняется наличием вырождения (при  $\mathcal{H} = \text{const}$  периоды движения по двум координатам  $x, y$  или  $r, \varphi$  совпадают).

Заметим, что величина  $E_{\perp}/\mathcal{H}$  оказалась адиабатическим инвариантом в обоих случаях. Можно показать, что этот результат не зависит от выбора  $\mathbf{A}$  (см. [2], § 21; [8], § 25).

**13.24.** Выбрав векторный потенциал в виде

$$A_{\varphi} = \frac{r}{2} \mathcal{H}(t), \quad A_r = A_z = 0, \quad (1)$$

получаем адиабатические инварианты

$$I_z = \frac{E_z}{\omega}, \quad I_{\varphi} = p_{\varphi},$$

$$I_r = \frac{1}{\pi} \int_{\zeta_{\min}}^{\zeta_{\max}} \sqrt{C\zeta^2 - p_{\varphi}^2 - m^2\zeta^4} \frac{d\zeta}{\zeta} = I_r(p_{\varphi}, C), \quad (2)$$

<sup>1</sup>Изменения электрического поля, связанного с изменением выбора  $\mathbf{A}$ , не было бы, если бы одновременно был изменен скалярный потенциал на величину  $\frac{1}{2c} \dot{\mathcal{H}} xy$  (градиентное преобразование).

где

$$C = \frac{2mE_{\perp} + e\mathcal{H}p_{\varphi}/c}{\sqrt{\omega^2 + (e\mathcal{H}/mc)^2}}.$$

Таким образом,

$$E_z \propto \omega, \quad E_{\perp} + \frac{e\mathcal{H}}{2mc}p_{\varphi} \propto \sqrt{\omega^2 + \left(\frac{e\mathcal{H}}{2mc}\right)^2}. \quad (3)$$

Векторный потенциал (1) задает магнитное поле, симметричное относительно оси  $z$ , проходящей через центр осциллятора.

При другом выборе  $\mathbf{A}$

$$A_x = A_z = 0, \quad A_y = x\mathcal{H}(t) \quad (4)$$

получаем фактически другую физическую задачу. Функции Лагранжа в этих двух задачах отличаются на

$$\delta L = \frac{d}{dt} \left( \frac{e}{2c} \mathcal{H} xy \right) - \frac{e}{2c} \dot{\mathcal{H}} xy, \quad (5)$$

т. е. отличие их, если отбросить в (5) несущественную полную производную по времени, очень мало.

В предыдущей задаче, где движение было вырождено, именно появление этой добавки приводило к полному изменению направления и скорости дрейфа орбиты. В нашем же случае движение осциллятора при  $\mathcal{H} = \text{const}$  невырожденное, и добавка может быть отброшена (ср. с задачей 13.19). Поэтому соотношения (3) справедливы и при другом выборе  $\mathbf{A}$ . При прохождении области вырождения ( $\mathcal{H} = 0$ ) соотношения (3) сохраняются только для аксиально-симметричного поля (1). Поведение же осциллятора, например, в поле (4) при прохождении  $\mathcal{H}$  через нуль требует дополнительного исследования.

**13.25.** а) С помощью канонического преобразования можно привести функцию Гамильтона к сумме двух независимых осцилляторов (для  $X, Y$ ; см. задачу 11.9). Адиабатическими инвариантами являются отношения энергии каждого из этих осцилляторов к его частоте.

Напомним, что колебания каждого из них представляют собой движение по эллипсу (см. задачу 6.36). Выраженные, например, через амплитуду  $a_k$  колебаний вдоль оси  $x$ , адиабатические инварианты равны

$$I_k = \frac{ma_k^2}{2\Omega_k} \frac{\Omega_k^4 - \omega_1^2\omega_2^2 + \Omega_k^2\omega_{\mathcal{H}}^2}{\Omega_k^2 - \omega_2^2} \quad (k = 1, 2).$$

При изменении параметров системы к новой функции Гамильтона добавляется также частная производная производящей функции по времени, равная<sup>1</sup>  $\dot{\lambda}(m\omega_2 XY + P_X P_Y / m\omega_2)$ . Эта добавка мала ( $\dot{\lambda} \ll \Omega_k$ ), и ее можно не учитывать, если только собственные частоты не совпадают (ср. с задачей 13.19). Случай вырождения при  $\omega_1 = \omega_2$  и магнитном поле, проходящем через нуль, требует отдельного рассмотрения.

При другом выборе векторного потенциала, приводящего к тому же магнитному полю, но другому электрическому,  $\mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ , адиабатические инварианты оказываются прежними (опять за исключением случая  $(\omega_1 = \omega_2, \mathcal{H} = 0)$ ).

Если  $\omega_1 = \omega_2$ , то возможен и другой выбор адиабатических инвариантов (см. предыдущую задачу).

б) Пусть для определенности  $\omega_1 > \omega_2$ . Движение происходит по окружности радиуса  $a\sqrt{\frac{\omega_1}{2\omega_{\mathcal{H}}}}$  с частотой  $\omega_{\mathcal{H}}$ , центр же окружности перемещается по эллипсу с полуосями, параллельными осям  $x$  и  $y$  и равными

$$\frac{b\omega_2\sqrt{\omega_{\mathcal{H}}}}{\sqrt{\omega_1(\omega_1^2 + \omega_2^2)}} \quad \text{и} \quad \frac{b\sqrt{\omega_1\omega_{\mathcal{H}}}}{\sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$$

с частотой  $\omega_1\omega_2/\omega_{\mathcal{H}}$ .

в) Колебание будет происходить почти вдоль оси  $y$ ; амплитуда его увеличится в  $\sqrt{\omega_1/\omega_2}$  раз (ср. с задачей 13.19).

**13.27.** а) Движение частицы в плоскости  $xy$  происходит под действием медленно изменяющегося (из-за смещения вдоль оси  $z$ ) магнитного поля. При этом сохраняется адиабатический инвариант  $I_{\perp} = E_{\perp} / \frac{e\mathcal{H}(z)}{mc}$  (см. задачу 13.23). Из закона сохранения энергии имеем

$$\frac{m\dot{z}^2}{2} + I_{\perp} \frac{e\mathcal{H}(z)}{mc} = E.$$

<sup>1</sup>Вычисление частной производной производящей функции можно упростить, используя следующие соображения.

При переходе от момента  $t$  к  $t + \delta t$  необходимо совершить дополнительно каноническое преобразование, соответствующее переходу от  $\lambda$  к  $\lambda + \delta\lambda$ . Такое преобразование задается производящей функцией  $\Phi(X, Y, P'_X, P'_Y) = X P'_X + Y P'_Y + \delta\lambda(m\omega_2 XY + P'_X P'_Y / m\omega_2)$  (см. задачу 11.17). Поэтому  $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right|_{\delta\lambda \rightarrow 0} = \dot{\lambda}(m\omega_2 XY + P_X P_Y / m\omega_2)$ .



Частица движется в направлении оси  $z$  так, как двигалась бы в потенциальном поле  $U(z) = I_{\perp} \frac{e\mathcal{H}(z)}{mc}$ . Период колебаний (ср. с задачей 2 б из [1], § 11)

$$T = \frac{2\pi a}{v\sqrt{\lambda \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}},$$

где  $\alpha$  — угол между скоростью частицы  $\mathbf{v}$  и осью  $z$  в начале координат. Частицы, для которых  $\operatorname{ctg}^2 \alpha > \lambda$ , не удерживаются в ловушке. Условие применимости теории адиабатических инвариантов заключается в том, чтобы изменение магнитного поля за один оборот частицы было мало. Это дает  $mc\lambda v_z \ll ae\mathcal{H}_0$ .

Примером магнитной ловушки могут служить радиационные пояса Земли (подробнее о ловушках см. [29]).

б)  $T = 2\pi a/v \sin \alpha$ .

**13.28.** а)  $(\lambda E_{\perp} - E_z)a^2 = \text{const}$ ,  $E_{\perp}/\mathcal{H}_0 = \text{const}$ ,  $E = E_{\perp} + E_z$ ;

б)  $E_{\perp}/\mathcal{H}_0 = \text{const}$ ,  $E_z\sqrt{\mathcal{H}_0}/a = \text{const}$ .

**13.29.** Пренебрегая в функции Гамильтона

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_{\theta}^2}{2mr^2} + \frac{p_{\varphi}^2}{2mr^2 \sin^2 \theta} - \frac{e\mathcal{H}p_{\varphi}}{2cm} + \frac{e\mathcal{H}^2 r^2 \sin^2 \theta}{8mc^2}$$

последним членом, квадратичным по  $\mathcal{H}$ , можем разделить переменные в уравнении Гамильтона — Якоби.

Адиабатические инварианты имеют вид

$$I_{\varphi} = p_{\varphi}, \quad I_{\theta} = \frac{1}{\pi} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\beta - \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2 \theta}} d\theta = I_{\theta}(p_{\varphi}, \beta),$$

$$I_r = \frac{1}{\pi} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \left[ E + \frac{e\mathcal{H}p_{\varphi}}{2mc} - U(r) \right] - \frac{\beta}{r^2}} dr = I_r \left( E + \frac{e\mathcal{H}p_{\varphi}}{2mc}, \beta \right).$$

Таким образом, при медленном изменении  $\mathcal{H}$  величины

$$p_{\varphi}, \beta = p_{\theta}^2 + \frac{p_{\varphi}^2}{\sin^2 \theta} \text{ и } E + \frac{e\mathcal{H}p_{\varphi}}{2mc}$$

остаются постоянными.

$$\begin{aligned}
 13.30. \quad \frac{p_x^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2} &= E_1, \quad \frac{p_y^2}{2m} + 2m\omega^2 y^2 = E_2, \\
 (m^2\omega^2 x^2 - p_x^2)y + xp_x p_y &= A, \\
 (m^2\omega^2 x^2 - p_x^2)p_y - 2m\omega xp_x y &= \frac{1}{m}\{E_2, A\}.
 \end{aligned}$$

$$13.31. \quad \text{а) } w = \text{Arctg} \frac{p}{m\omega q}, \quad I = \frac{p^2}{2m\omega} + \frac{m\omega q^2}{2}.$$

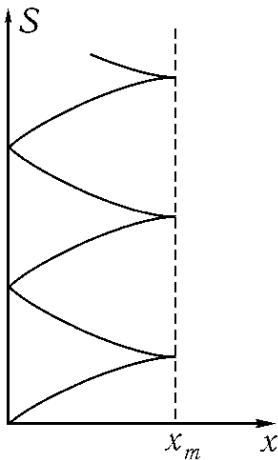
Эти переменные удобны, например, для построения теории возмущений (см. задачу 13.9).

б) Пусть вначале частица движется вправо от точки  $x = 0$ , причем мы выбираем  $S$  так, что  $S = 0$  при  $x = 0$ . Тогда

$$S = \int_0^x |p| dx = \pi I - \pi a \left[ \left( \frac{I}{a} \right)^{2/3} - Fx \right]^{3/2},$$

где

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{x_m} |p| dx = aE^{3/2}, \quad a = \frac{2\sqrt{2m}}{3\pi F}, \quad x_m = \frac{E}{F}, \quad |p| = \sqrt{2m(E - xF)}.$$



При движении влево

$$S = \left( \int_0^{x_m} - \int_x^{x_m} \right) |p| dx = \pi I + \pi a \left[ \left( \frac{I}{a} \right)^{2/3} - Fx \right]^{3/2}$$

и т. д. При  $n$ -м колебании

$$S = (2n - 1)I \mp \pi a \left[ \left( \frac{I}{a} \right)^{2/3} - Fx \right]^{3/2}$$

Рис. 183

(верхний знак отвечает движению вправо, нижний — влево; рис. 183). Функция  $S(x, I)$  служит производящей функцией для перехода к новым каноническим переменным действие-угол (см. [1], § 49). Новые переменные связаны со старыми следующим образом:

$$\begin{aligned}
 x &= \frac{1}{\pi^2 F} \left( \frac{I}{a} \right)^{2/3} \{ \pi^2 - [(2n - 1)\pi - \omega]^2 \}, \\
 p &= \frac{3}{2} a \left( \frac{I}{a} \right)^{2/3} [(2n - 1)\pi - \omega],
 \end{aligned}$$

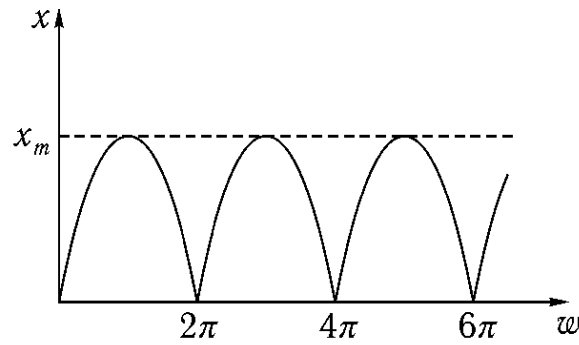


Рис. 184

причем  $x$  является периодической функцией  $w$  (а  $w$  — неоднозначной функцией  $x$ ; рис. 184).

**13.32.** Из равенства

$$P = \int_0^a \sqrt{2m(E - U)} dx$$

находим

$$E = \frac{P^2}{2ma^2} + \frac{V}{2} + \frac{mV^2a^2}{8P^2}.$$

Укороченное действие

$$S_0 = \int_0^x p dx = \begin{cases} \sqrt{2mE}x + (n-1)P & \text{при } na < x < \left(n + \frac{1}{2}\right)a, \\ \sqrt{2m(E-V)}\left(x - \frac{1}{2}a\right) + \\ + \sqrt{2mE}\left(\frac{1}{2}a\right) + (n-1)P & \text{при } \left(n + \frac{1}{2}\right)a < x < (n+1)a. \end{cases}$$

Исключив  $E$ , получаем производящую функцию рассматриваемого канонического преобразования

$$S_0(x, P) = \begin{cases} \left(\frac{P}{a} + \frac{maV}{2P}\right)x + (n-1)P & \text{при } na < x < \left(n + \frac{1}{2}\right)a, \\ \frac{ma^2V}{2P}\left(\frac{P}{a} - \frac{maV}{2P}\right)x + \\ + (n-1)P & \text{при } \left(n + \frac{1}{2}\right)a < x < (n+1)a. \end{cases}$$

Из равенств

$$Q = \frac{\partial S_0}{\partial P}, \quad p = \frac{\partial S_0}{\partial x}$$

находим

$$p(P, Q) = \begin{cases} \frac{P}{a} + \frac{maV}{2P} & \text{при } n - 1 < Q < n - \frac{1}{2}, \\ \frac{P}{a} - \frac{maV}{2P} & \text{при } n - \frac{1}{2} < Q < n, \end{cases}$$

$$x(P, Q) = \begin{cases} \frac{Q + 1 - n}{1 - (ma^2V/2P^2)} & \text{при } n - 1 < Q < n - \frac{1}{2}, \\ \frac{Q + 1/2 - n}{1 + (ma^2V/2P^2)} + \frac{a}{2} & \text{при } n - \frac{1}{2} < Q < n. \end{cases}$$

Переменные  $P$ ,  $Q$  аналогичны переменным действие-угол, величина  $a\dot{Q}$  представляет собой среднюю скорость частицы.

## Литература

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика*, «Наука», 1988.
- [2] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теория поля*, «Наука», 1988.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат, 1992.
- [4] Г. Голдстейн, *Классическая механика*, «Наука», 1975.
- [5] Д. тер Хаар, *Основы гамильтоновой механики*, «Наука», 1974.
- [6] В. И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, «Наука», 1974.
- [7] Л. И. Мандельштам, *Лекции по теории колебаний*, «Наука», 1972.
- [8] Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Физматгиз, 1958.
- [9] Ю. И. Неймарк, Н. А. Фужаев, *Динамика неголономных систем*, «Наука», 1967.
- [10] Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш, *Специальные функции*, «Наука», 1964.
- [11] Н. Мотт, Г. Месса, *Теория атомных столкновений*, «Мир», 1969.
- [12] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Введение в теорию квантованных полей*, «Наука», 1976.
- [13] Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, Гостехиздат, 1951.
- [14] Г. С. Горелик, *Колебания и волны*, Физматгиз, 1959.
- [15] Дж. В. Стрэтт (лорд Рэлей), *Теория звука*, т. I. гл. IV, Гостехиздат, 1940.

- [16] А. М. Бонч-Бруевич, *Радиоэлектроника в экспериментальной физике*, «Наука», 1966.
- [17] М. В. Волькенштейн, Л. А. Грибов, М. А. Ельяшевич, Б. И. Степанов, *Колебания молекул*, «Наука», 1972.
- [18] Ч. Киттель, *Введение в физику твердого тела*, Физматгиз, 1962.
- [19] И. А. Кунин, *Теория упругих сред с микроструктурой*, «Наука», 1975.
- [20] Дж. П. Ден-Гартог, *Механические колебания*, Физматгиз, 1960.
- [21] Э. Ферми, *Научные труды*, т. I, стр. 440, «Наука», 1971.
- [22] Н. Бломберген, *Нелинейная оптика*, Приложение I, §§ 5, 6, «Мир», 1966.
- [23] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, гл. XIV, «Наука», 1995.
- [24] Ф. Стейси, *Физика Земли*, «Мир», 1972.
- [25] И. М. Лифшиц, М. Я. Азбель, М. И. Каганов, *Электронная теория металлов*, «Наука», 1971.
- [26] Д. И. Блохинцев, *Основы квантовой механики*, «Высшая школа», 1961.
- [27] А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, *Рассеяния, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике*, «Наука», 1971.
- [28] P. Calogero, O. Ragnisco, *Lettere al Nuovo Cimento* **13**, 383 (1975).
- [29] Л. А. Арцимович, С. Ю. Лукьянов, *Движение заряженных частиц в электрических и магнитных полях*, «Наука», 1972.
- [30] М. Ш. Рывкин, *Доклады Академии наук*, **221**, №1 (1975).
- [31] В. В. Соколов, *Ядерная физика*, **23**, 628 (1976); **26**, 427 (1977).
- [32] Ф. Рейф, *Scientific American*, №12 (1964).

**Глеб Леонидович Коткин**  
**Валерий Георгиевич Сербо**

## **СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

*Дизайнер М. В. Ботя*  
*Технический редактор А. В. Широбоков*  
*Корректор О. Ю. Кучеренко*

---

Подписано к печати 30.07.01. Формат  $60 \times 84^{1/16}$ .  
Печать офсетная. Усл. печ. л. 20,46. Уч. изд. л. 20,58.  
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная №1.  
Тираж 1000 экз. Заказ №

Научно-издательский центр «Регулярная и хаотическая динамика»  
426057, г. Ижевск, ул. Пастухова, 13.  
Лицензия на издательскую деятельность ЛУ №084 от 03.04.00.  
<http://rcd.ru> E-mail: [borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Отпечатано в полном соответствии с качеством  
предоставленных диапозитивов в ГИПП «Вятка».  
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.

---