Задание: $\left\{\begin{array}{c}x-2y\geq -8\\3x+y\leq 18\\3x-2y\leq 9\\x\geq 0,y\geq 0\end{array}\right.$

$$U=-9x+3y\rightarrow max$$

$$V=x-y\rightarrow max$$

**Образец:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| $$\left\{\begin{array}{c}4x-2y\leq 20\\4x+y\leq 22\\x-y\leq 3\\x\geq 0,y\geq 0\end{array}\right.$$$$U=2x-2y\rightarrow max$$$$V=-2x-y\rightarrow max$$ |  |  |

**Решение:**

1. Построим область допустимых решений в плоскости *xOy*, определяемую системой неравенств. Каждое линейное неравенство на плоскости задает полуплоскость, все точки которой обращают неравенство в верное числовое неравенство.

Рассмотрим первое неравенство 4*y - x ≤20*.

Границей полуплоскости является прямая 4y *– x = 20*. Построим эту прямую по двум точкам. Составим таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1) | *x* | 0 | 4 |
|  | *y* | 5 | 6 |



Определим, какую полуплоскость задает первое неравенство: выше построенной прямой или ниже ее. Для этого подставим в неравенство координаты любой «пробной» точки, не лежащей на построенной прямой. Возьмем в качестве «пробной точки» начало координат: (0; 0):

$$4x-y\leq 20$$

4$∙0-0\leq 20$

$$0\leq 20$$

Получили верное числовое неравенство, значит, рассматриваемое линейное неравенство определяет полуплоскость, которой принадлежит начало координат, т.е. расположенную ниже построенной прямой. Отметим выбранную полуплоскость.

Аналогично определим полуплоскости, задаваемые вторым и третьим неравенствами: 4*x*+ *y*≤ 22 и *х – у*≤ 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2) | *x* | 5 | 4 |  | 3) | *x* | 5 | 1 |
|  | *y* | 2 | 6 |  |  | *y* | 2 | -2 |

Оставшиеся ограничения: *х*≥ 0, *у*≥ 0 задают первую координатную четверть. Область допустимых решений – многоугольник *OABCD*.



2. Построим в критериальной плоскости область, соответствующую области допустимых решений *OABCD*. Для этого необходимо найти координаты вершин.

В нашем случае, очевидно, что *O*(0; 0), *A*(0; 5), *B*(4; 6), *C*(5; 2), *D*(3; 0), т.к. часть этих точек использовалась при построении прямых. В общем случае координаты точки пересечения двух прямых определяют совместным решением их уравнений, например, для точки *С*, которая является точкой пересечения (2) и (3) прямых необходимо решить систему:

$\left\{\begin{array}{c}4x+y=22\\x-y=3\end{array}\right.$

Сложим уравнения, получим: $5x=25$. Откуда $\left\{\begin{array}{c}\begin{array}{c}x=5\\y=2\end{array}\end{array}\right.$

Найдем координаты образов точек *O*, *A*, *B*, *C*, *D* в линейном преобразовании, определяемом целевыми функциями:

*O*(0; 0): $U=2x-2y=2∙0-2∙0=0$

 $V=-2x-y=-2∙0-0=0$

Таким образом, *O*(0; 0) → *O*′(0; 0).

*A*(0; 5): $ U=2x-2y=2∙0-2∙5=-10$

 $V=-2x-y=-2∙0-5=-5$

Таким образом, *A*(0; 5) → *A*′(–10; –5).

*B*(4; 6): $ U=2x-2y=2∙4-2∙6=-4$

 $V=-2x-y=-2∙4-6=-14$

Таким образом, *B*(4; 6) → *B*′(–4; –14).

*C*(5; 2): $ U=2x-2y=2∙5-2∙2=6$

 $V=-2x-y=-2∙5-2=-12$

Таким образом, *C*(5; 2) → *C*′(6; –12).

*D*(3; 0): $ U=2x-2y=2∙3-2∙0=6$

$$V=-2x-y=-2∙3-0=-6$$

Таким образом, *D*(3; 0) → *D*′(6; –6).

По найденным координатам точек построим в критериальной плоскости *UOV* образ многоугольника *OABCD* – многоугольник *O*′*A*′*B*′*C*′*D*′ .



3. В критериальной плоскости найдем границу Парето – северо-восточную границу области *O*′*A*′*B*′*C*′*D*′.



*Точкой утопии*, в которой достигается максимум одновременно по двум критериям *U* и *V*, является точка *P*: через самую высокую (северную) точку области *O*′*A*′*B*′*C*′*D*′ провели горизонтальную прямую (через точку *O*′) и через самую правую (восточную) точку области *O*′*A*′*B*′*C*′*D*′ провели вертикальную прямую (через точки *C*′ и *D*′); точка – точка пересечения горизонтальной и вертикальной прямой.



4. На границе Парето найдем *идеальную точку* – точку, наиболее близко расположенную к точке утопии. В нашем случае это основание перпендикуляра, опущенного из точки утопии *Р* на отрезок *O*′*D*′ – точка *M*′



Найдем координаты точки *M*′. Для этого найдем уравнение прямой *O*′*D*′. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки: ′(0; 0),
*D*′(6; –6)

$$\frac{x-x\_{1}}{x\_{2}-x\_{1}}=\frac{y-y\_{1}}{y\_{2}-y\_{1}},$$

$$\frac{x-0}{6-0}=\frac{y-0}{-6-0},$$

$$\frac{x}{6}=\frac{y}{-6},$$

$$O^{'}D^{'}: x+y=0$$

Найдем уравнение перпендикуляра, опущенного из точки утопии *P* на отрезок *O*′*D*′. Воспользуемся уравнением прямой с точкой и вектором нормали:

$\vec{n}=\vec{O'D'}=\left(6-0; -6-0\right)=(6; -6)$, $P(6; 0)$

$$n\_{1}\left(x-x\_{0}\right)+n\_{2}\left(y-y\_{0}\right)=0,$$

$$6∙\left(x-6\right)-6∙\left(y-0\right)=0,$$

$$PM^{'}: x-y-6=0.$$

Координаты точки *М*′: $\left\{\begin{array}{c}x+y=0\\x-y-6=0\end{array} \right.$

Сложим уравнения: $2x=6$. Решение уравнения $ \left\{\begin{array}{c}x=3,\\y=-3.\end{array} \right.$

Таким образом, *М*′(3; –3), а значит, компромиссное решение позволит достигнуть значений целевых функций: *U* = 3, *V* = –3.

5. Найдем координаты точки в плоскости *xOy*, которой соответствует точка *М*′ критериальной плоскости. Для этого решим систему уравнений:

$$\left\{\begin{array}{c}U=3,\\V=-3,\end{array} \right.\left\{\begin{array}{c}2x-2y=3,\\-2x-y=-3,\end{array} \right. \left\{\begin{array}{c}-3y=0,\\2x-2y=3,\end{array} \right.\left\{\begin{array}{c}y=0,\\x=1,5.\end{array} \right.$$

Получили, что компромиссным решением метода идеальной точки является *M*(1,5; 0), в которой критерии достигают значений *U* = 3, *V* = –3.

Эта точка принадлежит отрезку *OD*.

Ответ:  *M*(1,5; 0), *U*max (1,5; 0)= 3, *V* max(1,5; 0)= –3.