Задание:

**Образец:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |

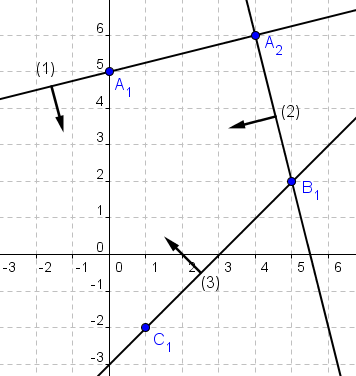
**Решение:**

1. Построим область допустимых решений в плоскости *xOy*, определяемую системой неравенств. Каждое линейное неравенство на плоскости задает полуплоскость, все точки которой обращают неравенство в верное числовое неравенство.

Рассмотрим первое неравенство 4*y - x ≤20*.

Границей полуплоскости является прямая 4y *– x = 20*. Построим эту прямую по двум точкам. Составим таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1) | *x* | 0 | 4 |
|  | *y* | 5 | 6 |



Определим, какую полуплоскость задает первое неравенство: выше построенной прямой или ниже ее. Для этого подставим в неравенство координаты любой «пробной» точки, не лежащей на построенной прямой. Возьмем в качестве «пробной точки» начало координат: (0; 0):

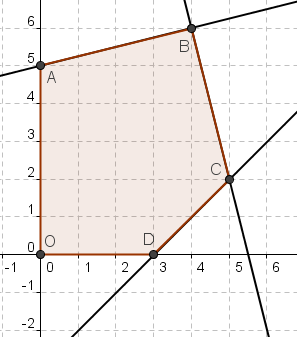
4

Получили верное числовое неравенство, значит, рассматриваемое линейное неравенство определяет полуплоскость, которой принадлежит начало координат, т.е. расположенную ниже построенной прямой. Отметим выбранную полуплоскость.

Аналогично определим полуплоскости, задаваемые вторым и третьим неравенствами: 4*x*+ *y*≤ 22 и *х – у*≤ 3.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 2) | *x* | 5 | 4 |  | 3) | *x* | 5 | 1 |
|  | *y* | 2 | 6 |  |  | *y* | 2 | -2 |

Оставшиеся ограничения: *х*≥ 0, *у*≥ 0 задают первую координатную четверть. Область допустимых решений – многоугольник *OABCD*.



2. Построим в критериальной плоскости область, соответствующую области допустимых решений *OABCD*. Для этого необходимо найти координаты вершин.

В нашем случае, очевидно, что *O*(0; 0), *A*(0; 5), *B*(4; 6), *C*(5; 2), *D*(3; 0), т.к. часть этих точек использовалась при построении прямых. В общем случае координаты точки пересечения двух прямых определяют совместным решением их уравнений, например, для точки *С*, которая является точкой пересечения (2) и (3) прямых необходимо решить систему:

Сложим уравнения, получим: . Откуда

Найдем координаты образов точек *O*, *A*, *B*, *C*, *D* в линейном преобразовании, определяемом целевыми функциями:

*O*(0; 0):

Таким образом, *O*(0; 0) → *O*′(0; 0).

*A*(0; 5):

Таким образом, *A*(0; 5) → *A*′(–10; –5).

*B*(4; 6):

Таким образом, *B*(4; 6) → *B*′(–4; –14).

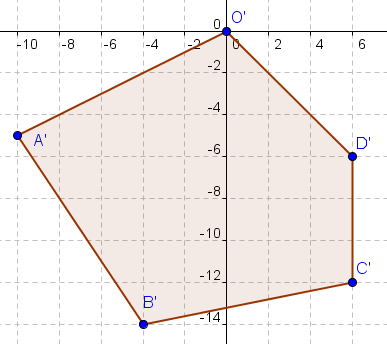
*C*(5; 2):

Таким образом, *C*(5; 2) → *C*′(6; –12).

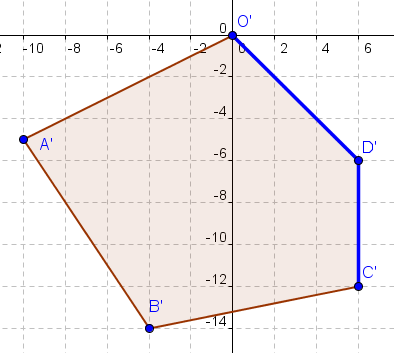
*D*(3; 0):

Таким образом, *D*(3; 0) → *D*′(6; –6).

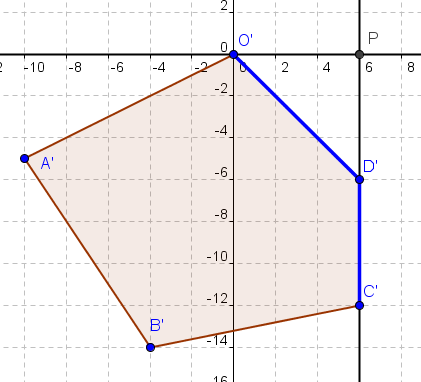
По найденным координатам точек построим в критериальной плоскости *UOV* образ многоугольника *OABCD* – многоугольник *O*′*A*′*B*′*C*′*D*′ .



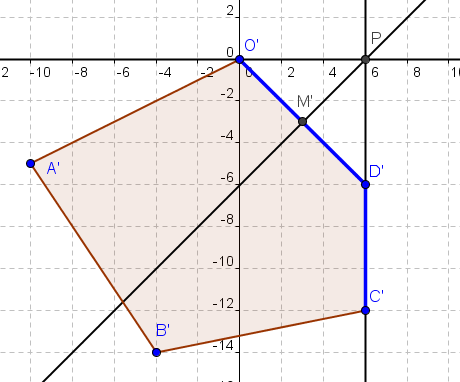
3. В критериальной плоскости найдем границу Парето – северо-восточную границу области *O*′*A*′*B*′*C*′*D*′.



*Точкой утопии*, в которой достигается максимум одновременно по двум критериям *U* и *V*, является точка *P*: через самую высокую (северную) точку области *O*′*A*′*B*′*C*′*D*′ провели горизонтальную прямую (через точку *O*′) и через самую правую (восточную) точку области *O*′*A*′*B*′*C*′*D*′ провели вертикальную прямую (через точки *C*′ и *D*′); точка – точка пересечения горизонтальной и вертикальной прямой.



4. На границе Парето найдем *идеальную точку* – точку, наиболее близко расположенную к точке утопии. В нашем случае это основание перпендикуляра, опущенного из точки утопии *Р* на отрезок *O*′*D*′ – точка *M*′



Найдем координаты точки *M*′. Для этого найдем уравнение прямой *O*′*D*′. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки: ′(0; 0),   
*D*′(6; –6)

Найдем уравнение перпендикуляра, опущенного из точки утопии *P* на отрезок *O*′*D*′. Воспользуемся уравнением прямой с точкой и вектором нормали:

,

Координаты точки *М*′:

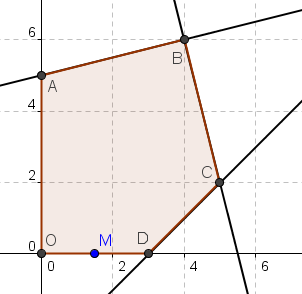
Сложим уравнения: . Решение уравнения

Таким образом, *М*′(3; –3), а значит, компромиссное решение позволит достигнуть значений целевых функций: *U* = 3, *V* = –3.

5. Найдем координаты точки в плоскости *xOy*, которой соответствует точка *М*′ критериальной плоскости. Для этого решим систему уравнений:

Получили, что компромиссным решением метода идеальной точки является *M*(1,5; 0), в которой критерии достигают значений *U* = 3, *V* = –3.

Эта точка принадлежит отрезку *OD*.



Ответ:  *M*(1,5; 0), *U*max (1,5; 0)= 3, *V* max(1,5; 0)= –3.