№ 5

Методические указания и контрольные задания по курсу теории вероятностей для студентов заочного факультета по направлениям 210700, 220700, 230400

Санкт -Петербург
ГУТ
2012

Методические указания и контрольные задания по курсу теории вероятностей для студентов заочного факультета по направлениям 210700, 220700, 230400. № 5.

Сост. Г. М. Полевая, В. С. Стукалова, Н. К. Яновская. Т. Е. Рекина, Е. Я. Раковщик. ГУТ СПб, 2012.

Методические указания содержат варианты контрольных работ по теории вероятностей для студентов заочного отделения, а также указания по их выполнению и упражнения для самопроверки.

ВВЕДЕНИЕ

Настоящие Методические указания предназначены для самостоятельного изучения теории вероятностей студентами заочного отделения ГУТ им. проф. М. А. Бонч-Бруевича. В них подробно перечислены вопросы теоретического материала, которые следует изучить по каждой теме, указана литература, даны необходимые пояснения по возможным сложностям, разобраны примеры типовых задач. Студенту рекомендуется также самостоятельно решить задачи из приведенных упражнений и сборников задач по теории вероятностей указанных в списке литературы .

По теории вероятностей студент выполняет контрольную работу .

ПРОГРАММА КУРСА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

1. Основные понятия теории вероятностей. Алгебра событий. Вероятность. Несовместные и независимые события. Вероятность суммы и произведения событий. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Независимые испытания. Формула Бернулли
2. Случайная величина. Ряд распределения и функция распределения дискретной случайной величины. Числовые характеристики дискретной случайной величины. Функция распределения и плотность распределения непрерывной случайной величины. Числовые характеристики непрерывной случайной величины
3. Основные типы случайных величин и их числовые характеристики. Биномиальный закон. Равномерное распределение. Показательное распределение. Нормальный закон распределения
4. Система случайных величин. Функция распределения системы двух случайных величин. Функция плотности распределения системы двух непрерывных случайных величин. Числовые характеристики системы случайных величин.

СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

Тема 1.

Предмет теории вероятностей. Основные понятия теории вероятностей (опыт, событие, случайное, невозможное и достоверное события, противоположные события, несовместные события, равновозможные события, полная группа событий).

Алгебра событий. Сумма и произведение событий. Несовместные и независимые события. Вероятность суммы и произведения событий.

Определение вероятности события. Частота события и статистическое определение вероятности. Случаи и классическое определение вероятности,

Напомним,что случайным событием в теории вероятности называется такое событие, которое в результате опыта может произойти или не произойти, причем это определяется причинами, не контролируемыми лицом, производящим опыт.

Например, мы бросаем на стол кубик (игральную кость). Он может показать любую грань. Выпадение 6 очков — случайное событие. Точнее, конечно, выпадение той или иной грани определяется начальным положением кубика, высотой места бросания над столом, жесткостью стола, ветром и ещё многими другими причинами, которые нами не контролируются и которые меняются от одного бросания к другому.

Другой пример. Мы замеряем уровень шума на элементе электронной схемы. Уровень может превышать либо не превышать допустимое пороговое значение; это событие случайное, хотя, конечно, зависит от конструкции прибора, условий работы и т. п.

Среди случайных событий какие-то более возможны или встречаются чаще, другие менее возможны или встречаются реже. Меру возможности или частоты появления случайного события называют вероятностью, причем условились считать вероятность числом от 0 до 1, т. е., обозначая случайное событие буквой А, а его вероятность Р(А), имеем

$0 \le P(A) \le 1$.

Вероятность некоторых событий найти легко. НЕВОЗМОЖНОЕ, т. е. практически неосуществимое событие имеет вероятность 0; оно обозначается буквой $\varnothing$. ДОСТОВЕРНОЕ событие, т. е. появляющееся практически в любом опыте, имеет вероятность 1; оно обозначается буквой Ω . Таким образом, $P(\varnothing)=0; P(\Omega)=1$.

Например, если опыт состоит в бросании монеты, невозможное событие — монета встала на ребро; достоверное событие — монета показала герб или цифру.

Вероятность других событий находят различными методами, с которыми мы познакомимся ниже.

Рассмотрим одну из моделей теории вероятностей, называемой «схема случаев». Говорят, что опыт укладывается в схему случаев, если исходы опыта (элементарные события, случаи) — равновозможны, попарно несовместны и в совокупности представляют собой достоверное событие. Тогда вероятность некоторого случайного события А , которое может произойти в рамках данного опыта, вычисляется по формуле $P(A)=\frac{m}{n}$, где m - число исходов (случаев) опыта, благоприятных событию А , а n — число всех возможных исходов опыта (случаев, элементарных событий).

Над событиями можно производить операции, которые немного напоминают действия над числами.

СУММОЙ двух событий А и В называется событие А+В , состоящее в том, что в результате опыта наступило либо А, либо В, либо А и В вместе.

Пример 1.

Пусть событие A_k, $k=1,2,...6$ состоит в том, что при бросании кубика выпало k очков. Событие A_1+A_2 состоит в том, что выпало меньше трех очков.

Операция сложения событий обладает следующими свойствами:

$$A+B=B+A \;,\; (A+B)+C=A+(B+C) \;,\; A+\Omega=\Omega \;,\; A+\varnothing=A$$

Произведением двух событий A и B называется событие AB , состоящее в том, что в результате опыта наступили и A , и B .

Пример 2.

Опыт состоит в том, что из группы студентов наугад выбирается один. Пусть событие A состоит в том, что студент курит, B — в том, что студент живет в общежитии. Тогда наступление события AB означает, что случайно выбранный студент живет в общежитии и курит.

Основные свойства произведения:

$$AB=BA \;,\; (AB)C=A(BC) \;,\; A\varnothing=\varnothing \;,\; A\Omega=A \;,\; A(B+C)=AB+AC \;.$$

Наконец, имеется еще одна операция над событиями. Через $\bar{A}$ обозначается событие, состоящее в том, что в результате опыта не наступило событие A . Событие $\bar{A}$ называется противоположным к A .

При решении задач используются следующие соотношения:

$$A\bar{A}=\varnothing \;,\; A+\bar{A}=\Omega \;,\; \bar{\varnothing}=\Omega \;,\; \bar{\Omega}=\varnothing \;.$$

Рассмотрим примеры составления формул «сложных» событий.

Пример 3.

Теннисист играет последовательно с тремя партнерами A , B , C . Победу над ними обозначим теми же буквами. Написать формулу события X , состоящего в том, что теннисист одержал хотя бы две победы подряд.

Решение.

Две победы подряд теннисист может одержать, выиграв либо у A и B , либо у B и C , таким образом,

$$X=AB+BC=B(A+C)$$

Пример 4.

В условиях примера 1 описать формулой следующие события:

B : выпало четное число очков;

C : не выпала пятерка;

D : выпало меньше 4 очков;

E : выпало больше 4 очков.

Ответ: $B=A_2+A_4+A_6$; $C=\bar{A}_5$; $D=A_1+A_2+A_3$; $E=A_5+A_6$.

Если два события A и B таковы, что их произведение невозможное событие, т.е. $AB=\varnothing$, события A и B называются НЕСОВМЕСТНЫМИ. Для несовместных событий имеет место равенство $P(A+B)=P(A)+P(B)$ (1)

Если же A и B — произвольные события, то формула (1) изменяется:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB) \qquad (2)$$

Формула (2) называется теоремой сложения вероятностей. Её частный случай: $P(\bar{A})=1-P(A)$, так как A и $\bar{A}$ несовместны.

Пример 5.

В урне содержится 8 синих и 5 красных шаров. Из урны наугад вынимают одновременно четыре шара. Требуется найти вероятность того, что

все они синие;

хотя бы один красный;

три красных и один синий.

Решение.

В этой задаче опыт укладывается в схему случаев, так как в качестве исхода опыта или случая рассматриваем выборку (набор) четырех шаров, взятых из общего количества имеющихся шаров (тринадцати). Мы будем различать такие выборки четырех шаров, которые отличаются друг от друга хотя бы одним шаром. Это условие обеспечивает попарную несовместность исходов опыта (составление набора из четырех шаров). Исходы опыта имеют равные возможности реализации в силу того, что все шары одинаковы и различаются только цветом. Далее, совокупность всех таких выборок является достоверным событием в рамках данного опыта.

Для решения задачи используем формулу $P(A)=\frac{m}{n}$, где n — число всех исходов опыта, а m — число исходов, благоприятных событию A, т. е. таких, при которых событие A происходит. Число всех возможных исходов равно $n=C_{13}^{4}$, так как C_{13}^{4} — число наборов четырех элементов из тринадцати, отличающихся друг от друга хотя бы одним элементом. . Благоприятными являются выборки, состоящие только из синих шаров. Таких выборок имеется $m=C_{8}^{4}$.

По определению вероятности $P_1=\frac{m}{n}=\frac{C_{8}^{4}}{C_{13}^{4}}$.

Напомним, как вычисляются числа C_{k}^{i}:

$$C_{k}^{i}=\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-i+1)}{i!}=\frac{k!}{i!(k-i)!}=C_{k}^{k-i},$$

($k!=k(k-1)\cdot\ldots\cdot3\cdot2\cdot1$, $0!=1$ по определению.)

Отсюда $C_{8}^{4}=\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=70$, $C_{13}^{4}=\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=715$, $P_1=\frac{14}{143}$.

(Докажите, что $C_{k}^{0}=C_{k}^{k}=1$, а $C_{k}^{1}=k$, например, $C_{100}^{99}=C_{100}^{1}=100$.)

Поскольку события «хотя бы один красный шар» и «все синие шары» противоположны, то $P_2=1-\frac{C_{8}^{4}}{C_{13}^{4}}$.

В третьем случае благоприятными являются выборки, содержащие 3 красных и один синий шар. Чтобы составить такую выборку, следует: выбрать три красных шара из пяти (это можно сделать C_{5}^{3} способами), добрать недостающий синий шар (это можно сделать C_{8}^{1} способами), и, так как любая тройка красных шаров может объединиться с любым синим шаром, то всего благоприятных комбинаций будет $m=C_{5}^{3}\cdot C_{8}^{1}$. Следовательно, искомая вероятность $P_3=\frac{C_{5}^{3}\cdot C_{8}^{1}}{C_{13}^{4}}$, где $C_{8}^{1}=8$; $C_{5}^{3}=C_{5}^{2}=\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$; $P_3=\frac{16}{143}$.

Упражнения

1) Бросают одновременно две игральные кости. Какова вероятность что откроется сумма, равная 6? Ответ: $\frac{5}{36}$.

2) В лифт восьмиэтажного дома вошли 5 человек. Каждый с равной вероятностью может выйти на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что

все пятеро выйдут на разных этажах;

все выйдут на одном этаже;

все выйдут на шестом этаже. Ответ: $P=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{7^5}$; $P=\frac{7}{7^5}$; $P=\frac{1}{7^5}$

3) Имеется шесть карточек с буквами О, М, Л, К, О, О. Какова вероятность, раскладывая карточки в случайном порядке, получить слово «молоко». Ответ: $\frac{3!}{6!}$.

Тема 2.

Условная и безусловная вероятности. Зависимые и независимые события. Теорема умножения для двух зависимых событий. Теорема умножения для двух независимых событий. Зависимость и независимость событий в совокупности. Теорема умножения для независимых в совокупности событий.

Условная вероятность $P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$. Условная вероятность — это вероятность наступления события А при условии, что известно, что событие В наступило.

Независимость событий А и В означает, что условная вероятность $P(A/B)$ равна безусловной $P(A)$ (или $P(B/A)=P(B)$). В этом случае (когда события А и В независимы) теорема умножения вероятностей выражается формулой: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$

В более общем случае (когда события А и В зависимы) теорема умножения вероятностей выглядит так: $P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)$

Понятие независимости обобщается и на большее двух количество событий: события $A_1, A_2, \ldots, A_n$ независимы (точнее, независимы в совокупности), если для любой группы из этих событий вероятность их произведения равна произведению вероятностей.

Пример 6.

Студент знает двадцать вопросов из тридцати. В билете 3 вопроса. Найти вероятность того, что он ответит на первые два и не ответит на третий вопрос.

Решение:

На экзамене студент выбирает 3 вопроса наудачу. Обозначим через A_1, A_2, A_3 события, состоящие в правильном ответе, соответственно, на первый, второй и третий вопросы, через В — интересующее нас событие. Тогда $B=A_1\cdot A_2\cdot \bar{A}_3$ и, следовательно,

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(\bar{A}_3/A_1\cdot A_2) .$$

Далее, $P(A_1)=\frac{20}{30}$. После того, как студент ответил на первый вопрос (событие A_1), осталось 29 вопросов, из них 19 известных, т.е. $P(A_2/A_1)=\frac{19}{29}$.

Аналогично $P(\bar{A}_3/A_1\cdot A_2)=\frac{10}{28}$.

Поэтому $P(B)=\frac{20}{30}\cdot\frac{19}{29}\cdot\frac{10}{28}=\frac{95}{609}$.

Упражнения

1) Опыт состоит в последовательном бросании двух монет. Рассматриваются события:

А — выпадение герба на первой монете;

В — выпадение хотя бы одного герба;

С — выпадение хотя бы одной цифры;

D — выпадение герба на второй монете.

Определить, зависимы или независимы пары событий.

Ответ: $P(C)=\frac{3}{4}; P(C/A)=\frac{1}{2}$ — события A и C зависимы;

$P(A)=\frac{1}{2}; P(A/D)=\frac{1}{2}$ — события A и D независимы;

$P(B)=\frac{3}{4}; P(B/C)=\frac{2}{3}$ — события C и B зависимы;

$P(B)=\frac{3}{4}; P(B/D)=1$ — события B и D зависимы.

2) В двух ящиках находятся детали: в первом — десять (из них три стандартных), во втором — пятнадцать (из них шесть стандартных). Из каждого ящика вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что они стандартные.

Ответ: $P=\frac{3}{25.}$

Пример 7.

1. На рисунке 1. изображена электрическая схема, содержащая контакты A , B , C , D , E . Вероятности того, что контакты замкнуты, соответственно равны P_A, P_B, P_C, P_D, P_E . Определить вероятность того, что цепь замкнута (при решении считать, что контакты действуют независимо друг от друга).

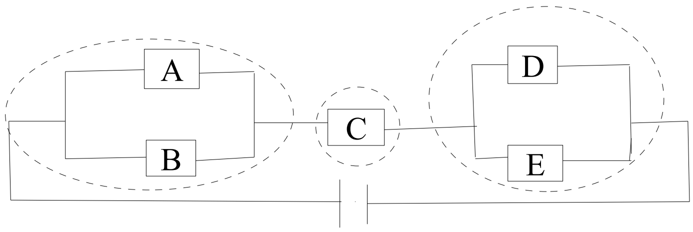


рис. 1

Решение

Обозначим через A, B, C, D, E события, эквивалентные замкнутости соответствующих контактов. Замкнутость цепи эквивалентна тому, что ток проходит через части цепи I , II и III , обведенные пунктирной линией. Пусть Q_I, Q_{II}, Q_{III} — события, эквивалентные прохождению тока через указанные участки. Тогда интересующее нас событие есть $S=Q_I \cdot Q_{II} \cdot Q_{III}$

Так как контакты действуют независимо друг от друга, то

$$P(S)=P(Q_I)\cdot P(Q_{II})\cdot P(Q_{III})$$

Вероятности $P(Q_I)$ и $P(Q_{III})$ можно вычислить следующим способом: тока в параллельной цепи не будет, если нет контакта и в элементе A и в элементе B , т. е. для события $\bar{Q}_I$, противоположного событию Q_I , имеем $\bar{Q}_I=\bar{A}\cdot\bar{B}$. Следовательно

$$P(\bar{Q}_I)=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=(1-P(A))\cdot(1-P(B))$$

$$P(Q_I)=1-P(\bar{Q}_I)=1-(1-P(A))\cdot(1-P(B)) \quad .$$

Соответственно, $\bar{Q}_{III}=\bar{D}\cdot\bar{E}$, следовательно

$$P(Q_{III})=1-P(\bar{Q}_{III})=1-(1-P(D))\cdot(1-P(E)) \quad ,$$

а также $P(Q_{II})=P(C)=P_C$, тогда

$$P=(1-(1-P_A)(1-P_B))\cdot P_C\cdot(1-(1-P_D)(1-P_E)) \ .$$

Упражнения.

1) В ящике имеется 15 деталей, среди которых 10 окрашеных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что извлеченные делали окажутся окрашенными. Ответ: $\frac{24}{91}$

2) В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 6 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных 4 отличника. Ответ: $\frac{5}{11}$

Тема 3.

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Формула полной вероятности $P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)$ получается как следствие теорем сложения и умножения вероятностей. Она позволяет определить вероятность события A, которое может произойти вместе с одним из событий (гипотез) $H_1, H_2, \ldots, H_n$, образующих полную группу несовместных событий. Напомним, что, если события образуют полную группу, то их сумма равна достоверному событию (одно из них обязательно реализуется) и, следовательно $P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=1$, а так как они несовместны, то $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$

Пример 8.

Телеграфное сообщение состоит из сигналов «Точка» и «Тире». Статистические свойства помех таковы, что искажается с среднем 25% сообщений «Точка» и 20% сообщений «Тире». Известно, что среди передаваемых сигналов «Точка» и «Тире» встречаются в соотношении 3:2. Определить вероятность того, что принят сигнал «Точка».

Решение

Событие A состоит в том, что принят сигнал «Точка». Рассмотрим гипотезы:

H_1 - передавался сигнал «Точка»;

H_2 - передавался сигнал «Тире».

Тогда $P(H_1)=\frac{3}{5}; P(H_2)=\frac{2}{5}$ (так как $P_1:P_2=3:2; P_1+P_2=1$)

Сигнал «Точка» будет принят, если переданный сигнал «Точка» не исказится, т. е. $P(A/H_1)=0.75$, или, если переданный сигнал «Тире» исказится и воспримется как «Точка», т. е. $P(A/H_2)=0.2$.

Окончательно по формуле полной вероятности имеем

$$P(A)=\frac{3}{5}\cdot 0.75+\frac{3}{5}\cdot 0.2=0.53 \ .$$

Формула Байеса $P(H_i/A)=\dfrac{P(H_i)\cdot P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)\cdot P(A/H_i)}$ позволяет найти условные вероятности гипотез, если событие A уже имело место.

Пример 9.

Имеется три партии изделий. В одной партии все изделия первого сорта, в другой — все изделия второго сорта, в третьей партии поровну изделий первого и второго сорта. Из выбранной наудачу партии взято изделие, оказавшееся первосортным. Найти вероятность того, что это изделие из первой партии, где все изделия первого сорта.

Решение.

Событие А состоит в том, что из некоторой партии взято первосортное изделие. Рассмотрим гипотезы:

H_1 - изделие взято из первой партии, где все изделия первого сорта;

H_2 - изделие из партии, где все изделия второго сорта;

H_3 - изделие из партии, где есть изделия двух сортов.

Обратите внимание, что гипотезы описывают только, откуда взято изделие, но не говорят о его качестве (качество входит в событие А). Так как партия выбиралась наудачу, то до того, как событие произошло, вероятности всех гипотез одинаковы:

$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)$,

а так как $P(H_1)+P(H_2)+P(H_3)=1$, то $P(H_i)=\frac{1}{3};(i=1,2,3)$.

Посмотрим, как изменятся эти вероятности после того, как стало известно, что взятое изделие оказалось изделием первого сорта. Не применяя формулу Байеса, легко догадаться, что в этом случае $P(H_2/A)=0$, так как во второй партии нет изделий первого сорта. Найдем $P(H_1/A)$ по формуле Байеса: $P(H_1/A)=\frac{P(H_1)\cdot P(A/H_1)}{P(A)}$.

$P(A/H_1)=1$ - вероятность того, что взято первосортное изделие если оно берется из первой партии.

Аналогичные рассуждения дают $P(A/H_2)=0;P(A/H3)=0.5$.

Окончательно получим

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)\cdot P(A/H_i)=\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2};P(H_1/A)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 1}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

Найдите самостоятельно $P(H_3/A)$

Пример 10.

В условиях примера 8 этой темы определить вероятность того, что принят передаваемый сигнал, если принят сигнал «Точка»

Решение

Событие А , состоящее в том, что принят сигнал «Точка» произошло. Нам надо найти вероятность того, что при этом был передан этот же сигнал, т. е. сигнал «Точка», и, значит, имела место первая гипотеза:

$$P(H_1/A)=\frac{\frac{3}{5}\cdot 0.75}{0.53}=\frac{45}{53}\simeq 0.85$$

(см. решение примера 1).

Упражнения

1) Ответьте на вопрос примера 10, если был принят сигнал «Тире». Ответ: 0.68

2) Имеются две урны. В первой урне два белых и три черных шара, во второй — три белых и пять черных шаров. Из первой и второй урн наугад берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из неё наудачу один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый. Ответ: $P=\frac{31}{80}$.

3) Цель находится или в пункте А с вероятностью 0.7 или в пункте В с вероятностью 0.3 . Сделано 3 выстрела по пункту А и 2 выстрела по пункту В. Вероятность поражения цели при

одном выстреле равна 0.1 . Какова вероятность, что цель поражена?
Ответ: $P=(1-0.9^3)\cdot 0.7+(1-0.9^2)\cdot 0.3=0.328$

Тема 4.

Повторные испытания. Схема Бернулли и формула Бернулли (для вероятности m успехов в n опытах: $P_{n,k}=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$) Интегральная теорема Лапласа. Формула Пуассона.

Поясним, что испытания Бернулли — это многократное повторение одного и того же опыта при неизменных условиях, при том дополнительном требовании, что результаты отдельных опытов независимы. В каждом опыте возможны 2 исхода, условно называемые успехом и неудачей.
Пусть в одном испытании вероятность успеха равна p , 0<p<1 , а вероятность неудачи равна q=1-p. Формула Бернулли дает выражение для вероятности k успехов в серии из n испытаний: $P_{n,k}=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}$, где $C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$.
Вероятность не более k успехов определяется суммой $\sum_{j=0}^{k} P_{n,j}$; вероятность не менее k успехов — суммой $\sum_{j=k}^{n} P_{n,j}$; вероятность того, что в серии из n испытаний количество успехов не менее k , но не более m , равна $\sum_{j=k}^{m} P_{n,i}$
Пример 11.
Какова вероятность при 6-кратном бросании игральной кости получить:
а) две шестерки
б) более двух шестерок
в) хотя бы одну шестерку
г) от двух до пяти шестерок?
Решение
В каждом из испытаний вероятность успеха равна $p=1/6$, вероятность неудачи равна $q=5/6$. Таким образом
а) $P_{6,2}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot(\frac{1}{6})^2\cdot(\frac{5}{6})^4\approx 0.201$
б) $P_{6.3}+P_{6,4}+P_{6,5}+P_{6,6}$ эту величину удобнее вычислять так: $1-P_{6,0}-P_{6,1}-P_{6,2}=1-0.335-0.402-0.201=0.062$. Переходим к противоположному событию: не более двух шестерок, его вероятность вычисляется по формуле: $P_{6,0}+P_{6,1}+P_{6,2}=0.938$. А вероятность требуемого события равна $1-0.938=0.062$.
в) Противоположным для этого события будет: не получено ни одной шестерки (то есть 0 шестерок при шести бросаниях кости) . Вероятность противоположного события равна $P_{6,0}=0.335$. Следовательно, вероятность требуемого события равна: $1-0.335=0.665$.
г) $P_{6,2}+P_{6,3}+P_{6,4}+P_{6,5}=1-P_{6,0}-P_{6,1}-P_{6,6}=0.263$.

Интегральная теорема Лапласа позволяет приближенно вычислить вероятность того, что событие A появится в n независимых испытаниях не менее k_1 и не более k_2 раз, если вероятность наступления события A в каждом испытании постоянна и равна p , 0<p<1 .

Теорема используется в случае, когда число испытаний - n достаточно велико, а вероятность - p ни мала ни велика, $npq>9$.

$P_n(k_1, k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x')$

где $x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}; x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ функция Лапласа

Таблица некоторых значений функции Лапласа приведена в приложении. Более полная таблица функции Лапласа имеется, например, в [1]. В ней указаны значения Φ для положительных значений $x; (0 \leqslant x \leqslant 5)$; для $x = 5$ полагают $\Phi(x) = 0.5$ для x<0 польуются той же таблицей, имея в виду, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ (функция $\Phi(x)$ нечетная).

Пример 12.

Вероятность появления успеха в каждом из независимых испытаний равна 0.25 Найти вероятность того, что при 600 испытаниях число успехов находится между 140 и 175.

Решение

В нашем случае $n = 600, p = 0.25, q = 1 - p = 0.75$. Следовательно

$npq = 600 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 112.5 > 9, np = 150, \sqrt{npq} \simeq 10.6$

для вычисления вероятности указанного события используется формула Лапласа

$$P_{600}(140 \leqslant k \leqslant 175) \simeq \Phi(\frac{175 - 150}{10.6}) - \Phi(\frac{140 - 150}{10.6}) = \Phi(2.36) - \Phi(-0.94) \simeq 0.49 + 0.33 = 0.82$$

Формула Пуассона может использоваться в качестве хорошего приближения формулы Бернулли, если n велико, p мало (обычно $p < 0.1; npq \leqslant 9$). В этом случае

$$P_n(k) = P(X(w) = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \simeq \frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$$

где $\lambda = np$. Таблица значений приведена в приложении.

Пример 13.

Телефонная станция обслуживает 800 абонентов. Для каждого абонента вероятность позвонить на коммутатор в течение часа равна 0.01 . Какова вероятность, что в течение часа позвонят не более двух абонентов?

Решение.

Событие А={позвонят не более двух абонентов} можно представить как сумму событий $A_0 + A_1 + A_2$ -позвонят 0 или 1 или 2 абонента. В каждом из случаев имеем дело с формулой Бернулли. Число испытаний $n = 800$. «Успех» — звонок абонента. Вероятность «успеха» $p = 0.01$. Число «успехов» i соответственно 0 или 1 или 2 . Следовательно

$$P(A_i) = C_{800}^i 0.01^i \cdot 0.99^{800-i}$$

Условия для использования приближенной формулы Пуассона выполняются: $p = 0.01 < 0.1; npq = 800 \cdot 0.01 \cdot 0.99 < 9$, значит

$$P(A) = P(A_0) + P(A_1) + P(A_2) \simeq \frac{e^{-8} \cdot 8^0}{0!} + \frac{e^{-8} \cdot 8^1}{1!} + \frac{e^{-8} \cdot 8^2}{2!} \simeq 0.0003 + 0.0027 + 0.0107 = 0.0137$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Подводя итоги раздела «Случайные события», приведем два примера и упражнения для самопроверки. Советуем, прочитав условия примеров, решить их самостоятельно.После этого проконтролируйте себя, ознакомившись с предложенными решениями.

Пример 14.

На десяти карточках написаны буквы а, а, а, м, м, т, т, е, и, к. Найти вероятность того, что при случайном раскладывании карточек получим слово «математика».

Решить задачу по формуле по теореме умножения вероятностей.

Решение

Событие A — получение слова «математика». Опыт состоит в раскладывании карточек. Исходы опыта — всевозможные варианты расположения этих десяти букв. Число всех исходов равно числу перестановок из 10, т. е. $n=10!$. Благоприятных исходов будет ровно один — когда получится слово «математика». В этом слове три буквы «а», которые можно переставлять между собой $3!$ способами, и при этом исход останется благоприятным. Аналогично $2!$ способами можно менять положение буквы «м», $2!$ — буквы «т». Поскольку каждый благоприятный вариант для одной буквы комбинируется с каждым вариантом для двух других, имеем: $m=3!2!2!$. Окончательно получим:

$$P(A)=\frac{3!\cdot 2!\cdot 2!}{10!}=\frac{1}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}$$

Решим задачу, используя теорему умножения вероятностей.

Введем событие A_1 , состоящее в том, что на первое место положена карточка с буквой «м»; событие A_2 , состоящее в том, что на второе место положена карточка с буквой «а»; A_3 — на третье «т», и т. д. Тогда $A=A_1\cdot A_2\cdot\ldots\cdot A_{10}$

$$P(A)=P(A_1)\cdot P(A_2/A_1)\cdot P(A_3/A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_{10}/A_1\ldots A_9)$$

Так как всего букв 10, а букв «м» две, то $m_1=2\,;n_1=10\,;P(A_1)=\frac{2}{10}$.

После того, как одна карточка с буквой «м» положена, осталось 9 карточек, из них три с буквой «а»: $m_2=3\,;n_2=9\,;P(A_2/A_1)=\frac{3}{9}$ Аналогично:

$$P(A_3/A_1A_2)=\frac{2}{8}\,;P(A_4/A_1A_2A_3)=\frac{1}{7}\,;P(A_5/A_1A_2A_3A_4)=\frac{1}{6}\ ,$$

(так как уже положены буквы «мате» и осталось 6 букв, из них одна «м»)

$$P(A_6/A_1\cdot\ldots\cdot A_5)=\frac{2}{5}\,;P(A_7/A_1\cdot\ldots\cdot A_6)=\frac{1}{4}\,;P(A_8/A_1\cdot\ldots\cdot A_7)=\frac{1}{3}\,;P(A_9/A_1\cdot\ldots\cdot A_8)=\frac{1}{2}$$

и осталась одна буква «а»: $P(A_{10}/A_1\cdot\ldots\cdot A_9)=1$.

Окончательно получим $P(A)=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8}\cdot\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}$.

Многие задачи на определение вероятности могут быть решены не единственным способом. С помощью теоремы умножения самостоятельно решите упражнения

Пример 15.

Три стрелка выстрелили по одному разу по мишени. Вероятность попадания для каждого стрелка равна, соответственно, $p_1-0.3\,;p_2=0.9\,;p_3=0.6$

1. найти вероятность того, что попал только второй стрелок.
2. Найти вероятность того, что было ровно одно попадание.
3. Найти вероятность поражения мишени.

(В задачах 2. и 3. найти эти же вероятности для случая, когда каждый стрелок попадает в мишень с вероятностью $p=0.6$).

4. В мишень попала одна пуля. Найти вероятность того, что попал второй стрелок.

Решение

1. Пусть B_2 — событие, состоящее в том, что из трех стрелков попал только второй. Обозначим через A_1, A_2, A_3 события, состоящие в том, что попали, соответственно, первый, второй и третий стрелки. Так как событие B_2 произойдет, если произойдет событие A_2 и не произойдут события A_1, A_3, то $B_2=\bar{A}_1\cdot A_2\cdot \bar{A}_3$.

События A_1, A_2, A_3 (а, следовательно, и $\bar{A}_1, A_2, \bar{A}_3$) независимы, поэтому

$P(B_2)=P(\bar{A}_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\bar{A}_3)=(1-p_1)\cdot p_2\cdot(1-p_3)=0.7\cdot 0.9\cdot 0.4=0.252$

2. Только одно попадание (событие C) будет иметь место, если попадет или только первый стрелок (B_1), или только второй (B_2), или только третий (B_3). Следовательно, $C=B_1+B_2+B_3$ События B_1, B_2, B_3 несовместны, поэтому

$P(C)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)=P(A_1\cdot \bar{A}_2\cdot \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\cdot A_2\cdot \bar{A}_3)+P(\bar{A}_1\cdot \bar{A}_2\cdot A_3)$

$P(C)=p_1(1-p_2)(1-p_3)+(1-p_1)p_2(1-p_3)+(1-p_1)(1-p_2)p_3$

$P(C)=0.3\cdot 0.1\cdot 0.4+0.7\cdot 0.9\cdot 0.4+0.7\cdot 0.1\cdot 0.6=0.306$ (*)

Это решение можно оформить, используя формулу полной вероятности. В качестве гипотез $H_i(i=1,2,3)$ рассмотрим события B_i. При выполнении любой из этих гипотез событие C произойдет обязательно, т. е. $P(C/H_i)=1(i=1,2,3)$. Гипотезы H_1, H_2, H_3 не составляют полную группу событий. Полная группа событий получится, если учесть двух, трех и ни одного попаданий, но условные вероятности события C при этих гипотезах равны нулю. Окончательно получаем (*).

3. Мишень поражена, если есть хотя бы одно попадание. Обозначим это событие D. Мишень может поразить или первый, или второй, или третий стрелок, т. е. $D=A_1+A_2+A_3$. События $A_i(i=1,2,3)$ совместны, так как каждый стрелок может попасть не один, а вместе с любым другим стрелком или может быть три попадания. В этом случае удобно перейти к противоположному событию (см. тема 4, замечание) . Событие $\bar{D}$ состоит в том, что попаданий не было, т. е. , что все стрелки промахнулись

$P(D)=1-P(\bar{D})=1-P(\bar{A}_1\cdot \bar{A}_2\cdot \bar{A}_3)=1-P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot P(\bar{A}_3)=1-0.7\cdot 0.1\cdot 0.4=0.972$. (**)

В случае, когда вероятности попаданий для всех стрелков одинаковы, например, $p=0.6$, формулы (*) (**) упрощаются: $P(C)=3\cdot 0.6\cdot 0.4^2; P(D)=1-0.4^3$.

Мы имеем возможность воспользоваться формулой Бернулли:

$P(C)=P_{3,1}=C_3^1 p\cdot q^2=3\cdot 0.6\cdot 0.4^2$. $P(D)=P_{3,m\geq 1}=1-P_{3,m<1}=1-P_{3,0}=1-q^3=1-0.4^3$

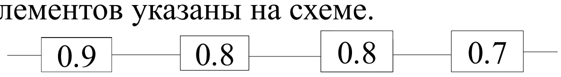
4. Сравните условия задач 1. и 4.

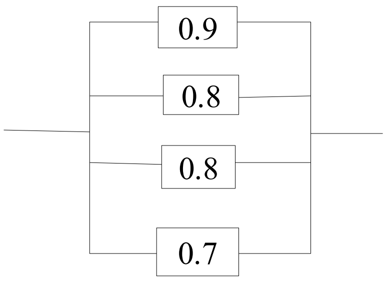
В задаче 1. вычисляется вероятность того, что из трех стрелков попал только второй, когда еще неизвестно, какой из множества возможных результатов будет реализован (до стрельбы). В задаче 4. уже известно, что событие C произошло, и надо найти вероятность того, что при этом реализовалась вторая гипотеза.По формуле Байеса имеем:

$$P(H_2/C)=\frac{P(H_2)\cdot P(C/H_2)}{P(C)}=\frac{0.7\cdot 0.9\cdot 0.4}{0.306}=\frac{14}{17}$$

Упражнения.

1) Найти вероятность прохождения тока через цепь, если вероятности исправной работы элементов указаны на схеме.





2) События A_1, A_2, A_3 составляют полную группу несовместных событий. Найти $P(A_3)$, если $P(A_1)=0.1\,;P(A_2)=0.6$

3) Радиолампа может принадлежать к одной из двух партий с вероятностями $p_1=0.6\,;p_2=0.4$. Вероятности того, что лампа перерабатывает заданное число часов, равны для этих партий, соответственно, 0.7 и 0.8 . Определить вероятность того, что взятая наудачу лампа проработает заданное число часов.

4) Считая равновероятными рождение мальчика и девочки, найти вероятность того, что в в семье, где пятеро детей, ровно два мальчика.

5) Имеется n радиолокационных станций, следящих за одним объектом. Каждая станция обнаруживает объект независимо от других станций с вероятностью p. Найти вероятность того, что объект будет обнаружен.

Ответы: 1) $p=0.9\cdot0.8^2\cdot0.7\,;p=1-0.1\cdot0.2^2\cdot0.3\,;$ 2) $p=0.3\,;$ 3) $p=0.74\,;$

4) $p=C_5^2\left(\frac{1}{2}\right)^5$; 5) $P=1-(1-p)^n$.

СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Тема 5.

Определение случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон (ряд) распределения вероятностей дискретной случайной величины. Функция распределения случайной величины. Функция распределения дискретной случайной величины. Свойства функции распределения.

Необходимо помнить, что случайная величина $X(\omega)$ — это числовая функция случайного аргумента, заданная на пространстве всех элементарных исходов Ω, т. е. каждому элементарному исходу $\omega\in\Omega$ случайная величина сопоставляет число $X(\omega)$. Случайная величина $X(\omega)$ называется дискретной, если множество ее значений конечно или счетно (т. е. все возможные значения $X(\omega)$ можно перенумеровать).

Среди остальных, т. е. недискретных случайных величин, выделяются непрерывные, т. е. такие, у которых возможные значения заполняют целый промежуток, и, кроме того, функция распределения $F(x)$ (см. ниже) дифференцируема.

Дискретная случайная величина определяется своим рядом распределения. Ряд распределения — это таблица. В первой строке таблицы перечислены все значения случайной величины $X(\omega)$ в порядке возрастания $x_1, x_2, \ldots x_k$. Во второй строке каждому значению $x_i (i=1,2,\ldots k)$ сопоставляется вероятность p_i события $X(\omega)=x_i$

Таблица 1. Общий вид ряда распределения дискретной случайной величины X

x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_k
p_i	p_1	p_2	...	p_i	...	p_k

Заметьте, что события { $X=x_i$ } (i=1,2,...k) попарно несовместны, и их объединение является достоверным событием, т. е.

{ $X=x_1$ }+{ $X=x_2$ }+...+{ $X=x_k$ }= Ω

Отсюда

$$p_1+p_2+\ldots+p_k=P(X=x_1)+P(X=x_2)+\ldots+P(X=x_k)=P(\Omega)=1$$

Итак: $\sum_{i=1}^{k} p_i=1$ — условие нормировки.

То, что $p_i>0$, i=0,1,2,...k следует из определения p_i.

Определение функции распределения F(x) случайной величины X:

F(x)=P{X<x}

Для дискретной случайной величины это определение означает, что F(x) равна сумме вероятностей тех значений случайной величины X , которые лежат на оси OX левее x . Из определения функции распределения вытекают ее свойства:

1. $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$
2. F(x) — неубывающая функция
3. $F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty} F(x)=1$; $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)=0$
4. Функция F(x) непрерывна слева. Обратите внимание на равенство:

$$P(a \leqslant X < b)=F(b)-F(a)$$

Из определения F(x) следует, что функция распределения дискретной случайной величиныX является неубывающей ступенчатой функцией, непрерывной слева и имеющей скачки в точках $x_1, x_2, \ldots x_k$. Величина скачка F(x) в точке x_i равна p_i. При $x \leqslant x_1$ F(x)=0, так как в этом случае интервал $(-\infty, x)$ не содержит ни одного значения случайной величины X . При $x>x_k$ F(x)=1, так как для таких x в промежутке $(-\infty, x)$ содержатся все значения случайной величины X .

Пример16.

Из урны, содержащей три белых и пять черных шаров, наугад извлекают три шара. Пусть X — число вынутых черных шаров. Построить ряд и функцию распределения случайной величины X.

Решение.

Случайная величина может принимать следующие значения:

$x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$.

Вычислим вероятности $p_i=P(X=x_i)$

$$p_1=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$$ - вероятность того, что извлечены три белых шара и ни одного черного;

$$p_2=\frac{C_5^1 \cdot C_3^2}{C_8^3}=\frac{15}{56}$$ - вероятность того, что извлечен один черный шар и два белых;

$p_3 = \frac{C_5^2 \cdot C_3^1}{C_8^3} = \frac{15}{28}$ - вероятность того, что извлечены два черных шара и один белый;

$p_4 = \frac{C_5^3}{C_8^3} = \frac{5}{28}$ - вероятность того, что все три извлеченных шара — черные.

В результате вычислений получим следующий ряд распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{56}$	$\frac{15}{56}$	$\frac{15}{28}$	$\frac{5}{28}$

Построим функцию распределения случайной величины X

при $x \leqslant 0$, F(x)=P(X<x)=0,

(так как в нашей задаче X не принимает отрицательных значений);

при $0 < x \leqslant 1$, F(x)=P(X<x)=P(X=0)= $\frac{1}{56}$;

при $1 < x \leqslant 2$, F(x)=P(X<x)=P(X=0, или X=1)= $\frac{1}{56} + \frac{15}{56} = \frac{16}{56}$;

при $2 < x \leqslant 3$, F(x)=P(X<x)=P(X=0, или X=1, или X=2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=

= $\frac{16}{56} + \frac{15}{28} = \frac{46}{56}$;

при 3<x, F(x)=P(X<x)=P(X=0, или X=1, или X=2, или X=3)=

=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)= $\frac{46}{56} + \frac{5}{28} = 1$

Окончательно получаем функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{1}{56}, 0 < x \leqslant 1; \\ \frac{16}{56}, 1 < x \leqslant 2; \\ \frac{46}{56}, 2 < x \leqslant 3; \\ 1, x > 3. \end{cases}$$

График функции распределения имеет вид:

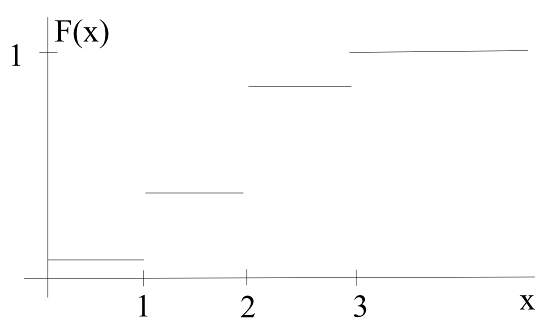


рис. 2

Упражнения

1) Охотник, имевший пять патронов, стреляет в цель до первого попадания (или пока не кончатся патроны). Построить ряд распределения случайного числа израсходованных патронов, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0.4 .

Ответ:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0.4	0.24	0.144	0.0864	0.1296

2) Монету подбрасывают шесть раз. Составить ряд распределения и построить функцию распределения числа появлений герба.

Ответ:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	1/64	6/64	15/64	20/64	15/64	6/64	1/64

Тема 6.

Числовые характеристики дискретной случайной величины.

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X (обозначается M[X])называется число, вычисляемое по формуле:

$$M[X]=x_1 p_1+x_2 p_2+\ldots+x_i p_i+\ldots+x_k p_k=\sum_{i=1}^{k} x_i p_i$$

Дисперсия дискретной случайной величины (обозначается D[X]) — это число, которое определяется формулой $D[X]=M[(X-M[X])^2]$.

Величина X-M[X] называется отклонением X от среднего (математического ожидания). Таким образом, дисперсия является мерой отклонения случайной величины X от своего среднего.

Из определения дисперсии вытекает формула для ее вычисления.

$$D[X]=(x_1-M[X])^2 p_1+(x_2-M[X])^2 p_2+\ldots+(x_i-M[X])^2 p_i+\ldots+(x_k-M[X])^2 p_k =$$
$$= \sum_{i=1}^{k}(x_i-M[X])^2\cdot p_i$$

От этой формулы с помощью несложных преобразований можно перейти к формуле:

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2=\sum_{i=1}^{k} x_i^2\cdot p_i-(M[X])^2 \quad . \qquad (1)$$

Свойства математического ожидания и дисперсии

C — неслучайная величина.

1. M[C]=C; D[C]=0;
2. M[CX]=CM[X]; $D[CX]=C^2 D[X]$;
3. M[X+Y]=M[X]+M[Y]; $D[X+Y]=D[X]+D[Y]+2K_{xy}$

(K_{xy} и — корреляционный момент, определение далее в разделе «Система случайных величин»).

Пример 17.

Дан ряд распределения случайной величины

x_i	-1/2	0	1/2	1	3/2
p_i	0.10	0.25	0.10	0.15	0.40

Найти M[X], D[X] .

Решение

$$M[X]=\sum_{i-1}^{5} x_i p_i = \frac{-1}{2}\cdot 0.1+0\cdot 0.25+\frac{1}{2}\cdot 0.1+1\cdot 0.15+\frac{3}{2}\cdot 0{,}4=0.75$$

При вычислении дисперсии воспользуемся формулой (1)

$$D[X]=\sum_{i=1}^{k} x_i^2 p_i-(M[X])^2 \;=$$

$$=\;(-\frac{1}{2})^2\cdot 0.1+0\cdot 0.25+(\frac{1}{2})^2\cdot 0.1+1^2\cdot 0.15+(\frac{3}{2})^2\cdot 0.4-(0.75)^2=1.1-0.5625=0.5375$$

Тема 7.

Непрерывные случайные величины. Плотность распределения и ее свойства. Числовые характеристики случайных величин (начальные и центральные моменты, математическое ожидание и дисперсия).

Непрерывная случайная величина, так же как и дискретная, определяется своей функцией распределения F(x)={X<x}, которая обладает свойствами 1-4. Равенство

$$P(a\leqslant X<b)=F(b)-F(a)$$

тоже выполняется в непрерывном случае. Функция распределения непрерывной случайной величины непрерывна. Вероятность P{X=x}=0 при любом значении x .

Для непрерывной случайной величины рассматривают функцию плотности распределения случайной величины f(x) , которая определяется равенством: f(x)=F'(x)

Основные свойства функции плотности распределения случайной величины:

1. $f(x)\geqslant 0$ при $\forall x\in(-\infty,+\infty)$
2. $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(u)\,du$
3. P{ $a\leqslant X<b$ }= $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$
4. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=1$ — условие нормировки.

Замечание. Из условия непрерывности случайной величины X вытекает, что
P(a<X<b)=P($a\leqslant X<b$)=P($a<X\leqslant b$)=P($a\leqslant X\leqslant b$).

Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины вычисляются по формулам: $M[X]=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)\,dx$ $\quad D[X]=M(X-M[X])^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(x-M[X])^2\cdot f(x)\,dx$

Из определения дисперсии с помощью простых преобразований можно получить удобную формулу:

$$D[X]=M[X^2]-(M[X])^2=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)\,dx-(M[X])^2 \;.$$

Свойства математического ожидания и дисперсии указаны в теме 6.

Пример 18.

Случайная величина X имеет плотность распределения вероятности (закон Коши)

$$f(x)=\frac{a}{1+x^2}$$

Требуется : найти коэффициент a и функцию распределения F(x);

найти вероятность неравенства $X > \sqrt{3}$;

определить математическое ожидание случайной величины X.

Решение:

Коэффициент а определим по условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a}{1+x^2}\,dx = 1 \quad \text{отсюда} \quad a = \frac{1}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}} = \frac{1}{\Pi}$$

Функция распределения F(x) случайной величины X определяется по формуле

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N\to-\infty} \int_{N}^{x} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{N\to-\infty} \frac{1}{\Pi} \arctan(x) \Big|_{N}^{x} = \frac{1}{\Pi}\left(\arctan(x) + \frac{\Pi}{2}\right) = \frac{1}{\Pi}\arctan(x) + \frac{1}{2}$$

Вероятность

$$P(X > \sqrt{3}) = P(\sqrt{3} < X < +\infty) = F(+\infty) - F(\sqrt{3}) = 1 - \left(\frac{1}{\Pi}\arctan(\sqrt{3}) + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$$

Математическое ожидание случайной величины X:

$$M[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\Pi(1+x^2)}\,dx = 0$$

Упражнения

1) Найти математическое ожидание и дисперсию числа израсходованных патронов (упражнение 1 предыдущей темы).

Ответ: $M[X] \approx 2.3;\ D[X] \approx 1.99$.

2) Функция распределения случайной величины F(x) имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0; \\ \frac{x}{4}, 0 < x \leqslant 4; \\ 1, x > 4 \end{cases}$$

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Ответ: M[X]=2; D[X]=4/3.

3) График плотности вероятности случайной величины изображен на рисунке 3 (закон Симпсона). Написать выражение плотности и функцию распределения этой случайной величины; найти ее математическое ожидание и дисперсию.

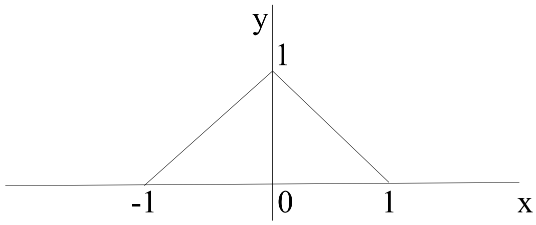


рис. 3

Ответ: $f(x) = \begin{cases} x+1, -1 < x \leqslant 0 \\ -x+1, 0 < x \leqslant 1 \\ 0, x \leqslant -1;\ x > 1 \end{cases}$

$$F(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant -1 \\ \frac{(x+1)^2}{2}, -1 < x \leqslant 0, \\ 1 - \frac{1}{2}(1-x)^2, 0 < x \leqslant 1, \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

M[X]=0 ; D[X]=1/6

Тема 8.

Специальные законы распределения случайных величин: биномиальный, равномерный, показательный, нормальный. Математические ожидания и дисперсии случайных величин, распределенных по указанным законам.

1. Биномиальный закон распределения.

Пусть X равно числу «успехов» в n независимых испытаниях с вероятностью «успеха» p . Тогда X — случайная величина, распределенная по биномиальному закону с параметрами (n,p,q) , где 0<p<1 , q=1-p . Построим ряд распределения биномиального закона с параметрами (n,p,q) — X принимает значения 0,1,2,...k,...n . Вероятности этих значений находятся по формуле: $P_n(k)=P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$

где k=0,1,...n ; $C_n^k=\frac{n!}{k!\cdot n-k!}$

причем $n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots 3\cdot 2\cdot 1\,;\, 0!=1$ по определению.

Ряд распределения случайной величины X , имеющей биномиальное распределение с параметрами (n,p,q)

x_i	0	1	...	k	...	n
p_i	$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^0 q^n$

Заметим, что математическое ожидание биномиального распределения случайной величины X с параметрами (n,p,q) равно np , т. е. M[X]=np . Дисперсия случайной величины X , имеющей биномиальное распределение с параметрами (n,p,q) равна npq , т. е. D[X]=npq .

2. Непрерывная случайная величина X имеет равномерное распределение на отрезке [a,b] , если ее плотность распределения

$$f(x)=\left\{\begin{array}{c} 0\,;\, x\notin[a,b] \\ \frac{1}{b-a}\,;\, x\in[a,b] \end{array}\right\}$$

график плотности f(x) равномерно распределеной случайной величины X построен на рис. 4

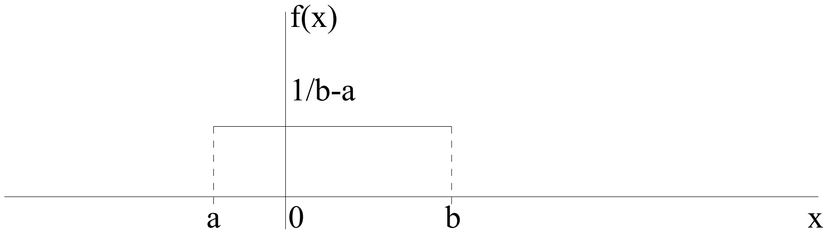


рис. 4

Самостоятельно определите вид функции распределения F(x) равномерно распределенной случайной величины X .

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X , распределенной равномерно на [a,b] равны, соответственно $M[X]=\frac{b+a}{2}\,;\, D[X]=\frac{(b-a)^2}{12}$.

3. Непрерывная случайная величина X имеет показательное распределение с параметром λ , если её плотность распределения:

$$f(x)=\left\{\begin{array}{c} 0\,;\, x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}\,;\, x\geqslant 0 \end{array}\right\}$$

где λ — положительное вещественное число.

Функция распределения для показательного закона определяется следующим образом:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\begin{Bmatrix} 0; x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}; x\geqslant 0 \end{Bmatrix}$$

Графики плотности распределения и функции распределения случайной величины для показательного закона изображены на рис 5

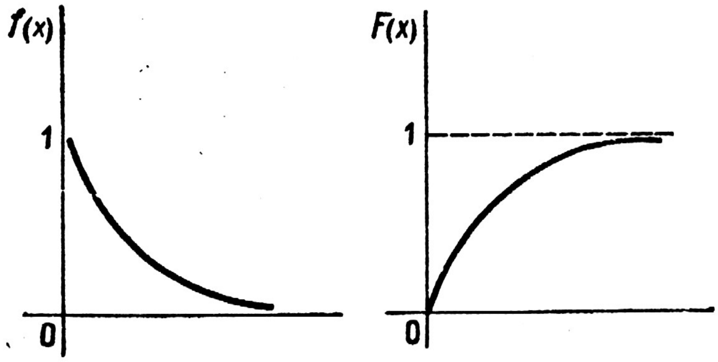


рис. 5

Если непрерывная случайная величина X распределена по показательному закону с параметром λ , то $M[X]=\frac{1}{\lambda}; D[X]=\frac{1}{\lambda^2}$

4. Непрерывная случайная величина X имеет нормалиное распределение с параметрами $a, \sigma(a\in(-\infty,+\infty), \sigma>0)$ если ее плотность

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\Pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, x\in(-\infty,+\infty)$$

Нормальное распределение встречается на практике чаще других. Если непрерывная случайная величина X имеет нормальное распределение с параметрами a, σ , то $M[X]=a, D[X]=\sigma^2$. Величина $\sigma=\sqrt{D[X]}$ называется среднеквадратическим отклонением случайной величины X .

Для выяснения влияния параметра σ на форму графика плотности нормального распределения сравните графики f(x) при *a=0* и $1.\sigma=0.5; 2.\sigma=1;$ рис 6

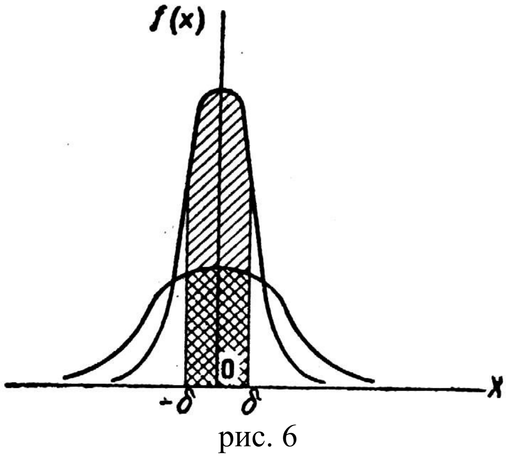


рис. 6

Чем меньше значение σ ,тем кривая f(x) имеет большее значение максимума и падает круче. Это означает, что вероятность попасть в интервал $(-\delta,\delta)$ больше для той случайной величины, распределенной по нормальному закону (с параметром *a=0*), для которой величина σ меньше. Следовательно, среднеквадратическое отклонение σ является характеристикой разбросанности значений случайной величины X . При $a\neq 0$

кривые плотностей имеют ту же форму, но сдвинуты на *a* вправо при *a<0* и влево при *a<0.*

Найдем вероятность $P(\alpha_1 \leqslant Y < \beta_1)$ в случае, когда Y — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами 0 , 1 . По свойству плотности распределения

$$P(\alpha_1 \leqslant Y < \beta_1) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Интеграл выразим через функцию Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

(заметим, что $\Phi(-x) = -\Phi(x)$) получим

$$\frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_{\alpha_1}^{\beta_1} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(\beta_1) - \Phi(\alpha_1)$$

Приближенные значения $\Phi(\beta_1)$ и $\Phi(\alpha_1)$ находятся по специальной таблице значений функции Лапласа (см. табл. 1 в приложении).

Итак, если случайная величина *Y* имеет нормальное распределение с параметрами 0 , 1, то $P(\alpha_1 \leqslant Y < \beta_1) = \Phi(\beta_1) - \Phi(\alpha_1)$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Пусть требуется найти вероятность $P(\alpha \leqslant X < \beta)$ для случайной величины X , имеющей нормальное распределение с параметрами a, σ . Для этого сначала нужно перейти от случайной величины X к случайной величине $Y = \frac{X-a}{\sigma}$. Случайная величина Y имеет нормальное распределение с параметрами 0 , 1. Следовательно,

$$P(\alpha \leqslant X < \beta) = P(\frac{\alpha - a}{\sigma} < Y < \frac{\beta - a}{\sigma}) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma})$$

Пример 19.

1. При передаче сообщения вероятность искажения одного знака равна 1/10 . Каково среднее значение дискретной случайной величины X — числа искаженных символов в сообщении из 8 знаков?

Решение

В данной задаче независимое испытание — это передача одного символа. Число независимых испытаний равно 8. «Успех» — искажение одного символа при передаче. Вероятность «успеха» *p*=1/10 . Отсюда *q*=1-*p*=9/10 .Рассмотрим дискретную случайную величину X — число искаженных символов в сообщении из 8 символов. Эта случайная величина распределена по биномиальному закону с параметрами (8 , 1/10 , 9/10) .

Среднее значение случайной величины — это математическое ожидание случайной величины, а для биномиального закона M[X]=*np* . $M[X] = 8 \cdot 1/10 = 0.8$

2. Рост взрослых мужчин является случайной величиной, распределенной по нормальному закону. Пусть математическое ожидание ее равно 175 см. , а среднее квадратическое отклонение 6 см. Определить вероятность того, что хотя бы один из наудачу выбранных пяти мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см.

Решение

Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X в интервал $(\alpha; \beta)$ вычисляется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi(\frac{\beta - a}{\sigma}) - \Phi(\frac{\alpha - a}{\sigma}) \qquad (2)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа

Случайная величина X — рост взрослого мужчины. Применяя формулу (2), найдем вероятность того, что рост взрослого мужчины будет принадлежать интервалу (170 ; 180),

$$P(170<X<180)=\Phi(\frac{180-175}{6})-\Phi(\frac{170-175}{6})=\Phi(\frac{5}{6})-\Phi(-\frac{5}{6})=2\,\Phi(\frac{5}{6})=2\,\Phi(0.83)=0.5935$$

Для вычисления вероятности того, что хотя бы один из наудачу выбранных пяти мужчин будет иметь рост от 170 до 180 см (событие А), перейдем к противоположному событию $\bar{A}$, т. е. к такому событию, когда рост пяти наудачу выбранных мужчин не попадет в интервал от 170 до 180 см.

Вероятность того, что рост одного мужчины выходит из интервала (170 ; 180), равна P=1-P(170<X<180)=1-0.5935=0.4065

Применяя теорему умножения для независимых событий, найдем

$P(\bar{A})=0.4065^5\approx 0.01$ и тогда $P(A)\approx 1-0.01=0.99$.

Упражнения

1) Детали, выпускаемые цехом, считаются высшего качества, если отклонения их размеров от номинала не превосходят по абсолютной величине 2.6 мм. Случайные отклонения размера детали от номинала подчиняется нормальному закону со средним квадратическим отклонением , равным 2 мм., а систематические отклонения отсутствуют. Определить среднее число деталий высшего качества среди наудачу выбранных пяти деталей.

Ответ: 4 детали.

СИСТЕМА СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Теоретический материал темы «Непрерывный случайный вектор»

1. Законы распределения

Функция распределения *F(x,y)=P(X<x,Y<y)*

$$F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0 \qquad F(+\infty,+\infty)=1$$

$$F(x,+\infty)=F_1(x);\, F(+\infty,y)=F_2(y)$$

F(x,y) — неубывающая по *x* и у

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy$$

Плотность распределения

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y} \quad ; \quad f(x,y)\geqslant 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=f_1(x);\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=f_2(y)$$

Условие нормировки $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$

2. Числовые характеристики

Математическое ожидание

$$M[\Phi(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x,y)\,f(x,y)\,dxdy \qquad M[X]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)\,dxdy$$

Дисперсия $D[X]=M[(X-M[X])^2]=M[X^2]-(M[X])^2$

Корреляционный момент *K[X,Y]=M[(X-M[X])(Y-M[Y])]=M[XY]-M[X] M[Y]*

Коэффициент корреляции $r[X,Y]=\frac{K[X,Y]}{\sqrt{D[X]D[Y]}}$

3. Независимые случайные величины

Условия независимости $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$ $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$

Свойства числовых характеристик

$M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]$; $D[X+Y]=D[X]+D[Y]$ $K[X,Y]=0$; $r[X,Y]=0$

4. Зависимые случайные величины

Условные законы распределения

$$f_2(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)};\ f_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}$$

Условные математические ожидания

$$M[Y/X]=\int_{-\infty}^{+\infty} yf(y/x)\,dy$$

5. Свойства числовых характеристик

Математическое ожидание $x_{min}\leqslant M[X]\leqslant x_{max}$ $M[aX+b]=aM[X]+b$; $M[X+Y]=M[X]+M[Y]$ $M[X\cdot Y]=M[X]\cdot M[Y]+K[X,Y]$	Дисперсия $D[X]\geqslant 0$ $D[aX+b]=a^2 D[X]$ $D[X\pm Y]=D[X]+D[Y]\pm 2\mathrm{K}[X,Y]$ $D[X]=K[X,X]$
Корреляционный момент $\lvert K[X,Y]\rvert\leqslant\sqrt{D[X]D[Y]}$ $K[aX+b,cY+d]=ac\cdot K[X,Y]$ *K[X,Y]=K[Y,X]* *K[Y,Y]=D[Y]*	Коэффициент корреляции $\lvert r[X,Y]\rvert\leqslant 1$ $r[aX+b,cY+d]=\frac{ac}{\lvert ac\rvert}\cdot r[X,Y]$ $r[X,Y]=r[Y,X]$; $r[X,aX+b]=\frac{a}{\lvert a\rvert}=\pm 1$

Тема 9.

Понятие о системе случайных величин. Функция распределения и плотность распределения системы двух случайных величин, их свойства. Связь между функцией распределения и плотностью распределения системы двух случайных величин и функцией распределения (соответственно, плотностью распределения) отдельных величин, входящих в систему. Зависимые и независимые сдучайные величины.

Пример 20.

Случайная точка (X,Y) распределена равномерно (с постоянной плотностью) внутри квадрата R на рис. 7. Написать выражение плотности распределения f(x,y) . Найти выражения плотностей распределения $f_1(x), f_2(y)$ отдельных величин X,Y , входящих в систему (составляющих системы случайных величин). Написать выражения условных плотностей $f_1(x/y), f_2(y/x)$. Зависимы или независимы случайные величины X,Y ?

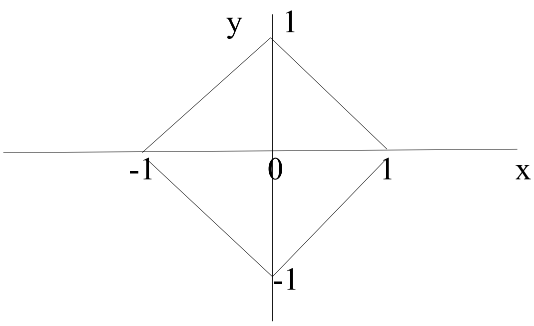


рис. 7

Решение

Используем условие нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dxdy=1$

Так как система случайных величин распределена равномерно в области R , что означает: $f(x,y)=\begin{cases} const\,;(x,y)\in R \\ 0\,;(x,y)\notin R \end{cases}$, то $\iint\limits_R c\,dxdy=1\,;\, c\iint\limits_R dxdy=c\cdot S_R$

Площадь квадрата равна 2 , поэтому с=1/2 ; $f(x,y)=\begin{cases} \frac{1}{2};(x,y)\in R \\ 0;(x,y)\notin R \end{cases}$

$$f_1(x)=\begin{cases} 0\,;x<-1 \\ \frac{1}{2}\int\limits_{-(1-x)}^{1-x} dy=1-x\,;0<x\leqslant 1 \\ \frac{1}{2}\int\limits_{-(1+x)}^{1+x} dy=1+x\,;-1\leqslant x\leqslant 0 \\ 0\,;x>1 \end{cases} \qquad f_1(x)=\begin{cases} 0\,;x<-1 \\ 1-|x|;|x|\leqslant 1 \\ 0\,;x>1 \end{cases}$$

График закона выглядит так (закон Симпсона)

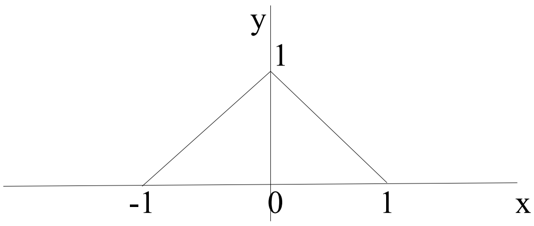


рис. 8

Аналогично $f_2(y)=\begin{cases} 1-|y|;|y|\leqslant 1 \\ 0;|y|>1 \end{cases}$

Далее, выражение для условной плотности распределения $f_1(x/y)$ при $|y|<1$

$$f_1(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\begin{cases} \frac{1}{2(1-|y|)};|x|\leqslant 1-|y| \\ 0;|x|>1-|y| \end{cases}$$

График условной плотности распределения $f_1(x/y)$ имеет следующий вид:

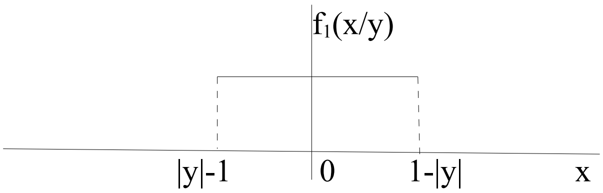


рис. 9

Аналогично, при |x|<1,

$$f_2(y/x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2(1-|x|)};|y|\leqslant 1-|x|\\ 0;|y|>1-|x|\end{cases}$$

Следовательно, случайные величины X и Y зависимы, так как

$$f_1(x)\neq f_1(x/y);\ f_2(y)\neq f_2(y/x)$$

Упражнение

Система случайных величин (X,Y) имеет плотность вероятности

$$f(x,y)=\frac{a}{1+x^2+y^2+x^2y^2}$$

Требуется найти коэффициент a ; найти вероятность попадания в прямоугольник 0<x<1;-1<y<1; определить функцию распределения системы (X,Y); определить законы распределения одномерных величин X,Y ; Выяснить, являются ли эти величины зависимыми.

Ответ: $a=\frac{1}{\Pi^2};P(0<X<1,-1<Y<1)=\frac{1}{8}$

$$F(x,y)=(\frac{1}{\Pi}\arctan(x)+\frac{1}{2})(\frac{1}{\Pi}\arctan(y)+\frac{1}{2})$$

$$f_1(x)=\frac{1}{\Pi(1+x^2)};f_2(y)=\frac{1}{\Pi(1+y^2)}$$

$$F_1(x)=\frac{1}{\Pi}\arctan(x)+\frac{1}{2};F_2(y)=\frac{1}{\Pi}\arctan(y)+\frac{1}{2}$$

X и Y являются независимыми случайными величинами: $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$

Тема 10.

Числовые характеристики системы двух случайных величин (начальные и центральные моменты, математическое ожидание, корреляционный момент и коэффициент корреляции). Свойства коэффициента корреляции. Пример зависимых, но не коррелированных случайных величин.

Пример 21.

Докажем, что зависимые случайные величины X и Y , рассматриваемые в примере 20 темы 9 , не коррелированы.

Решение

Вычислим K[X,Y]: K[X,Y]=M[XY]-M[X] M[Y].

В силу симметрии относительно начала координат плотностей $f_1(x), f_2(y)$: M[X]=M[Y]=0.

Найдем M[XY]

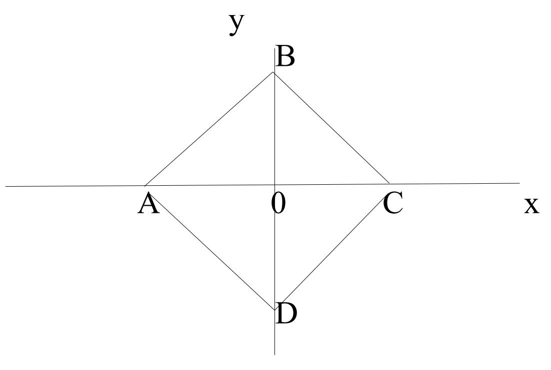


рис. 10

AD: y=1-x; AB: y=1+x; DC: y=-1+x; BC: y=1-x;

$$M[XY]=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot y\cdot f(x,y)\,dxdy=\frac{1}{2}\iint\limits_{R} xydxdy=\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} xdx\left(\int\limits_{-1-x}^{1+x} ydy+\int\limits_{-1+x}^{1-x} ydy\right)=0$$

X и Y — не коррелированы, так как K[X,Y]=0

Замечание

Независимые случайные величины не коррелированы. Рассмотренный пример показывает, что из некоррелированности не следует независимость случайных величин. По величине K[X,Y] можно судить о тесноте только линейной зависимости. Так, если рассмотреть коэффициент корреляции $r[X,Y]=\frac{K[X,Y]}{\sigma_x\sigma_y}$

где $\sigma_x=\sqrt{D[X]};\sigma_y=\sqrt{D[Y]}$, то $|r_{xy}|\leqslant 1$, причем для случайных величин, связанных линейной зависимостью Y=kX+b , $r_{xy}=1$ при k>0 и $r_{xy}=-1$ при k<0 .

Пример 22.

Определить плотность вероятности и математические ожидания, дисперсии и корреляционный момент случайных величин X и Y , заданных в интервалах $(0\leqslant x\leqslant\frac{\Pi}{2})$ и $(0\leqslant y\leqslant\frac{\Pi}{2})$, если функция распределения системы $F(x,y)=\sin(x)\cdot\sin(y)$.

Решение

Для системы случайных величин находим плотность вероятности по формуле

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$$

Получим $f(x,y)=\cos(x)\cdot\cos(y);(0\leqslant x\leqslant\frac{\Pi}{2};0\leqslant y\leqslant\frac{\Pi}{2})$

$$M[X]-\int\limits_0^{\frac{\Pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\Pi}{2}} x\cos(x)\cdot\cos(y)\,dxdy=\int\limits_0^{\frac{\Pi}{2}}\cos(y)\,dy\int\limits_0^{\frac{\Pi}{2}} x\cos(x)\,dx=\frac{\Pi}{2}-1$$

$$D[X]=\int\limits_0^{\frac{\Pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\Pi}{2}} x^2\cos(x)\cos(y)\,dxdy-\left(\frac{\Pi}{2}-2\right)^2=\Pi-3$$

M{X]=M[Y] , D[X]=D[Y] .

Корреляционный момент

$$K[X,Y]=\int\limits_0^{\frac{\Pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\Pi}{2}} xy\cos(x)\cos(y)\,dxdy-\left(\frac{\Pi}{2}-1\right)^2=\left(\frac{\Pi}{2}-1\right)^2-\left(\frac{\Pi}{2}-1\right)^2=0$$

Докажите, что X и Y независимы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение приведем несколько примеров, которые советуем решить самостоятельно, контролируя себя приведенными ниже решениями.

Пример 23.

Дан ряд распределения дискретной случайной величины

x_i	-1	0	3	4
p_i	0.2	0.3	0.1	p_4

Найти $p_4; D[X]; F(x); P(2\leqslant X<3.5); P(X<3); P(-2\leqslant X)$

Решение

Из условия нормировки 0.2+0.3+0.1+p_4=1 Отсюда p_4=1-0.6=0.4;

D[X]=M[X^2}-M^2[X]

Найдем M[X]: $M[X]=\sum_{i=1}^{4} x_i p_i=(-1)\cdot 0.2+0\cdot 0.3+3\cdot 0.1+4\cdot 0.4=1.7$

$$M[X^2]=\sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i=1\cdot 0.2+0\cdot 0.3+9\cdot 0.1+16\cdot 0.4=7.5$$

$$D[X]=7.5-1.7^2=7.5-2.89=4.61$$

Найдем функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0\,;x\leqslant -1 \\ 0.2\,;-1<x\leqslant 0 \\ 0.2+0.3=0.5\,;0<x\leqslant 3 \\ 0.5+0.1=0.6\,;3<x\leqslant 4 \\ 0.6+0.4=1\,;x>4 \end{cases}$$

Вычислим вероятности попадания в интервалы

$P(2\leqslant X<3.5)=F(3.5)-F(2)=0.6-0.5=0.1$ $\quad P(X<3)=F(3)=0.5$

$P(-2\leqslant X<+\infty)=F(+\infty)-F(-2)=1-0=1$

Пример 24.

Дан ряд распределения дискретной случайной величины Y

y_i	-100	0	300	400
p_i	0.2	0.3	0.1	0.4

Найти $P(1<Y\leqslant 300)$ M[Y]; D[Y]

Решение

Для вычисления вероятности события $1<Y\leqslant 300$ в данном случае нельзя пользоваться формулой $P(a\leqslant Y<b)=F(b)-F(a)$, Для того, чтобы пояснить данное положение, рассмотрим функцию распределения случайной величины Y, в частности, если значение аргумента функции распределения y находится в интервале $0<y\leqslant 300$, то $F(y)=P(-\infty<Y<y)=P(Y=-100)+P(Y=0)=0.2+0.3=0.5$, $F(300)=P(Y<300)=0.5$, как видно из определения функции распределения, значение случайной величины Y=300 не попадает в интервал, т. к. в формуле для определения значения функции распределения в точке, стоит строгое неравенство, таким образом, событие {Y=300}и вероятность этого события P(Y=300)=0.1 не учитывается в формуле F(300)-F(1)=0.5-0.5=0 .

Для вычисления вероятности $P(1<Y\leqslant 300)$ необходимо использовать ряд распределения случайной величины Y . Надо определить, какие значения случайной величины Y попадают в указанный интервал, и сложить соответствующие вероятности.

$$P(1<Y\leqslant 300)=P(Y=300)=0.1$$

Рассмотрим случайную величину X , определенную рядом распределения

x_i	-1	0	3	4
p_i	0.2	0.3	0.1	0.4

тогда Y=100X , следовательно M[Y]=100M[X]

D[Y]=10000D[X]; M[X]=1.7; D[X]=4.61

Окончательно M[Y]=170; D[Y]=46100

Пример 25.
Дана плотность вероятности непрерывной случайной величины

$$f(x)=\begin{cases} 0\,;\, x\leqslant -\dfrac{\Pi}{2} \\ a\cos(x)\,;\, -\dfrac{\Pi}{2}<x\leqslant\dfrac{\Pi}{2} \\ 0\,;\, x>\dfrac{\Pi}{2} \end{cases}$$

Найти число «а» ; $P(-\Pi<X<\dfrac{\Pi}{6})\,;\, F(x)$

Решение

По условию нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\frac{\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{2}} a\cos(x)\,dx=2\text{a}=1$ Отсюда а=1/2;

$$P(-\Pi<X<\frac{\Pi}{6})=\int\limits_{-\frac{\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{2}} f(x.y)\,dxdy=\int\limits_{-\frac{\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{6}} \frac{1}{2}\cos(x)\,dx=\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)=\frac{3}{4}$$

Найдем функцию распределения
В нашем случае

$$F(x)=\begin{cases} 0\,;\, x\leqslant\dfrac{-\Pi}{2} \\ \int\limits_{\frac{-\Pi}{2}}^{x}\dfrac{1}{2}\cos(t)\,dt\,;\, -\dfrac{\Pi}{2}<x<\dfrac{\Pi}{2} \\ 1\,;\, \dfrac{\Pi}{2}\leqslant x \end{cases}$$

Интегрируя, получим

$$F(x)=\begin{cases} 0\,;\, x\leqslant -\dfrac{\Pi}{2} \\ \dfrac{1}{2}\sin(x)+\dfrac{1}{2}\,;\, -\dfrac{\Pi}{2}<x<\dfrac{\Pi}{2} \\ 1\,;\, \dfrac{\Pi}{2}\leqslant x \end{cases}$$

Пример 26.
Дана функция распределения непрерывной случайной величины

$$F(x)=\begin{cases} 0\,;\, x\leqslant -\dfrac{\Pi}{4} \\ a\sin(2\text{x})+b\,;\, -\dfrac{\Pi}{4}<x<\dfrac{\Pi}{4} \\ 1\,;\, \dfrac{\Pi}{4}\leqslant x \end{cases}$$ Найти «a»,»b»

Решение

В силу непрерывности функции F(x) для непрерывной случайной величины имеем:

$$F(\frac{-\Pi}{4})=0=\lim_{x\to-\frac{\Pi}{4}+0}F(x)=a\sin(2\cdot(-\frac{\Pi}{4}))+b;0=-a+b$$

$$F(\frac{\Pi}{4})=1=\lim_{x\to\frac{\Pi}{4}-0}F(x)=a\sin(\frac{\Pi}{2})+b;1=a+b$$

Отсюда b=1/2; a=1/2 .

Пример 27.

Найти интервал, практически возможных значений случайной величины, плотность вероятности которой имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\Pi}\cdot 5}\cdot e^{-\frac{(x+1)^2}{50}}$$

Решение

Данная плотность вероятности определяет нормально распределенную случайную величину X со средним значением *a=-1* и среднеквадратическим отклонением $\sigma=5$. Нормально распределенная случайная величина с вероятностью 0.997 попадает в интервал $[a-3\sigma;a+3\sigma]$ (правило трех сигм). Следовательно, практически возможные значения этой величины заполняют интервал [-16;14]

Упражнения

1. Дан ряд распределения дискретной случайной величины

x_i	-1	0	x_3
p_i	p_1	0.3	0.4

Известно, что M[X}=0.5 . Случайная величина Y связана с X равенством Y=1-3X

Найти p_1; x_3; D[X]; F(0); F(7); F(-2); M[Y]; D[Y]

2. Для случайных величин X и Y известны D[X]=4; D[Y]=25; D[X+Y]=33

Найти r[X,Y]

3. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\left\{\begin{matrix} 0;x\leqslant 2 \\ x-2;2<x\leqslant a \\ 1;a<x \end{matrix}\right\}$$

Найти a; M[X]; P(2.9<X<3); P(2.3<X); P(-1<X<5)

Ответы:

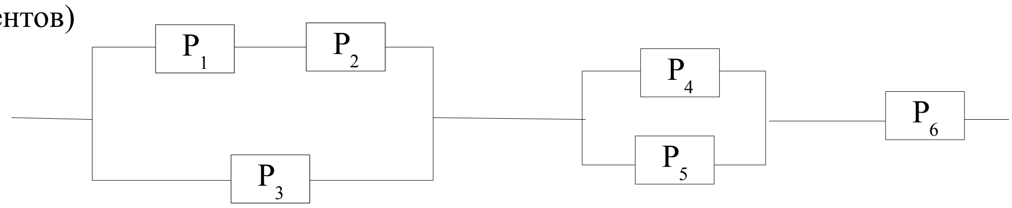
1. 0.3; 2; 1.65; 0.3; 1; 0; -0.5; 14.85
2. 0.2
3. 3; 2.5; 0.1; 0.7; 1

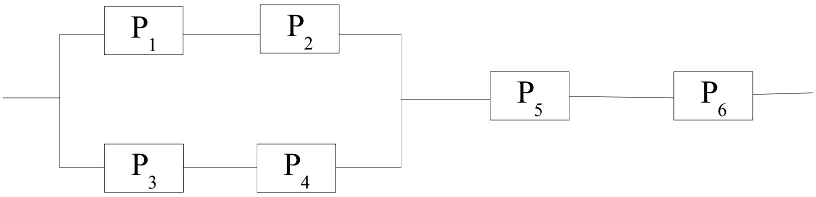
КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

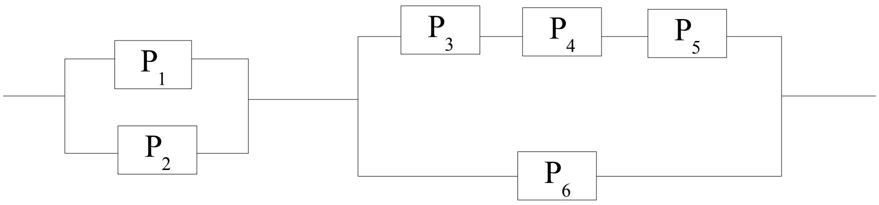
№ 1. В партии из 7 изделий 2 бракованных. Наудачу взяты 4 изделия. Найти вероятность того, что среди них:
а. одно бракованное;
б. хотя бы одно бракованное;
в. бракованных и небракованных поровну.
№ 2. В урне 6 белых и 2 черных шара. Наудачу взяты 4 шара. Найти вероятность того, что среди них:
а. один белый;
б. хотя бы один белый;
в. белых и черных шаров поровну.
№ 3. Среди 10 приборов 3 бракованных. Наудачу взяты 6 приборов. Найти вероятность того, что среди них:
а. два бракованных;
б. хотя бы один бракованный;
в. бракованных и небракованных поровну.
№ 4. В партии 5 исправных изделий и 2 бракованных. Наудачу взяты 4 изделия. Найти вероятность того, что среди них:
а. одно бракованное;
б. хотя бы одно бракованное;
в. бракованных и небракованных поровну.
№ 5. В кошельке лежат 8 монет по 5 рублей и 2 монеты по 10 рублей. Наудачу взяты 4 монеты. Найти вероятность того, что среди них:
а. одна монета по 10 рублей;
б. хотя бы одна монета достоинством 10 рублей;
в. монет по 5 и по 10 рублей поровну поровну.
№ 6. В партии 12 изделий, из них 3 бракованных. Наудачу взято 2 изделия. Найти вероятность того, что среди них:
а. одно бракованное;
б. хотя бы одно бракованное;
в. бракованных и небракованных поровну.
№ 7. В урне 1 красный шар, 3 белых шара и 5 черных. Наудачу взяты 4 шара. Найти вероятность того, что среди них:
а. один черный;
б. хотя бы один черный;
в. белых и черных поровну.
№ 8. В группе из 10 студентов 3 отличника. По списку выбраны наудачу 4 студента. Найти вероятность того, что среди них:
а. три отличника;
б. хотя бы один отличник;
в. отличников и неотличников поровну.
№ 9. У причала стоят 9 катеров из них 4 шестиместных. Для прогулки туристы выбрали наудачу 4 катера. Найти вероятность того, что среди них:
а. один шестиместный;
б. хотя бы один шестиместный;
в. шестиместных и нешестиместных поровну.
№ 10. В партии из 8 изделий 5 бракованных. Наудачу взяты 4 изделия. Найти вероятность того, что среди них:

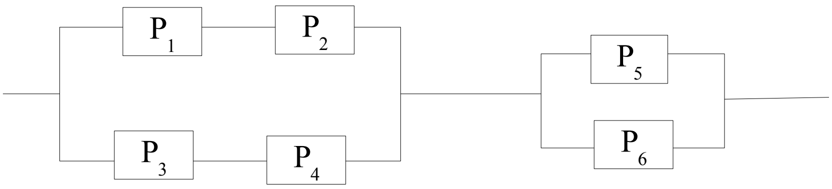
а. три бракованных;
б. хотя бы одно бракованное;
в. бракованных и небракованных поровну.

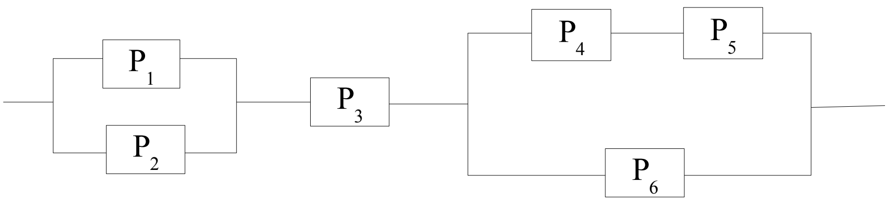
В задачах с 11 по 20 рассчитать надежность цепи. (Указаны вероятности работы элементов)

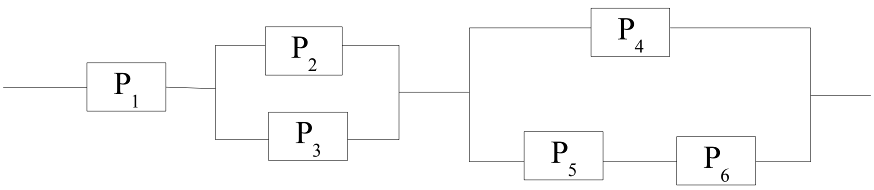
№11


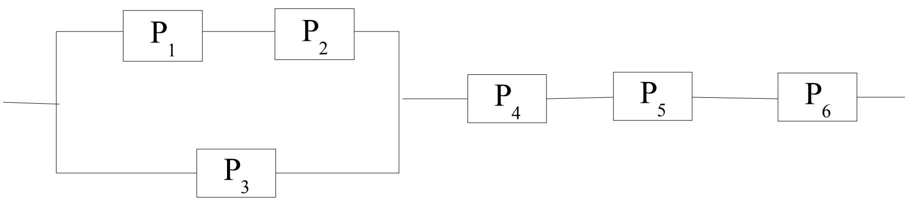
№12


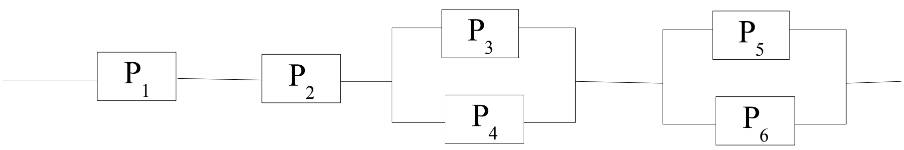
№13


№14


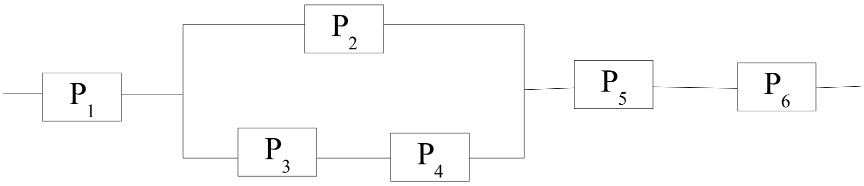
№15


№16


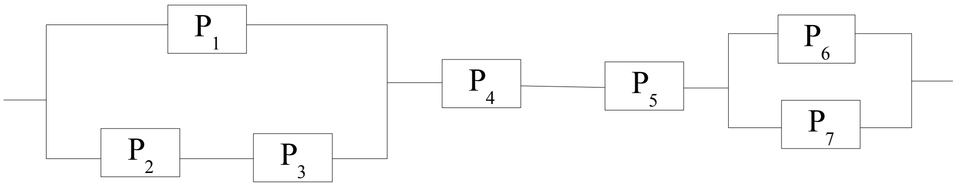
№17


№18


№ 19



№ 20



№ 21

В первой урне находятся 1 белый 5 черных шаров, а во второй — 4 белых и 1 черный. Из первой урны удалили наугад один шар, а оставшиеся ссыпали в третью урну.

а. Найти вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

б. Оказалось, что шар, вынутый из третьей урны, белого цвета. Найти вероятность, что шар, удаленный из первой урны, тоже черный.

№ 22

Двигатель работает в нормальном режиме в 80% всего времени, а в форсированном — в оставшиеся 20%. Вероятность выхода его из строя в нормальном режиме равна 5%, а форсированном — 50%.

а. Какова вероятность выхода двигателя из строя?

б. Двигатель вышел из строя. Какова вероятность, что в этот момент он работал в форсированном режиме?

№ 23

Программа экзамена содержит 20 вопросов. Студент знает 10 из них. Для сдачи экзамена требуется ответить на два предложенных вопроса или на один из них и один вопрос дополнительно.

а. Какова вероятность, что студент сдаст экзамен?

б. Студент сдал экзамен. Какова вероятность, что ему пришлось отвечать на дополнительный вопрос?

№ 24

В магазин поступило 500 телевизоров, из них 200 отмечены знаком качества. Известно, что среди телевизоров со знаком качества 5% — бракованных, а среди остальных телевизоров бракованных — 20%.

а. Найти вероятность того, что случайно выбранный телевизор оказался бракованным.

б. Случайно выбранный телевизор оказался бракованным. Найти вероятность того, что он имеет знак качества.

№ 25

Имеется две партии деталей из 3 и 7 штук. В каждой партии одна деталь бракованная. Вторую партию увеличили, добавив в нее одну деталь, случайно выбранную в первой партии, а затем из второй партии одну деталь, выбранную наугад, отправили на проверку.

а. Нати вероятность того, что эта деталь годна.

б. Деталь оказалась годной. Найти вероятность, что из первой партии во вторую была переложена годная деталь.

№ 26
Программа зачета содержит 10 вопросов. Студен знает 7 из них. Для сдачи зачета требуется ответить на предложенный вопрос или, в случае незнания этого вопроса, на два дополнительных.
а. Какова вероятность, что студент сдаст зачет?
б. Студент сдал зачет. Какова вероятность, что ему пришлось отвечать на дополнительные вопросы?
№ 27
В трех урнах имеются белые и черные шары:
в первой — 9 белых и 1 черный;
во второй — 3 белых и 1 черный;
в третьей — 6 белых и 4 черных.
Из наугад выбранной урны случайно выбирают шар.
а. Найти вероятность, что он белый.
б. Достали белый шар, найти вероятность, что он из третьей урны.
№ 28
Радиоаппаратура работает при нормальном напряжении в сети в 95% времени, а в 5% времени — при повышенном напряжении. Вероятность отказа радиоаппаратуры при нормальном напряжении равна 0.04 , а при повышенном — 0.4 .
а. Какова полная вероятность отказа аппаратуры?
б. Произошел отказ аппаратуры. Какова вероятность, что в этот момент напряжение в сети было повышенным?
№ 29
В ящике лежат 100 радиодеталей первого, 200 — второго и 300 — третьего сорта. Доля нестандартных деталей среди первосортных составляет 5%, среди второсортных — 10% , а среди третьесортных — 25%.
а. Найти вероятность,что случайно выбранная из ящика деталь стандартная.
б. Найти вероятность, что выбранная деталь первого сорта, если известно, что она оказалась стандартной.
№ 30
В трех ящиках лежат детали:
в первом — 6 годных, 4 бракованных;
во втором — 3 годных, 1 бракованная;
в третьем — 9 годных, 1 бракованная
Из случайно выбранного ящика наугад выбирается деталь.
а. Найти вероятность, что она оказалась бракованной.
б. Найти вероятность, что она из третьего ящика, если известно, что она бракованная.

Для решения задач 31-40 воспользуйтесь формулой Бернулли или формулой Пуассона.

№ 31
Будем считать, что вероятности появления на свет мальчика и девочки равны между собой. В семье пятеро детей.
а. Найти вероятность того, что в семье ровно 2 мальчика.
б. Найти вероятность того, что в семье хотя бы 1 мальчик.
№ 32
Вероятность брака при производстве диодов равна 0.05 . В партии 100 диодов.
а. Какова вероятность, что среди них ровно два бракованных?
б. Какова вероятность что в партии хотя бы 2 бракованных диода?

№ 33 Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0.6 . Производится серия из 4 выстрелов.
а. Какова вероятность того, что число промахов будет равно числу попаданий?
б. Найти вероятность хотя бы одного промаха.
№ 34
Вероятность того что в заданный срок электрическая лампочка перегорит равна 0.02 . В доме 300 лампочек.
а. Какова вероятность, что в доме в заданный срок перегорит ровно 4 лампочки?
б. Какова вероятность того, что в доме в тот же срок перегорит не менее двух из них?
№ 35
Баскетболист попадает в корзину с вероятностью 0.75 .
а. Какова вероятность того, что он промахнется ровно 2 раза в 4 бросках?
б. Какова вероятность того, что он промахнется хотя бы 1 раз?
№ 36
Среди резисторов, прошедших контроль, 2% — нестандартные. В партии 200 резисторов.
а. Какова вероятность того, что в партии хотя бы 2 нестандартных?
б. Какова вероятность того, что в партии от 2 до 5 нестандартных?
№ 37
Монета бросается 4 раза.
а. Какова вероятность того, что число выпавших гербов не менее одного и не более трех?
б. Найти вероятность того, что выпадет ровно три герба.
№ 38
В результате проведения опыта событие А появляется с вероятностью 0.001 . Опыт повторяется 2000 раз.
а. Какова вероятность того, что событие А появится от 2 до 4 раз?
б. Какова вероятность того, что событие А появится хотя бы один раз?
№ 39
Прибор состоит из трех узлов. Вероятность отказа в течение времени t для каждого узла равна 0.2 .
а. Какова вероятность того, что за время t откажет хотя бы один узел?
б. Найти вероятность того, что за время t откажет ровно один узел.
№ 40
Вероятность того, что любая деталь в партии бракованная, равна 0.001 . Партия состоит из 5000 деталей.
а. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одна бракованная.
б. Найти вероятность того, что среди них от 2 до 4 бракованных деталей.

В задачах дискретная случайная величина задана рядом распределения.

№ 41

x_i	-1	0	2
p_i	0.5	0.1	p_3

Найти $p_3; M[X]; D[X]; P(X<2); F(x)$. Начертить график $F(x)$
№ 42

x_i	-20	0	20
p_i	0.3	p_2	0.4

Найти $p_2; M[X]; D[X]; P(X\geqslant 2); F(x)$. Начертить график $F(x)$

№ 43

x_i	-2	0	2
p_i	p_1	0.1	0.5

Найти $p_1; M[X]; D[X]; P(0 \leqslant X \leqslant 2); F(x)$. Начертить график $F(x)$

№ 44

x_i	-1	0	x_3
p_i	0.2	0.3	p_3

Известно, что $M[X]=0.8$. Найти $x_3; p_3; D[X]; P(X<1); F(x)$. Начертить график $F(x)$

№ 45

x_i	0	1	5
p_i	0.3	0.5	p_3

Найти $p_3; M[X]; D[X]; P(X \geqslant 3); F(x)$. Начертить график $F(x)$

№ 46

x_i	-1	1	x_3
p_i	0.1	p_2	0.3

Известно, что $M[X]=1.1$ Найти $p_2; x_3; D[X]; P(X \geqslant 1); F(x)$. Начертить график $F(x)$

№ 47

x_i	-2	0	1
p_i	0.2	p_2	0.1

Найти $p_2; M[X]; D[X]; P(X<1); F(x)$. Начертить график $F(x)$

№ 48

x_i	-1	x_2	2
p_i	0.2	0.1	p_3

Известно, что $M[X]=1.3$ Найти $p_3; x_2; D[X]; P(X<1.5); F(x)$. Начертить график $F(x)$

№ 49

x_i	-10	0	20
p_i	0.2	p_2	0.2

Найти $p_2; M[X]; D[X]; P(X \geqslant -1); F(x)$. Начертить график $F(x)$

№ 50

x_i	0	1	x_3
p_i	0.5	p_2	0.1

Известно, что $M[X]=0.7$ Найти $p_2; x_3; D[X]; P(X>0.5); F(x)$. Начертить график $F(x)$

В задачах 51—60 непрерывная случайная величина X задана функцией распределения F(x).

№ 51

$$F(x)=\begin{Bmatrix} 0; x \leqslant 0 \\ ax^2; 0<x \leqslant 1 \\ 1; x>1 \end{Bmatrix}$$

Найти $a; f(x); M[X]; D[X]; P(-1<x<0.5)$. Начертить графики функций f(x);F(x)

№ 52

$$F(x)=\left\{\begin{array}{c} 0\,;\,x\leqslant 1 \\ ax+\text{ь}\,;\,1<x\leqslant 2 \\ 1\,;\,x>2 \end{array}\right\}$$

Найти $a\,;b\,;f(x)\,;M[X]\,;D[X]\,;P(-1<x<2)$. Начертить графики функций f(x);F(x)

№ 53

$$F(x)=\left\{\begin{array}{c} 0\,;\,x\leqslant 0 \\ ax^4\,;\,0<x\leqslant 1 \\ 1\,;\,x>1 \end{array}\right\}$$

Найти $a\,;f(x)\,;M[X]\,;D[X]\,;P(x<0.2)$. Начертить графики функций f(x);F(x)

№ 54

$$F(x)=\left\{\begin{array}{c} 0\,;\,x\leqslant -1 \\ ax+b\,;-1<x\leqslant 0 \\ 1\,;\,x>0 \end{array}\right\}$$

Найти $a\,;b\,;f(x)\,;M[X]\,;D[X]\,;P(-0.5<x<0)$. Начертить графики функций f(x);F(x)

№ 55

$$F(x)=\left\{\begin{array}{c} 0\,;\,x\leqslant 0 \\ x(a-x)\,;\,0<x\leqslant 1 \\ 1\,;\,x>1 \end{array}\right\}$$

Найти $a\,;f(x)\,;M[X]\,;D[X]\,;P(0.5<x<1)$. Начертить графики функций f(x);F(x)

№ 56

$$F(x)=\left\{\begin{array}{c} 0\,;\,x\leqslant 1 \\ a(x^2-1)\,;\,1<x\leqslant 2 \\ 1\,;\,x>2 \end{array}\right\}$$

Найти $a\,;f(x)\,;M[X]\,;D[X]\,;P(-1<x<1)$. Начертить графики функций f(x);F(x)

№ 57

$$F(x)=\left\{\begin{array}{c} 0\,;\,x\leqslant 1 \\ ax^2+b\,;\,1<x\leqslant 3 \\ 1\,;\,x>3 \end{array}\right\}$$

Найти $a\,;b\,;f(x)\,;M[X]\,;D[X]\,;P(0<x<2)$. Начертить графики функций f(x);F(x)

№ 58

$$F(x)=\left\{\begin{array}{c} 0\,;\,x\leqslant 1 \\ a(x-1)^2\,;\,1<x\leqslant 3 \\ 1\,;\,x>3 \end{array}\right\}$$

Найти $a\,;f(x)\,;M[X]\,;D[X]\,;P(2<x<4)$. Начертить графики функций f(x);F(x)

№ 59

$$F(x)=\left\{\begin{array}{c} 0\,;\,x\leqslant 1 \\ ax^2+bx\,;\,1<x\leqslant 2 \\ 1\,;\,x>2 \end{array}\right\}$$

Найти $a\,;b\,;f(x)\,;M[X]\,;D[X]\,;P(0<x<1.5)$. Начертить графики функций f(x);F(x)

№ 60

$$F(x)=\left\{\begin{array}{c} 0\,;\,x\leqslant 0 \\ ax^3\,;\,0<x\leqslant 1 \\ 1\,;\,x>1 \end{array}\right\}$$

Найти $a\,;f(x)\,;M[X]\,;D[X]\,;P(-0.5<x<0.5)$. Начертить графики функций f(x);F(x)

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1.

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$

$\Phi(x)=-\Phi(-x)$

Дробная часть	Целая часть			
	0	1	2	3
0.00	0.0000	0.3413	0.4772	0.49865
05	0.0199	0.3531		
10	0.0398	0.3643	0.4821	
15	0.0596	0.3749		
20	0.0793	0.3849	0.4861	0.49931
25	0.0987	0.3944		
30	0.1179	0.4032	0.4893	
35	0.1368	0.4115		
40	0.1564	0.4192	0.4918	0.49966
45	0.1736	0.4265		
50	0.1915	0.4332	0.4938	
55	0.2088	0.4394		
60	0.2257	0.4452	0.4663	0.49984
65	0.2422	0.4505		
70	0.2580	0.4554	0.4965	
75	0.2734	0.4599		
80	0.2881	0.4641	0.4974	0.49993
85	0.3023	0.4678		
90	0.3159	0.4713	0.4981	
95	0.3289	0,4744		

Таблица 2.

Значения $P_k=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-k}$ (распределение Пуассона)

k	$\lambda=1$	$\lambda=2$	$\lambda=3$	$\lambda=4$	$\lambda=5$	$\lambda=6$	$\lambda=7$	$\lambda=8$
0	0.3679	0.1353	0.0498	0.0183	0.0067	0.0025	0.0009	0.0003
1	0.3679	0.2707	0.1494	0.0733	0.0337	0.0149	0.0064	0.0027
2	0.1839	0.2707	0.2240	0.1465	0.0842	0.0446	0.0223	0.0107
3	0.0613	0.1804	0.2240	0.1954	0.1404	0.0892	0.0521	0.0286
4	0.0153	0.0902	0.1680	0.1954	0.1755	0.1339	0.0912	0.0572
5	0.0031	0.0361	0.1008	0.1563	0.1755	0.1606	0.1277	0.0916
6	0.0005	0.0120	0.0504	0.1042	0.1462	0.1606	0.1490	0.1221
7	0.0001	0.0037	0.0216	0.0595	0.1044	0.1377	0.1490	0.1396
8		0.0009	0.0081	0.0298	0.0653	0.1033	0.1304	0.1396
9		0.0002	0.0027	0.0132	0.0363	0.0688	0.1014	0.1241
10			0.0008	0.0053	0.0181	0.0413	0.0710	0.0993

ЛИТЕРАТУРА

1. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. Высшая школа, 2002 г. 479 с.
2. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М. Высшая школа. 2003 г. 405 с.
3. Гурский Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. Минск. Вышэйшая школа. 1984 г. 223 с.
4. Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М. Высшая школа. 2002 г. 575 с.
5. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах ч. 2 , М. ОНИКС 21 век, 2003 г. 416 с.

Оглавление