Министерство Российской Федерации по связи и информации

Санкт – Петербургский Государственный Университет

телекоммуникаций им.проф. М. А. Бонч – Бруевича

Факультет заочного обучения

О.М. Дмитриева, И.С. Перфилова, Г.М. Полевая, Н.К. Яновская

Дискретная математика

Методические указания и контрольные задания

Санкт – Петербург

2012 г.

Содержание.

1. Логические функции.

Основные логические функции.

Функция $f(x_1, x_2, .., x_n)$ *называется логической, если она сама и все её переменные принимают только два значения 0 и 1.* Логическую функцию можно задать таблицей истинности.

Перечислим наиболее важные логические функции.

1. Постоянные 0 и 1.
2. Функции одной переменной

x - повторение аргумента

$\bar{x}$ - отрицание аргумента (читается «не *x*»)

Их таблицы истинности

$f(x)$ / x	x	$\bar{x}$
0	0	1
1	1	0

3. Функции двух переменных.

$f(x,y)$		$x \cdot y$	$x \vee y$	$x \sim y$	$x \to y$
x	y				
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

$x \cdot y$ - конъюнкция («x и y»). Вычисляется как обычное произведение: $x \cdot y=1$, только если $x=y=1$.

$x \vee y$ – дизъюнкция или логическое сложение («x или y»). $x \vee y=0$ только, если $x=y=0$.

$x \sim y$ – эквивалентность («x эквивалентно y»). $x \sim y=1$, только если $x=y$.

$x \to y$ – импликация («если x, то y», «из x следует y»). $x \to y=0$, только если $x=1, y=0$, т.е. невозможно, чтобы из истины следовала ложь.

Следующие функции являются отрицанием рассмотренных.

$f(x,y)$		$x \mid y$	$x \downarrow y$	$x \oplus y$
x	y			
0	0	1	1	0
0	1	1	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0

$x \mid y$ – штрих Шеффера («не x и y»). При $x=y=1$ имеем $x \mid y=0$ ($x \mid y = \overline{x \cdot y}$)

$x \downarrow y$ – стрелка Пирса («не x или y»). При $x=y=0$ имеем $x \downarrow y=1$,

($x \downarrow y = \overline{x \vee y}$)

$x \oplus y$ – сложение по модулю 2. При $x \neq y$ имеем $x \oplus y=1$ ($x \oplus y = \overline{x \sim y}$)

В приведённых таблицах истинности использован метод скользящей единицы при расположении наборов переменных. Каждый набор есть двоичная запись номера строки таблицы, начиная с нулевой.

Две функции равны, если совпадают их таблицы истинности (на общем наборе переменных).

При помощи введённых основных функций логическую функцию можно задать как их комбинацию. Порядок действий в выражениях определяется скобками. Конъюнкцию и функцию под отрицанием в скобки можно не ставить. Например, выражения $x \vee yz$ и $(x \vee y) \cdot z$ различны.

Свойства конъюнкции, дизъюнкции и отрицания.

Из определений отрицания, конъюнкции и дизъюнкции можно получить их свойства:

1). $\overline{0} = 1; \overline{1} = 0; \overline{\overline{x}} = x$

2). $x \cdot 1 = x; x \cdot 0 = 0; x \cdot x = x; x \cdot \bar{x} = 0; x \vee 1 = 1; x \vee 0 = x; x \vee x = x; x \vee \bar{x} = 1$

3). $x \cdot y = y \cdot x; xyz = (xy)z = x(yz); x \vee y = y \vee x; x \vee y \vee z = (x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$

4). $x(y \vee z) = xy \vee xz$

5). $\overline{x \cdot y} = \bar{x} \vee \bar{y}; \overline{x \vee y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$ правила де Моргана

6). $x \vee xy = x$ поглощение

7). $xy \vee \bar{x}y = y$ склеивание

8). $xy \vee \bar{x}z = xy \vee \bar{x}z \vee yz$ правило Блейка

Во всех свойствах вместо *x, y, z* могут быть любые логические функции (чаще всего конъюнкции).

Примеры.

Упростить данные выражения.

1. $xx \vee yx \vee y\bar{y} = x \vee yx = x$
2. $x\bar{y} \vee x\bar{y}z = x\bar{y}$

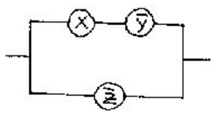
В этих примерах использовано поглощение, $x \cdot x = x, x \cdot \bar{x} = 0$.

3. $xyz \vee x\bar{y}z = xz$. Применено склеивание « по *y*».
4. $\bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y}z = \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y}z \vee \bar{y}z = \bar{x}y \vee \bar{y}z$. Используется правило Блейка « по *x*» в прямую сторону с последующим поглощением.
5. $y\bar{z} \vee \bar{y}\bar{x} \vee \bar{z}\bar{x} = y\bar{z} \vee \bar{y}\bar{x}$. Применено правило Блейка « по *y*» в обратную сторону.
6. $\overline{\bar{x}y \vee \bar{y}z} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{y}z} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} = xy$. Применяются правила де Моргана и поглощения.

Комбинация дизъюнкции и конъюнкции может быть изображена в виде релейно – контактной схемы (Р.К.С.). Дизъюнкции соответствует параллельное соединение элементов, а конъюнкции последовательное.

Пример.

На рисунке изображена Р.К.С., отвечающая функции $f(x, y) = x\bar{y} \vee \bar{z}$.



Представление логических функций в виде СДНФ и СКНФ.

Карты Карно.

Простой конъюнкцией называется конъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная встречается не более одного раза (либо сама, либо её отрицание).

Например, $xy\bar{z}$ является простой конъюнкцией.

Дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ) называется дизъюнкция простых конъюнкций.

Например, выражение $xy \vee \bar{y}z$ является ДНФ.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) называется такая дизъюнктивная нормальная форма, у которой в каждую конъюнкцию входят все переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания) причём в одном и том же порядке.

Например, выражение $x \vee \bar{y}z$ является ДНФ, но не СДНФ. Выражение $xyz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}yz$ является СДНФ.

Аналогичные определения (с заменой конъюнкции на дизъюнкцию и наоборот) верны для КНФ и СКНФ. Приведём точные формулировки.

Простой дизъюнкцией называется дизъюнкция одной или нескольких переменных, при этом каждая переменная входит не более одного раза (либо сама, либо её отрицание).

Выражение $x \vee \bar{y} \vee z$ является простой дизъюнкцией.

Конъюнктивной нормальной формой (КНФ) называется конъюнкция простых дизъюнкций.

Например, выражение $(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee z)(y \vee \bar{z})$ является КНФ.

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) называется такая КНФ, у которой в каждую простую дизъюнкцию входят все *переменные данного списка (либо сами, либо их отрицания) причём в одинаковом порядке.*

Например, выражение $(x \vee y \vee \overline{z})(x \vee \overline{y} \vee z)(x \vee y \vee \overline{z})$ является СКНФ.

Теорема. *Если булева функция не равна тождественно нулю, то её можно представить в виде СДНФ по её таблице истинности следующим образом: берём только те наборы переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$, для которых $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 1$ и составляем простую конъюнкцию для этого набора так: если $x_i = 0$, то берём в этой конъюнкции $\overline{x_i}$, если $x_i = 1$, то берём x_i. Составляя дизъюнкцию этих простых конъюнкций, мы придём к СДНФ.*

Теорема. *Функцию (не равную тождественной 1) можно представить в виде СКНФ: простая дизъюнкция составляется для тех наборов переменных $(x_1, x_2, ..., x_n)$, для которых $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, причём если $x_i = 1$, то в этой дизъюнкции берём $\overline{x_i}$, если же $x_i = 0$, то берём x_i.*

Примеры.

1. По таблице истинности для $f(x, y, z)$ найти её представление в виде СДНФ и СКНФ.

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Так как $f(0,0,0) = f(0,0,1) = f(0,1,0) = 1$, то СДНФ содержит три слагаемых: $\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z}$. СКНФ состоит из пяти сомножителей: $(x \vee \overline{y} \vee \overline{z})(\overline{x} \vee y \vee z)(\overline{x} \vee y \vee \overline{z})(\overline{x} \vee \overline{y} \vee z)(\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})$.

2. Упростить полученную СДНФ, используя склеивание, а также применить карту Карно для получения ДНФ.

$\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}y\overline{z} = (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z) \vee (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z}) = \overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z}$, применено свойство $x = x \vee x$ и склеивание по «z» и по «y».

Дизъюнкции в скобках получены по парам наборов переменных (0,0,0), (0,0,1) и (0,0,0), (0,1,0). Наборы в каждой паре отличаются только в одной позиции и называются соседними. После упрощения остаются совпадающие в паре переменные. Карты Карно представляют собой таблицу истинности, в которой соседние наборы переменных расположены рядом (метод скользящей единицы при этом нарушается). Для нашей функции имеем

yz / x	00	01	11	10
0	1	1	0	1
1	0	0	0	0

Карты Карно позволяют получить ДНФ минимальную по числу переменных или их отрицаний. Для этого необходимо заключить в круги рядом стоящие значения функции равные 1, причём

1) Каждый круг может содержать только $2^к$(к=0, 1, 2,…) единиц, например 16, 8, 4, 2, 1.
2) Круги должны быть наибольшего размера.
3) Число кругов наименьшее, покрывающее все единицы.
4) Так как наборы (0,0) и (1,0) соседние, то края карты соединяются друг с другом.
5) По каждому из кругов составляется простая конъюнкция, входящая в ДНФ. При этом оставляются только те переменные, которые сохраняют своё значение во всём круге и как обычно, если $x_i = 1$, то пишем x_i, если $x_i = 0$, то $\overline{x_i}$.

Построим круги для нашего примера.

yz / x	00	01	11	10
0	1 I	1	0	1 II
1	0	0	0	0

Имеем две конъюнкции. Для первого круга $x = 0$ и $y = 0$ сохраняют своё значение, получаем $\overline{x}\,\overline{y}$. Во втором круге не меняется $x = 0$ и $z = 0$, получаем $\overline{x}\,\overline{z}$. Окончательно $\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{z}$.

3. По картам Карно составить ДНФ минимальную по числу переменных или их отрицаний.

yz	00	01	11	10

x				
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1

Имеем

yz \ x	00	01	11	10
0	1	I 1	II 1	0
1	0	0	0	III 1

Откуда ДНФ: $\overline{x}\,\overline{y} \vee \overline{x}z \vee xy\overline{z}$.

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1	1	1	0
01	1	1	0	0
11	1	1	1	1
10	1	1	1	0

имеем

x_3x_4 \ x_1x_2	00	01	11	10
00	1 I	1	1	0
01	1	1	0	0
11	1	1	1	1 III
10	1	1 IV	1	0

Откуда ДНФ: $\overline{x_3} \vee \overline{x_2}x_4 \vee x_1x_2$.

Полином Жегалкина.

Рассмотрим подробно сложение по модулю 2: $x \oplus y$ (в дальнейшем обозначаем $x + y$). Из определения имеем свойства:

1). 0+0=0; 1+1=0; 1+0=0+1=1

2). $x + 0 = x$; $x + 1 = \overline{x}$; $x + x = 0$

3). $x+y=y+x$; $x+y+z=(x+y)+z=x+(y+z)$

4). $x(y+z)=xy+xz$

Пример.

Найти x из уравнения $x+1=0$.

Добавим к обеим частям этого уравнения 1. $x+1+1=0+1$ следовательно $x=1$.

Полином Жегалкина, это функция от n переменных, имеющая в простейших случаях вид

n=0: $P=a_0$

n=1: $P(x)=a_0+a_1x$

n=2: $P(x,y)=a_0+a_1x+a_2y+a_3xy$

n=3: $P(x,y,z)=a_0+a_1x+a_2y+a_3z+a_4xy+a_5xz+a_6yz+a_7xyz$,

где коэффициенты a_i числа 0 или 1.

Функция называется линейной, если её полином Жегалкина не содержит конъюнкций переменных, т.е. имеет вид $P(x_1,x_2,...,x_n)=a_0+a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n$. Очевидно, что постоянные (0 и 1) и функции одной переменной x и $\overline{x}=x+1$: n=0: $P=a_0$ и n=1: $P(x)=a_0+a_1x$ линейны.

Любую функцию можно единственным образом представить полиномом Жегалкина.

Пример.

Дана таблица истинности функции $f(x,y)$. Проверить является ли функция линейной.

x	y	$f(x,y)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Представим функцию в виде полинома Жегалкина.

Для n=2 имеем $P(x,y)=a_0+a_1x+a_2y+a_3xy$. Найдём коэффициенты a_i из условия $f(x,y)=P(x,y)$.

$f(0,0)=P(0,0)=1=a_0+a_1\cdot 0+a_2\cdot 0+a_3\cdot 0=a_0$. Имеем $a_0=1$.

$f(0,1)=P(0,1)=0=a_0+a_2\cdot 1=1+a_2$, откуда $a_2=1$.

$f(1,0)=P(1,0)=0=a_0+a_1\cdot 1=1+a_1$, откуда $a_1=1$

$f(1,1)=P(1,1)=1=a_0+a_1\cdot 1+a_2\cdot 1+a_3\cdot 1=1+1+1+a_3=1+a_3$, $a_3=0$.

Окончательно $P(x,y)=1+x+y$, следовательно, $f(x,y)$ линейна, т.к. в полиноме Жегалкина нет xy.

Полные системы.

Система функций называется полной, если любую логическую функцию можно представить в виде формулы, содержащей функции этой системы. Имеет место ***теорема Поста***: *Для того чтобы некоторый набор функций был полным, необходимо и достаточно, чтобы в него входили функции, не принадлежащие каждому из классов T_0, T_1, L, M, S.*

T_0 – класс функций сохраняющих 0. В него входят функции, у которых $f(0,0,...,0)=0$.

T_1 – класс функций, сохраняющих 1, т.е. таких у которых $f(1,1,...,1)=1$.

L – класс линейных функций, т.е. таких, у которых полином Жегалкина не содержит конъюнкций переменных.

S – класс самодвойственных функций, т.е. функций, принимающих противоположные значения на противоположных наборах переменных $f(x_1,x_2,...,x_n)=\overline{f}(\overline{x_1},\overline{x_2},...,\overline{x_n})$.

M – класс монотонных функций. *Функция называется монотонной, если на большем наборе она принимает не меньшее значение*, т.е. $f(x_1,x_2,...,x_n)\le f(y_1,y_2,...,y_n)$, если $x_i\le y_i$ для всех *i*.

Трудность в том, что не все наборы переменных можно сравнить (например при n=2 это наборы (0,1) и (1,0)). На несравнимых наборах монотонность не проверяется.

Для проверки монотонности можно использовать следующие факты:

1). Постоянные функции 0 и 1 очевидно монотонны.

2). Пусть $f \neq const$, так как набор переменных $(0,0,\dots,0)$ меньше всех других, то если $f(0,0,...0)=1$ (f не принадлежит T_0), тогда она не монотонна. Набор $(1,1,\dots,1)$ больше всех других, если $f(1,1,...,1)=0$ (f не принадлежит T_1), то функция не монотонна.

Примеры.

Исследовать на монотонность и самодвойственность функции, заданные таблицей истинности

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	0	1	1

$f_1(0,0)=1, f_1 \notin T_0$, следовательно $f_1 \notin M$;

$f_1(0,0)=\overline{f_1}(1,1)=1$, $f_1(0,1)=\overline{f_1}(1,0)=0$, следовательно $f_1 \in S$;

$f_2(1,1)=0, f_2 \notin T_1$, следовательно $f_2 \notin M$;

$f_2(0,0)=f_2(1,1)$, т.е. $f_2 \notin S$;

$f_3 = const$, следовательно $f_3 \in M$ и $f_3 \notin S$;

$f_4 \in M$, т.к. наборы (0,1) и (1,0) на монотонность не проверяем, $f_4 \in S$;

$f_5 \in M, f_5 \in S$.

По теореме Поста система функций полная, если в её таблице Поста нет столбца, состоящего из одних «+». Очевидно, что если система функций полная, то добавление в неё новых функций полноту не нарушит. Если же убрать из полной системы функции, она может перестать быть полной.

Минимальная полная система называется базисом. Т.е. базис это такая полная система, что удаление из неё любой функции нарушает полноту.

Для проверки выполнения условий теоремы Поста составляют таблицу Поста, отмечая «+» принадлежность функции к классу и «-» не принадлежность.

Примеры.

По таблице Поста проверить полноту системы и найти базисы из функций системы.

1).

	T_0	T_1	L	S	M
f_1	+	-	+	-	-
f_2	+	-	-	+	-
f_3	-	+	-	-	-
f_4	+	+	-	-	+

В каждом столбце есть «-», следовательно, система полная. Так как базис - это минимальная полная система, то начинаем проверку на полноту с наборов, состоящих из одной функции. Полных систем из одной функции нет, так как в каждой строке есть «+». Проверяем системы из двух функций на полноту: f_1, f_3 и f_2, f_3 - базисы. Других базисов нет.

2).

	T_0	T_1	L	S	M
f	-	+	+	-	-

Система не полная, нет функции не принадлежащей T_1 и L. Базиса нет.

3).

	T_0	T_1	L	S	M
f_1	-	-	-	+	-
f_2	-	+	-	-	-

Система полная, т.к. нет столбцов из одних «+». Базисов из одной функции нет, следовательно система f_1, f_2 единственный базис.

2. Элементы теории графов.

Основные определения.

Графом $G=G(V,E)$ называют пару множеств: $V=\{v_1, v_2,\dots,v_n\}$ – не пустое, конечное множество вершин и $E=\{(v_i,v_j)$, где $v_i, v_j \in V\}$ – множество неупорядоченных пар вершин из V, называемых рёбрами. Запись $e_{ij}=(v_i, v_j)$

означает, что ребро e_{ij} соединяет вершины v_i и v_j. В этом случае v_i и v_j – смежные вершины; вершина v_i и ребро e_{ij} инцидентны (так же как v_j и e_{ij}). Два различных ребра, имеющих общую вершину, также называются смежными.

Обычно граф представляется диаграммой, на которой вершины изображаются точками, а рёбра – отрезками.

Заметим, что часто вершины графа просто нумеруют 1, 2, …,n, и рёбра обозначают $e_{ij}=(i, j)$ или буквами a, b, c,… .

Приведём несколько типов графов, которые могут встречаться. В *мультиграфе* не допускаются петли (т.е. рёбра (v_i, v_i), соединяющие вершины сами с собой), но пары вершин могут соединяться более чем одним ребром; эти рёбра называются кратными (или параллельными). Если допускаются петли и кратные рёбра, получаем *псевдограф*. Граф, не имеющий кратных рёбер и петель, называется *простым*.

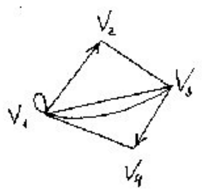
Ориентированный граф, или *орграф*, состоит из конечного не пустого множества V вершин и множества E упорядоченных пар вершин (v_i, v_j) (т.е. $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i)$). Элементы из E называют ориентированными рёбрами, или дугами и изображают стрелкой.

Одним из способов представления графа в компьютере служит матрица смежности. Для графа G, имеющего n вершин, матрица смежности А будет размера $n \times n$. Её строки и столбцы соответствуют вершинам графа.

Пусть a_{ij} элемент i – ой строки и j – ого столбца матрицы А. Если граф имеет петлю в вершине v_i, то a_{ii}=1. Если граф имеет кратные рёбра между вершинами v_i и v_j, то a_{ij}=m, где m – число рёбер между этими вершинами.

Пример.

Для графа на рисунке



матрица смежности А имеет вид $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача.

Изобразить граф, представленный матрицей смежности А= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Для неориентированного графа матрица смежности А симметрична ($A=A^T$).

<u>Простые пути и сечения.</u>

Маршрутом в графе G называется такая последовательность рёбер, что каждое ребро последовательности инцидентно двум вершинам, одна из которых непосредственно предшествует ему, а другая непосредственно следует за ним. Длина маршрута равна количеству рёбер в нём, причём каждое ребро считается столько раз, сколько оно встречается в данном маршруте.

Путь (или цепь) – это маршрут, в котором все рёбра различны.

Простой путь (или простая цепь) – это маршрут, в котором все вершины (а следовательно, и рёбра) различны.

Если вершины, определяющие начало и конец маршрута совпадают, то маршрут замкнут. Замкнутый путь называется *циклом*, а замкнутый простой путь – *простым циклом*.

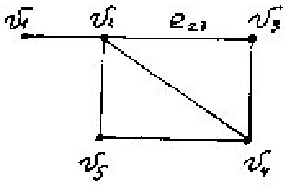
Пример.

У графа G на рисунке вершины v_1 и v_2 смежные, а вершины v_1 и v_3 – нет; вершина v_2 и ребро $e_{23}=(v_2,v_3)$ инцидентны.

(v_2,v_3), (v_3,v_2), (v_2,v_4) – маршрут, который не является путём;

(v_2,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_2), (v_2,v_5) – путь, но не простой путь;

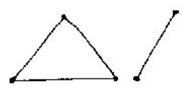
(v_2,v_3), (v_3,v_4), (v_4,v_2) – простой цикл.



Граф G называется *связным*, если любая пара его вершин соединена простым путём. Если граф несвязный, то он распадается на несколько кусков – компонент связности.

Пример.

Связный граф



Несвязный граф

Сечением между вершинами v_i и v_j в простом связном графе G называют неизбыточную совокупность рёбер графа, после удаления которой из графа не существует маршрута из v_i в v_j, но при возвращении в граф хотя бы одного из элементов сечения маршрут из v_i в v_j восстанавливается.

Пример.

В графе G (рис.1) сечением между вершинами v_2 и v_4 является ребро e_{34} или набор рёбер e_{23} e_{21} или e_{23} e_{13}.

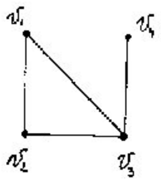


рис.1

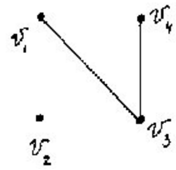


рис.2

Действительно, при удалении из графа G, например, рёбер e_{23} и e_{21} не существует маршрута из v_2 в v_4 (рис.2), но при возвращении хотя бы одного из этих рёбер, маршрут восстанавливается.

Пусть $G=G(V,E)$ – простой связный граф:

$V=\{1,2,\dots,n\}$ – множество вершин и $E=\{e_{ij},$где $e_{ij}=(i,j),\ i,j\in V\}$ – множество рёбер.

Задача. Найти все простые пути из вершины i в вершину j и сечения между этими вершинами в графе G.

Для решения этой задачи составим структурную матрицу S графа G. Матрица S – квадратная матрица порядка n, где n – число вершин графа G. Элементы матрицы s_{ij} определяются следующим образом:

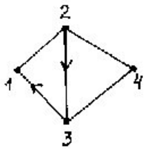
1) Элементы главной диагонали ($i=j$) $s_{ij}=1$
2) Элементы над главной диагональю ($i<j$) $s_{ij}=\begin{cases} e_{ij}, \text{если есть ребро } (i,j) \\ 0, \text{если нет ребра } (i,j) \end{cases}$
3) Элементы под главной диагональю ($i>j$) $s_{ij}=\begin{cases} \overline{e_{ij}}, \text{если есть ребро } (i,j) \\ 0, \text{если нет ребра } (i,j) \end{cases}$

Запись $\overline{e_{ij}}$ означает, что ребро учитывается в матрице S второй раз.

Замечание: если G – орграф, то

$s_{ij}=\begin{cases} e_{ij}, \text{если вершина } i \text{ начало дуги } (i,j) \\ 0, \text{в остальных случаях} \end{cases}$.

Пример. Для графа G, имеющего ориентированные рёбра (2,3) и (3,1),



структурная матрица S имеет вид $S=\begin{pmatrix} 1 & e_{12} & 0 & 0 \\ \overline{e_{12}} & 1 & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & 0 & 1 & e_{34} \\ 0 & \overline{e_{24}} & \overline{e_{34}} & 1 \end{pmatrix}$.

Справедливо утверждение о нахождении всех простых путей из вершины i в вершину j.

Утверждение. Пусть S=(s_{ij}), где i,j=1,2,…n – структурная матрица графа G. Если минор M_{ji} этой матрицы раскрыть как определитель порядка n-1, заменяя сложение и вычитание на дизъюнкцию, а умножение на конъюнкцию и упростить, используя свойства логических функций $x\overline{x}=0; x\cdot 1=x; x\vee xy=x$, то получим все простые пути из i в j в форме ДНФ.

Пример. Для графа G из предыдущего примера найдём все простые пути из вершины i =1 в вершину j=3, а так же сечения между вершинами i =1 и j=3.

Для получения минора M_{31} вычёркиваем из матрицы Sтретью строку и первый столбец.

$$M_{31}=\begin{vmatrix} e_{12} & 0 & 0 \\ 1 & e_{23} & e_{24} \\ \overline{e_{24}} & \overline{e_{34}} & 1 \end{vmatrix}=e_{12}\begin{vmatrix} e_{23} & e_{24} \\ \overline{e_{34}} & 1 \end{vmatrix}=e_{12}(e_{23}\vee e_{24}\overline{e_{34}})=e_{12}e_{23}\vee e_{12}e_{24}\overline{e_{34}}$$

(использовали теорему разложения определителя по первой строке). Знаки отрицания после получения ответа надо убрать и записать простые пути из 1-ой вершины в 3-ю в порядке прохождения рёбер. Имеем: $e_{12}e_{23}\vee e_{12}e_{24}e_{43}$.

Для нахождения сечений между вершинами i =1 и j=3 воспользуемся следующим утверждением.

Утверждение. Если все простые пути из вершины i в вершину j записаны в виде ДНФ, то совокупность всех сечений между этими вершинами находится приведением к ДНФ отрицания всех простых путей.

Для приведения к ДНФ применяют правила де Моргана и поглощения. При записи ответа отрицания над рёбрами нужно убрать.

Эту процедуру можно заменить более простым алгоритмом. Если все простые пути из вершины i в вершину j записаны в виде ДНФ, то заменяя дизъюнкцию на конъюнкцию, а конъюнкцию на дизъюнкцию, раскрывая скобки и проведя упрощение, также получим сечения между вершинами i и j.

В нашем случае имеем

$$(e_{12} \vee e_{23})(e_{12} \vee e_{24} \vee e_{43}) = e_{12} \vee e_{12}e_{24} \vee e_{12}e_{43} \vee e_{23}e_{12} \vee e_{23}e_{24} \vee e_{23}e_{43} = e_{12} \vee e_{23}e_{24} \vee e_{23}e_{43}$$

При получении сечений использовали свойства $x \cdot x = x; x \vee xy = x$.

Максимальный поток.

Простой, связный орграф *G* будем называть транспортной сетью (или просто сетью), если выполняются следующие условия:

- существует вершина s (источник), в которую не входит ни одна дуга,
- существует вершина t (сток), из которой не выходит ни одна дуга,
- каждой дуге e_{ij} приписано целое число $c_{ij} \geq 0$, называемое пропускной способностью дуги.

Потоком в сети называют функцию, сопоставляющую каждой дуге целое неотрицательное число $f_{ij} \geq 0$(значение потока через дугу) так, чтобы

1) $f_{ij} \leq c_{ij}$, т.е. не превышало пропускной способности дуги
2) Для каждой промежуточной вершины (любой вершины, кроме s и t) выполнялось условие: сумма значений потоков по входящим в вершину дугам была равна сумме значений потоков по исходящим из неё дугам.
3) Для вершины s сумма исходящих потоков равна сумме потоков, входящих в вершину t.

Пример. Сеть (рис.3а) представлена неориентированным графом. Известно, что источник – вершина с номером 1, сток – вершина с номером 4. В этом случае неориентированное ребро e_{23}, соединяющее промежуточные вершины, можно заменить двумя по-разному ориентированными дугами с одинаковыми пропускными способностями (рис.3б).

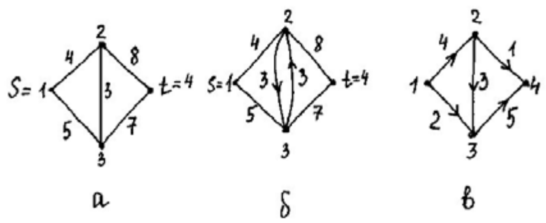


рис.3

Величиной потока, обозначают *Val f*, называют сумму значений потока на всех дугах, выходящих из источника s, равную сумме значений потока на всех дугах, входящих в сток t.

Поток называется максимальным, если его величина наибольшая из возможных.

Дуга e_{ij} называется насыщенной, если $f_{ij} = c_{ij}$, т.е. значение потока через дугу равно пропускной способности дуги.

Пример. Проверим свойства потока (рис.3в):

$i = 2: f_{23} + f_{24} = f_{12}, 3 + 1 = 4;$

$i = 3: f_{13} + f_{23} = f_{34}, 2 + 3 = 5;$

$Valf = f_{12} + f_{13} = f_{24} + f_{34} = 6.$

Для данного потока дуга e_{12} – насыщенная.

Величиной сечения между вершинами s и t в транспортной сети будем называть сумму значений пропускных способностей на всех дугах которые входят в это сечение.

Пример. Для сети (рис.а) неориентированные рёбра e_{12} и e_{13} образуют сечение между вершинами s и t, величина сечения $c_{12}+c_{13}=4+5=9$.

Сечение называется минимальным, если его величина наименьшая из всех возможных.

Теорема Форда – Фолкерсона. Величина максимального потока в сети из вершины s в вершину t равна величине минимального сечения между этими вершинами.

Приведём алгоритм построения максимального потока (и одновременно минимального сечения). Этот алгоритм для данного потока f отыскивает путь (цепь) от s до t, в который входят дуги только двух типов:

- прямая дуга направлена от s к t и не является насыщенной

- обратная дуга направлена от t к s и имеет положительное значение потока.

Алгоритм Форда – Фолкерсона:

1. Зададим произвольный начальный поток, можно нулевой.
2. Вершину s пометим двойной пометкой: (0;∞). Первая пометка означает вершину, из которой получена пометка. Вторая нужна для подсчёта возможного увеличения потока. Дальнейшее помечивание по существу означает поиск пути из s в t.
3. Если в графе существует непомеченная вершина j , смежная с какой – то помеченной вершиной i, то в зависимости от того, как ориентирована связывающая их дуга, проводим прямую пометку (если дуга ведёт от i к j, и не насыщенная $f_{ij}< c_{ij}$) или обратную (если дуга ведёт от j к i, и $c_{ji}>0$).
   Прямая пометка: $(+i, \Delta j=c_{ij}-f_{ij})$
   Обратная пометка: $(-i, \Delta j=c_{ij}+f_{ij})$
4. Если на шаге 3 не удалось пометить вершины, выход из алгоритма, **максимальный поток найден**.
5. Если j=t, переход к 6, иначе переход к 3.

6. Этот шаг соответствует построенному пути из s в t, на котором возможно увеличение потока на величину $\Delta = min\Delta j$, где Δj – вторые метки всех вершин этого пути, кроме s. Начинаем с t и движемся по пометкам назад к источнику. На прямых дугах (1-я метка со знаком +) увеличиваем значение потока на Δ. На обратных дугах уменьшаем значение потока на Δ; если в этом случае f_{ji} - Δ<0, тогда меняем направление дуги. И так доходим до источника s.
7. Стираем все пометки и переходим к 2.

Найдём минимальное сечение. Выход из алгоритма на шаге 4 означает, что сток t не помечен. Обозначим через M_s множество всех вершин, которые оказались в этот момент помечены и через M_t множество непомеченных вершин. Можно доказать, что сечение, образованное дугами, идущими из M_s в M_t, будет минимальным, причём все дуги этого сечения прямые и не насыщенные.

Пример. Заданы сеть (рис.4а) и начальный поток f величины $Val\ f = f_{12} + f_{14} = f_{36} + f_{56}$=7+8=13+2=15 (рис.4б). Требуется построить максимальный поток и найти минимальное сечение.

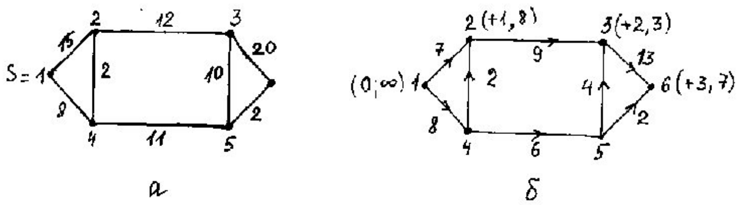
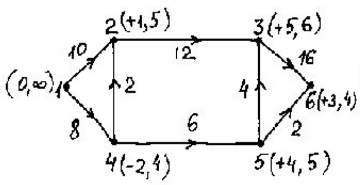


рис.4

1). Путь из s в t (рис.4б), по которому поток может быть увеличен, состоит из прямых дуг, соединяющих вершины: s=1→2→3→t=6. Пометки указанных вершин: s=(0;∞)→(+1;Δ_2=15-7=8)→(+2;Δ_3=12-9=3)→t=(+3;Δ_6=20-13=7). Добавка к потоку: $\Delta = \min \Delta_j = \min\{8,3,7\} = 3$.

Построим новый поток f_1 (рис.5), величины $Val\ f_1 = Val\ f + \Delta$=15+3=18.



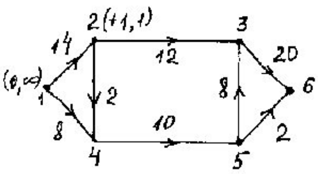


рис.5 рис.6

2). Путь из s в t (рис.5), по которому поток может быть увеличен, состоит из прямых и обратных дуг, соединяющих вершины: s=1→2←4→5→3→6=t. Пометки указанных вершин: s=(0;∞)→(+1;Δ_2=15-10=5)←(-2;Δ_4=2+2=4)→(+4;Δ_5=11-6=5)→(+5;Δ_3=10-4=6)→ t=(+3;Δ_6=20-16=4). Добавка к потоку: $\Delta=\min\Delta_j=\min\{5,4,5,6,4\}=4$.

Построим новый поток f_2 (рис.6), величины $Val\, f_2=Val\, f_1+\Delta=18+4=22$.

Заметим, что $f_{42}-\Delta=2-4=-2<0$, значит меняем направление дуги e_{42} на противоположное.

3). Путь из s в t (рис.), на котором возможно увеличение потока построить не удалось. До стока t не дошли. Значит поток f_2 (рис.6) максимален.

Найдём минимальное сечение. Помеченные вершины: $M_s=\{1;2\}$. Непомеченные вершины: $M_t=\{4,5,3,6\}$. Прямые насыщенные дуги, идущие из M_s в M_t: e_{14}, e_{24}, e_{23}, образуют минимальное сечение: $e_{14}\cdot e_{24}\cdot e_{23}$. Величина этого сечения равна 8+2+12=22 и совпадает с величиной максимального потока f_2.

3. Бинарные отношения.

Операции над множествами.

Пусть Ω – набор некоторых объектов конечный или бесконечный. Объекты будем называть *элементами множества* Ω или точками Ω. Подмножества Ω называют множествами A, B,…

Пустым множеством называют множество, не содержащее ни одного элемента, и обозначают ∅.

Объединением (суммой) $A+B=A\cup B$ множеств A и B называют множество точек из Ω, каждая из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Это аналог дизъюнкции в булевой алгебре.

Пересечением $A\cap B=A\cdot B$ множеств A и B называют множество точек Ω, каждая из которых принадлежит обоим множествам и A и B. Это аналог конъюнкции в булевой алгебре.

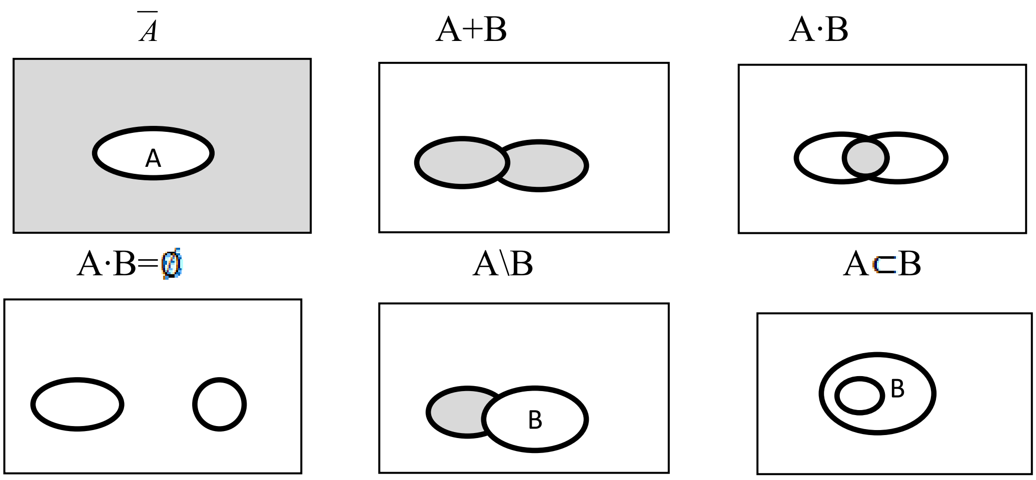
Дополнением $\overline{A}$ множества A называют множество точек Ω, не принадлежащих множеству A. Это аналог отрицания в булевой алгебре.

Множество A содержится в множестве B: $A\subset B$, если все точки множества A принадлежат множеству B.

Два множества A и B равны: A=B, если $A\subset B$ и $B\subset A$.

Разностью A\B двух множеств A и B называют множество точек A, не принадлежащих множеству B. Это аналог импликации в булевой алгебре: A→B= A\B.

На рисунке проиллюстрированы введённые определения операций над множествами.



Пример. На множестве Ω={1,2,3,4,5} заданы подмножества A={1,2,3} и B={2,4,5}. Записать A·B, A+B, A·$\overline{B}$, B\A.

Решение. A·B={2}, A+B=Ω, $\overline{B}$={1,3}, A·$\overline{B}$={1,3}, B\A={4,5}.

<u>Свойства бинарных отношений.</u>

Прямым (декартовым) произведением A×B множеств A и B называется множество упорядоченных пар, где первый элемент принадлежит множеству A, а второй множеству B: A×B={(a,b)|a∈A, b∈B}.

Пример. A={3,8}, B={a,b,c}. Тогда A×B={3,a}, {3,b}, {3,c}, {8,a}, {8,b}, {8,c}.

Пример. A={3,8}. Тогда A×A={3,3}, {3,8}, {8,3}, {8,8}.

Бинарным отношением R из множества A в множество B называется любое подмножество прямого произведения A×B.

Подмножество множества A×A называется бинарным отношением R на множестве A. Если пара (x,y) принадлежит R: (x,y)∈R, то говорят, что элемент x находится в отношении R с элементом y, и записывают xRy.

Пример. Рассмотрим отношение нестрогого неравенства x≤y на множестве A={1,2,3,4}.

Тогда $A\times A=\begin{Bmatrix} (1,1); & (1,2); & (1,3); & (1,4) \\ (2,1); & (2,2); & (2,3); & (2,4) \\ (3,1); & (3,2); & (3,3); & (3,4) \\ (4,1); & (4,2); & (4,3); & (4,4) \end{Bmatrix}$, $R=\begin{Bmatrix} (1,1); & (1,2); & (1,3); & (1,4) \\ & (2,2); & (2,3); & (2,4) \\ & & (3,3); & (3,4) \\ & & & (4,4) \end{Bmatrix}$.

1. Бинарное отношение R на множестве A называется *рефлексивным*, если каждый элемент этого множества находится в отношении с самим собой: xRx для $\forall x\in A$.
2. Бинарное отношение R на множестве A называется *симметричным*, если вместе с каждой парой (x,y) в отношение входит и симметричная пара (y,x): $\forall x,y\in A$ из xRy следует yRx.
3. Бинарное отношение R на множестве A называется *транзитивным*, если вместе с парами (x,y) и (y,z) в отношение входит и пара (x,z), т.е. $\forall x,y,z\in A$, если xRy и yRz, то xRz.

Отношение нестрогого равенства, рассмотренное в примере на множестве A,(как и на всём множестве вещественных чисел) рефлексивно, не симметрично и транзитивно.

Рассмотрим способы задания бинарных отношений.

1. Задание матрицей смежности.

Определим матрицу A размера $|A|\times|A|$, где $|A|$ - количество элементов множества A. Тогда $a_{ij}=1$, если элемент с номером i находится в отношении с элементом с номером j (iRj), и $a_{ij}=0$, если нет.

Главная диагональ матрицы смежности рефлексивного отношения состоит из единиц.

Матрица смежности симметричного отношения симметрична относительно этой диагонали.

2. Задание графом.

Элементы множества изображаются точками плоскости и образуют множество вершин графа. Отношения изображаются рёбрами графа: если пара (x,y) входит в отношение, то из вершины x проводится ориентированное ребро в вершину y.

Граф рефлексивного отношения имеет петли в каждой вершине.

Граф симметричного отношения вместе с ребром, соединяющим x с y, содержит ребро, соединяющее y с x.

Граф транзитивного отношения обладает следующим свойством: если из вершины x, двигаясь вдоль рёбер, можно попасть в вершину y, то в графе должно быть ребро, непосредственно соединяющее x с y.

Для рефлексивных отношений петли обычно не изображаются, для симметричных отношений пары ориентированных рёбер, соединяющие данные вершины, заменяются одним неориентированным ребром.

4. Примеры решения типовых задач контрольной работы.

1.Для выражения $\overline{\bar{z}(z \vee y) \vee \bar{x}\bar{z}}$ пользуясь правилами де Моргана получить ДНФ и упростить её, если возможно.

$$\overline{\bar{z}(z \vee y) \vee \bar{x}\bar{z}} = \overline{(\bar{z}z \vee \bar{z}y) \vee \bar{x}\bar{z}} = \overline{\bar{z}y \vee \bar{x}\bar{z}} = \overline{\bar{z}y} \cdot \overline{\bar{x}\bar{z}} = (z \vee \bar{y})(x \vee z) = zx \vee z \vee \bar{y}x \vee \bar{y}z = z \vee \bar{y}x$$

Использовали $x\bar{x} = 0; x \cdot x = x; x \vee xy = x; \overline{xy} = \bar{x} \vee \bar{y}; \overline{x \vee y} = \bar{x}\bar{y}$.

2.а) Для функции $f_1(x, y) = (y \to x) + xy$ составить таблицу истинности, найти по ней полином Жегалкина, СДНФ, СКНФ, упростить СДНФ.

Составим таблицу истинности:

x	y	$y \to x$	xy	f_1
0	0	1	0	1
0	1	0	0	0
1	0	1	0	1
1	1	1	1	0

Найдём полином Жегалкина:

$P(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy$

$P(0,0) = 1 = a_0$. Отсюда $a_0 = 1$.

$P(0,1) = 0 = a_0 + a_2 = 1 + a_2$, $a_2 = 0$.

$P(1,0) = 1 = a_0 + a_1 = 1 + a_1$, $a_1 = 0$

$P(1,1) = 0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1 + 1 + a_3 = a_3$, $a_3 = 0$.

$P = 1 + y$

Составим СДНФ по наборам, на которых $f(x, y) = 1$

$f_1 = \bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y}$ - СДНФ

Упростим СДНФ, используя склеивание по «x»: $\bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y} = \bar{y}$.

Составим СКНФ по наборам, на которых $f(x, y) = 0$

$f_1 = (x \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{y})$ - СКНФ

б) Для функции $f_2(x, y, z) = (x + \bar{y}z)|(\bar{x} \to y)$ составить таблицу истинности. Найти по ней полином Жегалкина, СДНФ, СКНФ. По карте Карно упростить СДНФ и нарисовать эквивалентную РКС.

Составим таблицу истинности:

x	y	z	$\bar{y}z$	$x + \bar{y}z$	$\bar{x} \to y$	$f_2(x, y, z)$

0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	0
1	1	1	0	1	1	0

$P(x,y,z) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3z + a_4xy + a_5xz + a_6yz + a_7xyz$

$P(x,y,z) = f(x,y,z)$

$P(0,0,0) = 1 = a_0$ отсюда $a_0 = 1$

$P(0,0,1) = 1 = a_0 + a_3 = 1 + a_3$, $a_3 = 0$

$P(0,1,0) = 1 = a_0 + a_2 = 1 + a_2$, $a_2 = 0$

$P(0,1,1) = 1 = a_0 + a_2 + a_3 + a_6 = 1 + a_6$, $a_6 = 0$

$P(1,0,0) = 0 = a_0 + a_1 = 1 + a_1$, $a_1 = 1$

$P(1,0,1) = 1 = a_0 + a_1 + a_3 + a_5 = 1 + 1 + a_5$, $a_5 = 1$

$P(1,1,0) = 0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_4 = 1 + 1 + a_4$, $a_4 = 0$

$P(1,1,1) = 0 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 = 1 + 1 + 1 + a_7$, $a_7 = 1$

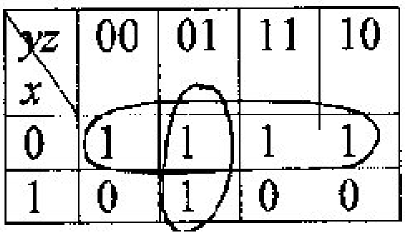
$P(x,y,z) = 1 + x + xz + xyz$

Составим СДНФ: $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}z$

Составим СКНФ: $(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$.

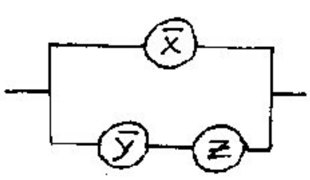
Заполним карту Карно

yz \ x	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0



yz \ x	00	01	11	10
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0

ДНФ: $\bar{x} \vee \bar{y}z$

РКС: 

в) Составить таблицу Поста для системы функций f_1 и f_2. Проверить полноту системы и найти базисы.

Таблица Поста имеет вид:

Классы / f	T_0	T_1	L	S	M
f_1	-	-	+	+	-
f_2	-	-	-	-	-

Так как:

$f_1(0,0) = 1; f_1 \notin T_0$ и $f_1 \notin M$

$f_1(1,1) = 0; f_1 \notin T_1$

$f_1(0,0) = 1 = \overline{f_1}(1,1); f_1(0,1) = 0 = \overline{f_1}(1,0); f_1 \in S$

$P_1(x, y) = 1 + y; f_1 \in L$

$f_2(0,0,0) = 1; f_2 \notin T_0$ и $f_2 \notin M$

$f_2(1,1,1) = 0; f_2 \notin T_1$

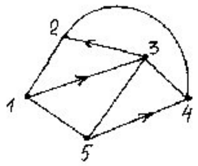
$f_2(0,1,0) = 1 = f_2(1,0,1); f_2 \notin S$

$P_2(x, y, z) = 1 + x + xz + xyz; f_2 \notin L$

$f_2(x, y, z)$ не линейная, т.к. $P(x, y, z)$ содержит xz и xyz.

Система функций полная, т.к. в таблице Поста нет столбца из одних «+». Проверяем на полноту каждую функцию. f_1 - не составляет полной системы, т.к. нет функции не входящей в классы L и S. f_2 - образует полную систему и является базисом. Других базисов нет.

3. Для данного графа требуется составить структурную матрицу, по ней найти все простые пути из вершины i в вершину j и совокупность всех сечений между этими вершинами.



i=1, j=5

Для данного графа составим структурную матрицу S, а затем вычеркнем из неё 5-ю строчку и 1=й столбец, тем самым получим минор M_{51}:

$$S=\begin{pmatrix} 1 & e_{12} & e_{13} & 0 & e_{15} \\ \overline{e_{12}} & 1 & 0 & e_{24} & 0 \\ 0 & e_{32} & 1 & e_{34} & e_{35} \\ 0 & \overline{e_{24}} & \overline{e_{34}} & 1 & 0 \\ \overline{e_{15}} & 0 & \overline{e_{35}} & e_{54} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{M}_{51}=\begin{vmatrix} e_{12} & e_{13} & 0 & e_{15} \\ 1 & 0 & e_{24} & 0 \\ e_{32} & 1 & e_{34} & e_{35} \\ \overline{e_{24}} & \overline{e_{34}} & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Найдём определитель, используя теорему разложения. Данный определитель удобно раскладывать по 2-й строке, поскольку она содержит два нулевых элемента.

$$\text{M}_{51}=1\cdot\begin{vmatrix} e_{13} & 0 & e_{15} \\ 1 & e_{34} & e_{35} \\ \overline{e_{34}} & 1 & 0 \end{vmatrix}\vee\begin{vmatrix} e_{12} & e_{13} & e_{15} \\ e_{32} & 1 & e_{35} \\ \overline{e_{24}} & \overline{e_{34}} & 0 \end{vmatrix}$$

Применяя ещё раз теорему разложения для первого определителя по 1-ой строке и для второго определителя по 3-му столбцу, получим:

$$\text{M}_{51}=1\cdot\left(e_{13}\begin{vmatrix} e_{34} & e_{35} \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vee e_{15}\begin{vmatrix} 1 & e_{34} \\ \overline{e_{34}} & 1 \end{vmatrix}\right)\vee e_{24}\left(e_{15}\begin{vmatrix} e_{32} & 1 \\ \overline{e_{24}} & \overline{e_{34}} \end{vmatrix}\vee e_{35}\begin{vmatrix} e_{12} & e_{13} \\ \overline{e_{24}} & \overline{e_{34}} \end{vmatrix}\right)=$$

$$=e_{13}e_{34}0\vee e_{13}e_{35}1\vee e_{15}11\vee e_{15}e_{34}\overline{e_{34}}\vee e_{24}e_{15}e_{32}\overline{e_{34}}\vee e_{24}e_{15}1\overline{e_{24}}\vee e_{24}e_{35}e_{12}\overline{e_{34}}\vee e_{24}e_{35}e_{13}\cdot\overline{e_{24}}=$$

$$=e_{13}e_{35}\vee e_{15}\vee e_{12}e_{24}e_{43}e_{35}$$

Использовали при упрощении свойства:

$x\cdot 0=0, x\cdot 1=x, x\cdot\overline{x}=0, x\vee xy=x.$

При записи ответа рёбра идут в порядке прохождения вершин от i=1 к j=5.

Для нахождения сечений между вершинами i=1 и j=5 заменим дизъюнкцию на конъюнкцию, а конъюнкцию на дизъюнкцию и раскроем скобки.

$$(e_{13}\vee e_{35})\cdot e_{15}\cdot(e_{12}\vee e_{24}\vee e_{43}\vee e_{35})=$$

$$=e_{13}e_{15}e_{12}\vee e_{13}e_{15}e_{24}\vee e_{13}e_{15}e_{43}\vee e_{13}e_{15}e_{35}\vee e_{35}e_{15}e_{12}\vee e_{35}e_{15}e_{24}\vee e_{35}e_{15}e_{43}\vee e_{35}e_{15}e_{35}=$$

$$=e_{13}e_{15}e_{12}\vee e_{13}e_{15}e_{24}\vee e_{13}e_{15}e_{43}\vee e_{35}e_{15}$$

Использовали свойства: $x\cdot x=x, x\vee xy=x$.

Примечание. Согласно теореме разложения определитель равен сумме (в данном случае дизъюнкции) произведений элементов любой строки (или столбца), умноженных на свои алгебраические дополнения (в данном случае просто миноры).

4.Заданы сеть (рис.7а) и начальный поток f (рис.7б). Требуется построить максимальный поток и найти минимальное сечение, считая вершину с номером 1 источником и вершину с номером 4 стоком.

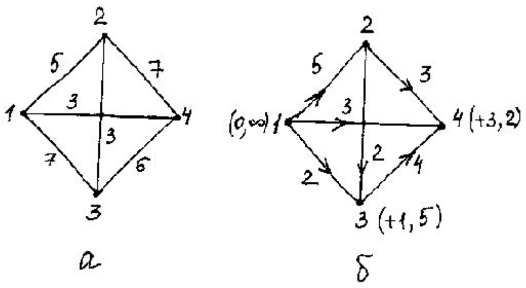


Рис.7

1). Поток f из s=1 в t=4 имеет величину $Valf = 5+3+2 = 3+3+4 = 10$. Путь изs в t: $1 \to 3 \to 4$.

Пометки вершин: s=$(0;\infty) \to (+1, \Delta_3 = 7-2=5) \to$ t=$(+3, \Delta_4 = 6-4=2)$/

Добавка к потоку: $\Delta = \min \Delta_j = \min\{5,2\} = 2$.

Строим новый поток f_1 (рис.8), $Valf_1 = Valf + \Delta = 10+2 = 12$.

2). Путь из s в t для потока f_1 : $1 \to 3 \leftarrow 2 \to 4$.

Пометки вершин: s=$(0;\infty) \to (+1, \Delta_3 = 7-4=3) \leftarrow (-3, \Delta_2 = 3+2=5) \to$ t=$(+2, \Delta_4 = 7-3=4)$.

Добавка к потоку: $\Delta = \min \Delta_j = \min\{3,5,4\} = 3$.

Строим новый поток f_2 (рис.9), $Valf_2 = Valf_1 + \Delta = 12+3 = 15$.

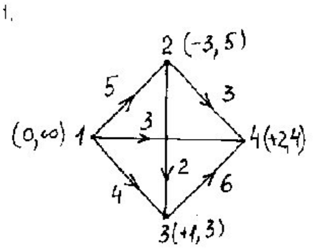


рис.8

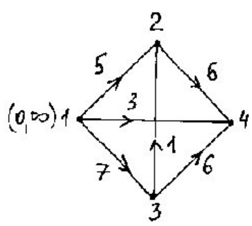


рис.9

3). Путь из s в t, на котором возможно увеличение потока не построить, поскольку не дойти до стока. Значит поток f_2 (рис.9) максимален: $Valf_{\max} = 15$.

Помеченная вершина: $M_s=\{1\}$.

Непомеченные вершины: $M_t=\{3,2,4\}$.

Минимальное сечение: $e_{13} \cdot e_{12} \cdot e_{14}$.

Величина минимального сечения: 7+5+3=15=$Valf_2$.

5.Введём отношение сравнимости R:x сравнимо с y по модулю m тогда и только тогда, когда x и y имеют одинаковые остатки от деления на m. Запись $x \equiv y(\mathrm{mod}\, m)$. Рассмотрим отношение сравнимости для случая m=2 на множестве A=$\{1,2,3,4,5\}$. Для этого отношения нужно:

а) записать отношение R

б) построить матрицу смежности и граф отношения

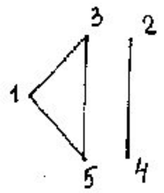
в) проверить, является ли отношение рефлексивным, симметричным, транзитивным.

Отношение R определяется множеством пар

$$R=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,3) & (1,5) \\ & (2,2) & (2,4) \\ (3,1) & (3,3) & (3,5) \\ & (4,2) & (4,4) \\ (5,1) & (5,3) & (5,5) \end{Bmatrix}$$

Матрица смежности отношения сравнимости по модулю два (mod2) на множестве A={1,2,3,4,5} имеет вид

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Граф отношения изображен на рисунке

Отношение рефлексивно, симметрично и транзитивно.

5. Контрольная работа.

В заданиях 1-10 используя правила де Моргана, получить ДНФ и упростить её.

1. $x \cdot \overline{x\bar{z} \vee y\bar{z}}$
2. $\overline{x \cdot (\bar{x} \vee \bar{z}) \vee y\bar{z}}$
3. $\bar{x} \cdot \overline{xy \vee \bar{x}z}$
4. $\overline{z(\bar{z} \vee x) \vee \bar{y}z}$
5. $z \cdot \overline{yz \vee x\bar{z}}$
6. $\bar{x} \cdot \overline{\bar{x} \cdot \bar{y} \vee \bar{y}z}$
7. $\overline{y \cdot (\bar{y} \vee x) \vee x\bar{z}}$
8. $\bar{y} \cdot \overline{\bar{x}z \vee \bar{y}z}$
9. $\overline{\bar{x}(x \vee z) \vee \bar{y}z}$
10. $x \cdot \overline{xy \vee yz}$

В заданиях 11-20 даны две функции $f_1(x,y)$, $f_2(x,y,z)$. Требуется:

а) для функции $f_1(x,y)$ составить таблицу истинности и найти по ней полином Жегалкина, СДНФ и СКНФ. Упростить, если возможно, СДНФ.

б) для функции $f_2(x,y,z)$ составить таблицу истинности и найти по ней полином Жегалкина, СДНФ и СКНФ. По карте Карно получить минимальную ДНФ, нарисовать эквивалентную РКС.

в) составить таблицу Поста для системы функций $f_1(x,y)$, $f_2(x,y,z)$, проверить полноту системы и выбрать базисы, если она полная.

11. $f_1(x,y) = x + (x \to y), f_2(x,y,z) = (x \sim y) \downarrow xz$

12. $f_1(x,y) = xy \to \overline{x}, f_2(x,y,z) = (x \downarrow y) \sim (\overline{z} + x)$

13. $f_1(x,y) = x \mid (x+y), f_2(x,y,z) = (x \to yz) \sim \overline{z}$

14. $f_1(x,y) = x + x \mid y, f_2(x,y,z) = \overline{x} \sim (x \to z) \cdot y$

15. $f_1(x,y) = xy \sim y, f_2(x,y,z) = (x \to \overline{y})(\overline{x} + z)$

16. $f_1(x,y) = x \mid (x+y), f_2(x,y,z) = (y \downarrow x) \sim (y \to z)$

17. $f_1(x,y) = x \sim (y \to x), \ f_2(x,y,z) = (x+y) \downarrow (x \mid z)$

18. $f_1(x,y) = x + (x \to \overline{y}), f_2(x,y,z) = z \vee (x \downarrow \overline{y})$

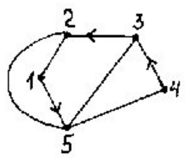
19. $f_1(x,y) = (y \sim x) + y, \ f_2(x,y,z) = (x \mid y) \to (y \to z)$

20. $f_1(x,y) = \overline{x} + (x \sim y), \ f_2(x,y,z) = (xy \sim z) \to \overline{z}$

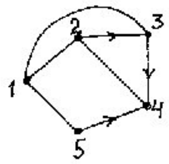
В задачах 21-30 дан граф.

Составить для данного графа структурную матрицу. Найти: а) все простые пути из вершины i в вершину j; б)совокупность всех сечений между вершинами i и j.

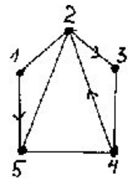
21.i=3, j=1



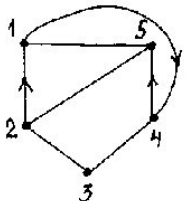
22.i=2, j=5



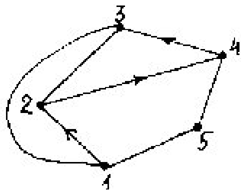
23.i=4, j=1



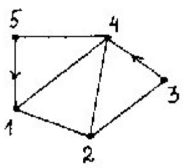
24.i=5, j=3



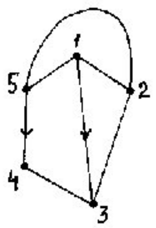
25.i=3, j=4



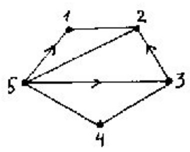
26.i=1, j=3



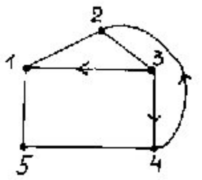
27. i=3, j=5



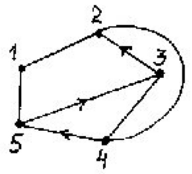
28.i=2, j=4



29. i=4, j=3

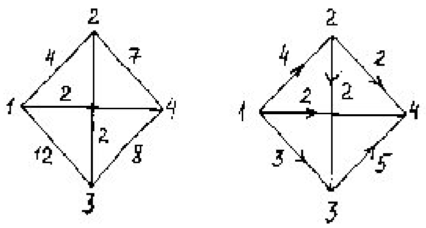


30. i=1, j=4

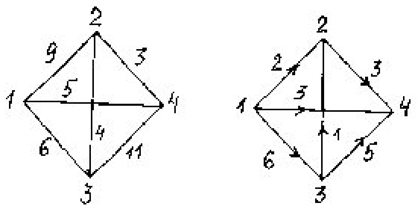


В задачах 31-40 заданы сеть и начальный поток *f*. Требуется построить максимальный поток, считая вершину с номером 1 источником и вершину с номером 4 стоком. Указать минимальное сечение, величина которого равна максимальному потоку.

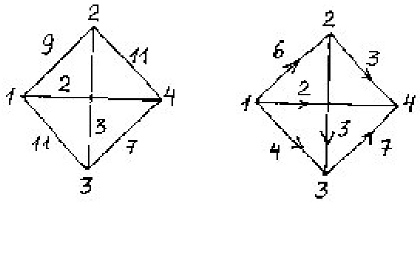
31.



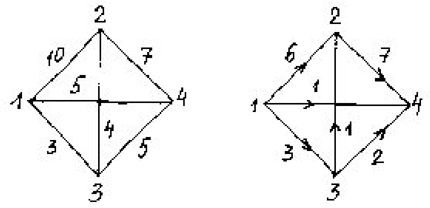
32.



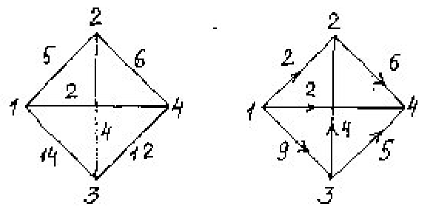
33.



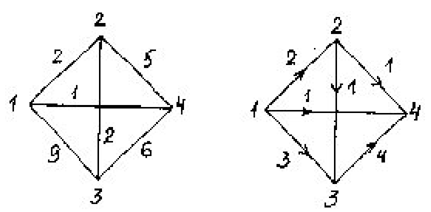
34.



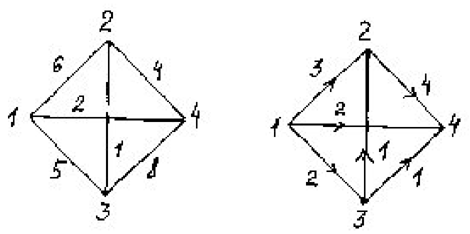
35.



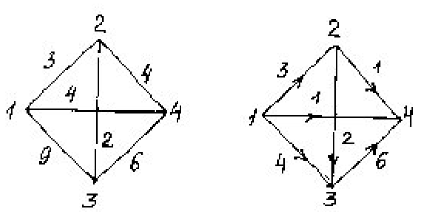
36.



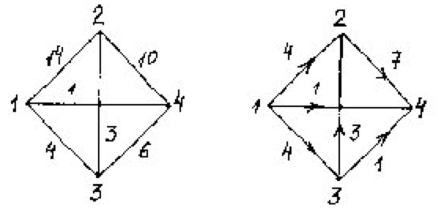
37.



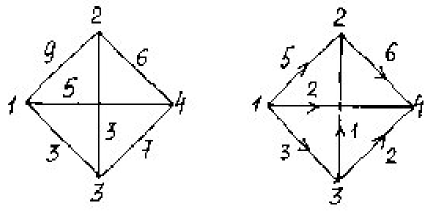
38.



39.



40.



В заданиях 41-50 на указанном множестве задано отношение. Для каждого отношения нужно: а) записать отношение R; б) построить матрицу смежности и граф отношения; в) проверить, является ли отношение рефлексивным, симметричным, транзитивным.

41. На множестве A={1,2,3,4,5,6} задано отношение делимости: xRy тогда и только тогда, когда x делится на y.

42. На множестве A={1,2,3,4,5,6} задано отношение делимости: xRy тогда и только тогда, когда y делится на x.

43. На множестве A={1,2,3,4,5,6} задано отношение взаимной простоты: xRy тогда и только тогда, когда x и y взаимно просты, т.е. их наибольший общий делитель D(x,y)=1 (нет других общих делителей, кроме 1).

44. На множестве A={1,2,3,4,5,6,7} задано отношение взаимной простоты: xRy тогда и только тогда, когда x и y взаимно просты, т.е. их наибольший общий делитель D(x,y)=1 (нет других общих делителей, кроме 1).

45. На множестве A={3,4,5,6,7,8} задано отношение сравнимости по модулю три: xRy тогда и только тогда, когда x и y имеют одинаковые остатки от деления на 3.

46. На множестве A={1,2,3,4,5} задано отношение R: xRy тогда и только тогда, когда $|x-y| \leq 1$.

47. На множестве A={1,2,3,4,5,6} задано отношение R: xRy тогда и только тогда, когда x и y имеют общий делитель, отличный от 1.

48. На множестве A={1,2,3,4,5,6} задано отношение R: xRy тогда и только тогда, когда $|x-y|$ чётное.

49. На множестве A={1,2,3,4,5,6} задано отношение R: xRy тогда и только тогда, когда $|x-y|$ нечётное.

50. В семье 5 детей, сыновья Андрей, Борис и Вадим и дочери Галина и Дарья. На этом множестве детей задано отношение R «брат»: xRy тогда и только тогда, когда x – брат y.

Литература

1. Палий И.А. Дискретная математика./И.А.Палий – М.:Эксмо, 2008. – 350с.
2. Поздняков С.Н. Дискретная математика/С.Н. Поздняков, С.В. Рыбин. – М.: Академия, 2008. – 447с.
3. Е.Л. Рабкин, Ю.Б. Фарфаровская Дискретная математика/ГУТ.СПб 2003. – 66с.