**Дискретная математика. Темы для зачета вместе с контрольными тестами.**

**Тема 2..** Функции и отображения.

**Краткие теоретические сведения.**

1. **Упорядоченная пара объектов.** Пусть даны множества  и . Упорядоченной парой  или **кортежем** двух неравных объектов **** с компонентами  и  называется величина , т.е. т.е. двухэлементное множество, состоящее из одноэлементного множества- синглета , содержащего **первый элемент пары** – объект  и двухэлементного множества - т.е. неупорядоченной пары, отражающей состав кортежа. Объект  называется второй компонентой кортежа. Если объекты  и  совпадают, т.е. выполняется соотношение тождественности , то по определению . В этом случае по определению первая и вторая компонента кортежа совпадает с указанным единственным объектом .

2. **Декартово произведение двух множеств.**

Пусть даны два множества  и . Декартовым произведением  первого множества на второе называется множество всех упорядоченных пар , где  и , т.е. .

**Пример**. Дано . Найти декартово произведение , а также множество , изобразить эти множества на целочисленной решетке .

**Решение.** Имеем .

Изобразим данное множество:





Изобразим данное множество на целочисленной решетке:



**3. Функция**. Пусть даны два множества  и . Функцией из множества  в множество  называется подмножество  декартового произведения множеств  и , обладающее свойством . Данное свойство называется **функциональным свойством** и означает, что для каждого значения **аргумента**  функция сопоставляет не более одного **значения** .

**Пример**. Дано начальное и конечное множества функции, - функция из  в . Найти значение функции . **Решение.** 1) Поиск: Ищем пару вида . Результат этапа 1:Такая пара найдена и притом только одна ;

2) Выборка: Из найденной пары извлекаем второй элемент, этот элемент будет искомым значением функции . Таким образом, получаем .

Ответ: .

Изобразить данную функцию на решетке .

**Решение.**



**4.Область определения и область значений функции.**

Пусть дана функция из множества  в множество .

**Область определения** данной функции – это множество . **Область значений** функции - это множество .Т.е. область определения функции – это множество первых компонент кортежей, входящих в состав функции, а область значений – это множество вторых компонент.

**Пример.** Дано . Найти . **Решение**. Путем анализа исходных данных сразу получаем ответ .

**5**. **Образ множества, прообраз множества, прообраз элемента при действии функции.**

Пусть дана функция  и подмножество . Образом  подмножества  при действии функции  называется множество . Т.е. образ подмножества  при действии функции это множество вторых компонент кортежей функции, когда первые компоненты берутся из подмножества . Пусть - подмножество конечного множества функции . Его прообразом  при действии функции  называется множество . Т.е. прообраз подмножества  при действии функции это множество первых компонент кортежей функции, когда вторые компоненты берутся из подмножества .

Пусть дан элемент  его прообразом  при действии функции  называется множество , т.е. прообраз одноэлементного множества  при действии функции .

**Пример**. Дано ,

.

Найти .

**Решение.** Исходя из определения и данного состава функции непосредственно выписываем ответ: .

6. **Композиция и джойн функций.** Пусть даны две функции  и  их композицией  называется функция  вида . Это определение можно пояснить следующей схематической диаграммой



Таким образом, при композиции  первой выполняется функция , т.е. первая справа.

Имеют место следующие соотношения

, .

Композиция  функций  и  может быть записана в виде

джойна этих функций , где - операция джойна (т.е. операция соединения или конкатенации). Таким образом, при операции джойна первой выполняется функция первая слева.

**Пример.** Даны функции , где универсум  и . Построить композиции и джойны , выписать их кортежный состав и табличное представление.

**Решение.** Получим сначала табличное представление этих функций. Имеем: ,

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **3** | **4** |
|  | **3** |  |

Находим . Имеем:

.

Находим значения функции  на всех элементах ее области определения. Имеем: , . Таким образом, получили ответ по первой части задачи:

,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **2** | **3** |
|  | **4** | **3** |

Из табличного получаем кортежное представление .

Так как , автоматически получаем:

,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **2** | **3** |
|  | **4** | **3** |

.

Таким же способом находим ответ для второй части задачи.

,

. Т.е.



|  |  |
| --- | --- |
|  | **3** |
|  | **3** |

и .

Для соответствующего джойна ответ получаем автоматически:



|  |  |
| --- | --- |
|  | **3** |
|  | **3** |

.

**6. Отображения. Инъекция, сюръекция, биекция, свойства обратимости слева и справа.**

Функция  для которой  называется **всюду определенной**, обозначается  или  и называется также **отображением.**

**Тождественным отображением**  на множестве  называется отображение , обладающее свойством ,т.е. это отображение оставляет каждый элемент области определения на месте.

Пусть - функция и - подмножество ее области определения. **Сужением**  функции на множество  называется функция . Эта функция является отображением вида . Имеет место формула: .

**Пример.** Дано . Найти сужение .

**Решение**. Имеем:



Ответ: .

Функция  называется **продолжением** функции , если выполняется включение .

Отображение  называется **сюръективным** или **сюръекцией** (отображением “на”, накрытием) если , т.е. если его образ совпадает со всем конечным множеством отображения. Это условие можно записать также в виде: , т.е. каждый элемент конечного множества является образом некоторого элемента начального множества отображения.

Отображение  называется **инъективным** или **инъекцией**, если выполняется свойство , т.е. разные переходят в разные.

Отображение  называется **биективным** или **биекцией** (взаимно- однозначным отображением, перестановкой) если оно одновременно сюръекция и инъекция.

Пусть дано отображение . Отображение  называется левым обратным к отображению  если выполняется свойство . Отображение  называется правым обратным к , если . Отображение  называется обратным к отображению , если оно одновременно является правым обратным и левым обратным по отношению к , т.е. если выполняются свойства .

Теорема 1. Пусть имеется отображение . Оно обладает левым обратным  тогда и только тогда, когда отображение  является инъекцией. При этом левое обратное находится по формуле: 

Отображение  обладает правым обратным , если является сюръекцией, при этом обратное  находится по формуле:



Отображение  обладает как левым обратным , так и правым обратным  в том и только том случае, если - биекция. В этом случае левое и правое обратные отображения совпадают, определяются однозначно и их общее значение называется обратным (двусторонним) отображением  к отображению .

1. **Задание функции программой ЭВМ.**

**Пример.**

Функция  задана C++ программой:

int f(int x)

{

if (x>5) return x\*2;

else if (3<=x) return (x/2);

else return x%2;

}

Найти значение .

Решение. Для большей ясности действия указанной функции построим блок-схему алгоритма данной функции:



Используя входные данные  осуществим прохождение от точки входа то точки выхода блок-схемы.

1) - вход в схему;

2.Безусловный 1 переход на блок 2;

3) Проверка - нет, переход по дуге 2 на блок 3;

4) Проверка - нет, переход по дуге на исполнительный блок 5;

5) Операция . Результат :

6) Безусловный переход на блок 7:

7) Вывод данных .

Итак, выполняя алгоритм данной функции по указанной блок-схеме получили ответ .

ТЕСТЫ: Задания, примеры выполнения, индивидуальные задания.

При ответе на каждый тест нужно:

1. Выписать задание;
2. Выписать индивидуальное задание;
3. Привести решение, следуя данному образцу.

**Задание 1. Кортежное задание функции.** Даны начальное и конечные множества , функция , найти область определения , область значений  функции, получить табличное представление функции. Привести визуальное изображение функции в виде двудольного орграфа.

**Пример выполнения**. Дано .

**Решение.** Область определения функции - это множество первых компонент ее кортежей. Получаем . Область значений- это множество вторых координат ее кортежей. Получаем . Табличное представление функции - это таблица аргумент-значение для всех элементов области определения функции. Получаем таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | 2 | 3 | 4 |
|  |  |  |  |

Изображение:



Индивидуальное задание 1.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Nv |  |  |  |
| 1 |  |  |  |

Сделать по образцу

**Задание 2. Образ множества, прообраз множества, прообраз элемента.**

**Дано:** Множества , функция , подмножество , подмножество , элемент .

**Найти**: Образ подмножества , т.е. подмножество , прообраз подмножества , т.е. множество , прообраз элемента , т.е. подмножество .

**Пример выполнения.** Дано: 

Найти объекты, указанные в задании.

**Решение.** Используем графическую интерпретацию функции как двудольного орграфа. Имеем следующую диаграмму (орграф функции):



Для нахождения образа подмножества  выделим квадратиками в множестве  вершины из  а элементы, в которые ведут стрелки ведут стрелки из выделенных вершин - кружками. Имеем:



Исходя из полученной диаграммы, находим ответ: .

Для нахождения прообраза  подмножества  в множестве  выделим квадратиками вершины из , а элементы, из которых ведут стрелки ведут стрелки в выделенные элементы - кружками. Имеем:



Исходя из полученной диаграммы находим ответ: .

Для нахождения прообраза  элемента  заметим, что по определению, . Таким образом, третья часть задачи решается методом аналогичным, использованному для второй части задачи. Применяя этот метод, находим ответ: .

Индивидуальное задание.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Nv |  |  |  |
| 1 |  |  |  |

**Задание 3. Композиция и джойн функций.**

Дано: Универсум , функции . Построить композиции и джойны , выписать их кортежный состав и табличное представление.

**Пример выполнения:**  

.

Решение: Получим сначала табличное представление этих функций. Имеем: ,

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **3** | **4** |
|  | **3** |  |

Находим . Имеем:

.

Находим значения функции  на всех элементах ее области определения. Имеем: , . Таким образом, получили **ответ по первой части задачи:**

,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **2** | **3** |
|  | **4** | **3** |

Из табличного получаем кортежное представление .

Так как , автоматически получаем:

,

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **2** | **3** |
|  | **4** | **3** |

.

Таким же способом находим **ответ для второй части задачи**.

,

. Т.е.



|  |  |
| --- | --- |
|  | **3** |
|  | **3** |

и .

Для соответствующего джойна ответ получаем автоматически:



|  |  |
| --- | --- |
|  | **3** |
|  | **3** |

.

Индивидуальное задание.

Для всех вариантов .

|  |  |
| --- | --- |
| Nv |  |
| 1 | {<2,1>,<3,4>,<4,1>,<5,3>} {<1,1>,<3,5>,<5,1>} |

**Задание 4. Алгоритмическое определение функции.**

**Дано:** Программа ЭВМ, описывающая функцию , элемент .

**Найти:,** изобразить блок – схему алгоритма функции,

**Пример выполнения.**

Функция  задана C++ программой:

int f(int x)

{

if (x>5) return x\*2;

else if (3<=x) return (x/2);

else return x%2;

}

Найти значение .

Решение.Используем следующую информацию о языке программирования С++:

;

;

;

;

Для большей ясности действия указанной функции построим блок-схему алгоритма данной функции:



Используя входные данные  осуществим прохождение от точки входа то точки выхода блок-схемы.

1) - вход в схему;

2.Безусловный 1 переход на блок 2;

3) Проверка - нет, переход по дуге 2 на блок 3;

4) Проверка - нет, переход по дуге на исполнительный блок 5;

5) Операция . Результат :

6) Безусловный переход на блок 7:

7) Вывод данных .

Итак, выполняя алгоритм данной функции по указанной блок-схеме получили ответ .

**Индивидуальное задание 4**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Nv | f | a |
| 1 | int f(int x)  {  if (x>15) return x+2;  else if ((10<=x)&&(x<=12)) return (x/3);  else return x%4;  } | 12 |

.