

Задача 1. Найдите предел (x_n) с явным вычислением номера N по заданному ε (если он существует):

а) $x_n = \sqrt[n]{n}$;

Задача 4. Найдите предел (x_n) (если он существует):

в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3 + n} - n}$; **г)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(a + 1/n)} - \sqrt{a}}{1/n}$.

Задача 5. Найдите предел (x_n) (если он существует): **а)** $x_n = 1 + (-0, 1)^n$; **б)** $x_n = \sqrt[3]{2^n + 3^n}$; **в)** $x_n = (2^n - 1)/(2^n + 1)$.

Задача 6. Найдите предел (x_n) (если он существует): **а)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot \sin n}{n^2 + 1}$; **б)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \{2 \sin n\}$; **в)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + \cos n}{(n + 3)^2}$;

Задача 7. Докажите формулу для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (геометрической прогрессии, знаменатель которой по модулю меньше 1).

Задача 8. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии с отрицательным знаменателем сумма первого и шестого членов равна 62, а произведение четвертого и восьмого членов равно 4. Найдите сумму этой прогрессии.

Задача 9. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1,5, а сумма квадратов ее членов равна 1,125. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Задача 10. Найдите пределы (если они существуют): **а)** $x_n = \frac{1 + 3 + \dots + 3^n}{5^n}$; **б)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\dots+a^n}{1+b+b^2+\dots+b^n}$, если $|a| < 1, |b| < 1$.

Задача 11. Найдите предел (x_n) (если он существует):

а) $x_n = \frac{1/2 + 2/2^2 + 3/2^3 + \dots + n/2^n}{2^n}$; **б)** $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$; **в)** $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2} \dots \sqrt[2^n]{2}$;
г) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\left(a + \frac{1}{n} \right)^2 + \dots + \left(a + \frac{n-1}{n} \right)^2 \right)$; **д)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1)}{n^3}$; **е)** $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2 + 3 - \dots - 2n}{\sqrt{n^2 + 1}}$.

Задача 12. Найдите предел (x_n) (если он существует): **а)** $x_n = \frac{n^{50}}{10^n}$; **б)** $\frac{2^n}{n!}$;

Задача 13. Пусть для последовательности (a_n) известно, что $a_0 = 5, a_1 = 8, a_{n+2} = \frac{a_{n+1} + a_n}{2}$. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Задача 14. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$. Найдите предел последовательности (y_n) , если:

а) $y_n = (x_n^2 + x_n - 2)/(x_n - 1)$; **б)** $y_n = \sqrt{x_n}$; **в)** $y_n = (x_1 + \dots + x_n)/n$.

Задача 15. Пусть $x_1 = 1, x_{n+1} = 0,5 \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$.

Задача 16. **а)** Пусть (x_n) сходится, а (y_n) — расходится. Что можно сказать о их сумме и произведении?

б) Пусть (x_n) и (y_n) расходятся. Можно ли утверждать, что их сумма и произведение тоже расходятся?

в) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, а (y_n) — произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$?

г) Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$. Следует ли отсюда, что либо $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$, либо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$?