Самостоятельная работа. Часть 3

Раздел 8

8.1. Вычислить производную обобщенной функции:

$\left(1(\sin t)\right)''$

8.2. Вычислить производную обобщенной функции:

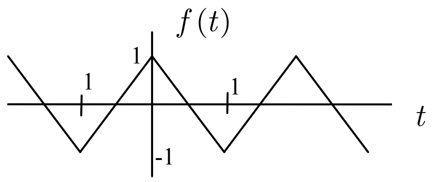
$|t|''$

8.3. Вычислить производную обобщенной функции:

$|\sin t|''$

8.4. Вычислить производную обобщенной функции:

$f''(t)$, если



8.5. Вычислить производную обобщенной функции:

$d'(t)$, если $d(t)$ - функция Дирихле

8.6. Вычислить производную обобщенной функции:

$\left(t^n 1(t)\right)'$

8.7. Вычислить производную обобщенной функции:

$\left(t^n \delta(t)\right)''$

8.8. Вычислить производную обобщенной функции:

$f'(t)$, если

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ t, & 0 < t \le 1 \\ 2t, & 1 < t \le 2 \\ \vdots & \\ kt, & k-1 < t \le k \\ \vdots & \end{cases}$$

8.9. Найти предел последовательности обобщенных функций $\{f_n\}$ при $n \to \infty$:

$$f_n(t) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2 n}{2}}$$

8.10. Найти предел последовательности обобщенных функций $\{f_n\}$ при $n \to \infty$:

$$f_n(t) = \frac{1}{\pi} \frac{1/n}{x^2 + 1/n^2}$$

8.11. Найти предел последовательности обобщенных функций $\{f_n\}$ при $n \to \infty$:

$$f_n(t) = \frac{\sin\left(t/n\right)}{t/n}$$

8.12. В пространстве обобщенный функций $\boldsymbol{D'(R^1)}$ вычислить предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{x} \sin \frac{x}{\varepsilon}$$

8.13. Какие условия следует наложить на числовую последовательность $\{a_k\}$, $k = 1,2, \ldots$, чтобы ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(t-k)$$

сходился в пространстве обобщенных функций ***D'(R^1)***?

8.14. В пространстве обобщенный функций ***D'(R^1)*** вычислить предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \exp\{-\frac{x^2}{2\varepsilon}\}$$

8.15. В пространстве обобщенных функций проверить равенство

$$t^m \delta^{(m)}(t) = (-1)^m \cdot m!\delta(t) \quad (\forall m = 0,1,\ldots).$$

8.16. В пространстве обобщенных функций ***D'(R^1)*** вычислить предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\pi(x^2+\varepsilon^2)}$$

Раздел 9

9.1. Для последовательности установить существование сильного и слабого пределов. Вычислить их, если существуют:

$$x_n(t) = nte^{-nt^2} \in C([0,1])$$

9.2. Для последовательности установить существование сильного и слабого пределов. Вычислить их, если существуют:

$$x_n(t) = t^n \in C([0,1])$$

9.3. Для последовательности установить существование сильного и слабого пределов. Вычислить их, если существуют:

$$x_n(t) = t^n \in L_2([0,1])$$

9.4. Пусть $x \in l_p$, $p \in (1,\infty)$ и $\|x\|_{l_p} = 2006$. Построить последовательность $\{y^{(k)}\} \subset l_p$ так, чтобы

$$\|y_n\|_{l_p} = 2007$$

9.5. Пусть $x \in l_p$, $p \in (1,\infty)$ и $\|x\|_{l_p} = 2006$. Построить последовательность $\{y^{(k)}\} \subset l_p$ так, чтобы

$$y_n \xrightarrow{w} x$$

9.6. Пусть $e_1 = (1,0,0,\ldots)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots)$, $e_3 = (0,0,1,0,\ldots)$, …. Рассматривая $\{e_n\}$ как последовательность в l_p для любого $p \in (1,\infty]$, доказать, что $\{e_n\}$ не имеет сильного предела

9.7. Пусть $e_1 = (1,0,0,\ldots)$, $e_2 = (0,1,0,\ldots)$, $e_3 = (0,0,1,0,\ldots)$, …. Рассматривая $\{e_n\}$ как последовательность в l_p для любого $p \in (1,\infty]$, доказать, что $e_n \xrightarrow{w} 0$

9.8. В l_p, $p \in [1,\infty)$, выбран произвольный элемент, по которому строится последовательность $\{y^{(k)}\} \subset l_p$:

$$y^{(1)} = (x_2, x_1, x_3, x_4, \ldots),\ y^{(2)} = (x_3, x_2, x_1, x_4, \ldots),\ y^{(3)} = (x_4, x_2, x_3, x_1, x_5, \ldots),\ \ldots$$
$$y^{(k-1)} = (x_k, x_2, x_3, \ldots, x_{k-1}, x_1, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots),\ \ldots$$

Установить существование сильного и слабого пределов. Если таковые существуют – вычислить их.

9.9. В l_p, $p \in [1,\infty)$, выбран произвольный элемент $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $\|x\|_{l_p} < 1$, по которому строится последовательность $\{y^{(k)}\} \subset l_p$:

$$y^{(1)} = (x_2, x_1, x_3, x_4, \ldots), y^{(2)} = (x_3, x_2, x_1^2, x_4, \ldots),\ y^{(3)} = (x_4, x_2, x_3, x_1^3, x_5, \ldots),\ \ldots$$
$$y^{(k-1)} = (x_k, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_1^{k-1}, x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots),\ \ldots$$

Установить существование сильного и слабого пределов. Если таковые существуют – вычислить их.

9.10. Для пространства l_p, $p \in [1,\infty)$ привести пример последовательностей, которые а) сходятся сильно; б) сходятся слабо, но не сходятся сильно; в) не имеют слабого предела.

9.11. Для пространства $C([0,1])$ привести пример последовательностей, которые а) сходятся сильно; б) сходятся слабо, но не сходятся сильно; в) не имеют слабого предела.

9.12. Для пространства $L_p([0,1])$, $p \in (1,\infty)$ привести пример последовательностей, которые а) сходятся сильно; б) сходятся слабо, но не сходятся сильно; в) не имеют слабого предела.

9.13. Доказать, что $x_n(t) \xrightarrow{w} x(t)$, $x_n(t), x(t) \in C([0,1])$ в том и только в том случае, когда последовательность $\left\{ \|x_n(t)\|_{C([0,1])} \right\}$ ограничена и $x_n(t) \to x(t)$ поточечно для всех $t \in [0,1]$.

9.14. Привести примеры слабо фундаментальных последовательностей в БЛП, не имеющие слабого предела.

9.15. В пространстве $\boldsymbol{l_2}$ задана последовательность операторов $\{T^n\}, (n=1,2, \ldots)$, где

$$T x = \{\xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots\} \qquad \text{при } x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$$

Найти сильный и равномерный пределы у последовательности операторов.

9.16. В пространстве $\boldsymbol{l_2}$ задана последовательность операторов $\{T^n\}, (n=1,2, \ldots)$, где

$$T x = \{0, \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \ldots\} \qquad \text{при } x = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$$

Найти сильный и равномерный пределы у последовательности операторов.

9.17. Существует ли слабый предел в $C[0,1]$ у последовательности вида

$$x_n(t) = \begin{cases} nt, & \text{если} \quad t \in [0, 1/n] \\ 2 - nt, & \text{если} \quad t \in [1/n, 2/n], \quad n = 3,4\ldots \\ 0, & \text{если} \quad t \in [2/n, 1] \end{cases}$$

Раздел 10

10.1. Построить оператор, сопряженный к заданному:

$P: C([0,2]) \to C([0,1])$, действующий по формуле $(Px)(t) = x(t)$ при $t \in [0,1]$

10.2. Построить оператор, сопряженный к заданному:

$L: l_p \to l_p$, $p \in [1,\infty)$, действующий по формуле $L(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$

10.3. Построить оператор, сопряженный к заданному:

$R: l_p \to l_p$, $p \in [1,\infty)$, действующий по формуле $R(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$

10.4. Построить оператор, сопряженный к заданному:

$A: L_2([0,1]) \to C([0,1])$, действующий по формуле $(Ax)(t) = \int\limits_{[0,t]} x(\tau)\, d\tau$

10.5. Построить оператор, сопряженный к заданному:

$A: L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$, действующий по формуле $(Ax)(t) = \int\limits_{[0,t]} x(\tau)\, d\tau$

10.6. Построить оператор, сопряженный к заданному:

$A: C([0,1]) \to C([0,1])$, действующий по формуле $(Ax)(t) = tx(t)$

10.7. Построить оператор, сопряженный к заданному:

$A: L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$, действующий по формуле $(Ax)(t) = tx(t)$

10.8. Построить оператор, сопряженный к заданному:

$A: C([0,1]) \to C([0,1])$, действующий по формуле $(Ax)(t) = tx(1/2)$

10.9. Построить оператор, сопряженный к заданному:

$A: C([-1,1]) \to C(-1,1)$, действующий по формуле $(Ax)(t) = \dfrac{x(t) + x(-t)}{2}$

10.10. Построить оператор, сопряженный к заданному:

$A: C([-1,1]) \to C(-1,1)$, действующий по формуле $(Ax)(t) = \dfrac{x(t) - x(-t)}{2}$

10.11. Оператор $A: C[0,1] \to C[0,1]$ задается выражением $(Ax)(t) = \dfrac{x(0) + x(1)}{2} t + \int\limits_0^1 x(s) ds$.

Найти оператор A^*.

10.12. Рассмотрим оператор *A*, отображающий пространство $\boldsymbol{L_2([0;1])}$ в пространство $\boldsymbol{L_2([0;1])}$

$$Ax(t) = \int\limits_0^1 e^{\tau + t} x(\tau) d\tau$$

Проверить, является ли оператор *A* самосопряженным.

10.13. В пространстве $\boldsymbol{l_2}$ задан оператор $\boldsymbol{L}$, , такой что

$L\,x = \{ \xi_2,, \xi_3 , \xi_4, ... \}$ *при* $x = \{\xi_1,, \xi_2 , \xi_3, ... \}$

Найти оператор $\boldsymbol{L}^*$.

10.14. В пространстве $\boldsymbol{l_2}$ задан оператор $\boldsymbol{R}$, , такой что

$R\,x = \{0, \xi_1, \xi_2,, \xi_3 , \xi_4, ... \}$ *при* $x = \{\xi_1,, \xi_2 , \xi_3, ... \}$

Найти оператор $\boldsymbol{R}^*$.

10.15. Пусть h - вещественное ненулевое число. Убедиться что оператор конечной разности $(A_h x)(t) = \dfrac{i}{h}\left[x\left(t + \dfrac{h}{2}\right) - x\left(t - \dfrac{h}{2}\right)\right]$ является самосопряженным оператором, действующим в пространстве $L_2[-\infty, \infty]$.

Раздел 11

11.1. Найти спектр оператора:

$L : l_p \to l_p$, $p \in [1,\infty]$, $L(x_1, x_2, ...) = (x_2, x_3, ...)$

11.2. Найти спектр оператора:

$R : l_p \to l_p$, $p \in [1,\infty]$, $R(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$

11.3. Найти спектр оператора:

$A : C([-1,1]) \to C([-1,1])$, $(Ax)(t) = x(-t)$

11.4. Найти спектр оператора:

$A : C([-1,1]) \to C[(-1,1)]$, $(Ax)(t) = \dfrac{x(t)+x(-t)}{2}$

11.5. Найти спектр оператора:

$A : C([-1,1]) \to C[(-1,1)]$, $(Ax)(t) = \dfrac{x(t)-x(-t)}{2}$

11.6. Найти спектр и резольвенту оператора:

$A : C([0,1]) \to C([0,1])$, $(Ax)(t) = \int\limits_{[0,t]} x(\tau)\,d\tau$

11.7. Найти спектр и резольвенту оператора:

$A : C([0,1]) \to C([0,1])$, $(Ax)(t) = x(0) + tx(1)$

11.8. В пространстве $C[0;1]$ рассмотрим оператор $Ax(t) = tx(t)$. Найти спектр и резольвенту данного оператора.

11.9. В пространстве $C[0;2\pi]$ действует оператор $Ax(t) = \exp\{it\}x(t)$. Доказать, что $\sigma(A) = \{\lambda \in C : |\lambda| = 1\}$.

11.10. Пусть M – ненулевое подпространство гильбертова пространства H. Найти спектр и резольвенту оператора P ортогонального проектирования на M. Выразить резольвенту через оператор P.

11.11. Доказать, что при $0 \le a \le 1$ итерационный процесс

$$X_{n+1} = X_n - 0.5\,(X_n^2 - a), \quad X_0 = 0, \; n \in \mathbf{N},$$

сходится к $\sqrt{a}$.

11.12. Пусть $X(t) \in \boldsymbol{C([a;b])}$. Показать, что уравнение

$$Y(t) + 0.5\sin Y(t) + X(t) = 0$$

имеет единственное непрерывное решение, т.е. $Y(t) \in \boldsymbol{C([a;b])}$.

11.13. Доказать, что в пространстве столбцов l^n со стандартной нормой линейный оператор (отображение) $A: l^n \to l^n$ с матрицей $\|a_{ij}\|$ $(i,j = 1,2,\dots,n)$ будет сжимающим, если

$$\max_{1\le i\le n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| < 1$$

11.14. Доказать, что в пространстве столбцов c_n со стандартной нормой линейный оператор (отображение) A: $c_n \to c_n$ с матрицей $||a_{ij}||$ (i,j = 1,2,… , n) будет сжимающим, если

$$\max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{n} | a_{ij} | < 1$$

11.15. Доказать, что в пространстве столбцов E_n со стандартной нормой линейный оператор (отображение) A: $E_n \to E_n$ с матрицей $||a_{ij}||$ (i,j = 1,2,… , n) будет сжимающим, если

$$\sum_{i,j=1}^{n} | a_{ij} |^2 < 1$$