Варіант 1

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 4x + 5.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\, A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix};\ б)\, A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 13, \\ 2x + 3y + z = 16, \\ x + y + 4z = -1. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 5. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(1;3;6)$, $M_2(2;2;1), M_3(-1;0;1), M_4(-4;6;-3)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (3;-2;1)$, $\vec{q} = (-1;1;-2), \vec{r} = (2;1;-3)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (11;-6;5)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 3\vec{p} - \vec{q}$, $|\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, (\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{6}$. Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію $ї\, ð_{\vec{b}}(\vec{a} - 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(2;-1), B(4;5), C(-3;2)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oyz; площиною, що проходить через точку $(0;0;1)$ паралельно площині Oxy; площиною, що проходить через точку $(1;2;0)$ і містить вісь Oz; площиною, що проходить через точку $(0;3;0)$ і пряму $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{-3} = \dfrac{z-4}{0}$.
Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(2;3;1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3};$$
$$l_2 : \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:
а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 15$ та один з фокусів $F(-10;0)$;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a = 13$, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{14}{13}$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = -4$;

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:
$$9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:
$$x^2 - y^2 = 8z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:
$$x + y + z = 4, x = 2, y = 3,$$
$$x = 0, y = 0, z = 0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x + 2y = 0, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З’ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:
$$A\vec{x} = (x_1 + x_2; 2x_1 + x_3; 3x_1 - x_2 + x_3)$$
$$B\vec{x} = (x_1; x_2 + 1; x_3 + 2).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.
$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -10 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 2 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:
$$x_1^2 - 15x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Варіант 2

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \left\| \begin{matrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\| ; f(x) = x^2 - 6x - 1.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \left\| \begin{matrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\| ;\ б)\ A = \left\| \begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{matrix} \right\| .$$

4. Розв’язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 13, \\ x - 2y + z = -3, \\ 4x - y + z = 6. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв’язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв’язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í} ,$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв’язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв’язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв’язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-4;2;6)$, $M_2(2;-3;0), M_3(-10;5;8), M_4(-5;2;-4)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об’єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (2;1;0)$, $\vec{q} = (1;-1;2), \vec{r} = (2;2;-1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (3;7;-7)$ *в цьому базисі;*

б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1, (\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

в) проекцію ї $ð_{\vec{b}}(2\vec{a} - 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-1;2), B(3;-1), C(0;4)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;

в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oxy; площиною Oyz; площиною, що проходить через точки $(0;0;3)$ і $(0;1;0)$ паралельно осі Ox; площиною, що проходить через точку $(0;0;3)$ і пряму $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{3}$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0\ \ 1;2;\frac{3}{2}$ та прямі

$$l_1:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z+1}{2};$$

$$l_2:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b=2$ *і один з фокусів* $F(4\sqrt{2};0)$*;*

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a=7$, *ексцентриситет* $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{85}}{7}$*;*

в) параболи, якщо її директриса $D: x=5$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2+12xy-22x-12y-19=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2+4y^2=16z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z=x^2+y^2, x+y=4,$$

$$x=0, y=0, z=0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$A\vec{x}=(0;x_2-x_3;0)$

$B\vec{x}=(3x_1+5x_3;x_1+x_2+1;3x_2-6x_3)$.

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю. $A=\begin{Vmatrix}-2&0&4\\8&4&11\\-1&0&3\end{Vmatrix}$.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-11x_1^2-6x_2^2-6x_3^2+$$
$$+12x_1x_2-12x_1x_3+6x_2x_3.$$

Варіант 3

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 & 7 \\ -1 & 2 & 3 & -7 \\ 0 & 3 & -3 & 8 \\ 0 & -3 & 3 & -7 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{Vmatrix}, f(x) = x^2 + 7x - 2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -5 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 8, \\ x + y - z = 2, \\ x - y + 4z = 10. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = -1, \\ 2x_1 - 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 - 2x_4 = 9. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(7;2;4)$, $M_2(7;-1;-2), M_3(-7;-3;2), M_4(-4;2;1)$.
Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;1;-2)$, $\vec{q} = (3;-1;1), \vec{r} = (4;1;0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-5;9;-13)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 2\vec{q}$, $|\vec{p}| = \dfrac{1}{5}, |\vec{q}| = 1, (\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію $ї ð_{\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$.

9. Дано точки $A(0;5), B(2;2), C(4;6)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами Oxy та Oxz; площиною, що проходить через прямі: $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{2}=z-1$ і $x=t$, $y=2, z=t$; площиною, що проходить через пряму $\begin{cases}3x-z-3=0,\\ y=0,\end{cases}$ паралельно осі Oy.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(1;0;4)$ та прямі

$$l_1:\frac{x+1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{1};$$
$$l_2:\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E, *якщо* $A(3;0), B\left(2;\dfrac{\sqrt{5}}{3}\right)\in \mathrm{E}$;

б) гіперболи Γ, *якщо рівняння її асимптот* $y=\pm\dfrac{3}{4}x; A(-8;0)\in\Gamma$;

в) параболи, якщо її директриса $D: y=-2$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$4x^2-4xy+y^2-6x+3y-4=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$9x^2+4y^2=36-36z^2.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$2z=x^2+y^2, x^2+y^2-ax=0, z=0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases}x^2=2py,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x}=(3x_1+2x_2-x_3^2; 2x_1+x_3; 3x_1-x_2)$$
$$B\vec{x}=(0; 3x_1-2x_2; x_1+x_2-3x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix}3 & 10 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 3\end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$9x_1^2+6x_2^2+6x_3^2+$$
$$+12x_1x_2-10x_1x_3-2x_2x_3.$$

Варіант 4

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 7 & 1 \\ 4 & 2 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 9x + 10.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а) } A = \begin{Vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -7 \end{Vmatrix}; \text{ б) } A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв’язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x - 3y + 4z = 10, \\ 3x - 6y + z = 0, \\ x + 3y + 3z = 13. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв’язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв’язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{\text{ç.í}} = x_{\text{ç.î}} + x_{\div.\text{í}},$$

де $x_{\text{ç.í}}$ — загальний розв’язок неоднорідної системи; $x_{\text{ç.î}}$ — загальний розв’язок однорідної системи; $x_{\div.\text{í}}$ — частинний розв’язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2;1;4)$, $M_2(-1;5;-2), M_3(-7;-3;2), M_4(-6;-3;6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об’єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;5;1)$, $\vec{q} = (3;2;-1), \vec{r} = (-1;1;0)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-15;5;6)$ *в цьому базисі;*

б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює гострий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = 3\vec{p} - 2\vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 5\vec{q}, |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = \dfrac{1}{2}, (\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{5\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

в) проекцію ї $\text{ð}_{\vec{b}}(-\vec{a} + 2\vec{b})$.

9. Дано точки $A(3;1), B(5;4), C(1;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;

в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною, що проходить через осі Ox і Oz; площиною, що проходить через прямі $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{3}$ і $x=\frac{y-3}{-2}=z$; площиною Oyz; площиною, що проходить через точки $(0;0;2)$ і $(0;3;0)$ паралельно осі Ox.
Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1;3;1)$ та прямі

$$l_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1};$$

$$l_2:\frac{x}{-1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E, *якщо ексцентриситет* $\varepsilon=\frac{\sqrt{21}}{5}, A(-5;0)\in \mathrm{E}$*;*

б) гіперболи Γ*, якщо* $A(\sqrt{80};3)$, $B(4\sqrt{6};3\sqrt{2})\in\Gamma$*;*

в) параболи, якщо її директриса $D: y=1$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2+y^2+z^2=2z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2=x^2+y^2, x^2+y^2-ax=0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З’ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$A\vec{x}=(6x_2-x_3;5x_1+x_2-x_3;4x_3)$

$B\vec{x}=(x_1+x_2+2;3x_1-x_3;x_2+3x_3)$.

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix}4&4&-1\\0&-4&0\\6&2&-1\end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2-2x_2x_3.$$

Варіант 5

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x)=0$:

$$A=\begin{Vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & -5 \end{Vmatrix}; f(x)=x^2+8x+7.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A=\begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{Vmatrix};\ б)\ A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв’язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+y-4z=-2, \\ x+2y+z=11, \\ 3x+y+z=14. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв’язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв’язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í}=x_{ç.î}+x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв’язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв’язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв’язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=1, \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=-1, \\ x_1+x_2-2x_3+2x_4=-3, \\ 2x_1+3x_2+2x_3-x_4=-2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-1;-5;2)$, $M_2(-6;0;-3)$, $M_3(3;6;-3)$, $M_4(-10;6;7)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об’єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec p=(2;1;0)$, $\vec q=(1;-1;2)$, $\vec r=(3;7;-7)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec a=(2;2;-1)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec c$, *який ортогональний до векторів* $\vec p$ *і* $\vec q$, *якщо вектор* $\vec c$ *утворює гострий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec a=\vec p-2\vec q$ і $\vec b=2\vec p+\vec q, |\vec p|=2, |\vec q|=3, (\vec p,\vec q)=\dfrac{3\pi}{4}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec a$ *і* $\vec b$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec a$ *і* $\vec b$;
в) проекцію ï ð$_{\vec b}(-2\vec a+3\vec b)$.

9. Дано точки $A(3;1), B(4;5), C(2;0)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що проходить через прямі $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-1}{3}=z$ і $x=-t-1, y=t+3, z=t+2$; площиною, що перпендикулярна до площини Oxz і відтинає на осях Ox і Oz відрізки 2 і 3.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1;3;3)$ та прямі

$$l_1:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z+2}{1};$$
$$l_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z+1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо велика піввісь $a=11$, ексцентриситет $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{57}}{11}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\dfrac{2}{3}x$ і фокусна відстань $2c=10\sqrt{13}$;

в) параболи Π, якщо вісь симетрії Ox, $A(27;9)\in\Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$2x^2+4xy+5y^2-6x-8y-1=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2-y^2+z^2=4.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2+y^2=2ax, z=x, z=3x.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} y^2=2px, \\ z=0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$A\vec{x}=(x_1-3x_2^2;5x_2-x_3;4x_1-x_2)$

$B\vec{x}=(x_1+2x_2;2x_2-x_3;5x_1-x_2-2x_3)$.

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix}-1 & 9 & -6\\ 0 & 2 & 0\\ -1 & 10 & -1\end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2-5x_2^2-10x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3.$$

Варіант 6

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x)=0$:

$$A=\begin{Vmatrix} 12 & -3 \\ 4 & -2 \end{Vmatrix}; f(x)=x^2-10x-12.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A=\begin{Vmatrix} 4 & 5 \\ -5 & -6 \end{Vmatrix};\ б)\ A=\begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 5 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+y-5z=-12, \\ 2x+4y+z=13, \\ 3x+y-3z=-4. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í}=x_{ç.î}+x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 8x_1+3x_2-x_3+x_4=1, \\ 4x_1+12x_2-9x_3+8x_4=9, \\ 12x_1+15x_2-10x_3+9x_4=10, \\ 4x_1-9x_2+8x_3-7x_4=-8. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(0;-1;-1)$, $M_2(-2;3;5), M_3(1;-5;-9), M_4(-1;-6;3)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec p=(1;2;0)$, $\vec q=(2;-1;3), \vec r=(0;1;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec a=(2;0;-1)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec c$, *який ортогональний до векторів* $\vec p$ *і* $\vec q$, *якщо вектор* $\vec c$ *утворює тупий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec a=\vec p+3\vec q$ і $\vec b=\vec p-2\vec q, |\vec p|=2, |\vec q|=3, (\vec p,\vec q)=\dfrac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec a$ *і* $\vec b$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec a$ *і* $\vec b$;
в) проекцію ï ð$_{\vec b}(2\vec a+4\vec b)$.

9. Дано точки $A(1;3), B(-2;1), C(0;-3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oyz; площиною Oxy; площиною, що проходить через точку $(4;-1;0)$ і відтинає на осях Ox і Oz відрізки 2 і 3; площиною, що проходить через точку $(0;3;0)$ і пряму $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{-4}$.
Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1;0;1)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z}{-1};$$

$$l_2 : \frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-2}{-1}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b=\sqrt{15}$ *і ексцентриситет* $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{10}}{25}$;

б) гіперболи, якщо рівняння її асимптот $y=\pm\dfrac{3}{4}x$ *і дійсна піввісь* $a=8$;

в) параболи Π, *якщо її вісь симетрії* Oy, $A(4;-8)\in\Pi$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2-4xy+4y^2-4x-3y-7=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$z^2-x^2-2y=0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$2z=x^2-y^2, z=0, z=2.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x^2+(y-4)^2=1, \\ z=0 \end{cases}$ навколо осі Ox.
Зробити рисунок.

18. З’ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x}=(x_3;x_1+2x_2;-7x_1-3x_3)$$

$$B\vec{x}=(x_1;x_2+x_3^3;x_1-2x_2-x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.

$$A=\begin{Vmatrix} -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ -2 & 0 & -2 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2+3x_2^2+9x_3^2-2x_1x_2-2x_1x_3.$$

Варіант 7

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 0 & 6 & -1 & 8 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} -5 & 4 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 + 5x - 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\, A = \begin{Vmatrix} 5 & -4 \\ 9 & -7 \end{Vmatrix};\ б)\, A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \\ -5 & -4 & -1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6z = 0, \\ 2x - 3y + z = 0, \\ 3x - y - z = 2. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 = -1, \\ 2x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 1, \\ 3x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 11x_4 = 0, \\ 5x_1 + 15x_2 + 14x_3 + 21x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(5;2;0)$, $M_2(2;5;0), M_3(1;2;4), M_4(-1;1;1)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, застосовуючи проекцію вектора на вісь.

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;1;2)$, $\vec{q} = (1;0;1), \vec{r} = (-1;2;4)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (-2;4;7)$ в цьому базисі;
б) одиничний вектор $\vec{c}$, який ортогональний до векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектор $\vec{c}$ утворює тупий кут з віссю Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = 2\vec{p} - \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} + 3\vec{q}$, $|\vec{p}| = 3, |\vec{q}| = 2, (\vec{p},\vec{q}) = \dfrac{\pi}{2}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;
в) проекцію ї $ð_{\vec{b}}(-2\vec{a} - 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-3;-2), B(2;0), C(-1;1)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, записати як рівняння у відрізках;
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A паралельно до бісектриси BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площиною Oyz; площиною, що проходить через точку $(0;2;0)$ паралельно площині Oxz; площиною, що проходить через точку $(1;0;3)$ і містить вісь Oy; площиною, що проходить через точку $(0;0;3)$ і пряму $\frac{x}{1}=\frac{y-5}{-5}=\frac{z}{2}$.
Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(0;3;-1)$ та прямі

$$l_1:\frac{x+4}{2}=\frac{y-4}{-1}=\frac{z+1}{-2};$$
$$l_2:\frac{x+5}{4}=\frac{y-5}{-3}=\frac{z-5}{-5}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:
а) еліпса, якщо велика піввісь $a=4$ *і один з фокусів* $F(3;0)$;
б) гіперболи, якщо уявна піввісь $b=2\sqrt{10}$ *і один з фокусів* $F(-11;0)$;
в) параболи, якщо її директриса $D: x=-2$.
Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:
$3x^2+10xy+3y^2-2x-14y-13=0$.

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$\frac{x^2}{25}-z^2-\frac{y^2}{9}=1.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z^2=4(x^2+y^2), x^2+y^2+z^2=1.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} z=\sqrt{1-x^2}, \\ y=0 \end{cases}$ навколо осі Oz. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x}=(0;x_1+4x_3;4x_1-x_2-x_3)$$
$$B\vec{x}=(x_1+3;x_2+3x_3;x_1-4x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю.
$$A=\begin{Vmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -15 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{Vmatrix}.$$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-x_1^2-6x_2^2-10x_3^2+4x_1x_2+6x_2x_3.$$

Варіант 8

1. Обчислити визначник:
а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 6 & -1 \\ -3 & 2 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 8x + 9.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$а)\ A = \begin{Vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{Vmatrix};\ б)\ A = \begin{Vmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв’язати систему рівнянь:
а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} x + 3y - 2z = -1, \\ 2x - 3y + 4z = 13, \\ 3x + y + z = 10. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв’язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв’язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í}\ ,$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв’язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв’язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв’язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -7, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -11. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(2;-1;-2)$, $M_2(1;2;1), M_3(5;0;-6), M_4(-10;9;-7)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:
а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об’єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (1;3;0)$, $\vec{q} = (2;-1;1), \vec{r} = (0;-1;2)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:
а) координати вектора $\vec{a} = (6;12;-1)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = 4\vec{p} + \vec{q}$ і $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 7, |\vec{q}| = 2, (\vec{p},\vec{q}) = \dfrac{\pi}{4}$.
Знайти:
а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію ï $ð_{\vec{b}}(-3\vec{a} + \vec{b})$.

9. Дано точки $A(-4;2), B(3;3), C(6;8)$. У ΔABC знайти:
а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, застосовуючи формулу знаходження відстані від точки M_4 до площини $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 відносно площини $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 відносно ребра M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 та площиною $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ та $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами Oxz та Oyz; площиною, що паралельна осі Oy і проходить через точки $(3;0;0)$ і $(0;0;1)$; площиною, що проходить через прямі $x = 2t, y = -3t + 3, z = t$ і $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(3;2;6)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-3}{-1};$$
$$l_2 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-2}{-3}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 на пряму l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 і l_2 та найкоротшу відстань між ними.

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса, якщо мала піввісь $b = 4$ і один з фокусів $F(3;0)$;

б) гіперболи, якщо дійсна піввісь $a = 4$, ексцентриситет $\varepsilon = \dfrac{7}{5}$;

в) параболи, якщо її директриса $D : x = 6$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$9x^2 - 4xy + 6y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$4x^2 - 3y^2 + 6z^2 - 18 = 0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$y = x^2, z = y, z + y = 2.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} x = y, \\ z = 0 \end{cases}$ навколо осі Ox. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (3x_2 - x_3; x_1 + x_3; x_2 - 4x_3)$$
$$B\vec{x} = (x_1; x_2^2 + x_3; -x_1 + x_2).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю. $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -8 & 5 & 12 \\ 1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$4x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

Варіант 9

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 3 \\ 3 & -10 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x) = 0$:

$$A = \begin{Vmatrix} 8 & -3 \\ -4 & 2 \end{Vmatrix}; f(x) = x^2 - 10x + 4.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

а) $A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{Vmatrix}$; *б)* $A = \begin{Vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{Vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x + y + 4z = 11, \\ 4x + 2y + 4z = 14, \\ 3x - y + 5z = 12. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í} = x_{ç.î} + x_{÷.í} ,$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 35, \\ x_1 - x_3 - 2x_4 = -5, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 50. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(-2;0;-4)$, $M_2(-1;7;1), M_3(4;-8;-4), M_4(1;-4;6)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;

б) кут $\angle M_2M_1M_3$;

в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;

г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;

д) висоту піраміди M_4H, *застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p} = (0;3;2)$, $\vec{q} = (2;1;-1), \vec{r} = (1;-1;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a} = (1;-4;4)$ *в цьому базисі;*

б) одиничний вектор $\vec{c}$, *який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$, *якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a} = \vec{p} - 4\vec{q}$ і $\vec{b} = 3\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 1, |\vec{q}| = 2, (\vec{p}, \vec{q}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;

в) проекцію ï $ð_{\vec{b}}(\vec{a} - 3\vec{b})$.

9. Дано точки $A(-3;-1), B(1;-6), C(9;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM, *записати як рівняння у відрізках;*

б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;

в) рівняння висоти CD, *записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;

г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: координатними площинами; площиною, що паралельна осі Ox і проходить через точки $(0;3;0)$ і $(0;0;2)$; площиною, що проходить через прямі $\frac{x}{-3}=\frac{y-3}{0}=\frac{z}{3}$ і $x=t+1,$ $y=-2t+1, z=t+1.$

Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(4;3;10)$ та прямі

$$l_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{5};$$

$$l_2:\frac{x}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-1}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E, *якщо* $A(0;\sqrt{3}), B\ \sqrt{\frac{14}{3}};1\ \in \mathrm{E}$;

б) гіперболи Γ, *якщо ексцентриситет* $\varepsilon=\frac{8}{7}, A(8;0)\in\Gamma$*;*

в) параболи, якщо її директриса $D: y=-4$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$x^2-2xy+y^2-10x-6y+25=0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$4x^2+3y^2-24z=0.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$x^2-y^2=2az, x^2+y^2\le a^2, z=0.$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\\ z=0\end{cases}$ навколо осі $Ox.$ Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x}=(4x_1-x_2+x_3;0;x_1-x_2-x_3)$$

$$B\vec{x}=(x_1+x_2;x_2-x_3;5).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю. $A=\begin{Vmatrix}2&0&12\\-9&5&3\\-1&0&-5\end{Vmatrix}.$

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$2x_1^2+5x_2^2+6x_3^2+6x_1x_2+2x_2x_3.$$

Варіант 10

1. Обчислити визначник:

а) зведенням до трикутного вигляду;
б) методом розкладу за елементами деякого рядка або стовпця.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ -5 & -10 & -5 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Довести, що матриця A задовольняє рівняння $f(x)=0$:

$$A=\begin{Vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{Vmatrix}; f(x)=x^2-x-2.$$

3. Для матриці A знайти обернену матрицю A^{-1}. Результат перевірити.

$$\text{а) } A=\begin{Vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -4 \end{Vmatrix}; \text{ б) } A=\begin{Vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

4. Розв'язати систему рівнянь:

а) за формулами Крамера;
б) методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x+2y-z=-10, \\ x+2y-3z=-14, \\ 2x-y-z=-3. \end{cases}$$

5. Дослідити на сумісність систему лінійних алгебричних рівнянь. Знайти фундаментальну систему розв'язків відповідної однорідної системи. Знайти загальний розв'язок неоднорідної системи за формулою:

$$x_{ç.í}=x_{ç.î}+x_{÷.í},$$

де $x_{ç.í}$ — загальний розв'язок неоднорідної системи; $x_{ç.î}$ — загальний розв'язок однорідної системи; $x_{÷.í}$ — частинний розв'язок неоднорідної системи.

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+4x_4=5, \\ 4x_1-2x_2+5x_3+6x_4=7, \\ 6x_1-3x_2+7x_3+8x_4=9, \\ 2x_1-x_2+2x_3+2x_4=2. \end{cases}$$

6. Дано координати точок $M_1(14;4;5)$, $M_2(-5;-3;2), M_3(-2;-6;-3), M_4(-2;2;-1)$. Довести, що вони не лежать в одній площині. Знайти:

а) довжину та напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$;
б) кут $\angle M_2M_1M_3$;
в) площу $\Delta M_1M_2M_3$;
г) об'єм піраміди $M_1M_2M_3M_4$;
д) висоту піраміди M_4H*, застосовуючи проекцію вектора на вісь.*

7. Дано вектори $\vec{p}=(4;1;1)$, $\vec{q}=(2;0;-3), \vec{r}=(-1;2;1)$. Довести, що вони утворюють базис. Знайти:

а) координати вектора $\vec{a}=(-9;5;5)$ *в цьому базисі;*
б) одиничний вектор $\vec{c}$*, який ортогональний до векторів* $\vec{p}$ *і* $\vec{q}$*, якщо вектор* $\vec{c}$ *утворює тупий кут з віссю* Ox.

8. Дано вектори $\vec{a}=\vec{p}+4\vec{q}$ і $\vec{b}=2\vec{p}-\vec{q}, |\vec{p}|=7, |\vec{q}|=2, (\vec{p},\vec{q})=\dfrac{\pi}{3}$.

Знайти:

а) площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
б) довжини діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ *і* $\vec{b}$;
в) проекцію ї $ð_{\vec{b}}(2\vec{a}-\vec{b})$.

9. Дано точки $A(3;-2), B(1;5), C(-4;3)$. У ΔABC знайти:

а) рівняння медіани AM*, записати як рівняння у відрізках;*
б) канонічне та загальне рівняння бісектриси BF;
в) рівняння висоти CD*, записати як нормальне рівняння та рівняння з кутовим коефіцієнтом, обчислити довжину* CD;
г) параметричне рівняння прямої, що проходить через точку A *паралельно до бісектриси* BF.

10. Дано координати точок M_1, M_2, M_3, M_4 (див. завдання 6). Знайти:

а) нормальне рівняння площини $M_1M_2M_3$;

б) довжину висоти M_4H, *застосовуючи формулу знаходження відстані від точки* M_4 *до площини* $M_1M_2M_3$;

в) точку, симетричну точці M_4 *відносно площини* $M_1M_2M_3$;

г) точку, симетричну точці M_4 *відносно ребра* M_1M_2;

д) кут між прямою M_1M_4 *та площиною* $M_1M_2M_3$;

е) рівняння площини, яка поділяє навпіл двогранний кут між площинами $M_1M_2M_4$ *та* $M_1M_2M_3$.

11. Скласти рівняння усіх граней піраміди, яка обмежена: площинами Oxy та Oxz; площиною, що проходить через пряму $\begin{cases} 3x + z - 3 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, паралельно осі Oy; площиною, що проходить через точку $(2;0;0)$ і пряму $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-4}$.
Зобразити піраміду графічно.

12. Задано точку $M_0(-1;0;-6)$ та прямі

$$l_1 : \frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1};$$

$$l_2 : \frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}.$$

а) скласти канонічне рівняння та обчислити довжину перпендикуляра, проведеного з точки M_0 *на пряму* l_1;

б) знайти рівняння спільного перпендикуляра до прямих l_1 *і* l_2 *та найкоротшу відстань між ними.*

13. Скласти канонічне та полярне рівняння:

а) еліпса E, *якщо ексцентриситет* $\varepsilon = \dfrac{7}{8}, A(8;0) \in \mathrm{E}$;

б) гіперболи Γ, *якщо* $A\ 3;-\sqrt{\dfrac{15}{2}}$, $B\ \sqrt{\dfrac{28}{3}};2\ \in \Gamma$;

в) параболи, якщо її директриса $D : y = 4$.

Визначити всі характеристики кривих. Побудувати ці криві.

14. Записати канонічне рівняння кривої другого порядку, визначити її тип:

$$5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0.$$

15. Визначити тип та побудувати поверхню:

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = 4z.$$

16. Побудувати тіло, обмежене поверхнями:

$$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = a^2,$$

$$y = x, y = 2x, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0).$$

17. Скласти рівняння поверхні тіла, утвореного обертанням кривої $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0 \end{cases}$ навколо осі Oz. Зробити рисунок.

18. З'ясувати, які із заданих відображень $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ є лінійними. Для лінійних відображень обчислити їх матриці в канонічному базисі:

$$A\vec{x} = (5x_1 + 2x_2^2; x_2 - x_3; x_1)$$

$$B\vec{x} = (0; x_1 + 2x_2 + 3x_3; x_2 - 3x_3).$$

19. Знайти власні числа і власні вектори матриці A. Побудувати подібну їй діагональну матрицю. $A = \begin{Vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & 12 \\ 1 & 0 & 4 \end{Vmatrix}$.

20. Знайти ортогональні перетворення, які приводять квадратичну форму з завдання 14 до канонічного вигляду, записати канонічний вигляд цієї форми.

21. Застосовуючи теорему Сильвестра, дослідити на знаковизначеність квадратичну форму:

$$-6x_1^2 - x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 6x_2x_3.$$