УДК 517(076.1)
ББК 22.161я73
З-15

Коллектив авторов:

Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко,
С. М. Коган, Г. С. Лунц, Е. Ф. Поршнева, Е. П. Сычева,
С. В. Фролов, Р. Я. Шостак, А. Р. Янпольский

З-15 **Задачи** и упражнения по математическому анализу для втузов: Учеб. пособие для студентов высш. техн. учеб. заведений / Г. С. Бараненков, Б. П. Демидович, В. А. Ефименко и др.; Под ред. Б. П. Демидовича. — М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2004 — 495, [1] с.: ил.

ISBN 5-17-002965-9 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 5-271-01118-6 (ООО «Издательство Астрель»)

Данный сборник содержит свыше 3000 задач и охватывает все разделы втузовского курса высшей математики. В сборнике приводятся основные теоретические сведения, определения и формулы к каждому разделу курса, а также решения особо важных типовых задач.

Задачник предназначен для студентов втузов, а также для лиц, занимающихся самообразованием.

УДК 517(076.1)
ББК 22.161я73

Подписано в печать с готовых диапозитивов 08.12.2003.
Формат 60×90[1]/[16]. Бумага офсетная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 31,0. Тираж 8000 экз. Заказ 15.

ISBN 5-17-002965-9 (ООО «Издательство АСТ»)
ISBN 5-271-01118-6 (ООО «Издательство Астрель»)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В сборнике подобраны задачи и примеры по математическому анализу применительно к программе общего курса высшей математики высших технических учебных заведений. Сборник содержит свыше 3000 задач, систематически расположенных в главах (I—X), и охватывает все разделы втузовского курса высшей математики (за исключением аналитической геометрии). Особое внимание обращено на важнейшие разделы курса, требующие прочных навыков (нахождение пределов, техника дифференцирования, построение графиков функций, техника интегрирования, приложения определенных интегралов, ряды, решение дифференциальных уравнений). Включены, кроме того, задачи на теорию поля, метод Фурье и приближенные вычисления. Приведенное количество задач, как показывает практика преподавания, не только с избытком удовлетворяет потребности студентов по практическому закреплению соответствующих разделов курса, но и дает возможность преподавателю разнообразить выбор задач в пределах данного раздела и подбирать задачи для итоговых заданий и контрольных работ.

В начале каждой главы дается краткое теоретическое введение и приводятся основные определения и формулы, относящиеся к соответствующему разделу курса. Здесь же показаны образцы решений особо важных типовых задач. Это обстоятельство в значительной мере облегчит студенту пользование задачником в самостоятельной работе. На все вычислительные задачи даны ответы; в задачах, отмеченных звездочкой (*) или двумя звездочками (**), в ответах приведены соответственно краткие указания к решениям или решения. Для наглядности часть задач иллюстрируется чертежами.

Сборник сложился в результате многолетнего преподавания авторами высшей математики в высших технических учебных заведениях г. Москвы. В нем кроме оригинальных задач и примеров помещены общеизвестные задачи.

Глава I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Понятие функции

1°. Действительные числа. Числа рациональные и иррациональные носят название *действительных* или *вещественных* чисел. *Под абсолютной величиной* действительного числа a понимается неотрицательное число $|a|$, определяемое условиями: $|a| = a$, если $a \geqslant 0$, и $|a| = -a$, если $a < 0$. Для любых вещественных чисел a и b справедливо неравенство

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|.$$

2°. Определение функции. Если каждому значению*) переменной величины x, принадлежащему некоторой совокупности (множеству) E, соответствует одно и только одно конечное значение величины y, то y называется *функцией* (однозначной) от x или *зависимой переменной*, определенной на множестве E; x называется *аргументом* или *независимой переменной*. То обстоятельство, что y есть функция от x, кратко выражают записью: $y = f(x)$ или $y = F(x)$ и т. п.

Если каждому значению x, принадлежащему некоторому множеству E, соответствует одно или несколько значений переменной величины y, то y называется *многозначной функцией* от x, определенной на множестве E. В дальнейшем под словом «функция» мы будем понимать только однозначные функции, если явно не оговорено противное.

3°. Область существования функции. Совокупность значений x, для которых данная функция определена, называется *областью существования* или *областью определения* этой функции.

В простейших случаях область существования функции представляет собой: или *отрезок* (*сегмент*) $[a; b]$, т. е. множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$; или *промежуток* (*интервал*) (a, b), т. е. множество вещественных чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$. Но возможна и более сложная структура области существования функции (см., например, задачу 21).

Пример 1. Определить область существования функции

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Решение. Функция определена, если

$$x^2 - 1 > 0,$$

*) В дальнейшем все рассматриваемые значения величин будут предполагаться вещественными, если явно не оговорено противное.

т. е. если $|x| > 1$. Таким образом, область существования функции представляет собой совокупность двух интервалов: $-\infty < x < -1$ и $1 < x < +\infty$.

4°. Обратные функции. Если уравнение $y = f(x)$ может быть однозначно разрешено относительно переменного x, т. е. существует функция $x = g(y)$ такая, что $y \equiv f[g(y)]$, то функция $x = g(y)$, или в стандартных обозначениях $y = g(x)$, называется *обратной* по отношению к $y = f(x)$. Очевидно, что $g[f(x)] \equiv x$, т. е. функции $f(x)$ и $g(x)$ являются *взаимно обратными*.

В общем случае уравнение $y = f(x)$ определяет многозначную обратную функцию $x = f^{-1}(y)$ такую, что $y \equiv f(f^{-1}(y))$ для всех y, являющихся значениями функции $f(x)$.

Пример 2. Для функции

$$y = 1 - 2^{-x} \tag{1}$$

определить обратную.

Решение. Решив уравнение (1) относительно x, будем иметь

$$2^{-x} = 1 - y \text{ и } x = -\frac{\lg(1-y)}{\lg 2}^{*)}. \tag{2}$$

Область определения функции (2), очевидно, следующая: $-\infty < y < 1$.

5°. Сложные и неявные функции. Функция y от x, заданная цепью равенств $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$ и т. п., называется *сложной* или *функцией от функции*.

Функция, заданная уравнением, не разрешенным относительно зависимой переменной, называется *неявной*. Например, уравнение $x^3 + y^3 = 1$ определяет y как неявную функцию от x.

6°. Графическое изображение функции. Множество точек (x, y) плоскости XOY, координаты которых связаны уравнением $y = f(x)$, называется графиком данной функции.

1.** Доказать, что если a и b — действительные числа, то

$$||a| - |b|| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|.$$

2. Доказать следующие равенства:

а) $|ab| = |a| \cdot |b|$; в) $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$;

б) $|a|^2 = a^2$; г) $\sqrt{a^2} = |a|$.

3. Решить неравенства:

а) $|x - 1| < 3$; в) $|2x + 1| < 1$;

б) $|x + 1| > 2$; г) $|x - 1| < |x + 1|$.

4. Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, если $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$.

5. Найти $f(0)$, $f\left(-\frac{3}{4}\right)$, $f(-x)$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, если $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

*) $\lg x = \log_{10} x$, как всегда, обозначает десятичный логарифм числа x.

6. Пусть $f(x) = \arccos(\lg x)$. Найти $f\left(\frac{1}{10}\right)$, $f(1)$, $f(10)$.

7. Функция $f(x)$ — линейная. Найти эту функцию, если $f(-1) = 2$ и $f(2) = -3$.

8. Найти целую рациональную функцию $f(x)$ второй степени, если $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ и $f(3) = 5$.

9. Известно, что $f(4) = -2$, $f(5) = 6$. Найти приближенное значение $f(4,3)$, считая функцию $f(x)$ на участке $4 \leqslant x \leqslant 5$ линейной (*линейная интерполяция функции*).

10. Функцию

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x, \text{ если } x > 0, \end{cases}$$

записать при помощи одной формулы, пользуясь знаком абсолютной величины.

Определить области существования функций:

11. а) $y = \sqrt{1 + x}$; б) $y = \sqrt[3]{1 + x}$.

12. $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$.

13. а) $y = \sqrt{x^2 - 2}$; б) $y = x\sqrt{x^2 - 2}$.

14.** $y = \sqrt{2 + x - x^2}$.

15. $y = \sqrt{-x} + \dfrac{1}{\sqrt{2 + x}}$.

16. $y = \sqrt{x - x^3}$.

17. $y = \lg \dfrac{2 + x}{2 - x}$.

18. $y = \lg \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$.

19. $y = \arccos \dfrac{2x}{1 + x}$.

20. $\arcsin\left(\lg \dfrac{x}{10}\right)$.

21. $y = \sqrt{\sin 2x}$.

22. Пусть $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 6x - 10$. Найти

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] \text{ и } \psi(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)].$$

23. Функция $f(x)$, определенная в симметричной области $-l < x < l$, называется *четной*, если $f(-x) = f(x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$.

Выяснить, какие из данных функций являются четными и какие нечетными:

а) $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$; г) $f(x) = \lg \dfrac{1 + x}{1 - x}$;

б) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x + x^2}$; д) $f(x) = \lg(x + \sqrt{1 + x^2})$.

в) $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$;

24*. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в интервале $-l < x < l$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

25. Доказать, что произведение двух четных функций или двух нечетных функций есть функция четная, а произведение четной функции на нечетную есть функция нечетная.

26. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует положительное число T (*период функции*) такое, что $f(x + T) \equiv f(x)$ для всех значений x, принадлежащих области существования функции $f(x)$.

Определить, какие из перечисленных ниже функций являются периодическими, и для периодических функций найти наименьший их период T:

а) $f(x) = 10 \sin 3x$; г) $f(x) = \sin^2 x$;

б) $f(x) = a\sin \lambda x + b\cos \lambda x$; д) $f(x) = \sin(\sqrt{x})$.

в) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

27. Выразить длину отрезка $y = MN$ и площадь S фигуры AMN как функции от $x = AM$ (рис. 1). Построить графики этих функций.

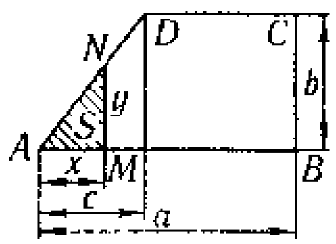


Рис. 1.

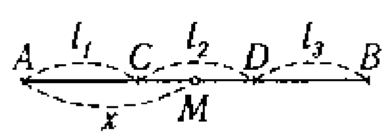


Рис. 2.

28. Линейная плотность (т. е. масса единицы длины) стержня $AB = l$ (рис. 2) на участках $AC = l_1$, $CD = l_2$ и $DB = l_3$ $(l_1 + l_2 + l_3 = l)$ равна соответственно q_1, q_2, q_3. Выразить массу m переменного отрезка $AM = x$ этого стержня как функцию от x. Построить график этой функции.

29. Найти $\varphi[\psi(x)]$ и $\psi[\varphi(x)]$, если $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = 2^x$.

30. Найти $f\{f\,[f(x)]\}$, если $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

31. Найти $f(x + 1)$, если $f(x - 1) = x^2$.

32. Пусть $f(n)$ есть сумма n членов арифметической прогрессии. Показать, что

$$f(n+3) - 3f(n + 2) + 3f(n + 1) - f(n) = 0.$$

33. Показать, что если

$$f(x) = kx + b$$

и числа x_1, x_2, x_3 образуют арифметическую прогрессию, то числа $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$ также образуют арифметическую прогрессию.

34. Доказать, что если $f(x)$ есть показательная функция, т. е. $f(x) = a^x$ $(a > 0)$, и числа x_1, x_2, x_3 образуют арифметическую прогрессию, то числа $f(x_1)$, $f(x_2)$ и $f(x_3)$ образуют геометрическую прогрессию.

35. Пусть

$$f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}.$$

Показать, что

$$f(x) + f(y) = f\left(\frac{x+y}{1+xy}\right).$$

36. Пусть $\varphi(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ и $\psi(x) = \frac{1}{2}(a^x - a^{-x})$. Показать, что

$$\varphi(x + y) = \varphi(x)\varphi(y) + \psi(x)\psi(y)$$

и

$$\psi(x + y) = \varphi(x)\psi(y) + \varphi(y)\psi(x).$$

37. Найти $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, если

$$f(x) = \begin{cases} \arcsin x \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ \operatorname{arctg} x \text{ при } 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

38. Определить корни (нули) области положительности и области отрицательности функции y, если:

а) $y = 1 + x$; г) $y = x^3 - 3x$;

б) $y = 2 + x - x^2$; д) $y = \lg \dfrac{2x}{1+x}$.

в) $y = 1 - x + x^2$;

39. Для функции y найти обратную, если:

а) $y = 2x + 3$; г) $y = \lg \dfrac{x}{2}$;

б) $y = x^2 - 1$; д) $y = \operatorname{arctg} 3x$.

в) $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

В каких областях будут определены эти обратные функции?

40. Для функции

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^2, \text{ если } x > 0, \end{cases}$$

найти обратную.

41. Данные функции записать в виде цепи равенств, каждое звено которой содержит простейшую элементарную функцию (степенную, показательную, тригонометрическую и т. п.):

а) $y = (2x - 5)^{10}$; в) $y = \lg \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$;

б) $y = 2^{\cos x}$; г) $y = \arcsin\left(-3^{-x^2}\right)$.

42. Сложные функции, заданные цепью равенств, записать в виде одного равенства:

а) $y = u^2,\ u = \sin x$;

б) $y = \operatorname{arctg} u,\ u = \sqrt{v},\ v = \lg x$;

в) $y = \begin{cases} 2u, & \text{если } u \leqslant 0, \\ 0, & \text{если } u > 0; \end{cases}\ u = x^2 - 1.$

43. Записать в явном виде функции y, заданные уравнениями:

а) $x^2 - \arccos y = \pi$; б) $10^x + 10^y = 10$; в) $x + |y| = 2y$.

Найти области определения данных неявных функций.

§ 2. Графики элементарных функций

Построение графиков функций $y = f(x)$ в основном производится путем наметки достаточно густой сетки точек $M_i(x_i, y_i)$, где $y_i = f(x_i)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$, и соединения последних некоторой линией, характер которой учитывает положение промежуточных точек.

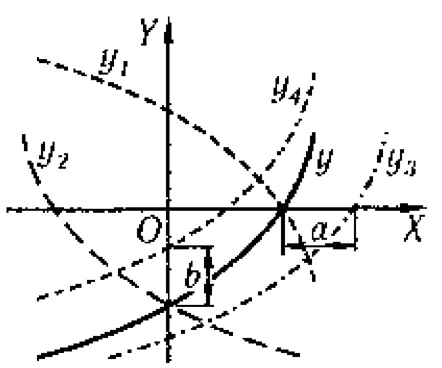


Рис. 3.

Построение графиков облегчает знакомство с графиками основных элементарных функций (см. приложение VI). Исходя из графика

$$y = f(x), \qquad (\Gamma)$$

с помощью простых геометрических построений получаем графики функций: 1) $y_1 = -f(x)$ — зеркальное отображение графика Г относительно оси OX; 2) $y_2 = f(-x)$ — зеркальное отображение графика Г относительно оси OY; 3) $y_3 = f(x - a)$ — график Г, смещенный вдоль оси OX на величину a; 4) $y_4 = b + f(x)$ — график Г, смещенный вдоль оси OY на величину b (рис. 3).

П р и м е р. Построить график функции

$$y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Р е ш е н и е. Искомая линия есть синусоида $y = \sin x$, сдвинутая вдоль оси OX вправо на величину $\frac{\pi}{4}$ (рис. 4).

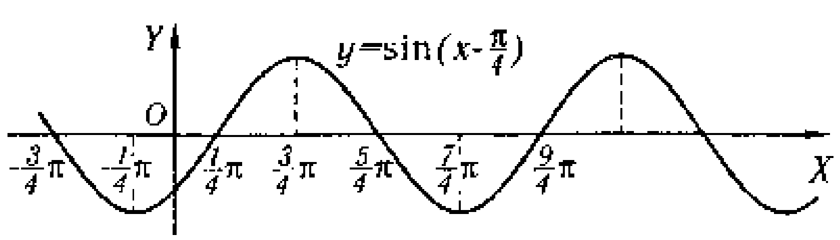


Рис. 4.

Построить графики линейных функций (*прямые линии*):

44. $y = kx$, если $k = 0,\ 1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ -2$.

45. $y = x + b$, если $b = 0,\ 1,\ 2,\ -1,\ -2$.

46. $y = 1{,}5\,x + 2$.

Построить графики целых рациональных функций 2-й степени (*параболы*):

47. $y = ax^2$, если $a = 1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ -1,\ -2,\ 0$.

48. $y = x^2 + c$, если $c = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

49. $y = (x - x_0)^2$, если $x_0 = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

50. $y = y_0 + (x - 1)^2$, если $y_0 = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

51*. $y = ax^2 + bx + c$, если:

1) $a = 1,\ b = -2,\ c = 3$;

2) $a - 2,\ b = 6,\ c = 0$.

52. $y = 2 + x - x^2$. Найти точки пересечения этой параболы с осью OX.

Построить графики целых рациональных функций степени выше второй:

53*. $y = x^3$ (*кубическая парабола*).

54. $y = 2 + (x - 1)^3$.

55. $y = x^3 - 3x + 2$.

56. $y = x^4$.

57. $y = 2x^3 - x^4$.

Построить графики дробно-линейных функций (*гиперболы*):

58*. $y = \frac{1}{x}$.

59. $y = \frac{1}{1 - x}$.

60. $y = \frac{x - 2}{x + 2}$.

61*. $y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}$, если $x_0 = 1,\ y_0 = -1,\ m = 6$.

62*. $y = \frac{2x - 3}{3x + 2}$.

Построить графики дробных рациональных функций:

63. $y = x + \frac{1}{x}$.

64. $y = \frac{x^2}{x + 1}$.

65*. $y = \frac{1}{x^2}$.

66. $y = \frac{1}{x^3}$.

67*. $y = \frac{10}{x^2 + 1}$ (*локон Аньези*).

68. $y = \frac{2x}{x^2 + 1}$ (*серпантин Ньютона*).

69. $y = x + \frac{1}{x^2}$.

70. $y = x^2 + \frac{1}{x}$ (*трезубец Ньютона*).

Построить графики иррациональных функций:

71*. $y = \sqrt{x}$.

72. $y = \sqrt[3]{x}$.

73*. $y = \sqrt[3]{x^2}$ (*парабола Нейля*).

74. $y = \pm x\sqrt{x}$ (*полукубическая парабола*).

75*. $y = \pm\frac{3}{5}\sqrt{25 - x^2}$ (*эллипс*).

76. $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ (*гипербола*).

77. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

78*. $y = \pm x\sqrt{\dfrac{x}{4 - x}}$ (*циссоида Диоклеса*).

79. $y = \pm x\sqrt{25 - x^2}$.

Построить графики тригонометрических функций:

80*. $y = \sin x$.

81*. $y = \cos x$.

82*. $y = \operatorname{tg} x$.

83*. $y = \operatorname{ctg} x$.

84*. $y = \sec x$.

85*. $y = \operatorname{cosec} x$.

86. $y = A\sin x$, если $A = 1,\ 10,\ \frac{1}{2},\ -2$.

87*. $y = \sin nx$, если $n = 1,\ 2,\ 3,\ \frac{1}{2}$.

88. $y = \sin(x - \varphi)$, если $\varphi = 0,\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \pi,\ -\frac{\pi}{4}$.

89*. $y = 5\sin(2x - 3)$.

90*. $y = a\sin x + b\cos x$, если $a = 6$, $b = -8$.

91. $y = \sin x + \cos x$.

92*. $y = \cos^2 x$.

93*. $y = x + \sin x$.

94*. $y = x\sin x$.

95. $y = \operatorname{tg}^2 x$.

96. $y = 1 - 2\cos x$.

97. $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x$.

98. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

99*. $y = \cos\frac{\pi}{x}$.

100. $y = \pm\sqrt{\sin x}$.

Построить графики показательных и логарифмических функций:

101. $y = a^x$, если $a = 2,\ \frac{1}{2},\ e$ ($e = 2{,}718\ldots$)[*)].

102*. $y = \log_a x$, если $a = 10,\ 2,\ \frac{1}{2},\ e$.

[*)] О числе e подробнее см. с. 19.

103*. $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.

104*. $y = \operatorname{ch} x$, где $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

105*. $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

106. $y = 10^{\frac{1}{x}}$.

107*. $y = e^{-x^2}$ (*кривая вероятностей*).

108. $y = 2^{-\frac{1}{x^2}}$.

109. $y = \lg x^2$.

110. $y = \lg^2 x$.

111. $y = \lg(\lg x)$.

112. $y = \dfrac{1}{\lg x}$.

113. $y = \lg\frac{1}{x}$.

114. $y = \lg(-x)$.

115. $y = \log_2(1 + x)$.

116. $y = \lg(\cos x)$.

117. $y = 2^{-x}\sin x$.

Построить графики обратных тригонометрических функций:

118*. $y = \arcsin x$.

119*. $y = \arccos x$.

120*. $y = \operatorname{arctg} x$.

121*. $y = \operatorname{arctg} x$.

122. $y = \arcsin\frac{1}{x}$.

123. $y = \arccos\frac{1}{x}$.

124. $y = x + \operatorname{arcctg} x$.

Построить графики функций:

125. $y = |x|$.

126. $y = \frac{1}{2}(x + |x|)$.

127. а) $y = x|x|$; б) $y = \log_{\sqrt{2}}|x|$.

128. а) $y = \sin x + |\sin x|$; б) $y = \sin x - |\sin x|$.

129. $y = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ \dfrac{2}{|x|} & \text{при } |x| > 0. \end{cases}$

130. а) $y = [x]$, б) $y = x - [x]$, где $[x]$ — целая часть числа x, т. е. наибольшее целое число, меньшее или равное x.

Построить графики функций в полярной системе координат (r, φ) $(r \geqslant 0)$:

131. $r = 1$ (*окружность*).

132*. $r = \frac{\varphi}{2}$ (*спираль Архимеда*).

133*. $r = e^{\varphi}$ (*логарифмическая спираль*).

134*. $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$ (*гиперболическая спираль*).

135. $r = 2\cos\varphi$ (*окружность*).

136. $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ (*прямая линия*).

137. $r = \sec^2\dfrac{\varphi}{2}$ (*парабола*).

138*. $r = 10\sin 3\varphi$ (*трехлепестковая роза*).

139*. $r = a(1+\cos\varphi)$ $(a > 0)$ (*кардиоида*).

140*. $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ $(a > 0)$ (*лемниската*).

Построить графики функций, заданных параметрическим способом:

141*. $x = t^3$, $y = t^2$ (*полукубическая парабола*).

142*. $x = 10\cos t$, $y = \sin t$ (*эллипс*).

143*. $x = 10\cos^3 t$, $y = 10\sin^3 t$ (*астроида*).

144*. $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ (*развертка круга*).

145*. $x = \dfrac{at}{1+t^3}$, $y = \dfrac{at^2}{1+t^3}$ (*декартов лист*).

146. $x = \dfrac{a}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \dfrac{at}{\sqrt{1+t^2}}$ (*полуокружность*).

147. $x = 2^t + 2^{-t}$, $y = 2^t - 2^{-t}$ (*ветвь гиперболы*).

148. $x = 2\cos^2 t$, $y = 2\sin^2 t$ (*отрезок прямой линии*).

149. $x = t - t^2$, $y = t^2 - t^3$.

150. $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$ (*кардиоида*).

Построить графики функций, заданных неявно:

151*. $x^2 + y^2 = 25$ (*окружность*).

152. $xy = 12$ (*гипербола*).

153*. $y^2 = 2x$ (*парабола*).

154. $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$ (*эллипс*).

155. $y^2 = x^2(100 - x^2)$.

156*. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ (*астроида*).

157*. $x + y = 10\lg y$.

158. $x^2 = \cos y$.

159*. $\sqrt{x^2+y^2} = e^{\operatorname{Arctg}\frac{y}{x}}$ (*логарифмическая спираль*).

160*. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (*декартов лист*).

161. Составить формулу перехода от шкалы Цельсия (°C) к шкале Фаренгейта (°F), если известно, что 0° C соответствует 32 °F и 100 °C соответствуют 212 °F.

Построить график полученной функции.

162. В треугольник, основание которого $b = 10$ и высота $h = 6$, вписан прямоугольник (рис. 5).

Выразить площадь этого прямоугольника y как функцию от основания его x.

Построить график этой функции и найти наибольшее ее значение.

163. В треугольнике ACB сторона $BC = a$, сторона $AC = b$ и переменный угол $\angle ACB = x$ (рис. 6).

Выразить $y =$ пл. ΔABC как функцию от x. Построить график этой функции и найти наибольшее ее значение.

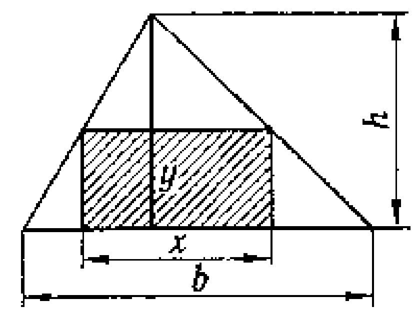


Рис. 5.

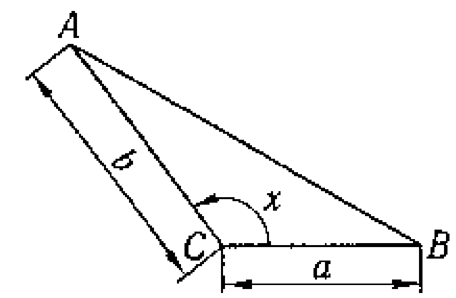


Рис. 6.

164. Решить графически уравнения:

а) $2x^2 - 5x + 2 = 0$;

б) $x^3 + x - 1 = 0$;

в) $\lg x = 0{,}1x$;

г) $10^{-x} = x$;

д) $x = 1 + 0{,}5\sin x$;

е) $\operatorname{ctg} x = x$ $(0 < x < \pi)$.

165. Решить графически системы уравнений:

а) $xy = 10$, $x + y = 7$;

б) $xy = 6$, $x^2 + y^2 = 13$;

в) $x^2 - x + y = 4$, $y^2 - 2x = 0$;

г) $x^2 + y = 10$, $x + y^2 = 6$;

д) $y = \sin x$, $y = \cos x$ $(0 < x < 2\pi)$.

§ 3. Пределы

1°. Предел последовательности. Число a называется *пределом последовательности* $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n > N.$$

Пример 1. Показать, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1} = 2. \qquad (1)$$

Решение. Составим разность

$$\frac{2n+1}{n+1} - 2 = -\frac{1}{n+1}.$$

Оценивая эту разность по абсолютной величине, будем иметь

$$\left|\frac{2n+1}{n+1} - 2\right| = \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \tag{2}$$

если

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 = N(\varepsilon).$$

Таким образом, для каждого положительного числа ε найдется число $N = \frac{1}{\varepsilon} - 1$ такое, что при $n > N$ будет иметь место неравенство (2). Следовательно, число 2 является пределом последовательности $x_n = (2n+1)/(n+1)$, т. е. справедлива формула (1).

2°. Предел функции. Говорят, что функция $f(x) \to A$ при $x \to a$ (A и a — числа), или

$$\lim_{x\to a} f(x) = A,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x) - A| < \varepsilon \text{ при } 0 < |x - a| < \delta.$$

Аналогично,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A,$$

если $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N(\varepsilon)$.

Употребляется также условная запись

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty,$$

которая обозначает, что $|f(x)| > E$ при $0 < |x - a| < \delta(E)$, где E — произвольное положительное число.

3°. Односторонние пределы. Если $x < a$ и $x \to a$, то условно пишут $x \to a - 0$; аналогично, если $x > a$ и $x \to a$, то это записывается так: $x \to a + 0$. Числа

$$f(a-0) = \lim_{x\to a-0} f(x) \text{ и } f(a+0) = \lim_{x\to a+0} f(x)$$

называются соответственно *пределом слева* функции $f(x)$ в точке a и *пределом справа* функции $f(x)$ в точке a (если эти числа существуют).

Для существования предела функции $f(x)$ при $x \to a$ необходимо и достаточно, чтобы имело место равенство

$$f(a-0) = f(a+0).$$

Если существуют $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то имеют место следующие теоремы:

1) $\lim\limits_{x\to a} [f_1(x) + f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) + \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a} [f_1(x)/f_2(x)] = \lim\limits_{x\to a} f_1(x)/\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ $(\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0)$.

Частое применение находят следующие пределы:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1;$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e = 2{,}71828\ldots .$$

Пример 2. Найти пределы справа и слева функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

при $x \to 0$.

Решение. Имеем:

$$f(+0) = \lim_{x\to +0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

и

$$f(-0) = \lim_{x\to -0}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Предела же функции $f(x)$ при $x \to 0$ в этом случае, очевидно, не существует.

166. Доказать, что при $n \to \infty$ предел последовательности

$$1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{n^2}, \ldots$$

равен нулю. Для каких значений n будет выполнено неравенство

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

(ε — произвольное положительное число)?

Произвести численный расчет, если: а) $\varepsilon = 0{,}1$; б) $\varepsilon = 0{,}01$; в) $\varepsilon = 0{,}001$.

167. Доказать, что предел последовательности

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

при $n \to \infty$ равен 1. При каких значениях $n > N$ будет выполнено неравенство

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

(ε — произвольное положительное число)?

Найти N, если: а) $\varepsilon = 0{,}1$; б) $\varepsilon = 0{,}01$; в) $\varepsilon = 0{,}001$.

168. Доказать, что

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Как подобрать для заданного положительного числа ε какое-нибудь положительное число δ, чтобы из неравенства

$$|x - 2| < \delta$$

следовало неравенство

$$|x^2 - 4| < \varepsilon?$$

Вычислить δ, если: а) $\varepsilon = 0{,}1$; б) $\varepsilon = 0{,}01$; в) $\varepsilon = 0{,}001$.

169. Выяснить точный смысл условных записей:

а) $\lim\limits_{x \to +0} \lg x = -\infty$; б) $\lim\limits_{x \to +0} 2^x = +\infty$; в) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

170. Найти пределы последовательностей:

а) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \ldots$;

б) $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \ldots, \frac{2n}{2n-1}, \ldots$;

в) $\sqrt{2}$; $\sqrt{2\sqrt{2}}$, $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, ...;

г) 0,2; 0,23; 0,233; 0,2333; ... .

Найти пределы:

171. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$.

172. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

173. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}\right]$.

174. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

175. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

176. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}\right)$.

177. $\lim\limits_{n \to \infty} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right]$.

178. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n^3}$.

179. $\lim\limits_{n \to \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$.

180. $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{n \sin n!}{n^2+1}$.

При отыскании предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x \to \infty$ оба члена отношения полезно предварительно разделить на x^n, где n — наивысшая степень этих многочленов.

Аналогичный прием во многих случаях можно применять и для дробей, содержащих иррациональности.

Пример 1.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(2x-3)(3x+5)(4x-6)}{3x^3+x-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(2-\frac{3}{x}\right)\left(3+\frac{5}{x}\right)\left(4-\frac{6}{x}\right)}{3+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{3} = 8.$$

Пример 2. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^3+10}} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{10}{x^3}}} = 1.$

181. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

182. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1000x}{x^2-1}$.

183. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2-5x+1}{3x+7}$.

184. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2-x+3}{x^3-8x+5}$.

185. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{(2x+3)^3(3x-2)^2}{x^5+5}$.

186. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2-3x-4}{\sqrt{x^4+1}}$.

187. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$.

188. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x^2}{10+x\sqrt{x}}$.

189. $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{x+1}$.

190. $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$.

Если $P(x)$ и $Q(x)$ — целые многочлены и $P(a) \neq 0$ или $Q(a) \neq 0$, то предел рациональной дроби

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

находится непосредственно.

Если же $P(a) = Q(a) = 0$, то дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ рекомендуется сократить один или несколько раз на бином $x - a$.

Пример 3.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-1} = 4.$$

191. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+1}{x^2+1}$.

192. $\lim\limits_{x \to 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$.

193. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$.

194. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$.

195. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

196. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$.

197. $\lim\limits_{h \to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h}$.

198. $\lim\limits_{x \to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$.

Выражения, содержащие иррациональности, приводятся к рациональному виду во многих случаях путем введения новой переменной.

Пример 4. Найти

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}.$$

Решение. Полагая

$$1+x=y^6,$$

имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^3-1}{y^2-1}=\lim_{y\to 1}\frac{y^2+y+1}{y+1}=\frac{3}{2}.$$

199. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

200. $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$.

201. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$.

202. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$.

Другим приемом нахождения предела от иррационального выражения является перевод иррациональности из числителя в знаменатель или, наоборот, из знаменателя в числитель.

Пример 5.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}\quad(a>0).$$

203. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$.

204. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$.

205. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

206. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$.

207. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

208. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}$.

209. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+h}-\sqrt[3]{x}}{h}$.

210. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2-2x+6}-\sqrt{x^2+2x-6}}{x^2-4x+3}$.

211. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

212. $\lim\limits_{x\to +\infty}[\sqrt{x(x+a)}-x]$.

213. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-5x+6}-x)$.

214. $\lim\limits_{x\to +\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

215. $\lim\limits_{x\to \infty}(x+\sqrt[3]{1-x^3})$.

При вычислении пределов во многих случаях используется формула

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

и предполагается известным, что $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ и $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$.

Пример 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 5x}{x}\cdot 5\right)=1\cdot 5=5.$

216. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

217. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

218. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{2x}$.

219. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$.

220. $\lim\limits_{n\to \infty}\left(n\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$.

221. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

222. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

223. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

224. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\operatorname{tg}\pi x}{x+2}$.

225. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sin(x+h)-\sin x}{h}$.

226. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{1-\operatorname{tg}x}$.

227. а) $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{1}{x}$.

228. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

229. $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}2x\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{x}-x\right)$.

230. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{1-\sin\frac{x}{2}}{\pi-x}$.

231. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{1-2\cos x}{\pi-3x}$.

232. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos mx-\cos nx}{x^2}$.

233. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

234. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$.

235. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{\sin 3x}$.

236. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$.

237. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin 2x}{x+\sin 3x}$.

238. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$.

239. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$.

240. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{x}$.

При нахождении пределов вида

$$\lim_{x\to a}[\varphi(x)]^{\psi(x)}=C \tag{3}$$

следует иметь в виду, что:

1) если существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to a}\varphi(x)=A \text{ и } \lim_{x\to a}\psi(x)=B,$$

то $C=A^B$;

2) если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = A \neq 1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \pm\infty$, то вопрос о нахождении предела (3) решается непосредственно;

3) если $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 1$ и $\lim\limits_{x\to a}\psi(x) = \infty$, то полагают $\varphi(x) = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$ и, следовательно,

$$C = \lim_{x\to a}\left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)\psi(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[\varphi(x)-1]\psi(x)},$$

где $e = 2{,}718\ldots$ — неперово число.

Пример 7. Найти

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x}.$$

Решение. Здесь

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right) = 2 \text{ и } \lim_{x\to 0}(1+x) = 1;$$

следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{x}\right)^{1+x} = 2^1 = 2.$$

Пример 8. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$$

и

$$\lim_{x\to\infty}x^2 = +\infty.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}\right)^{x^2} = 0.$$

Пример 9. Найти

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-1}{x+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1.$$

Произведя указанное выше преобразование, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^{x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\frac{-2}{x+1}\right)\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right\}^{\frac{-2x}{1+x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}} = e^{-2}.$$

В данном случае, не прибегая к общему приему, можно найти предел проще:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = e^{-2}.$$

Вообще, полезно помнить, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

Найти следующие односторонние пределы:

241. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{2+x}{3-x}\right)^x$.

242. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{x-1}{x^2-1}\right)^{x+1}$.

243. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\frac{2x}{x+1}}$.

244. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{\sin x}{x}}$.

245. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$.

246. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$.

247. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

248. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

249. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+3}\right)^{x+2}$.

250. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$.

251. $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

252.** а) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

При вычислении приведенных ниже пределов полезно знать, что если существует и положителен $\lim\limits_{x\to a}f(x)$, то

$$\lim_{x\to a}[\ln f(x)] = \ln\left[\lim_{x\to a}f(x)\right].$$

Пример 10. Доказать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \qquad (*)$$

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\left[\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\ln e=1.$$

Формула (*) часто используется при решении задач.

253. $\lim\limits_{x\to\infty}[\ln(2x+1)-\ln(x+2)]$.

254. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+10x)}{x}$.

255. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)$.

256. $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

257. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

258*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

259*. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$.

260*. $\lim\limits_{x\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)$ $(a>0)$.

261. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$.

262. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-e^{-x}}{\sin x}$.

263. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh}x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$

(см. №№ 103 и 104).

Найти следующие односторонние пределы:

264. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

265. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{th}x$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{th}x$, где $\operatorname{th}x=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

266. а) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$.

267. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

268. а) $\lim\limits_{x\to-0}\dfrac{|\sin x|}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{|\sin x|}{x}$.

269. а) $\lim\limits_{x\to 1-0}\dfrac{x-1}{|x-1|}$; б) $\lim\limits_{x\to 1+0}\dfrac{x-1}{|x-1|}$.

270. а) $\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{x}{x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2+0}\dfrac{x}{x-2}$.

Построить графики функций:

271.** $y=\lim\limits_{n\to\infty}(\cos^{2n}x)$.

272*. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

273. $y=\lim\limits_{\alpha\to\infty}\sqrt{x^2+\alpha^2}$.

274. $y=\lim\limits_{n\to\infty}(\operatorname{arctg}nx)$.

275. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}$ $(x\geqslant 0)$.

276. Превратить в обыкновенную дробь данную смешанную периодическую дробь

$$\alpha=0{,}13555\ldots,$$

рассматривая ее как предел соответствующей конечной дроби.

277. Что делается с корнями квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0,$$

если коэффициент a стремится к нулю, а коэффициенты b и c постоянны, причем $b\neq 0$?

278. Найти предел внутреннего угла правильного n-угольника при $n\to\infty$.

279. Найти предел периметров правильных n-угольников, вписанных в окружность радиуса R и описанных вокруг нее, при $n\to\infty$.

280. Найти предел суммы длин ординат кривой

$$y=e^{-x}\cos\pi x,$$

проведенных в точках $x=0, 1, 2, \ldots, n$, при $n\to\infty$.

281. Найти предел суммы площадей квадратов, построенных на ординатах кривой

$$y=2^{1-x},$$

как на основаниях, где $x=1, 2, 3, \ldots, n$, при условии, что $n\to\infty$.

282. Найти предел при $n\to\infty$ периметра ломаной $M_0M_1\ldots M_n$, вписанной в логарифмическую спираль

$$r=e^{-\varphi},$$

если вершины этой ломаной соответственно имеют полярные углы

$$\varphi_0=0,\ \varphi_1=\frac{\pi}{2},\ \ldots,\ \varphi_n=\frac{n\pi}{2}.$$

283. Отрезок $AB=a$ (рис. 7) разделен на n равных частей, и на каждой получившейся части, как на основании, построен равнобедренный треугольник с углами при основании, равными $\alpha=45°$. Показать, что предел периметра образовавшейся ломаной линии отличен от длины отрезка AB, несмотря на то что в пределе ломаная линия «геометрически сливается с отрезком AB».

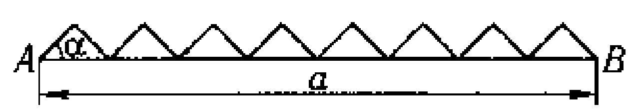


Рис. 7.

284. Точка C_1 делит отрезок $AB=l$ пополам; точка C_2 делит отрезок AC_1 пополам; точка C_3 делит отрезок C_2C_1 пополам, точка C_4 делит отрезок C_2C_3 пополам и т. д. Определить предельное положение точки C_n, когда $n\to\infty$.

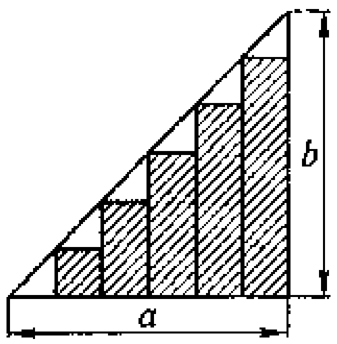


Рис. 8.

285. Катет a прямоугольного треугольника разделен на n равных частей, и на получившихся отрезках построены вписанные прямоугольники (рис. 8). Определить предел площади образовавшейся ступенчатой фигуры, если $n \to \infty$.

286. Найти постоянные k и b из уравнения

$$\lim_{x \to \infty}\left(kx + b - \frac{x^3+1}{x^2+1}\right) = 0. \qquad (1)$$

Выяснить геометрический смысл равенства (1).

287*. Некоторый химический процесс протекает так, что прирост количества вещества за каждый промежуток времени τ из бесконечной последовательности промежутков $(i\tau, (i+1)\tau)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ пропорционален наличному количеству вещества, имеющемуся в начале этого промежутка, и величине промежутка. Предполагая, что в начальный момент времени количество вещества составляло Q_0, определить количество вещества $Q_t^{(n)}$ через промежуток времени t, если прирост количества вещества происходит каждую n-ю часть промежутка времени $\tau = \dfrac{t}{n}$.

Найти $Q_t = \lim\limits_{x \to \infty} Q_t^{(n)}$.

§ 4. Бесконечно малые и бесконечно большие

1°. Б е с к о н е ч н о м а л ы е. Если

$$\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0,$$

т. е. если $|\alpha(x)| < \varepsilon$, при $0 < |x - a| < \delta(\varepsilon)$, то функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$. Аналогично определяется бесконечно малая $\alpha(x)$ при $x \to \infty$.

Сумма и произведение ограниченного числа бесконечно малых при $x \to a$ есть также бесконечно малые при $x \to a$.

Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые при $x \to a$ и

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = C,$$

где C — некоторое число, отличное от нуля, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного и того же порядка*; если же $C = 0$, то говорят, что функция $\alpha(x)$ есть *бесконечно малая высшего порядка* по сравнению с $\beta(x)$. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой порядка n* по сравнению с функцией $\beta(x)$, если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^n} = C,$$

где $0 < |C| < +\infty$.

Если

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *равносильными* (*эквивалентными*) *бесконечно малыми* при $x \to a$:

$$\alpha(x) \sim \beta(x).$$

Например, при $x \to 0$ имеем:

$$\sin x \sim x;\ \operatorname{tg} x \sim x;\ \ln(1 + x) \sim x$$

и т. п.

Сумма двух бесконечно малых различных порядков равносильна тому из слагаемых, порядок которого ниже.

Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если члены отношения заменить равносильными им величинами. В силу этой теоремы при нахождении предела дроби

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)},$$

где $\alpha(x) \to 0$ и $\beta(x) \to 0$ при $x \to a$, в числителе и знаменателе дроби можно откидывать (или добавлять) бесконечно малые высших порядков, подобранные так, чтобы оставшиеся величины были равносильными прежним.

П р и м е р 1.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^4}}{\ln(1+2x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x^3}}{2x} = \frac{1}{2}.$$

2°. Б е с к о н е ч н о б о л ь ш и е. Если для любого сколь угодно большого числа N существует такое $\delta(N)$, что при $0 < |x - a| < \delta(N)$ выполнено неравенство

$$|f(x)| > N,$$

то функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$.

Аналогично определяется бесконечно большая $f(x)$ при $x \to \infty$. Подобно тому, как это сделано для бесконечно малых, вводится понятие бесконечно больших различных порядков.

288. Доказать, что функция

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

является бесконечно малой при $x \to \infty$. Для каких значений x выполнено неравенство

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

если ε — произвольное число?

Произвести расчет для: а) $\varepsilon = 0{,}1$; б) $\varepsilon = 0{,}01$; в) $\varepsilon = 0{,}001$.

289. Доказать, что функция

$$f(x) = 1 - x^2$$

является бесконечно малой при $x \to 1$. Для каких значений x выполнено неравенство

$$|f(x)| < \varepsilon,$$

если ε — произвольное положительное число? Произвести численный расчет для: а) $\varepsilon = 0{,}1$; б) $\varepsilon = 0{,}01$; в) $\varepsilon = 0{,}001$.

290. Доказать, что функция

$$f(x) = \frac{1}{x-2}$$

является бесконечно большой при $x \to 2$. В каких окрестностях $|x-2| < \delta$ выполнено неравенство

$$|f(x)| > N,$$

если N — произвольное положительное число?

Найти δ, если: а) $N = 10$; б) $N = 100$; в) $N = 1000$.

291. Определить порядок малости: а) поверхности шара; б) объема шара, если радиус шара r есть бесконечно малая 1-го порядка. Каковы будут порядки малости радиуса шара и объема шара по отношению к поверхности этого шара?

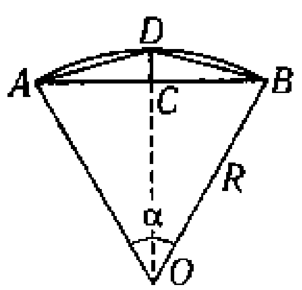


Рис. 9.

292. Пусть центральный угол α кругового сектора ABO (рис. 9) радиуса R стремится к нулю. Определить порядки бесконечно малых относительно бесконечно малой α: а) хорды AB; б) «стрелки» CD; в) площади ΔABD.

293. Определить при $x \to 0$ порядки малости относительно x функций:

а) $\dfrac{2x}{1+x}$; г) $1 - \cos x$;

б) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$; д) $\operatorname{tg} x - \sin x$.

в) $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x^3}$;

294. Доказать, что длина бесконечно малой дуги окружности постоянного радиуса равносильна длине стягивающей ее хорды.

295. Являются ли равносильными бесконечно малый отрезок и бесконечно малая полуокружность, построенная на этом отрезке, как на диаметре?

Пользуясь теоремой об отношении двух бесконечно малых, найти:

296. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x \cdot \sin 5x}{(x - x^3)^2}$. **298.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{1 - x}$.

297. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$. **299.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \cos 2x}{1 - \cos x}$.

300. Доказать, что при $x \to 0$ величины $\dfrac{x}{2}$ и $\sqrt{1+x} - 1$ равносильны между собой. Пользуясь этим результатом, показать, что при $|x|$ малом имеет место приближенное равенство

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}. \tag{1}$$

Применяя формулу (1), приближенно найти:

а) $\sqrt{1{,}06}$; б) $\sqrt{0{,}97}$; в) $\sqrt{10}$; г) $\sqrt{120}$

и сравнить полученные значения с табличными данными.

301. Доказать, что при $x \to 0$ с точностью до членов порядка x^2 имеют место приближенные равенства:

а) $\dfrac{1}{1+x} \approx 1 - x$;

б) $\sqrt{a^2 + x} \approx a + \dfrac{x}{2a}$ $(a > 0)$;

в) $(1 + x)^n \approx 1 + nx$ (n — натуральное);

г) $\lg(1 + x) \approx Mx$, где $M = \lg e = 0{,}43429\ldots$

Исходя из этих формул, приближенно вычислить:

1) $\dfrac{1}{1{,}02}$; 2) $\dfrac{1}{0{,}97}$; 3) $\dfrac{1}{105}$; 4) $\sqrt{15}$; 5) $1{,}04^3$; 6) $0{,}93^4$; 7) $\lg 1{,}1$.

Сравнить полученные значения с табличными данными.

302. Показать, что при $x \to \infty$ целая рациональная функция

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \quad (a_0 \neq 0)$$

есть бесконечно большая величина, равносильная старшему члену a_0x^n.

303. Пусть $x \to \infty$. Принимая x за бесконечно большую величину 1-го порядка, определить порядок роста функций:

а) $x^2 - 100x - 1000$; в) $\sqrt{x + \sqrt{x}}$;

б) $\dfrac{x^5}{x+2}$; г) $\sqrt[3]{x - 2x^2}$.

§ 5. Непрерывность функций

1°. Определение непрерывности. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* при $x = \xi$ (или «в точке ξ»), если: 1) эта функция определена в точке ξ, т. е. существует число $f(\xi)$; 2) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to \xi} f(x)$; 3) этот предел равен значению функции в точке ξ, т. е.

$$\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi). \tag{1}$$

Полагая

$$x = \xi + \Delta\xi,$$

где $\Delta\xi \to 0$, можно переписать условие (1) так:

$$\lim_{\Delta\xi \to 0} \Delta f(\xi) = \lim_{\Delta\xi \to 0} [f(\xi + \Delta\xi) - f(\xi)] = 0, \tag{2}$$

т. е. функция $f(x)$ непрерывна в точке ξ тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторой области (интервала, сегмента и т. п.), то она называется *непрерывной в этой области.*

Пример 1. Доказать, что функция

$$y = \sin x$$

непрерывна для любого аргумента x.

Решение. Имеем

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \Delta x.$$

Так как

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1 \text{ и } \left|\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leqslant 1,$$

то при любом x имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Следовательно, функция $\sin x$ непрерывна при $-\infty < x < +\infty$.

2°. Точки разрыва функции. Говорят, что функция $f(x)$ *терпит разрыв непрерывности* при значении $x = x_0$ (или в точке x_0), принадлежащем области определения функции или являющимся граничным для этой области, если в этой точке нарушается условие непрерывности функции.

Пример 2. Функция $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ (рис. 10, *а*) разрывна при $x = 1$. Эта функция не определена в точке $x = 1$, и как бы мы ни выбрали число $f(1)$, пополненная функция $f(x)$ не будет непрерывной при $x = 1$.

Если для функции $f(x)$ существуют конечные пределы

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \text{ и } \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0),$$

причем не все три числа $f(x_0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ равны между собой, то x_0 называется *точкой разрыва 1-го рода*. В частности, если

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0),$$

то x_0 называется *устранимой точкой разрыва.*

Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$f(x_0) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

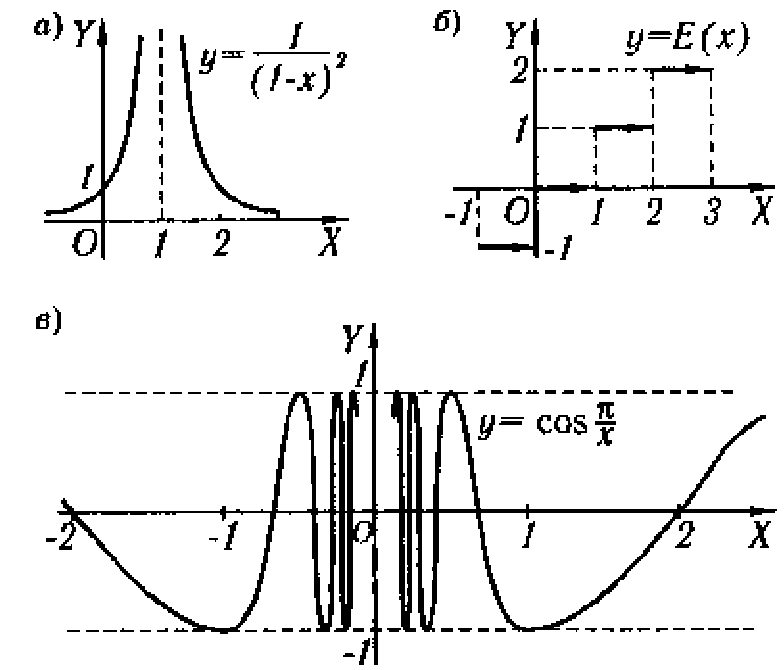


Рис. 10.

Пример 3. Функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$ имеет разрыв 1-го рода при $x = 0$. В самом деле, здесь

$$f(+0) = \lim_{x \to +0} \frac{\sin x}{x} = +1,$$

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} \frac{\sin x}{x} = -1.$$

Пример 4. Функция $y = E(x)$, где $E(x)$ обозначает целую часть числа x (т. е. $E(x)$ есть целое число, удовлетворяющее равенству $x = E(x) + q$, где $0 \leqslant q < 1$), разрывна (рис. 10, *б*) в каждой целочисленной точке: $x = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, причем все точки разрыва 1-го рода.

В самом деле, если n — целое, то $E(n - 0) = n - 1$ и $E(n + 0) = n$. Во всех остальных точках эта функция, очевидно, непрерывна.

Точки разрыва функции, не являющиеся точками разрыва 1-го рода, называются *точками разрыва 2-го рода.*

К точкам разрыва 2-го рода относятся также *точки бесконечного разрыва*, т. е. такие точки x_0, для которых хотя бы один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ равен ∞ (см. пример 2).

Пример 5. Функция $y = \cos\dfrac{\pi}{x}$ (рис. 10, *в*) в точке $x = 0$ имеет разрыв 2-го рода, так как здесь не существуют оба односторонних предела:

$$\lim_{x \to -0} \cos\frac{\pi}{x} \text{ и } \lim_{x \to +0} \cos\frac{\pi}{x}.$$

3°. Свойства непрерывных функций. При исследовании функции на непрерывность нужно иметь в виду следующие теоремы:

1) сумма и произведение ограниченного числа функций, непрерывных в некоторой области, есть функция, непрерывная в этой же области;

2) частное от деления двух непрерывных в некоторой области функций есть непрерывная функция при всех значениях аргумента из этой области, не обращающих делитель в нуль;

3) если функция $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b), причем множество ее значений содержится в интервале (A, B), и функция $\varphi(x)$ непрерывна в интервале (A, B), то сложная функция $\varphi[f(x)]$ непрерывна в интервале (a, b).

Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, обладает следующими свойствами:

1) $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, т. е. существует некоторое число M такое, что $|f(x)| \leqslant M$ при $a \leqslant x \leqslant b$;

2) $f(x)$ имеет на $[a, b]$ наименьшее и наибольшее значения;

3) $f(x)$ принимает все промежуточные значения между двумя данными, т. е. если $f(\alpha) = A$ и $f(\beta) = B$ $(a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b)$ и $A \neq B$, то, каково бы ни было число C, заключенное между числами A и B, найдется по меньшей мере одно значение $x = \gamma$ $(\alpha < \gamma < \beta)$ такое, что $f(\gamma) = C$.

В частности, если $f(\alpha)f(\beta) < 0$, то уравнение

$$f(x) = 0$$

имеет в интервале (α, β) по меньшей мере один вещественный корень.

304. Показать, что функция $y = x^2$ непрерывна при любом значении аргумента x.

305. Доказать, что целая рациональная функция

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$$

непрерывна при любом значении x.

306. Доказать, что дробная рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$$

непрерывна для всех значений x, за исключением тех, которые обращают знаменатель ее в нуль.

307*. Доказать, что функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна при $x \geqslant 0$.

308. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна в интервале (a, b), то функция

$$F(x) = \sqrt{f(x)}$$

также непрерывна в этом интервале.

309*. Доказать, что функция $y = \cos x$ непрерывна при любом x.

310. Для каких значений x непрерывны функции: а) $\operatorname{tg} x$ и б) $\operatorname{ctg} x$?

311*. Показать, что функция $y = |x|$ непрерывна. Построить график этой функции.

312. Доказать, что модуль непрерывной функции есть функция непрерывная.

313. Функция задана формулами

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{при } x \neq 2, \\ A & \text{при } x = 2. \end{cases}$$

Как следует выбрать значение функции $A = f(2)$, чтобы пополненная таким образом функция $f(x)$ была непрерывна при $x = 2$? Построить график функции $y = f(x)$.

314. Правая часть равенства

$$f(x) = 1 - x\sin\frac{1}{x}$$

теряет смысл при $x = 0$. Как следует выбрать значение $f(0)$ для того, чтобы функция $f(x)$ была непрерывна при $x = 0$?

315. Функция

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x-2}$$

теряет смысл при $x = 2$. Можно ли так определить значение $f(2)$, чтобы пополненная функция была непрерывной при $x = 2$?

316. Функция $f(x)$ не определена при $x = 0$. Определить $f(0)$ так, чтобы $f(x)$ была непрерывна при $x = 0$, если:

а) $f(x) = \dfrac{(1+x)^n - 1}{x}$ (n — натуральное); г) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{x}$;

б) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$; д) $f(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}$;

в) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1-x)}{x}$; е) $f(x) = x\operatorname{ctg} x$.

Исследовать на непрерывность функции:

317. $y = \dfrac{x^2}{x-2}$.

318. $y = \dfrac{1+x^3}{1+x}$.

319. $y = \dfrac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$.

320. $y = \dfrac{x}{|x|}$.

321. а) $y = \sin\dfrac{\pi}{x}$; б) $y = x\sin\dfrac{\pi}{x}$.

322. $y = \dfrac{x}{\sin x}$.

323. $y = \ln(\cos x)$.

324. $y = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|$.

325. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

326. $y = (1+x)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x^2}$.

327. $y = e^{\frac{1}{x+1}}$.

328. $y = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

329. $y = \dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$.

330. $y = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \leqslant 3, \\ 2x+1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$

Построить график этой функции.

331. Доказать, что функция Дирихле $\chi(x)$, равная нулю при x иррациональном и равная 1 при x рациональном, разрывна для каждого значения x.

Исследовать на непрерывность и построить графики функций:

332. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1+x^n}$ $(x \geqslant 0)$.

333. $y = \lim\limits_{n\to\infty} (x \operatorname{arctg} nx)$.

334. а) $y = \operatorname{sgn} x$, б) $y = x \operatorname{sgn} x$, в) $y = \operatorname{sgn}(\sin x)$, где функция $\operatorname{sgn} x$ определяется формулами

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} +1, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ -1, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

335. а) $y = x - E(x)$, б) $y = xE(x)$, где $E(x)$ есть целая часть числа x.

336. Привести пример, показывающий, что сумма двух разрывных функций может быть функцией непрерывной.

337*. Пусть α — правильная положительная дробь, стремящаяся к нулю $(0 < \alpha < 1)$. Можно ли в равенство

$$E(1 + \alpha) = E(1 - \alpha) + 1,$$

справедливое для всех значений α, подставить предел величины α?

338. Показать, что уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0$$

имеет в интервале (1, 2) действительный корень. Вычислить приближенно этот корень.

339. Доказать, что любой многочлен $P(x)$ нечетной степени имеет по меньшей мере один действительный корень.

340. Доказать, что уравнение

$$\operatorname{tg} x = x$$

имеет бесконечное множество действительных корней.

Глава II

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

§ 1. Непосредственное вычисление производных

1°. Приращение аргумента и приращение функции. Если x и x_1 — значения аргумента x, а $y = f(x)$ и $y_1 = f(x_1)$ — соответствующие значения функции $y = f(x)$, то

$$\Delta x = x_1 - x$$

называется *приращением аргумента* x на отрезке $[x, x_1]$, а

$$\Delta y = y_1 - y$$

или

$$\Delta y = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) \qquad (1)$$

— *приращением функции* y на том же отрезке $[x, x_1]$ (рис. 11, где $\Delta x = MA$ и $\Delta y = AN$). Отношение

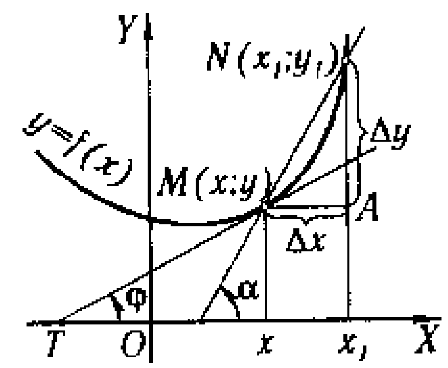


Рис. 11.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$$

представляет собой угловой коэффициент секущей MN графика функции $y = f(x)$ (рис. 11) и называется *средней скоростью* изменения функции y на отрезке $[x, x + \Delta x]$.

Пример 1. Для функции

$$y = x^2 - 5x + 6$$

вычислить Δx и Δy, соответствующие изменению аргумента:

а) от $x = 1$ до $x = 1{,}1$;

б) от $x = 3$ до $x = 2$.

Решение. Имеем:

а) $\Delta x = 1{,}1 - 1 = 0{,}1$,

$\Delta y = (1{,}1^2 - 5 \cdot 1{,}1 + 6) - (1^2 - 5 \cdot 1 + 6) = -0{,}29$;

б) $\Delta x = 2 - 3 = -1$,

$\Delta y = (2^2 - 5 \cdot 2 + 6) - (3^2 - 5 \cdot 3 + 6) = 0$.

Пример 2. Для гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ найти угловой коэффициент секущей, проходящей через точки с абсциссами $x = 3$ и $x_1 = 10$.

Решение. Здесь $\Delta x = 10 - 3 = 7$, $y = \dfrac{1}{3}$, $y_1 = \dfrac{1}{10}$; $\Delta y = \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{7}{30}$.

Следовательно, $k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = -\dfrac{1}{30}$.

2°. Производная. *Производной* $y' = \dfrac{dy}{dx}$ от функции $y = f(x)$ по аргументу x называется предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, когда Δx стремится к нулю, т. е.

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

если этот предел существует.

Величина производной дает *угловой коэффициент* касательной MT к графику функции $y = f(x)$ в точке x (рис. 11):

$$y' = \operatorname{tg} \varphi.$$

Нахождение производной y' *называют дифференцированием функции*. Производная $y' = f'(x)$ представляет собой *скорость изменения функции* в точке x.

Пример 3. Найти производную функции

$$y = x^2.$$

Решение. По формуле (1) получаем:

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$$

и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x.$$

Следовательно,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

3°. Односторонние производные. Выражения

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

и

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называют соответственно *левой* или *правой производной* функции $f(x)$ в точке x. Для существования $f'(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

Пример 4. Найти $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$ для функции

$$f(x) = |x|.$$

Решение. Имеем по определению

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1, \; f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1.$$

4°. Бесконечная производная. Если в некоторой точке имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

то говорят, что непрерывная функция $f(x)$ имеет бесконечную производную в точке x. В этом случае касательная к графику функции $y = f(x)$ перпендикулярна оси OX.

Пример 5. Найти $f'(0)$ для функции

$$y = \sqrt[3]{x}.$$

Решение. Имеем

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = \infty.$$

341. Найти приращение функции $y = x^2$, соответствующее переходу аргумента:

а) от $x = 1$ до $x_1 = 2$;
б) от $x = 1$ до $x_1 = 1{,}1$;
в) от $x = 1$ до $x_1 = 1 + h$.

342. Найти Δy для функции $y = \sqrt[3]{x}$, если:

а) $x = 0$, $\Delta x = 0{,}001$;
б) $x = 8$, $\Delta x = -9$;
в) $x = a$, $\Delta x = h$.

343. Почему для функции $y = 2x + 3$ можно определить приращение Δy, зная только, что соответствующее приращение $\Delta x = 5$, а для функции $y = x^2$ этого сделать нельзя?

344. Найти приращение Δy и отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций:

а) $y = \dfrac{1}{(x^2 - 2)^2}$ при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}4$;
б) $y = \sqrt{x}$ при $x = 0$ и $\Delta x = 0{,}0001$;
в) $y = \lg x$ при $x = 100\,000$ и $\Delta x = -90000$.

345. Найти Δy и $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, соответствующие изменению аргумента от x до $x + \Delta x$ для функций:

а) $y = ax + b$; г) $y = \sqrt{x}$;
б) $y = x^3$; д) $y = 2^x$;
в) $y = \dfrac{1}{x^2}$; е) $y = \ln x$.

346. Найти угловой коэффициент секущей к параболе

$$y = 2x - x^2,$$

если абсциссы точек пересечения равны:

а) $x_1 = 1$, $x_2 = 2$;
б) $x_1 = 1$, $x_2 = 0{,}9$;
в) $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + h$.

К какому пределу стремится угловой коэффициент секущей в последнем случае, если $h \to 0$?

347. Какова средняя скорость изменения функции $y = x^3$ в промежутке $1 \leqslant x \leqslant 4$?

348. Закон движения точки есть $s = 2t^2 + 3t + 5$, где расстояние s дается в сантиметрах, а время t — в секундах. Чему равна средняя скорость точки за промежуток времени от $t = 1$ до $t = 5$?

349. Найти средний подъем кривой $y = 2^x$ на отрезке $1 \leqslant x \leqslant 5$.

350. Найти средний подъем кривой $y = f(x)$ на отрезке $[x, x + \Delta x]$.

351. Что понимают под подъемом кривой $y = f(x)$ в данной точке x?

352. Дать определение: а) средней скорости вращения; б) мгновенной скорости вращения.

353. Нагретое тело, помещенное в среду с более низкой температурой, охлаждается. Что следует понимать под: а) средней скоростью охлаждения; б) скоростью охлаждения в данный момент?

354. Что следует понимать под скоростью реагирования вещества в химической реакции?

355. Пусть $m = f(x)$ — масса неоднородного стержня на отрезке $[0, x]$. Что следует понимать под: а) средней линейной плотностью стержня на отрезке $[x, x + \Delta x]$; б) линейной плотностью стержня в точке x?

356. Найти отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функции $y = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = 2$, если: а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0{,}1$; в) $\Delta x = 0{,}01$. Чему равна производная y' при $x = 2$?

357.** Найти производную от функции $y = \operatorname{tg} x$.

358. Найти $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ для функций:

а) $y = x^3$; б) $y = \dfrac{1}{x^2}$; в) $y = \sqrt{x}$; г) $\operatorname{ctg} x$.

359. Вычислить $f'(8)$, если $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

360. Найти $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$, если $f(x) = x(x-1)^2(x-2)^3$.

361. В каких точках производная от функции $f(x) = x^3$ численно совпадает со значением самой функции, т. е. $f(x) = f'(x)$?

362. Закон движения точки есть $s = 5t^2$, где расстояние s дано в метрах, а время t — в секундах. Найти скорость движения в момент времени $t = 3$.

363. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = 0{,}1x^3$, проведенной в точке с абсциссой $x = 2$.

364. Найти угловой коэффициент касательной к кривой $y = \sin x$ в точке $(\pi; 0)$.

365. Найти значение производной от функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке $x = x_0$ $(x_0 \neq 0)$.

366*. Чему равны угловые коэффициенты касательных к кривым $y = \dfrac{1}{x}$ и $y = x^2$ в точке их пересечения? Найти угол между этими касательными.

367.** Показать, что следующие функции не имеют конечных производных в указанных точках:

а) $y = \sqrt[3]{x^2}$ в точке $x = 0$;

б) $y = \sqrt[5]{x-1}$ в точке $x = 1$;

в) $y = |\cos x|$ в точках $x = \dfrac{2k+1}{2}\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

§ 2. Табличное дифференцирование

1°. Основные правила нахождения производной. Если c — постоянная и $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ — функции, имеющие производные, то

1) $(c)' = 0$;

2) $(x)' = 1$;

3) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;

4) $(cu)' = cu'$;

5) $(uv)' = u'v + v'u$;

6) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$;

7) $\left(\dfrac{c}{v}\right)' = -\dfrac{cv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

2°. Таблица производных основных функций

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

II. $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x > 0)$.

III. $(\sin x)' = \cos x$.

IV. $(\cos x)' = -\sin x$.

V. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

VI. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

VII. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

VIII. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x| < 1)$.

IX. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

X. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{x^2+1}$.

XI. $(a^x)' = a^x \ln a$.

XII. $(e^x)' = e^x$.

XIII. $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ $(x > 0)$.

XIV. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}$ $(x > 0,\ a > 0)$.

XV. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

XVI. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XVII. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

XVIII. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

XIX. $(\operatorname{Arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

XX. $(\operatorname{Arch} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ $(|x| > 1)$.

XXI. $(\operatorname{Arth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$ $(|x| < 1)$.

XXII. $(\operatorname{Arcth} x)' = -\dfrac{1}{x^2-1}$ $(|x| > 1)$.

3°. **Правило дифференцирования сложной функции.** Если $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$, т. е. $y = f[\varphi(x)]$, где функции y и u имеют производные, то

$$y'_x = y'_u u'_x \qquad (1)$$

или в других обозначениях

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Это правило распространяется на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Пример 1. Найти производную функции

$$y = (x^2 - 2x + 3)^5.$$

Решение. Полагая $y = u^5$, где $u = x^2 - 2x + 3$, согласно формуле (1) будем иметь

$$y' = (u^5)'_u (x^2 - 2x + 3)'_x = 5u^4(2x - 2) = 10(x - 1)(x^2 - 2x + 3)^4.$$

Пример 2. Найти производную функции

$$y = \sin^3 4x.$$

Решение. Полагая

$$y = u^3; \quad u = \sin v; \quad v = 4x,$$

находим

$$y' = 3u^2 \cdot \cos v \cdot 4 = 12\sin^2 4x \cos 4x.$$

Найти производные следующих функций (в №№ 368—408 правило дифференцирования сложной функции не используется):

А. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

368. $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3.$

369. $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0{,}5x^4.$

370. $y = ax^2 + bx + c.$

371. $y = -\frac{5x^3}{a}.$

372. $y = at^m + bt^{m+n}.$

373. $y = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$

374. $y = \frac{\pi}{x} + \ln 2.$

375. $y = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}.$

376*. $y = x^2\sqrt[3]{x^2}.$

377. $y = \frac{a}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{b}{x\sqrt[3]{x}}.$

378. $y = \frac{a + bx}{c + dx}.$

379. $y = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}.$

380. $y = \frac{2}{2x - 1} - \frac{1}{x}.$

381. $y = \frac{1 + \sqrt{z}}{1 - \sqrt{z}}.$

Б. ФУНКЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ КРУГОВЫЕ

382. $y = 5\sin x + 3\cos x.$

383. $y = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x.$

384. $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}.$

385. $y = 2t\sin t - (t^2 - 2)\cos t.$

386. $y = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x.$

387. $y = x \operatorname{ctg} x.$

388. $y = x \arcsin x.$

389. $y = \frac{(1 + x^2)\operatorname{arctg} x - x}{2}.$

В. ФУНКЦИИ ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ

390. $y = x^7 e^x.$

391. $y = (x - 1)e^x.$

392. $y = \frac{e^x}{x^2}.$

393. $y = \frac{x^5}{e^x}.$

394. $f(x) = e^x \cos x.$

395. $y = (x^2 - 2x + 2)e^x.$

396. $y = e^x \arcsin x.$

397. $y = \frac{x^2}{\ln x}.$

398. $y = x^3 \ln x - \frac{x^3}{3}.$

399. $y = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}.$

400. $y = \ln x \lg x - \ln a \log_a x.$

Г. ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

401. $y = x \operatorname{sh} x.$

402. $y = \frac{x^2}{\operatorname{ch} x}.$

403. $y = \operatorname{th} x - x.$

404. $y = \frac{3\operatorname{cth} x}{\ln x}.$

405. $y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{Arth} x.$

406. $y = \arcsin x \operatorname{Arsh} x.$

407. $y = \frac{\operatorname{Arch} x}{x}.$

408. $y = \frac{\operatorname{Arcth} x}{1 - x^2}.$

Д. СЛОЖНЫЕ ФУНКЦИИ

Найти производные следующих функций (в №№ 409—466 необходимо использовать правило дифференцирования сложной функции с одним промежуточным аргументом):

409.** $y = (1 + 3x - 5x^2)^{30}.$

Решение. Обозначим $1 + 3x - 5x^2 = u$; тогда $y = u^{30}$. Имеем:

$$y'_u = 30u^{29}, \quad u'_x = 3 - 10x;$$

$$y'_x = 30u^{29} \cdot (3 - 10x) = 30(1 + 3x - 5x^2)^{29} \cdot (3 - 10x).$$

410. $y = \left(\frac{ax + b}{c}\right)^3.$

411. $f(y) = (2a + 3by)^2$.

412. $y = (3 + 2x^2)^4$.

413. $y = \dfrac{3}{56(2x-1)^7} - \dfrac{1}{24(2x-1)^5} - \dfrac{1}{40(2x-1)^5}$.

414. $y = \sqrt{1-x^2}$.

415. $y = \sqrt[3]{a+bx^3}$.

416. $y = (a^{2/3} - x^{2/3})^{3/2}$.

417. $y = (3 - 2\sin x)^5$.

Решение. $y' = 5(3 - 2\sin x)^4 \cdot (3 - 2\sin x)' = 5(3 - 2\sin x)^4(-2\cos x) =$
$= -10\cos x\,(3 - 2\sin x)^4$.

418. $y = \operatorname{tg} x - \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + \dfrac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

419. $y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}$.

420. $y = 2x + 5\cos^3 x$.

421*. $x = \operatorname{cosec}^2 t + \sec^2 t$.

422. $f(x) = -\dfrac{1}{6(1-3\cos x)^2}$.

423. $y = \dfrac{1}{3\cos^3 x} - \dfrac{1}{\cos x}$.

424. $y = \sqrt{\dfrac{3\sin x - 2\cos x}{5}}$.

425. $y = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^3 x}$.

426. $y = \sqrt{1 + \arcsin x}$.

427. $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} - (\arcsin x)^3$.

428. $y = \dfrac{1}{\operatorname{arctg} x}$.

429. $y = \sqrt{xe^x + x}$.

430. $y = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$.

431. $y = \sin 3x + \cos\dfrac{x}{5} + \operatorname{tg}\sqrt{x}$.

Решение. $y' = \cos 3x \cdot (3x)' - \sin\dfrac{x}{5}\left(\dfrac{x}{5}\right)' + \dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}(\sqrt{x})' =$

$$= 3\cos 3x - \frac{1}{5}\sin\frac{x}{5} + \frac{1}{2\sqrt{x}\cos^2\sqrt{x}}.$$

432. $y = \sin(x^2 - 5x + 1) + \operatorname{tg}\dfrac{a}{x}$.

433. $f(x) = \cos(\alpha x + \beta)$.

434. $f(x) = \sin t \sin(t + \varphi)$.

435. $y = \dfrac{1 + \cos 2x}{1 - \cos 2x}$.

436. $f(x) = a\operatorname{ctg}\dfrac{x}{a}$.

437. $y = -\dfrac{1}{20}\cos(5x^2) - \dfrac{1}{4}\cos x^2$.

438. $y = \arcsin 2x$.

Решение. $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot (2x)' = \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

439. $y = \arcsin\dfrac{1}{x^2}$.

440. $f(x) = \arccos\sqrt{x}$.

441. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

442. $y = \operatorname{arcctg}\dfrac{1+x}{1-x}$.

443. $y = 5e^{-x^2}$.

444. $y = \dfrac{1}{5^{x^2}}$.

445. $y = x^2 10^{2x}$.

446. $f(t) = t\sin 2^t$.

447. $y = \arccos e^x$.

448. $y = \ln(2x + 7)$.

449. $y = \lg\sin x$.

450. $y = \ln(1 - x^2)$.

451. $y = \ln^2 x - \ln(\ln x)$.

452. $y = \ln(e^x + 5\sin x - 4\arcsin x)$.

453. $y = \operatorname{arctg}(\ln x) + \ln(\operatorname{arctg} x)$.

454. $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$.

Е. РАЗНЫЕ ФУНКЦИИ

455.** $y = \sin^3 5x\cos^2\dfrac{x}{3}$.

456. $y = -\dfrac{11}{2(x-2)^2} - \dfrac{4}{x-2}$.

457. $y = -\dfrac{15}{4(x-3)^4} - \dfrac{10}{3(x-3)^3} - \dfrac{1}{2(x-3)^2}$.

458. $y = \dfrac{x^8}{8(1-x^2)^4}$.

459. $y = \dfrac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$.

460. $y = \dfrac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}}$.

461. $y = \dfrac{x^3}{3\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

462. $y = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \dfrac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \dfrac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}$.

463. $y = \dfrac{1}{8}\sqrt[3]{(1+x^3)^8} - \dfrac{1}{5}\sqrt[3]{(1+x^3)^5}$.

464. $y = \dfrac{4}{3}\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+2}}$.

465. $y = x^4(a - 2x^3)^2$.

466. $y = \left(\dfrac{a + bx^n}{a - bx^n}\right)^m$.

467. $y = \dfrac{9}{5(x+2)^5} - \dfrac{3}{(x+2)^4} + \dfrac{2}{(x+2)^3} - \dfrac{1}{2(x+2)^2}$.

468. $y = (a + x)\sqrt{a - x}$.

469. $y = \sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}$.

470. $z = \sqrt[3]{y + \sqrt{y}}$.

471. $f(x) = (2t + 1)(3t + 2)\sqrt[3]{3t+2}$.

472. $x = \dfrac{1}{\sqrt{2ay - y^2}}$.

473. $y = \ln(\sqrt{1+e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1+e^x} + 1)$.

474. $y = \dfrac{1}{15}\cos^3 x\,(3\cos^2 x - 5)$.

475. $y = \dfrac{(\operatorname{tg}^2 x - 1)(\operatorname{tg}^4 x + 10\operatorname{tg}^2 x + 1)}{3\operatorname{tg}^3 x}$.

476. $y = \operatorname{tg}^2 5x$.

477. $y = \dfrac{1}{2}\sin(x^2)$.

478. $y = \sin^2(t^3)$.

479. $y = 3\sin x\cos^2 x + \sin^3 x$.

480. $y = \dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$.

481. $y = -\dfrac{\cos x}{3\sin^3 x} + \dfrac{4}{3}\operatorname{ctg} x$.

482. $y = \sqrt{\alpha\sin^2 x + \beta\cos^2 x}$.

483. $y = \arcsin x^2 + \arccos x^2$.

484. $y = \dfrac{1}{2}(\arcsin x)^2\arccos x$.

485. $y = \arcsin\dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.

486. $y = \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

487. $y = \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$.

488. $y = \dfrac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\left(x\sqrt{\dfrac{b}{a}}\right)$.

489. $y = \sqrt{a^2 - x^2} + a\arcsin\dfrac{x}{a}$.

490. $y = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2\arcsin\dfrac{x}{a}$.

491. $y = \arcsin(1 - x) + \sqrt{2x - x^2}$.

492. $y = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x - x^2}$.

493. $y = \ln(\arcsin 5x)$.

494. $y = \arcsin(\ln x)$.

495. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x\sin\alpha}{1 - x\cos\alpha}$.

496. $y = \dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 4}{3}$.

497. $y = 3b^2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{b-x}} - (3b + 2x)\sqrt{bx - x^2}$.

498. $y = -\sqrt{2}\operatorname{arcctg}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} - x$.

499. $y = \sqrt{e^{ax}}$.

500. $y = e^{\sin^2 x}$.

501. $F(x) = (2ma^{mx} + b)^p$.

502. $F(t) = e^{\alpha t}\cos\beta t$.

503. $y = \dfrac{(\alpha\sin\beta x - \beta\cos\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha^2 + \beta^2}$.

504. $y = \dfrac{1}{10}e^{-x}(3\sin 3x - \cos 3x)$.

505. $y = x^n a^{-x^2}$.

506. $y = \sqrt{\cos x}\,a^{\sqrt{\cos x}}$.

507. $y = 3^{\operatorname{ctg}\frac{1}{x}}$.

508. $y = \ln(ax^2 + bx + c)$.

509. $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

510. $y = x - 2\sqrt{x} + 2\ln(1 + \sqrt{x})$.

511. $y = \ln\left(a + x + \sqrt{2ax + x^2}\right)$.

512. $y = \dfrac{1}{\ln^2 x}$.

513. $y = \ln\cos\dfrac{x-1}{x}$.

514*. $y = \ln\dfrac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$.

515. $y = \ln\dfrac{(x-1)^3(x-2)}{x-3}$.

516. $y = -\dfrac{1}{2\sin^2 x} + \ln\operatorname{tg} x$.

517. $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \dfrac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$.

518. $y = \ln\ln(3 - 2x^3)$.

519. $y = 5\ln^3(ax + b)$.

520. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2 + a^2} + x}{\sqrt{x^2 + a^2} - x}$.

521. $y = \dfrac{m}{2}\ln(x^2 - a^2) + \dfrac{n}{2a}\ln\dfrac{x-a}{x+a}$.

522. $y = x\cdot\sin\left(\ln x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

523. $y = \dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}$.

524. $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \ln\dfrac{1 + \sqrt{x^2 + 1}}{x}$.

525. $y = \dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x + 1}$.

526. $y = 2^{\arcsin 3x} + (1 - \arccos 3x)^2$.

527. $y = 3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin^3 ax}{3\cos^3 bx}$.

528. $y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\ln\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}}$.

529. $y = \operatorname{arctg}\ln x$.

530. $y = \ln\arcsin x + \frac{1}{2}\ln^2 x + \arcsin\ln x$.

531. $y = \operatorname{arctg}\ln\frac{1}{x}$.

532. $y = \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{6}\ln\frac{x-1}{x+1}$.

533. $y = \ln\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2\operatorname{arctg}\sqrt{\sin x}$.

534. $y = \frac{3}{4}\ln\frac{x^2+1}{x^2-1} + \frac{1}{4}\ln\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

535. $f(x) = \frac{1}{3}\ln(1+x) - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

536. $f(x) = \frac{x\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln\sqrt{1-x^2}$.

537. $y = \operatorname{sh}^2 2x$.

538. $y = e^{\alpha x}\operatorname{ch}\beta x$.

539. $y = \operatorname{th}^3 2x$.

540. $y = \ln\operatorname{sh} 2x$.

541. $y = \operatorname{Arsh}\frac{x^2}{a^2}$.

542. $y = \operatorname{Arch}\ln x$.

543. $y = \operatorname{Arth}(\operatorname{tg} x)$.

544. $y = \operatorname{Arctg}(\sec x)$.

545. $y = \operatorname{Arth}\frac{2x}{1+x^2}$.

546. $y = \frac{1}{2}(x^2-1)\operatorname{Arth} x + \frac{1}{2}x$.

547. $y = \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right)\operatorname{Arsh} x - \frac{1}{4}x\sqrt{1+x^2}$.

548. Найти y', если:

а) $y = |x|$; б) $y = x|x|$.

Построить графики функций y и y'.

549. Найти y', если

$$y = \ln|x| \qquad (x \neq 0).$$

550. Найти $f'(x)$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{при } x \leqslant 0, \\ e^{-x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

551. Вычислить $f'(0)$, если

$$f(x) = e^{-x}\cos 3x.$$

Решение. $f'(x) = e^{-x}(-3\sin 3x) - e^{-x}\cos 3x$.

$f'(0) = e^0(-3\sin 0) - e^0\cos 0 = -1$.

552. $f(x) = \ln(1+x) + \arcsin\frac{x}{2}$. Найти $f'(1)$.

553. $y = \operatorname{tg}^3\frac{\pi x}{6}$. Найти $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=2}$.

554. Найти $f'_+(0)$ и $f'_-(0)$ для функций:

а) $f(x) = \sqrt{\sin(x^2)}$;

б) $f(x) = \arcsin\frac{a^2-x^2}{a^2+x^2}$;

в) $f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$;

г) $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$; $f(0) = 0$;

д) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

555. Для функции $f(x) = e^{-x}$ найти $f(0) + xf'(0)$.

556. Для функции $f(x) = \sqrt{(1+x)}$ найти $f(3) + (x-3)f'(3)$.

557. Даны функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ и $\varphi(x) = \ln(1-x)$, найти $\frac{f'(0)}{\varphi'(0)}$.

558. Для функций $f(x) = 1 - x$ и $\varphi(x) = 1 - \sin\frac{\pi x}{2}$ найти $\frac{\varphi'(1)}{f'(1)}$.

559. Доказать, что производная четной функции — функция нечетная, а производная нечетной функции — функция четная.

560. Доказать, что производная периодической функции есть функция также периодическая.

561. Показать, что функция $y = xe^{-x}$ удовлетворяет уравнению $xy' = (1-x)y$.

562. Показать, что функция $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ удовлетворяет уравнению $xy' = (1-x^2)y$.

563. Показать, что функция $y = \frac{1}{1+x+\ln x}$ удовлетворяет уравнению $xy' = y(y\ln x - 1)$.

Ж. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ПРОИЗВОДНАЯ

Логарифмической производной функции $y = f(x)$ называется производная от логарифма этой функции, т. е.

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Применение предварительного логарифмирования функции иногда упрощает нахождение ее производной.

Пример. Найти производную сложно-показательной функции

$$y = u^v,$$

где $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$.

Решение. Логарифмируя, получим

$$\ln y = v \ln u.$$

Дифференцируем обе части последнего равенства по x:

$$(\ln y)' = v' \ln u + v(\ln u)',$$

или

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u',$$

отсюда

$$y' = y\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right),$$

или

$$y' = u^v\left(v' \ln u + \frac{v}{u} u'\right).$$

564. Найти y', если

$$y = \sqrt[3]{x^2}\,\frac{1-x}{1+x^2}\sin^3 x \cos^2 x.$$

Решение. $\ln y = \frac{2}{3}\ln x + \ln(1-x) - \ln(1+x^2) + 3\ln\sin x + 2\ln\cos x$;

$$\frac{1}{y} y' = \frac{2}{3}\frac{1}{x} + \frac{-1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\frac{1}{\sin x}\cos x - \frac{2\sin x}{\cos x},$$

откуда $y' = y\left(\frac{2}{3x} - \frac{1}{1-x} - \frac{2x}{1+x^2} + 3\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{tg} x\right)$.

565. Найти y', если $y = (\sin x)^x$.

Решение. $\ln y = x \ln \sin x$; $\frac{1}{y} y' = \ln \sin x + x \operatorname{ctg} x$;

$$y' = (\sin x)^x(\ln \sin x + x \operatorname{ctg} x).$$

Найти y', применяя предварительно логарифмирование функции $y = f(x)$:

566. $y = (x+1)(2x+1)(3x+1)$.

567. $y = \frac{(x+2)^2}{(x+1)^3(x+3)^4}$.

568. $y = \sqrt{\frac{x(x-1)}{x-2}}$.

569. $y = x\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2+1}}$.

570. $y = \frac{(x-2)^9}{\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$.

571. $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}\sqrt{(x+3)^3}}$.

572. $y = x^x$.

573. $y = x^{x^2}$.

574. $y = \sqrt[x]{x}$.

575. $y = x^{\sqrt{x}}$.

576. $y = x^{x^x}$.

577. $y = x^{\sin x}$.

578. $y = (\cos x)^{\sin x}$.

579. $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

580. $y = (\operatorname{arctg} x)^x$.

§ 3. Производные функций, не являющихся явно заданными

1°. Производная обратной функции. Если для функции $y = f(x)$ производная $y'_x \neq 0$, то производная обратной функции $x = f^{-1}(y)$ есть

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}$$

или

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}.$$

Пример 1. Найти производную x'_y, если

$$y = x + \ln x.$$

Решение. Имеем $y'_x = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$; следовательно, $x'_y = \frac{x}{x+1}$.

2°. Производные функций, заданных параметрически. Если зависимость функции y и аргумента x задана посредством параметра t

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

или в других обозначениях

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}.$$

Пример 2. Найти $\frac{dy}{dx}$, если

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$$

Решение. Находим $\frac{dy}{dx} = -a\sin t$ и $\frac{dy}{dt} = a\cos t$. Отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\operatorname{ctg} t.$$

3°. Производная неявной функции. Если зависимость между x и y задана в неявной форме

$$F(x, y) = 0, \tag{1}$$

то для нахождения производной $y'_x = y'$ в простейших случаях достаточно: 1) вычислить производную по x от левой части уравнения (1), считая y функцией от x; 2) приравнять эту производную нулю, т. е. положить

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 0, \tag{2}$$

и 3) решить полученное уравнение относительно y'.

Пример 3. Найти производную y'_x, если

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0. \tag{3}$$

Решение. Составляя производную левой части равенства (3) и приравнивая ее нулю, получим

$$3x^2 + 3y^2y' - 3a(y + xy') = 0,$$

отсюда

$$y' = \frac{x^2 - ay}{ax - y^2}.$$

581. Найти производную x'_y, если:

а) $y = 3x + x^3$; б) $y = x - \frac{1}{2}\sin x$; в) $y = 0{,}1x + e^{\frac{x}{2}}$.

Определить производную $y' = \frac{dy}{dx}$ для функций y, заданных параметрически:

582. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$

583. $\begin{cases} x = \dfrac{1}{t+1}, \\ y = \left(\dfrac{t}{t+1}\right)^2. \end{cases}$

584. $\begin{cases} x = \dfrac{2at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{a(1-t^2)}{1+t^2}. \end{cases}$

585. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$

586. $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \sqrt[3]{t}. \end{cases}$

587. $\begin{cases} x = \sqrt{t^2+1}, \\ y = \dfrac{t-1}{\sqrt{t^2+1}}. \end{cases}$

588. $\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$

589. $\begin{cases} x = a\cos^2 t, \\ y = b\sin^2 t. \end{cases}$

590. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = b\sin^3 t. \end{cases}$

591. $\begin{cases} x = \dfrac{\cos^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}, \\ y = \dfrac{\sin^3 t}{\sqrt{\cos 2t}}. \end{cases}$

592. $\begin{cases} x = \arccos \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arcsin \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{cases}$

593. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

594. $\begin{cases} x = a(\ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2} + \cos t - \sin t), \\ y = a(\sin t + \cos t). \end{cases}$

595. Вычислить $\frac{dy}{dx}$ при $t = \frac{\pi}{2}$, если

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Решение. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a\sin x}{a(1-\cos t)} = \dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ и $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{t=\frac{\pi}{2}} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{2}}{1-\cos\frac{\pi}{2}} = 1.$

596. Найти $\frac{dy}{dx}$ при $t = 1$, если $\begin{cases} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}. \end{cases}$

597. Найти $\frac{dy}{dx}$ при $t = \frac{\pi}{4}$, если $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

598. Доказать, что функция y, заданная параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = t^2 + 2t^3, \end{cases}$$

удовлетворяет уравнению

$$y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3.$$

599. При $x = 2$ справедливо равенство

$$x^2 = 2x.$$

Следует ли отсюда, что

$$(x^2)' = 2x'$$

при $x = 2$?

600. Пусть $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Можно ли почленно дифференцировать равенство

$$x^2 + y^2 = a^2?$$

Найти производную $y' = \dfrac{dy}{dx}$ от неявных функций y:

601. $2x - 5y + 10 = 0$.

602. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

603. $x^3 + y^3 = a^3$.

604. $x^3 + x^2y + y^2 = 0$.

605. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$.

606. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^3} = \sqrt[3]{a^2}$,

607. $y^3 = \dfrac{x-y}{x+y}$.

608. $y - 0{,}3 \sin y = x$.

609. $a \cos^2 (x + y) = b$.

610. $\operatorname{tg} y = xy$.

611. $xy = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{y}$.

612. $\operatorname{arctg} (x + y) = x$.

613. $e^y = x + y$.

614. $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = c$.

615. $\ln y + \dfrac{x}{y} = c$.

616. $\operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{2} \ln (x^2 + y^2)$.

617. $\sqrt{x^2 + y^2} = c \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

618. $x^y = y^x$.

619. Найти y' в точке $M(1;\ 1)$, если

$$2y = 1 + xy^3.$$

Р е ш е н и е. Дифференцируя, имеем $2y' = y^3 + 3xy^2y'$. Полагая $x = 1$ и $y = 1$, получим $2y' = 1 + 3y'$, откуда $y' = -1$.

620. Найти производные y' заданных функций y в указанных точках:

а) $(x + y)^3 = 27(x - y)$ при $x = 2$ и $y = 1$;

б) $ye^y = e^{x+1}$ при $x = 0$ и $y = 1$;

в) $y^2 = x + \ln \dfrac{y}{x}$ при $x = 1$ и $y = 1$.

§ 4. Геометрические и механические приложения производной

1°. У р а в н е н и я к а с а т е л ь н о й и н о р м а л и. Из геометрического смысла производной следует, что *уравнение касательной* к кривой $y = f(x)$ или $F(x, y) = 0$ в точке $M(x_0, y_0)$ будет

$$y - y_0 = y'_0(x - x_0),$$

где y'_0 есть значение производной y' в точке $M(x_0, y_0)$. Прямая, проходящая через точку касания перпендикулярно касательной, называется *нормалью к кривой*. Для нормали получаем уравнение

$$x - x_0 + y'_0(y - y_0) = 0.$$

2°. У г о л м е ж д у к р и в ы м и. Под углом между кривыми

$$y = f_1(x)$$

и

$$y = f_2(x)$$

в их общей точке $M_0(x_0, y_0)$ (рис. 12) понимается угол ω между касательными M_0A и M_0B к этим кривым в точке M_0.

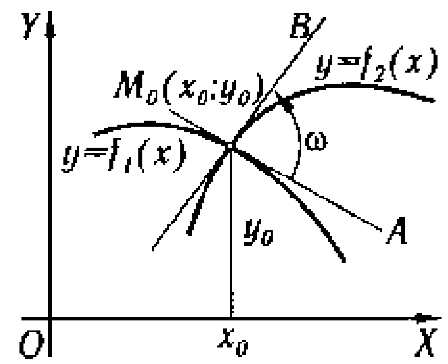


Рис. 12.

По известной формуле аналитической геометрии получаем

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) \cdot f_2'(x_0)}.$$

3°. О т р е з к и, с в я з а н н ы е с к а с а т е л ь н о й и н о р м а л ь ю, д л я с л у ч а я п р я м о у г о л ь н о й с и с т е м ы к о о о р д и н а т. Касательная и нормаль определяют следующие четыре отрезка (рис. 13):

$t = TM$ — так называемый *отрезок касательной*,

$S_t = TK$ — *подкасательная*,

$n = NM$ — *отрезок нормали*,

$S_n = KN$ — *поднормаль*.

Так как $KM = |y_0|$ и $\operatorname{tg} \varphi = y_0'$, то

$$t = TM = \left| \frac{y_0}{y_0'} \sqrt{1 + (y_0')^2} \right|;$$

$$n = NM = \left| y_0 \sqrt{1 + (y_0')^2} \right|;$$

$$S_t = TK = \left| \frac{y_0}{y_0'} \right|;\ S_n = |y_0 y_0'|.$$

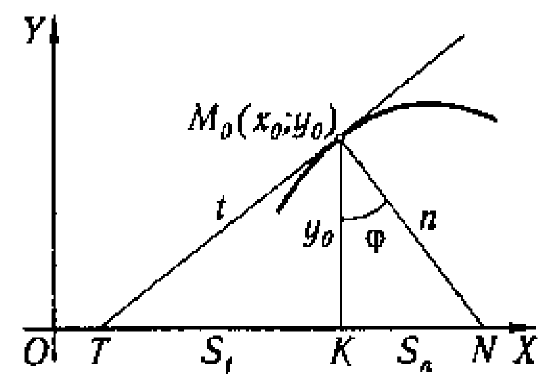


Рис. 13.

4°. О т р е з к и, с в я з а н н ы е с к а с а т е л ь н о й и н о р м а л ь ю, д л я с л у ч а я п о л я р н о й с и с т е м ы к о о р д и н а т. Если кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi)$, то угол μ, образованный касательной MT и полярным радиусом $r = OM$ (рис. 14), определяется следующей формулой:

$$\operatorname{tg} \mu = r\frac{d\varphi}{dr} = \frac{r}{r'}.$$

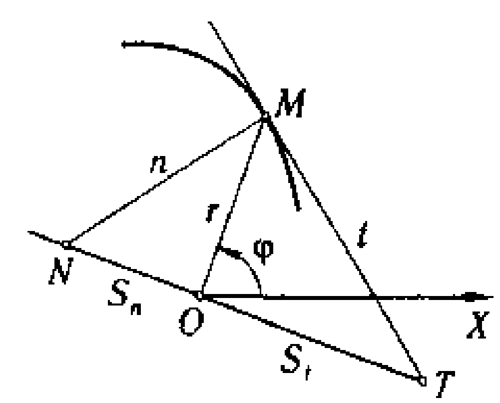


Рис. 14.

Касательная MT и нормаль MN в точке M вместе с полярным радиусом точки касания и перпендикуляром к полярному радиусу, проведенным через полюс O, определяют следующие четыре отрезка (см. рис. 14):

$t = MT$ — *отрезок полярной касательной*,

$n = MN$ — *отрезок полярной нормали*,

$S_t = OT$ — *полярная подкасательная*,

$S_n = ON$ — *полярная поднормаль*.

Эти отрезки выражаются следующими формулами:

$$t = MT = \frac{r}{|r'|}\sqrt{r^2+(r')^2}\,;\; S_t = OT = \frac{r^2}{|r'|}\,;$$

$$n = MN = \sqrt{r^2+(r')^2}\,;\; S_n = ON = |r'|.$$

621. Какие углы φ образуют с осью OX касательные к кривой $y = x - x^2$ в точках с абсциссами: а) $x = 0$; б) $x = \frac{1}{2}$; в) $x = 1$?

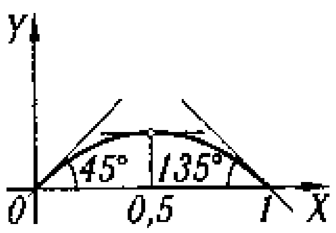


Рис. 15.

Решение. Имеем $y' = 1 - 2x$. Отсюда: а) $\operatorname{tg}\varphi = 1$, $\varphi = 45°$; б) $\operatorname{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 0°$; в) $\operatorname{tg}\varphi = -1$, $\varphi = 135°$ (рис. 15).

622. Под какими углами синусоиды $y = \sin x$ и $y = \sin 2x$ пересекают ось абсцисс в начале координат?

623. Под каким углом тангенсоида $y = \operatorname{tg} x$ пересекает ось абсцисс в начале координат?

624. Под каким углом кривая $y = e^{0,5x}$ пересекает прямую $x = 2$?

625. Найти точки, в которых касательные к кривой

$$y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$$

параллельны оси абсцисс.

626. В какой точке касательная к параболе

$$y = x^2 - 7x + 3$$

параллельна прямой $5x + y - 3 = 0$?

627. Найти уравнение параболы $y = x^2 + bx + c$, касающейся прямой $x = y$ в точке (1; 1).

628. Определить угловой коэффициент касательной к кривой $x^3 + y^3 - xy - 7 = 0$ в точке (1; 2).

629. В какой точке кривой $y^2 = 2x^3$ касательная перпендикулярна прямой $4x - 3y + 2 = 0$?

630. Написать уравнение касательной и нормали к параболе

$$y = \sqrt{x}$$

в точке с абсциссой $x = 4$.

Решение. Имеем $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$; отсюда угловой коэффициент касательной $k = [y']_{x=4} = \frac{1}{4}$. Так как точка касания имеет координаты $x = 4$, $y = 2$, то уравнение касательной есть $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$, или $x - 4y + 4 = 0$.

В силу условия перпендикулярности угловой коэффициент нормали

$$k_1 = -4,$$

откуда уравнение нормали $y - 2 = -4(x - 4)$, или $4x + y - 18 = 0$.

631. Написать уравнение касательной и нормали к кривой $y = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ в точке (−2; 5).

632. Найти уравнение касательной и нормали к кривой

$$y = \sqrt[3]{x-1}$$

в точке (1; 0).

633. Составить уравнения касательной и нормали к кривым в указанных точках:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$ в начале координат;

б) $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$ в точке пересечения с осью OX;

в) $y = \arccos 3x$ в точке пересечения с осью OY;

г) $y = \ln x$ в точке пересечения с осью OX;

д) $y = e^{1-x^2}$ в точках пересечения с прямой $y = 1$.

634. Написать уравнения касательной и нормали в точке (2; 2) к кривой

$$\begin{cases} x = \dfrac{1+t}{t^3}, \\ y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{1}{2t}. \end{cases}$$

635. Написать уравнения касательной к кривой

$$x = t\cos t,\; y = t\sin t$$

в начале координат и в точке $t = \frac{\pi}{4}$.

636. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$x^3 + y^2 + 2x - 6 = 0$$

в точке с ординатой $y = 3$.

637. Написать уравнение касательной к кривой $x^5 + y^5 - 2xy = 0$ в точке (1; 1).

638. Написать уравнения касательных и нормалей к кривой $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$ в точках ее пересечения с осью абсцисс.

639. Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y^4 = 4x^4 + 6xy$ в точке (1; 2).

640*. Показать, что отрезок касательной к гиперболе $xy = a^2$, заключенный между осями координат, делится в точке касания пополам.

641. Показать, что у астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ отрезок касательной, содержащийся между координатными осями, имеет постоянную величину, равную a.

642. Показать, что нормали к развертке окружности
$$x = a\,(\cos t + t\sin t),\ y = a\,(\sin t - t\cos t)$$
являются касательными к окружности $x^2 + y^2 = a^2$.

643. Найти угол, под которым пересекаются параболы $y = (x - 2)^2$ и $y = -4 + 6x - x^2$.

644. Под каким углом пересекаются параболы $y = x^2$ и $y = x^3$?

645. Показать, что кривые $y = 4x^2 + 2x - 8$ и $y = x^3 - x + 10$ касаются друг друга в точке (3; 34). Будет ли то же самое в точке (−2; 4)?

646. Показать, что гиперболы
$$xy = a^2 \text{ и } x^2 - y^2 = b^2$$
пересекаются под прямым углом.

647. Дана парабола $y^2 = 4x$. Вычислить в точке (1; 2) длины отрезков касательной, нормали, подкасательной и поднормали.

648. Найти подкасательную кривой $y = 2^x$ в любой ее точке.

649. Показать, что у равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ длина отрезка нормали в любой точке равна полярному радиусу этой точки.

650. Показать, что поднормаль гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ в любой ее точке равна абсциссе этой точки.

651. Показать, что подкасательные эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и окружности $x^2 + y^2 = a^2$ в точках, имеющих одинаковые абсциссы, равны между собой. Какой прием построения касательной к эллипсу отсюда вытекает?

652. Найти длины отрезков касательной, нормали, подкасательной и поднормали у циклоиды
$$\begin{cases} x = a\,(t - \sin t), \\ y = a\,(1 - \cos t) \end{cases}$$
в произвольной точке $t = t_0$.

653. Найти угол между касательной и полярным радиусом точки касания у логарифмической спирали
$$r = ae^{k\varphi}.$$

654. Найти угол между касательной и полярным радиусом точки касания у лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

655. Найти длины отрезков полярных касательной, нормали, подкасательной и поднормали, а также угол между касательной и полярным радиусом точки касания у спирали Архимеда
$$r = a\varphi$$
в точке с полярным углом $\varphi = 2\pi$.

656. Найти длины отрезков полярных подкасательной, поднормали, касательной и нормали, а также угол между касательной и полярным радиусом у гиперболической спирали $r = \frac{a}{\varphi}$ в произвольной точке $\varphi = \varphi_0$; $r = r_0$.

657. Закон движения точки по оси OX есть
$$x = 3t - t^3.$$
Найти скорость движения точки для моментов времени: $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ и $t_2 = 2$ (x выражается в сантиметрах, t — в секундах).

658. По оси OX движутся две точки, имеющие законы движения
$$x = 100 + 5t$$
и
$$x = \frac{1}{2}t^2,$$
где $t \geqslant 0$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи (x выражается в сантиметрах, t — в секундах)?

659. Концы отрезка $AB = 5$ м скользят по перпендикулярным прямым OX и OY (рис. 16). Скорость перемещения конца A равна 2 м/с. Какова скорость перемещения конца B в тот момент, когда конец A находится от начала координат на расстоянии $OA = 3$ м?

660*. Закон движения материальной точки, брошенной в вертикальной плоскости XOY (рис. 17) под углом α к горизонту с начальной скоростью v_0, дается формулами (без учета сопротивления воздуха)
$$x = v_0 t\cos\alpha,\ y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2},$$
где y — время, g — ускорение свободного падения. Найти траекторию движения и дальность полета. Определить также скорость движения и ее направление.

661. Точка движется по гиперболе $y = \frac{10}{x}$ так, что ее абсцисса x растет равномерно со скоростью 1 единица в секунду. С какой скоростью изменяется ее ордината, когда точка проходит положение (5; 2)?

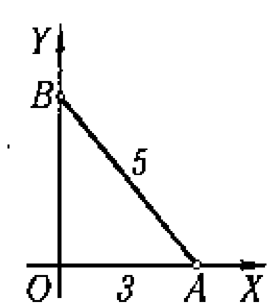


Рис. 16.

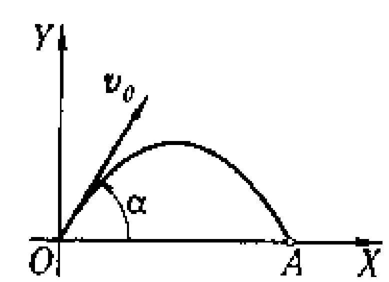


Рис. 17.

662. В какой точке параболы $y^2 = 18x$ ордината возрастает вдвое скорее, чем абсцисса?

663. Одна сторона прямоугольника имеет постоянную величину $a = 10$ см, а другая b изменяется, возрастая с постоянной скоростью 4 см/с. С какой скоростью растут диагональ прямоугольника и его площадь в тот момент, когда $b = 30$ см?

664. Радиус шара возрастает равномерно со скоростью 5 см/с. С какой скоростью растут площадь поверхности шара и объем шара в момент, когда радиус его становится равным 50 см?

665. Точка движется по архимедовой спирали

$$r = a\varphi$$

($a = 10$ см) так, что угловая скорость вращения ее полярного радиуса постоянна и равна 6 град/с. Определить скорость удлинения полярного радиуса r в момент, когда $r = 25$ см.

666. Неоднородный стержень AB имеет длину 12 см. Масса его части AM растет пропорционально квадрату расстояния текущей точки M от конца A и равна 10 г при $AM = 2$ см. Найти массу всего стержня AB и линейную плотность в любой его точке M. Чему равна линейная плотность стержня в точках A и B?

§ 5. Производные высших порядков

1°. Определение высших производных. *Производной второго порядка* или *второй производной* функции $y = f(x)$ называется производная от ее производной, т. е.

$$(y')'.$$

Обозначается вторая производная так:

$$y'', \text{ или } \frac{d^2y}{dx^2}, \text{ или } f''(x).$$

Если $x = f(t)$ — закон прямолинейного движения точки, то $\dfrac{d^2x}{dt^2}$ есть ускорение этого движения.

Вообще, *производной n-го порядка* от функции $y = f(x)$ называют производную от производной порядка $(n-1)$. Для n-й производной употребляются обозначения

$$y^{(n)}, \text{ или } \frac{d^ny}{dx^n}, \text{ или } f^{(n)}(x).$$

Пример 1. Найти производную 2-го порядка от функции

$$y = \ln(1 - x).$$

Решение. $y' = \dfrac{-1}{1-x}$; $y'' = \left(\dfrac{-1}{1-x}\right)' = \dfrac{1}{(1-x)^2}$.

2°. Формула Лейбница. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют производные до n-го порядка включительно, то для вычисления n-й производной произведения этих функций можно пользоваться *формулой Лейбница*

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)}.$$

3°. Производные высших порядков функций, заданных параметрически. Если

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases}$$

то производные $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, $y''_{xx} = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, ... последовательно могут быть вычислены по формулам

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},\quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t},\quad y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t} \text{ и т. д.}$$

Для производной 2-го порядка имеет место формула

$$y''_{xx} = \frac{x'_t y''_{tt} - x''_{tt} y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Пример 2. Найти y'', если

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$y' = \frac{(b\sin t)'_t}{(a\cos t)'_t} = -\frac{b\cdot\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\cos t$$

и

$$y'' = \frac{\left(-\frac{b}{a}\operatorname{ctg} t\right)'_t}{(a\cos t)'_t} = \frac{-\frac{b}{a}\cdot\frac{-1}{\sin^2 t}}{-a\sin t} = -\frac{b}{a^2\sin^3 t}.$$

А. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Найти производные 2-го порядка от следующих функций:

667. $y = x^8 + 7x^6 - 5x + 4$.

668. $y = e^{x^2}$.

669. $y = \sin^2 x$.

670. $y = \ln\sqrt[3]{1 + x^2}$.

671. $y = \ln\left(x + \sqrt{a^2 + x^2}\right)$.

672. $f(x) = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x$.

673. $y = (\arcsin x)^2$.

674. $y = a\operatorname{ch}\dfrac{x}{a}$.

675. Показать, что функция $y = \dfrac{x^2+2x+2}{2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $1 + y'^2 + 2yy''$.

676. Показать, что функция $y = \dfrac{1}{2}x^2e^x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y'' - 2y' + y = e^x$.

677. Показать, что функция $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}$ при любых постоянных C_1 и C_2 удовлетворяет уравнению $y'' + 3y' + 2y = 0$.

678. Показать, что функция $y = e^{2x}\sin 5x$ удовлетворяет уравнению $y'' - 4y' + 29y = 0$.

679. Найти y''', если $y = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$.

680. Найти $f'''(3)$, если $f(x) = (2x - 3)^5$.

681. Найти y^{V} от функции $y = \ln(1 + x)$.

682. Найти y^{VI} от функции $y = \sin 2x$.

683. Показать, что функция $y = e^{-x}\cos x$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $y^{\mathrm{IV}} + 4y = 0$.

684. Найти $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ и $f'''(0)$, если

$$f(x) = e^x \sin x.$$

685. Уравнение движения точки по оси OX есть

$$x = 100 + 5t - 0{,}001t^3.$$

Найти скорость и ускорение точки для моментов времени $t_0 = 0$, $t_1 = 1$; $t_2 = 10$.

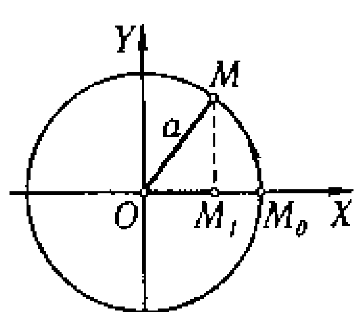


Рис. 18.

686. По окружности $x^2 + y^2 = a^2$ движется точка M с постоянной угловой скоростью ω. Найти закон движения ее проекции M_1 на ось OX, если в момент $t = 0$ точка занимает положение $M_0(a, 0)$ (рис. 18). Найти скорость и ускорение движения точки M_1.

Чему равны скорость и ускорение точки M_1 в начальный момент и в момент прохождения начала координат?

Каковы максимальные значения скорости и ускорения точки M_1?

687. Найти производную n-го порядка от функции $y = (ax + b)^n$ (n — натуральное число).

688. Найти производные n-го порядка от функций:

а) $y = \dfrac{1}{1-x}$; б) $y = \sqrt{x}$.

689. Найти n-ю производную от функций:

а) $y = \sin x$; д) $y = \dfrac{1}{1+x}$;

б) $y = \cos 2x$; е) $y = \dfrac{1+x}{1-x}$;

в) $y = e^{-3x}$; ж) $y = \sin^2 x$;

г) $y = \ln(1 + x)$; з) $y = \ln(ax + b)$.

690. Применяя формулу Лейбница, найти $y^{(n)}$, если:

а) $y = x\,e^x$; г) $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{x}}$;

б) $y = x^2 e^{-2x}$; д) $y = x^3 \ln x$.

в) $y = (1 - x^2)\cos x$;

691. Найти $f^{(n)}(0)$, если $f(x) = \ln\dfrac{1}{1-x}$.

Б. ПРОИЗВОДНЫЕ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ, И НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЙ

Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ от следующих функций:

692. а) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \ln(1 + t^2); \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$

693. а) $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = a\,(t - \sin t), \\ y = a\,(1 - \cos t); \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = a\,(\sin t - t\cos t), \\ y = a\,(\cos t + t\sin t), \end{cases}$

694. а) $\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = \sin^2 t; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = e^{-at}, \\ y = e^{at}. \end{cases}$

695. а) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t, \\ y = \dfrac{1}{2}t^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = \dfrac{1}{1-t}. \end{cases}$

696. Найти $\dfrac{d^2x}{dy^2}$, если $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$

697. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ при $t = 0$, если $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2), \\ y = t^2. \end{cases}$

698. Показать, что y как функция от x, определяемая уравнениями $x = \sin t$, $y = ae^{t\sqrt{2}} + be^{-t\sqrt{2}}$, при любых постоянных a и b удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} = 2y.$$

Найти $y''' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$ от следующих функций:

699. $\begin{cases} x = \sec t, \\ y = \operatorname{tg} t. \end{cases}$ **700.** $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t, \\ y = e^{-t}\sin t. \end{cases}$ **701.** $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = t^3. \end{cases}$

702. Найти $\dfrac{d^ny}{dx^n}$, если $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^m. \end{cases}$

703. Зная функцию $y = f(x)$, найти производные x'', x''' обратной функции $x = f^{-1}(y)$.

704. Найти y'', если $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. На основании правила дифференцирования сложной функции имеем $2x + 2yy' = 0$; отсюда $y' = -\dfrac{x}{y}$ и $y'' = -\left(\dfrac{x}{y}\right)'_x = -\dfrac{y - xy'}{y^2}$. Подставляя вместо y' его значение, окончательно получим

$$y'' = -\frac{y^2 + x^2}{y^3} = -\frac{1}{y^3}.$$

Определить производные y'' от следующих функций $y = f(x)$, заданных неявно:

705. $y^2 = 2px$.

706. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

707. $y = x + \operatorname{arctg} y$.

708. Имея уравнение $y = x + \ln y$, найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$ и $\dfrac{d^2x}{dy^2}$.

709. Найти y'' в точке $(1; 1)$, если

$$x^2 + 5xy + y^2 - 2x + y - 6 = 0.$$

710. Найти y'' в точке $(0; 1)$, если

$$x^4 - xy + y^4 = 1.$$

711. а) Функция y задана неявно уравнением

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 2y - 2 = 0.$$

Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$ в точке $(1; 1)$.

б) Найти $\dfrac{d^3y}{dx^3}$, если $x^2 + y^2 = a^2$.

§ 6. Дифференциалы первого и высших порядков

1°. Дифференциал первого порядка. *Дифференциалом первого порядка функции* $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения $\Delta x = dx$ независимой переменной x. Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал независимой переменной:

$$dy = y'dx.$$

Отсюда

$$y' = \frac{dy}{dx}.$$

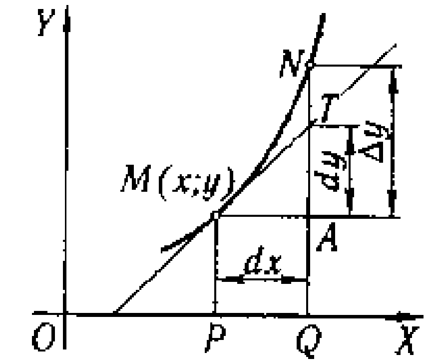


Рис. 19.

Если MN — дуга графика функции $y = f(x)$ (рис. 19), MT — касательная в точке $M(x, y)$ и

$$PQ = \Delta x = dx,$$

то приращение ординаты касательной

$$AT = dy$$

и отрезок $AN = \Delta y$.

Пример 1. Найти приращение и дифференциал функции $y = 3x^2 - x$.

Решение. 1-й способ:

$$\Delta y = 3(x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 3x^2 + x$$

или

$$\Delta y = (6x - 1)\Delta x + 3(\Delta x)^2.$$

Следовательно,

$$dy = (6x - 1)\Delta x = (6x - 1)dx.$$

2-й способ:

$$y' = 6x - 1;\ dy = y'dx = (6x - 1)dx.$$

Пример 2. Вычислить Δy и dy функции $y = 3x^2 - x$ при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}01$.

Решение. $\Delta y = (6x - 1)\cdot\Delta x + 3(\Delta x)^2 = 5\cdot 0{,}01 + 3\cdot(0{,}01)^2 = 0{,}0503$ и

$$dy = (6x - 1)\Delta x = 5\cdot 0{,}01 = 0{,}0500.$$

2°. Основные свойства дифференциалов:

1) $dc = 0$, где $c = \text{const}$.
2) $dx = \Delta x$, где x — независимая переменная.
3) $d(cu) = c\,du$.
4) $d(u \pm v) = du \pm dv$.
5) $d(uv) = u\,dv + v\,du$.
6) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ $(v \neq 0)$.
7) $df(u) = f'(u)du$.

3°. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Если приращение Δx аргумента x по модулю мало, то дифференциал dy функции $y = f(x)$ и приращение Δy функции приближенно равны между собой:

$$\Delta y \approx dy,$$

т. е.

$$f(x + \Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x.$$

откуда

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x. \quad (1)$$

Пример 3. Насколько приблизительно изменится сторона квадрата, если площадь его увеличилась от 9 до 9,1 м^2?

Решение. Если x — площадь квадрата, y — сторона его, то

$$y = \sqrt{x}.$$

По условию задачи, $x = 9$; $\Delta x = 0{,}1$.

Приращение Δy стороны квадрата вычисляем приближенно:

$$\Delta y \approx dy = y'\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{9}} \cdot 0{,}1 = 0{,}016 \text{ м}.$$

4°. Дифференциалы высших порядков. *Дифференциалом второго порядка* называется дифференциал от дифференциала первого порядка:

$$d^2y = d(dy).$$

Аналогично определяются *дифференциалы третьего* и т. д. порядков.

Если $y = f(x)$ и x — независимая переменная, то

$$d^2y = y''(dx)^2,$$
$$d^3y = y'''(dx)^3,$$
$$\ldots$$
$$\ldots$$
$$d^ny = y^{(n)}(dx)^n.$$

Если же $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, то

$$d^2y = y''(du)^2 + y'd^2u,\ d^3y = y'''(du)^3 + 3y''du \cdot d^2u + y'd^3u$$

и т. д. (Здесь штрихами обозначено дифференцирование по u.)

712. Найти приращение Δy и дифференциал dy функции $y = 5x + x^2$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

713. Не вычисляя производной, найти

$$d(1 - x^3)$$

при $x = 1$ и $\Delta x = -\frac{1}{3}$.

714. Площадь S квадрата со стороной, равной x, выражается по формуле $S = x^2$. Найти приращение и дифференциал этой функции и выяснить геометрическое значение последнего.

715. Дать геометрическую интерпретацию приращения и дифференциала следующих функций:

а) площадь круга $S = \pi x^2$; б) объем куба $v = x^3$.

716. Показать, что при $\Delta x \to 0$ приращение функции $y = 2^x$, соответствующее приращению x на величину Δx, при всяком x эквивалентно выражению $2^x \Delta x \ln 2$.

717. При каком значении x дифференциал функции $y = x^2$ не эквивалентен приращению этой функции при $\Delta x \to 0$?

718. Имеет ли функция $y = |x|$ дифференциал при $x = 0$?

719. Пользуясь производной, найти дифференциал функции $y = \cos x$ при $x = \frac{\pi}{6}$ и $\Delta x = \frac{\pi}{36}$.

720. Найти дифференциал функции

$$y = \frac{2}{\sqrt{x}}$$

при $x = 9$ и $\Delta x = -0{,}01$.

721. Вычислить дифференциал функции

$$y = \operatorname{tg} x$$

при $x = \frac{\pi}{3}$ и $\Delta x = \frac{\pi}{180}$.

Найти дифференциалы следующих функций для произвольных значений аргумента и его приращения:

722. $y = \frac{1}{x^m}$.

723. $y = \frac{x}{1-x}$.

724. $y = \arcsin \frac{x}{a}$.

725. $y = \operatorname{arctg} \frac{x}{a}$.

726. $y = e^{-x^2}$.

727. $y = x \ln x - x$.

728. $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

729. $r = \operatorname{ctg} \varphi + \operatorname{cosec} \varphi$.

730. $s = \operatorname{arcctg} e^t$.

731. Найти dy, если $x^2 + 2xy - y^2 = a^2$.

Решение. Пользуясь инвариантностью формы дифференциала, получим $2xdx + 2(ydx + xdy) - 2ydy = 0$. Отсюда

$$dy = -\frac{x+y}{x-y}dx.$$

Найти дифференциалы следующих функций, заданных неявно:

732. $(x + y)^2(2x + y)^3 = 1$.

733. $y = e^{-\frac{x}{y}}$.

734. $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

735. Найти dy в точке (1; 2), если $y^3 - y = 6x^2$.

736. Найти приближенное значение $\sin 31°$.

Решение. Полагая $x = \text{arc } 30° = \frac{\pi}{6}$ и $\Delta x = \text{arc } 1° = \frac{\pi}{180}$, из формулы (1) (см. 3°) имеем $\sin 31° \approx \sin 30° + \frac{\pi}{180} \cos 30° = 0{,}500 + 0{,}017 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}515$.

737. Заменяя приращение функции дифференциалом, приближенно вычислить:

а) $\cos 61°$; б) $\operatorname{tg} 44°$; в) $e^{0,2}$; г) $\lg 0{,}9$; д) $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

738. Насколько приблизительно увеличится объем шара, если его радиус $R = 15$ см удлинится на 2 мм?

739. Вывести приближенную формулу (для $|\Delta x|$, малых по сравнению с x)

$$\sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{x}}$$

и с ее помощью найти приближенные значения для $\sqrt{5}$; $\sqrt{17}$; $\sqrt{70}$; $\sqrt{640}$.

740. Вывести приближенную формулу

$$\sqrt[3]{x + \Delta x} \approx \sqrt[3]{x} + \frac{\Delta x}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

и найти приближенные значения для $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{70}$, $\sqrt[3]{200}$.

741. Найти приближенные значения функций:

а) $y = x^3 - 4x^2 + 5x + 3$ при $x = 1{,}03$;

б) $f(x) = \sqrt{1+x}$ при $x = 0{,}2$;

в) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$ при $x = 0{,}1$;

г) $y = e^{1-x^2}$ при $x = 1{,}05$.

742. Найти приближенное значение $\operatorname{tg} 45°3'20''$.

743. Найти приближенно $\arcsin 0{,}54$.

744. Найти приближенно $\sqrt[4]{17}$.

745. Показать, основываясь на формуле закона Ома $I = \frac{E}{R}$, что малое изменение тока, обусловленное малым изменением сопротивления, может быть найдено приближенно по формуле

$$\Delta I = -\frac{I}{R}\Delta R.$$

746. Показать, что относительная погрешность в 1% при определении длины радиуса влечет за собой относительную погрешность приблизительно в 2% при вычислении площади круга и поверхности шара.

747. Вычислить d^2y, если $y = \cos 5x$.

Решение. $d^2y = y''(dx)^2 = -25\cos 5x(dx)^2$.

748. $u = \sqrt{1-x^2}$, найти d^2u.

749. $y = \arccos x$, найти d^2y.

750. $y = \sin x \ln x$, найти d^2y.

751. $z = \frac{\ln x}{x}$, найти d^2z.

752. $z = x^2e^{-x}$, найти d^3z.

753. $z = \frac{x^4}{2-x}$, найти d^4z.

754. $u = 3\sin(2x+5)$, найти d^nu.

755. $y = e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha)$, найти d^ny.

§ 7. Теоремы о среднем

1°. Теорема Ролля. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, имеет производную $f'(x)$ в каждой внутренней точке этого отрезка и

$$f(a) = f(b),$$

то для аргумента x существует по меньшей мере одно значение ξ, где $a < \xi < b$, такое, что

$$f'(\xi) = 0.$$

2°. Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и имеет производную в каждой внутренней точке этого отрезка, то

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(\xi),$$

где $a < \xi < b$.

3°. Теорема Коши. Если функции $f(x)$ и $F(x)$ непрерывны на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ при $a < x < b$ и имеют производные, не обращающиеся в нуль одновременно, причем $F(b) \neq F(a)$, то

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}, \text{ где } a < \xi < b.$$

756. Показать, что функция $f(x) = x - x^3$ на отрезках $-1 \leqslant x \leqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Найти соответствующие значения ξ.

Решение. Функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема для всех значений x; кроме того, $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. Следовательно, теорема Ролля применима на отрезках $-1 \leqslant x \leqslant 0$ и $0 \leqslant x \leqslant 1$. Для нахождения числа ξ составляем уравнение: $f'(x) = 1 - 3x^2 = 0$. Отсюда $\xi_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}}$; $\xi_2 = \sqrt{\frac{1}{3}}$, причем $-1 < \xi_1 < 0$; $0 < \xi_2 < 1$.

757. Функция $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ на концах отрезка $[0, 4]$ принимает разные значения:

$$f(0) = f(4) = \sqrt[3]{4}.$$

Справедлива ли для этой функции теорема Ролля на отрезке $[0, 4]$?

758. Выполнены ли условия теоремы Ролля для функции

$$f(x) = \operatorname{tg} x$$

на отрезке $[0, \pi]$?

759. Пусть

$$f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3).$$

Показать, что уравнение

$$f'(x) = 0$$

имеет три действительных корня.

760. Уравнение

$$e^x = 1 + x,$$

очевидно, имеет корень $x = 0$. Показать, что это уравнение не может иметь другого действительного корня.

761. Проверить выполнение условий теоремы Лагранжа для функции

$$f(x) = x - x^3$$

на отрезке $[-2, 1]$ и найти соответствующее промежуточное значение ξ.

Решение. Функция $f(x) = x - x^3$ непрерывна и дифференцируема для всех значений x, причем $f'(x) = 1 - 3x^2$. Отсюда по формуле Лагранжа имеем $f(1) - f(-2) = 0 - 6 = [1 - (-2)]f'(\xi)$, т. е. $f'(\xi) = -2$. Следовательно, $1 - 3\xi^2 = -2$ и $\xi = \pm 1$; годится только значение $\xi = -1$, для которого справедливо неравенство $-2 < \xi < 1$.

762. Проверить выполнение условий теоремы Лагранжа и найти соответствующую промежуточную точку ξ для функции $f(x) = x^{4/3}$ на отрезке $[-1, 1]$.

763. Для отрезка параболы $y = x^2$, заключенного между точками $A(1; 1)$ и $B(3; 9)$, найти точку, касательная в которой параллельна хорде AB.

764. Пользуясь теоремой Лагранжа, доказать формулу

$$\sin(x+h) - \sin x = h \cos \xi,$$

где $x < \xi < x + h$.

765. а) Для функций $f(x) = x^2 + 2$ и $F(x) = x^3 - 1$ проверить выполнение условий теоремы Коши на отрезке $[1, 2]$ и найти ξ;

б) то же для $f(x) = \sin x$ и $F(x) = \cos x$ на отрезке $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

§ 8. Формула Тейлора

Если функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ (или $b \leqslant x \leqslant a$), причем в каждой внутренней точке этого отрезка существует конечная производная $f^{(n)}(x)$, то на этом отрезке справедлива *формула Тейлора*

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!}f'''(a) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

где $\xi = a + \theta(x - a)$ и $0 < \theta < 1$.

В частности, при $a = 0$ имеем (*формула Маклорена*)

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(\xi),$$

где $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

766. Многочлен $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ разложить по целым положительным степеням бинома $x - 2$.

Решение. $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$; $f''(x) = 6x - 4$; $f'''(x) = 6$; $f^{(n)}(x) = 0$ для $n \geqslant 4$. Отсюда

$$f(2) = 11;\ f'(2) = 7;\ f''(2) = 8;\ f'''(2) = 6.$$

Следовательно,

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + (x-2)\cdot 7 + \frac{(x-2)^2}{2!}\cdot 8 + \frac{(x-2)^3}{3!}\cdot 6$$

или

$$x^3 - 2x^2 + 3x + 5 = 11 + 7(x-2) + 4(x-2)^2 + (x-2)^3.$$

767. Функцию $f(x) = e^x$ разложить по степеням бинома $x + 1$ до члена, содержащего $(x+1)^3$.

Решение. $f^{(n)}(x) = e^x$ для всех n, $f^{(n)}(-1) = \frac{1}{e}$. Следовательно,

$$e^x = \frac{1}{e} + (x+1)\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^2}{2!}\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^3}{3!}\frac{1}{e} + \frac{(x+1)^4}{4!}e^{\xi},$$

где $\xi = -1 + \theta(x+1)$, $0 < \theta < 1$.

768. Функцию $f(x) = \ln x$ разложить по степеням $x - 1$ до члена с $(x-1)^2$.

769. Функцию $f(x) = \sin x$ разложить по степеням x до члена с x^3 и до члена с x^5.

770. Функцию $f(x) = e^x$ разложить по степеням x до члена с x^{n-1}.

771. Показать, что $\sin(a+h)$ отличается от
$$\sin a + h\cos a$$
не более чем на $\frac{1}{2}h^2$.

772. Выяснить происхождение приближенных формул:

а) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$, $|x| < 1$,

б) $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2$, $|x| < 1$,

— и оценить их погрешность.

773. Оценить погрешность формулы
$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}.$$

774. Тяжелая нить под действием собственного веса провисает по цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$. Показать, что для малых $|x|$ форма нити приближенно выражается параболой
$$y = a + \frac{x^2}{2a}.$$

775*. Показать, что при $|x| \ll a$ с точностью до $\left(\frac{x}{a}\right)^2$ имеет место приближенное равенство
$$e^{\frac{x}{a}} \approx \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}.$$

§ 9. Правило Лопиталя—Бернулли раскрытия неопределенностей

1°. Раскрытие неопределенностей типа $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$. Пусть однозначные функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы при $0 < |x-a| < h$, причем производная $\varphi'(x)$ не обращается в нуль.

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ — обе бесконечно малые или обе бесконечно большие при $x \to a$, т. е. если частное $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ представляет в точке $x = a$ неопределенность типа $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, то
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$
при условии, что предел отношения производных существует (*правило Лопиталя—Бернулли*). Правило применимо и в случае, когда $a = \infty$.

Если частное $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ вновь дает неопределенность в точке $x = a$ одного из двух упомянутых типов и $f'(x)$ и $\varphi'(x)$ удовлетворяют всем требованиям, ранее сформулированным для $f(x)$ и $\varphi(x)$, то можно перейти к отношению вторых производных и т. д.

Однако следует помнить, что предел отношения $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ может существовать в то время, как отношения производных не стремятся ни к какому пределу (см. № 809).

2°. Прочие неопределенности. Для раскрытия неопределенностей типа $0 \cdot \infty$ преобразуем соответствующее произведение $f_1(x)\cdot f_2(x)$, где $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = \infty$, в частное $\dfrac{f_1(x)}{\frac{1}{f_2(x)}}$ $\left(\text{тип } \frac{0}{0}\right)$ или $\dfrac{f_2(x)}{\frac{1}{f_1(x)}}$ $\left(\text{тип } \frac{\infty}{\infty}\right)$.

В случае неопределенности типа $\infty - \infty$ следует преобразовать соответствующую разность $f_1(x) - f_2(x)$ в произведение $f_1(x)\left[1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}\right]$ и раскрыть сначала неопределенность $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$; если $\lim\limits_{x\to a}\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = 1$, то приводим выражение к виду
$$\frac{1 - \frac{f_2(x)}{f_1(x)}}{\frac{1}{f_1(x)}} \quad \left(\text{тип } \frac{0}{0}\right).$$

Неопределенности типов 1^∞, 0^0, ∞^0 раскрывают с помощью предварительного логарифмирования и нахождения предела логарифма степени $[f_1(x)]^{f_2(x)}$ (что потребует раскрытия неопределенности типа $0 \cdot \infty$).

В некоторых случаях правило Лопиталя—Бернулли полезно комбинировать с нахождением пределов элементарными средствами.

Пример 1. Вычислить
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\mathrm{ctg}\,x} \quad \left(\text{неопределенность типа } \frac{\infty}{\infty}\right).$$

Решение. Применяя правило Лопиталя—Бернулли, имеем
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\mathrm{ctg}\,x} = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{(\mathrm{ctg}\,x)'} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}.$$
Получили неопределенность типа $\frac{0}{0}$, однако применять правило Лопиталя—Бернулли нет надобности, так как
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x = 1\cdot 0 = 0.$$

Таким образом, окончательно находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}=0.$$

Пример 2. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right) \text{ (неопределенность типа } \infty-\infty).$$

Решение. Приведя дроби к общему знаменателю, получим

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}\ \left(\text{неопределенность типа } \frac{0}{0}\right).$$

Прежде чем применить правило Лопиталя—Бернулли, заменим знаменатель последней дроби эквивалентной ему бесконечно малой (гл. I, § 4) $x^2\sin^2 x \sim x^3$. Получим

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-\sin^2 x}{x^4}\ \left(\text{неопределенность типа } \frac{0}{0}\right).$$

По правилу Лопиталя—Бернулли,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x-\sin 2x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2-2\cos 2x}{12x^2}.$$

Далее, элементарным путем находим

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{6x^2}=\frac{1}{3}.$$

Пример 3. Вычислить

$$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} \text{ (неопределенность типа } 1^{\infty}).$$

Логарифмируя и применяя правило Лопиталя—Бернулли, получим

$$\lim_{x\to 0}\ln(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{3\ln\cos 2x}{x^2}=-6\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}=-6.$$

Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}=e^{-6}$.

Найти указанные пределы функций:

776. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2-x+2}{x^3-7x+6}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-4x-1}{3x^2-7}=\dfrac{1}{2}$.

777. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

778. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\frac{\pi x}{2}}$.

779. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-1}{1-\cos x}$.

780. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x-\sin x}$.

781. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sec^2 x-2\operatorname{tg} x}{1+\cos 4x}$.

782. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 5x}$.

783. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{e^x}{x^5}$.

784. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

785. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\pi}{x}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$.

786. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin mx)}{\ln\sin x}$.

787. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)\operatorname{ctg} x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)\cos x}{\sin x}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}\cos x=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x}\cdot 1=0.$$

788. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

789. $\lim\limits_{x\to 0}\arcsin x\operatorname{ctg} x$.

790. $\lim\limits_{x\to 0}(x^n e^{-x})$, $n>0$.

791. $\lim\limits_{x\to \infty}x\sin\dfrac{a}{x}$.

792. $\lim\limits_{x\to \infty}x^n\sin\dfrac{a}{x}$, $n>0$.

793. $\lim\limits_{x\to 1}\ln x\ln(x-1)$.

794. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

Решение. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x\ln x-x+1}{(x-1)\ln x}=$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x\cdot\frac{1}{x}+\ln x-1}{\ln x+\frac{1}{x}(x-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{\ln x-\frac{1}{x}+1}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

795. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{5}{x^2-x-6}\right)$.

796. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{1}{2(1-\sqrt{x})}-\dfrac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}\right]$.

797. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{x}{\operatorname{ctg} x}-\dfrac{\pi}{2\cos x}\right)$.

798. $\lim\limits_{x\to 0} x^{x}$.

Решение. Имеем $x^x = y$; $\ln y = x\ln x$; $\lim\limits_{x\to 0}\ln y = \lim\limits_{x\to 0} x\ln x = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$, откуда $\lim\limits_{x\to 0} y = 1$, т. е. $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

799. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

800. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

801. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

802. $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$.

803. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

804. $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

805. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

806. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

807. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

808. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

809. Доказать, что пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = 0$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-\sin x}{x+\sin x} = 1$

— не могут быть найдены по правилу Лопиталя—Бернулли. Найти эти пределы непосредственно.

810*. Показать, что площадь кругового сегмента с малым центральным углом α, имеющего хорду $AB = b$ и стрелку $CD = h$ (рис. 20), приближенно равна

$$S \approx \frac{2}{3}bh$$

со сколь угодно малой относительной погрешностью при $\alpha \to 0$.

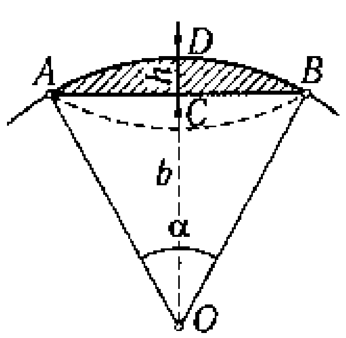


Рис. 20.

Глава III

ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИИ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

§ 1. Экстремумы функции одного аргумента

1°. Возрастание и убывание функций. **Функция** $y = f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на некотором интервале (отрезке), если для любых точек x_1 и x_2, принадлежащих данному интервалу (отрезку), из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ (рис. 21, *а*) ($f(x_1) > f(x_2)$ (рис. 21, *б*)). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при $a < x < b$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на отрезке $[a, b]$.

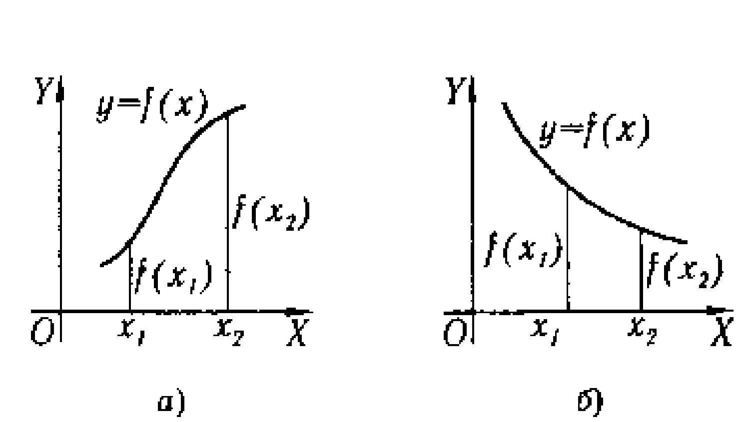


Рис. 21.

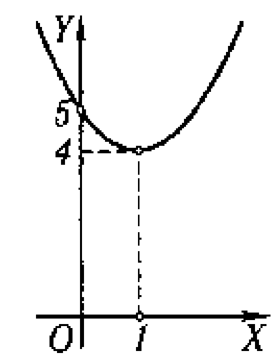


Рис. 22.

В простейших случаях область существования функции $f(x)$ можно разбить на конечное число промежутков возрастания и убывания функции (*промежутки монотонности*). Эти промежутки ограничены критическими точками x (где $f'(x) = 0$ или же $f'(x)$ не существует).

Пример 1. Исследовать на возрастание и убывание функцию

$$y = x^2 - 2x + 5.$$

Решение. Находим производную

$$y' = 2x - 2 = 2(x-1). \qquad (1)$$

Отсюда $y' = 0$ при $x = 1$. На числовой оси получаем два промежутка монотонности: $(-\infty, 1)$ и $(1, +\infty)$. Из формулы (1) имеем: 1) если $-\infty < x < 1$, то $y' < 0$ и, следовательно, функция $f(x)$ убывает в промежутке $(-\infty, 1)$; 2) если $1 < x < +\infty$, то $y' > 0$ и, следовательно, функция $f(x)$ возрастает в промежутке $(1, +\infty)$ (рис. 22).

Пример 2. Определить промежутки возрастания и убывания функции

$$y = \frac{1}{x+2}.$$

Решение. Здесь $x = -2$ — точка разрыва функции, $y' = -\frac{1}{(x+2)^2} < 0$ при $x \neq -2$. Следовательно, функция y убывает в промежутках $-\infty < x < -2$ и $-2 < x < +\infty$.

Пример 3. Исследовать на возрастание и убывание функцию

$$y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{3}x^3.$$

Решение. Здесь

$$y' = x^4 - x^2. \qquad (2)$$

Решив уравнение $x^4 - x^2 = 0$, найдем точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, в которых производная y' обращается в нуль. Так как y' может изменять знак только при переходе через точки, в которых она обращается в нуль или терпит разрыв непрерывности (в данном случае точки разрыва для y' отсутствуют), то в каждом из интервалов $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ и $(1, +\infty)$ производная сохраняет постоянный знак, поэтому в каждом из этих интервалов исследуемая функция монотонна. Чтобы выяснить, в каких из указанных интервалов функция возрастает, а в каких — убывает, нужно узнать, каков знак производной в каждом из этих интервалов. Для того чтобы выяснить, каков знак y' в интервале $(-\infty, -1)$, достаточно узнать знак y' в какой-нибудь одной точке этого интервала; взяв, например, $x = -2$, получим из (2) $y' = 12 > 0$, следовательно, $y' > 0$ в интервале $(-\infty, -1)$ и функция в этом интервале возрастает. Аналогично найдем, что $y' < 0$ в интервале $(-1, 0)$ $\left(\text{для проверки можно, например, взять } x = -\frac{1}{2}\right)$, $y' < 0$ в интервале $(0, 1)$ $\left(\text{здесь можно использовать } x = \frac{1}{2}\right)$ и $y' > 0$ в интервале $(1, +\infty)$.

Таким образом, исследуемая функция возрастает в промежутке $(-\infty, -1)$, убывает в промежутке $(-1, 1)$ и опять возрастает в промежутке $(1, +\infty)$.

2°. Экстремумы функции. Если существует такая двусторонняя окрестность точки x_0, что для всякой точки $x \neq x_0$ этой окрестности имеет место неравенство $f(x) > f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой минимума* функции $y = f(x)$, а число $f(x_0)$ — *минимумом* функции $y = f(x)$. Аналогично, если для всякой точки $x \neq x_1$ некоторой окрестности точки x_1 выполняется неравенство $f(x) < f(x_1)$, то x_1 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, а $f(x_1)$ — *максимумом* функции (рис. 23). Точка минимума или максимума функции называется ее *точкой экстремума*, а минимум или максимум функции — *экстремумом* функции. Если x_0 — точка экстремума функции $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$ (*стационарная точка*) или же $f'(x_0)$ не существует (необходимое условие существования экстремума). Обратное предложение не верно: точки, в которых $f'(x) = 0$ или же $f'(x)$ не существует (*критические точки*), не обязательно являются точками экстремума функции $f(x)$. Достаточные признаки существования и отсутствия экстремума непрерывной функции $f(x)$ даются следующими правилами:

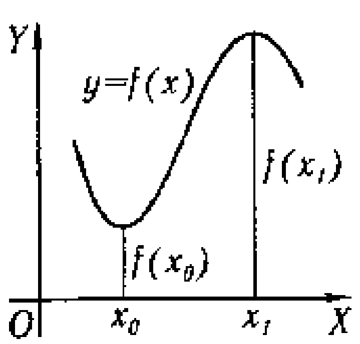


Рис. 23.

1. Если существует такая окрестность $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ критической точки x_0, что $f'(x) > 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$; если же $f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$, то x_0 — точка минимума функции $f(x)$.

Если, наконец, найдется такое положительное число δ, что $f'(x)$ сохраняет неизменный знак при $0 < |x - x_0| < \delta$, то точка x_0 не является точкой экстремума функции $f(x)$.

2. Если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка максимума функции $f(x)$; если $f'(x_0) = 0$ и $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка минимума функции $f(x)$; если же $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) = 0$, а $f'''(x_0) \neq 0$, то точка не является точкой экстремума функции $f(x)$.

В более общем виде: пусть первая из не равных нулю в точке x_0 производных функции $f(x)$ имеет порядок k. Тогда если k — четное, то точка x_0 является точкой экстремума, а именно точкой максимума, если $f^{(k)}(x_0) < 0$, и точкой минимума, если $f^{(k)}(x_0) > 0$. Если же k — нечетное, то точка x_0 не является точкой экстремума.

Пример 4. Найти экстремумы функции

$$y = 2x + 3\sqrt[3]{x^2}.$$

Решение. Находим производную

$$y' = 2 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x} + 1). \qquad (3)$$

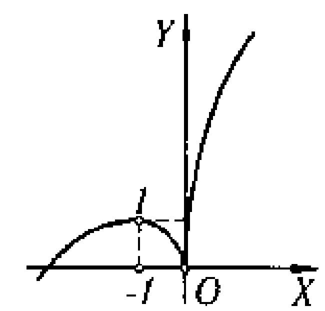


Рис. 24.

Приравнивая производную y' нулю, получаем

$$\sqrt[3]{x} + 1 = 0.$$

Отсюда находим стационарную точку $x_1 = -1$. Из формулы (3) имеем: если $x = -1 - h$, где h — любое достаточно малое положительное число, то $y' > 0$; если же $x = -1 + h$, то $y' < 0$*). Следовательно, $x_1 = -1$ есть точка максимума функции y, причем $y_{max} = 1$.

Приравнивая нулю знаменатель выражения y' из (3), получаем

$$\sqrt[3]{x} = 0;$$

отсюда находим критическую точку функции $x_2 = 0$, где производная y' не существует. При $x = -h$, очевидно, имеем $y' < 0$; при $x = h$ имеем $y' > 0$.

*) Если определение знака производной y' затруднительно, то можно произвести арифметический расчет, взяв в качестве h достаточно малое положительное число.

Следовательно, $x_2 = 0$ есть точка минимума функции y, причем $y_{\min} = 0$ (рис. 24). Исследование поведения функции в точке $x_1 = -1$ можно также провести с помощью второй производной

$$y'' = -\frac{2}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Здесь $y'' < 0$ при $x_1 = -1$ и, следовательно, $x_1 = -1$ есть точка максимума функции.

3°. **Наименьшее и наибольшее значения.** Наименьшее (наибольшее) значение непрерывной функции $f(x)$ на данном отрезке $[a, b]$ достигается или в критических точках функции, или на концах отрезка $[a, b]$.

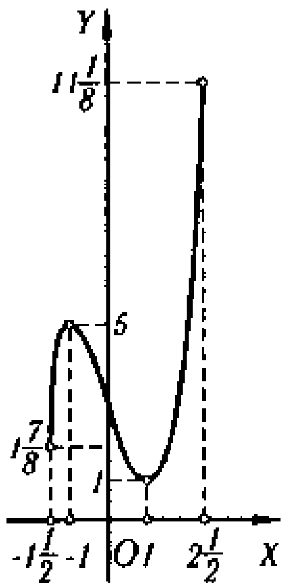


Рис. 25.

Пример 5. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$y = x^3 - 3x + 3$$

на отрезке $-1\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\frac{1}{2}$.

Решение. Так как

$$y' = 3x^2 - 3,$$

то критическими точками функции y являются $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. Сравнивая значения функции в этих точках и значения функции на концах заданного отрезка

$$y(-1) = 5;\ y(1) = 1;\ y\left(-1\frac{1}{2}\right) = 4\frac{1}{8};\ y\left(2\frac{1}{8}\right) = 11\frac{1}{8},$$

заключаем (рис. 25), что наименьшее значение функции $m = 1$ достигается в точке $x = 1$ (в точке минимума), а наибольшее $M = 11\frac{1}{8}$ достигается в точке $x = 2\frac{1}{2}$ (на правом конце отрезка).

Определить промежутки убывания и возрастания функций:

811. $y = 1 - 4x - x^2$.

812. $y = (x - 2)^2$.

813. $y = (x + 4)^3$.

814. $y = x^2(x - 3)$.

815. $y = \dfrac{x}{x-2}$.

816. $y = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

817. $y = \dfrac{x}{x^2-6x-16}$.

818. $y = (x - 3)\sqrt{x}$.

819. $y = \dfrac{x}{3} - \sqrt[3]{x}$.

820. $y = x + \sin x$.

821. $y = x \ln x$.

822. $y = \arcsin(1 + x)$.

823. $y = 2e^{x^2-4x}$.

824. $y = 2^{\frac{1}{x-a}}$.

825. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

Исследовать на экстремум следующие функции:

826. $y = x^2 + 4x + 6$.

Решение. Находим производную данной функции $y' = 2x + 4$. Приравняв y' нулю, получаем критическое значение аргумента $x = -2$. Так как $y' < 0$ при $x < -2$ и $y' > 0$ при $x > -2$, то $x = -2$ является точкой минимума данной функции, причем $y_{\min} = 2$. Тот же результат мы получим, используя знак второй производной в критической точке: $y'' = 2 > 0$.

827. $y = 2 + x - x^2$.

828. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

829. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 5$.

Решение. Находим производную

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2).$$

Приравнивая производную y' нулю, получаем критические точки $x_1 = -2$ и $x_2 = 1$. Для определения характера экстремума вычисляем вторую производную $y'' = 6(2x + 1)$. Так как $y''(-2) < 0$, то $x_1 = -2$ есть точка максимума функции y, причем $y_{\max} = 25$. Аналогично имеем $y''(1) > 0$; поэтому $x_2 = 1$ есть точка минимума функции y и $y_{\min} = -2$.

830. $y = x^2(x - 12)^2$.

831. $y = x(x - 1)^2(x - 2)^3$.

832. $y = \dfrac{x^3}{x^2+3}$.

833. $y = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$.

834. $y = \dfrac{(x-2)(8-x)}{x^2}$.

835. $y = \dfrac{16}{x(4-x^2)}$.

836. $y = \dfrac{4}{\sqrt{x^2+8}}$.

837. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-4}}$.

838. $y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$.

839. $y = 2\sin 2x + \sin 4x$.

840. $y = 2\cos\dfrac{x}{2} + 3\cos\dfrac{x}{3}$.

841. $y = x - \ln(1 + x)$.

842. $y = x \ln x$.

843. $y = x \ln^2 x$.

844. $y = \operatorname{ch} x$.

845. $x = xe^x$.

846. $y = x^2 e^{-x}$.

847. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

848. $y = x - \operatorname{arctg} x$.

Определить наименьшие и наибольшие значения функций на указанных отрезках (если отрезок не указан, то следует определить наименьшее и наибольшее значения функции во всей области существования):

849. $y = \frac{x}{1+x^2}$.

850. $y = \sqrt{x(10-x)}$.

851. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

852. $y = \arccos x$.

853. $y = x^3$ на отрезке $[-1, 3]$.

854. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$;

а) на отрезке $[-1, 5]$;

б) на отрезке $[-10, 12]$.

855. Показать, что при положительных значениях x имеет место неравенство

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

856. Определить коэффициенты p и q квадратного трехчлена $y = x^2 + px + q$ так, чтобы этот трехчлен имел минимум $y = 3$ при $x = 1$. Объяснить полученный результат геометрически.

857. Доказать неравенство

$$e^x > 1 + x \text{ при } x \neq 0.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим функцию

$$f(x) = e^x - (1 + x).$$

Обычным приемом находим, что эта функция имеет единственный минимум $f(0) = 0$. Следовательно,

$$f(x) > f(0) \text{ при } x \neq 0,$$

т. е.

$$e^x > 1 + x \text{ при } x \neq 0,$$

что и требовалось доказать.

Доказать неравенства:

858. $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $x > 0$.

859. $\cos x > 1 - \frac{x^2}{2}$ при $x \neq 0$.

860. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ при $x > 0$.

861. Данное положительное число a разложить на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

862. Кусок проволоки данной длины l согнуть в виде прямоугольника так, чтобы площадь последнего была наибольшей.

863. Какой из прямоугольных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

864. Требуется устроить прямоугольную площадку так, чтобы с трех сторон она была огорожена проволочной сеткой, а четвертой стороной примыкала к длинной каменной стене. Какова наивыгоднейшая (в смысле площади) форма площадки, если имеется l погонных метров сетки?

865. Из квадратного листа картона со стороной a требуется сделать открытую прямоугольную коробку наибольшей вместимости, вырезав по углам квадраты и загнув выступы получившейся крестообразной фигуры.

866. Открытый жестяной бак с квадратным основанием должен вмещать V литров. При каких размерах на изготовление бака потребуется наименьшее количество жести?

867. Какой из цилиндров с данным объемом имеет наименьшую полную поверхность?

868. В данный шар вписать конус с наибольшим объемом.

869. В данный шар вписать цилиндр с наибольшей боковой поверхностью.

870. В данный шар вписать конус с наибольшим объемом.

871. В данный шар вписать прямой круговой конус с наибольшей боковой поверхностью.

872. Около данного цилиндра описать прямой конус наименьшего объема (плоскости и центры их круговых оснований совпадают).

873. Какой из конусов, описанных около данного шара, имеет наименьший объем?

874. Полоса жести шириной a должна быть согнута в виде открытого цилиндрического желоба (рис. 26). Каков должен быть центральный угол φ, чтобы вместимость желоба была наибольшей?

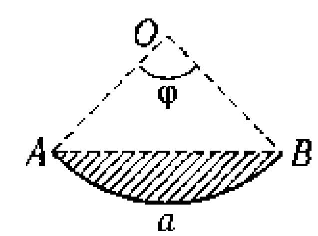


Рис. 26.

875. Из круглого листа вырезать такой сектор, чтобы, свернув его, получить воронку наибольшей вместимости.

876. Открытый сосуд состоит из цилиндра, заканчивающегося снизу полусферой; толщина стенок постоянна. Каковы должны быть размеры сосуда, чтобы при данной вместимости на него пошло минимум материала?

877. Определить наименьшую высоту $h = OB$ двери вертикальной башни $ABCD$, чтобы через эту дверь в башню можно было внести жесткий стержень MN длины l, конец которого M скользит вдоль горизонтальной прямой AB. Ширина башни $d < l$ (рис. 27).

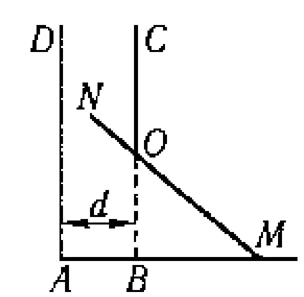


Рис. 27.

878. На координатной плоскости дана точка $M_0(x_0, y_0)$, лежащая в первой четверти. Провести через эту точку прямую так, чтобы треугольник, образованный ею с положительными полуосями координат, имел наименьшую площадь.

879. В данный эллипс вписать прямоугольник наибольшей площади со сторонами, параллельными осям эллипса.

880. В сегмент параболы $y^2 = 2px$, отсекаемый прямой $x = 2a$, вписать прямоугольник наибольшей площади.

881. На кривой $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ найти точку, в которой касательная составляет с осью OX наибольший по модулю угол.

882. Гонцу нужно добраться из пункта A, находящегося на одном берегу реки, в пункт B, находящийся на другом. Зная, что скорость движения на берегу в k раз больше скорости движения по воде, определить, под каким углом гонец должен пересечь реку для того, чтобы достичь пункта B в кратчайшее время. Ширина реки — h, расстояние между пунктами A и B (вдоль берега) — d. Скоростью течения реки пренебречь.

883. На прямолинейном отрезке $AB = a$, соединяющем два источника света A (интенсивность I_1) и B (интенсивность I_2), найти точку M, освещаемую слабее всего (освещенность обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света).

884. Лампа висит над центром круглого стола радиуса r. При какой высоте лампы над столом освещенность предмета, лежащего на краю стола, будет наилучшая? (Освещенность прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света.)

885. Из круглого бревна диаметра d требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина x и высота y этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление: а) на сжатие, б) на изгиб?

Примечание. Сопротивление балки на сжатие пропорционально площади ее поперечного сечения, а на изгиб — произведению ширины этого сечения на квадрат его высоты.

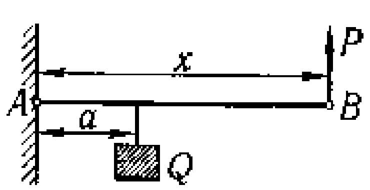


Рис. 28.

886. Однородный стержень AB, который может вращаться около точки A (рис. 28), несет груз массы M на расстоянии a от точки A и удерживается в равновесии вертикальной силой P, приложенной к свободному концу B стержня. Погонная плотность стержня q. Определить длину стержня x так, чтобы сила P была наименьшей, и найти $P_{\min}$.

887*. Центры трех упругих шаров A, B, C расположены на одной прямой. Шар A массы M со скоростью v ударяет в шар B, который, получая известную скорость, ударяет в шар C массы m. Какова должна быть масса шара B, чтобы скорость шара C оказалась наибольшей?

888. Имея N одинаковых электрических элементов, мы можем различными способами составить из них батарею, соединяя по n элементов последовательно, а затем полученные группы $\left(\text{числом } \dfrac{N}{n}\right)$ — параллельно. Ток, даваемый такой батареей, определяется формулой

$$I = \frac{Nn\mathscr{E}}{NR+n^2r},$$

где $\mathscr{E}$ — электродвижущая сила одного элемента, r — его внутреннее сопротивление, R — внешнее сопротивление.

Определить, при каком значении n батарея даст наибольший ток.

889. Определить, при каком диаметре y круглого отверстия в плотине секундный расход воды Q будет иметь наибольшее значение, если $Q = cy\sqrt{h-y}$, где h — глубина низшей точки отверстия (h и эмпирический коэффициент c постоянны).

890. Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — результаты равноточных измерений величины x, то ее наивероятнейшим значением является то, при котором сумма квадратов погрешностей

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (x - x_i)^2$$

имеет наименьшее значение (*принцип наименьших квадратов*).

Доказать, что наивероятнейшее значение величины x есть среднее арифметическое результатов измерений.

§ 2. Направление вогнутости. Точки перегиба

1°. Вогнутость графика функции. Говорят, что график дифференцируемой функции $y = f(x)$ *вогнут вниз* на интервале (a, b) (*вогнут вверх* на интервале (a_1, b_1)), если при $a < x < b$ дуга кривой расположена ниже (или соответственно при $a_1 < x < b_1$ — выше) касательной, проведенной в любой точке интервала (a, b) (или интервала $(a_1 b_1)$) (рис. 29). Достаточным условием вогнутости вниз (вверх) графика $y = f(x)$ является выполнение на соответствующем интервале неравенства

$$f''(x) < 0 \quad (f''(x) > 0).$$

Вместо того чтобы сказать, что график вогнут вниз, говорят также, что он направлен *выпуклостью вверх*. Аналогично график, вогнутый вверх, называют также направленным *выпуклостью вниз*.

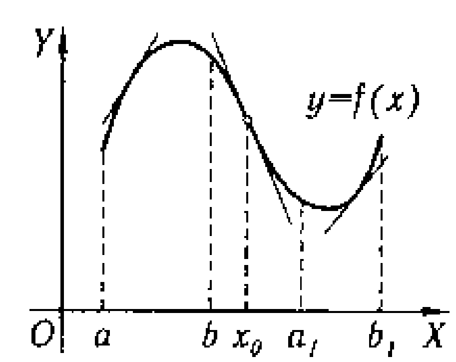


Рис. 29.

2°. Точки перегиба. Точка $(x_0, f(x_0))$, в которой изменяется направление вогнутости графика функции, называется *точкой перегиба* (рис. 29).

Для абсциссы точки перегиба x_0 графика функции $y = f(x)$ вторая производная $f''(x_0) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует. Точки, в которых $f''(x) = 0$ или $f''(x_0)$ не существует, называются *критическими точками 2-го рода*. Критическая точка 2-го рода x_0 является абсциссой точки перегиба, если $f''(x)$ сохраняет постоянные знаки в интервалах $x_0 - \delta < x < x_0$ и $x_0 < x < x_0 + \delta$, где δ — некоторое положительное число, причем эти знаки противоположны, и не является точкой перегиба, если знаки $f''(x)$ в указанных выше интервалах одинаковы.

Пример 1. Определить интервалы вогнутости и выпуклости, а также точки перегиба *кривой Гаусса*

$$y = e^{-x^2}.$$

Решение. Имеем

$$y' = -2xe^{-x^2}$$

и

$$y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2}.$$

Приравняв вторую производную y'' нулю, находим критические точки 2-го рода:

$$x_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ и } x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

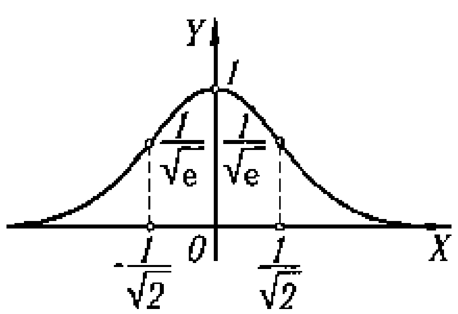


Рис. 30.

Эти точки разбивают числовую ось $-\infty < x < +\infty$ на три интервала: I $(-\infty, x_1)$, II (x_1, x_2) и III $(x_2, +\infty)$. Знаки y'' соответственно будут $+, -, +$ (в этом можно убедиться, взяв, например, по одной точке в каждом из указанных интервалов и подставив соответствующие значения x в y''). Поэтому: 1) кривая вогнута вверх при $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$; 2) вогнута вниз при $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Точки $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ — точки перегиба (рис. 30).

Заметим, что ввиду симметрии относительно оси OY кривой Гаусса исследование знака вогнутости этой кривой достаточно было производить лишь на полуоси $0 < x < +\infty$.

Пример 2. Найти точки перегиба графика функции

$$y = \sqrt[3]{x+2}.$$

Решение. Имеем

$$y'' = -\frac{2}{9}(x+2)^{-\frac{5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}. \qquad (1)$$

Очевидно, y'' в нуль нигде не обращается.

Приравнивая нулю знаменатель дроби в правой части равенства (1), получаем, что y'' не существует при $x = -2$. Так как $y'' > 0$ при $x < -2$ и $y'' < 0$ при $x > -2$, то $(-2, 0)$ есть точка перегиба (рис. 31). Касательная в этой точке параллельна оси ординат, так как первая производная y' при $x = -2$ бесконечна.

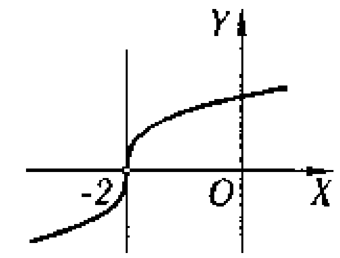


Рис. 31.

Найти интервалы вогнутости и точки перегиба графиков функций:

891. $y = x^3 - 6x^2 + 12x + 4$.

892. $y = (x+1)^4$.

893. $y = \frac{1}{x+3}$.

894. $y = \frac{x^3}{x^2+12}$.

895. $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$.

896. $y = \cos x$.

897. $y = x - \sin x$.

898. $y = x^2 \ln x$.

899. $y = \operatorname{arctg} x - x$.

900. $y = (1 + x^2)e^x$.

§ 3. Асимптоты

1°. Определение. Если точка (x, y) непрерывно перемещается по кривой $y = f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к бесконечности, и при этом расстояние точки от некоторой прямой стремится к нулю, то эта прямая называется *асимптотой* кривой.

2°. Вертикальные асимптоты. Если существует число a такое, что

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty,$$

то прямая $x = a$ является асимптотой (*вертикальная асимптота*).

3°. Наклонные асимптоты. Если существуют пределы

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k_1$$

и

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - k_1 x] = b_1,$$

то прямая $y = k_1 x + b_1$ будет асимптотой (*правая наклонная* или, в случае $k_1 = 0$, *правая горизонтальная асимптота*).

Если существуют пределы

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k_2$$

и

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x) - k_2 x] = b_2,$$

то прямая $y = k_2x + b_2$ — асимптота (*левая наклонная* или, в случае $k_2 = 0$, *левая горизонтальная асимптота*). График функции $y = f(x)$ (функция предполагается однозначной) не может иметь более одной правой (наклонной или горизонтальной) и более одной левой (наклонной или горизонтальной) асимптоты.

Пример 1. Найти асимптоты кривой

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Решение. Приравнивая знаменатель нулю, получаем две вертикальные асимптоты:

$$x = -1 \text{ и } x = 1.$$

Ищем наклонные асимптоты. При $x \to +\infty$ получаем:

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = 1,$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = 0,$$

следовательно, правой асимптотой является прямая $y = x$. Аналогично при $x \to -\infty$ имеем

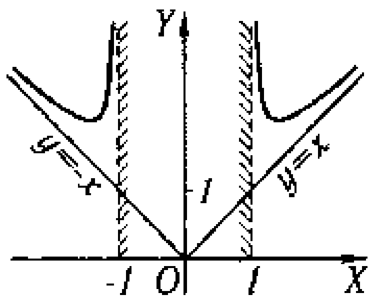


Рис. 32.

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x} = -1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}(y+x) = 0.$$

Таким образом, левая асимптота есть $y = -x$ (рис. 32). Исследование на асимптоты данной кривой упрощается, если учесть симметрию этой кривой.

Пример 2. Найти асимптоты кривой

$$y = x + \ln x.$$

Решение. Так как

$$\lim_{x\to+0} y = -\infty,$$

то прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой (нижней). Исследуем кривую только на наклонную правую асимптоту (так как $x > 0$).

Имеем:

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}(y-x) = \lim_{x\to+\infty}\ln x = \infty.$$

Следовательно, наклонной асимптоты нет.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$; $y = \psi(t)$, то сперва исследуют, нет ли таких значений параметра t, при которых одна

из функций $\varphi(t)$ или $\psi(t)$ обращается в бесконечность, а другая остается конечной. При $\varphi(t_0) = \infty$, а $\psi(t_0) = c$ кривая имеет горизонтальную асимптоту $y = c$. При $\psi(t_0) = \infty$, а $\varphi(t_0) = c$ кривая имеет вертикальную асимптоту $x = c$.

Если $\varphi(t_0) = \psi(t_0) = \infty$ и притом

$$\lim_{t\to t_0}\frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = k;\quad \lim_{t\to t_0}[\psi(t) - k\varphi(t)] = b,$$

то кривая имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$.

Если кривая задана полярным уравнением $r = f(\varphi)$, то можно найти ее асимптоты по предыдущему правилу, преобразовав уравнение кривой к параметрическому виду по формулам $x = r\cos\varphi = f(\varphi)\cos\varphi$; $y = r\sin\varphi = f(\varphi)\sin\varphi$.

Найти асимптоты кривых:

901. $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$.

902. $y = \dfrac{x}{x^2-4x+3}$.

903. $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

904. $y = \dfrac{x^3}{x^2+9}$.

905. $y = \sqrt{x^2-1}$.

906. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$.

907. $y = \dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$.

908. $y = x - 2 + \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$.

909. $y = e^{-x^2} + 2$.

910. $y = \dfrac{1}{1-e^x}$.

911. $y = e^{\frac{1}{x}}$.

912. $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

913. $y = \ln(1+x)$.

914. $x = t$; $y = t + 2\operatorname{arctg} t$.

915. Найти асимптоту гиперболической спирали $r = \dfrac{a}{\varphi}$.

§ 4. Построение графиков функций по характерным точкам

При построении графика функции следует прежде всего найти область определения этой функции и выяснить поведение функции на границе ее области определения. Полезно также предварительно отметить некоторые особенности функции (если они имеются), как-то: симметрия, периодичность, постоянство знака, монотонность и т. п.

Далее, нужно найти точки разрыва, точки экстремума функции, точки перегиба, асимптоты и т. д. Найденные элементы позволяют выяснить общий характер графика функции и получить математически правильный эскиз его.

Пример 1. Построить график функции

$$y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}.$$

Решение. а) Функция существует всюду, кроме точек $x = \pm 1$.

Функция — нечетная, поэтому график функции симметричен относительно точки $O(0; 0)$. Это обстоятельство упрощает построение графика.

б) Точками разрыва являются точки $x = -1$ и $x = 1$, причем $\lim\limits_{x \to 1 \mp \infty} y = \mp\infty$ и $\lim\limits_{x \to -1 \mp \infty} y = \mp\infty$, следовательно, прямые $x = \pm 1$ являются вертикальными асимптотами графика.

в) Ищем наклонные асимптоты. Имеем

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0,$$

$$b_1 = \lim_{x \to +\infty} y = \infty,$$

следовательно, правой наклонной асимптоты нет. Из симметрии графика следует, что левая наклонная асимптота также отсутствует.

г) Находим критические точки 1-го и 2-го рода, т. е. точки, в которых обращается в нуль или не существует первая или соответственно вторая производная данной функции.

Имеем

$$y' = \frac{x^2 - 3}{3\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}, \qquad (1)$$

$$y'' = \frac{2x(9 - x^2)}{9\sqrt[3]{(x^2 - 1)^7}}. \qquad (2)$$

Производные y' и y'' не существуют только при $x = \pm 1$, т. е. только в тех точках, где не существует и сама функция y, поэтому критическими точками будут лишь те точки, где y' или y'' обращается в нуль.

Из (1) и (2) следует:

$$y' = 0 \text{ при } x = \pm\sqrt{3};$$
$$y'' = 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \pm 3.$$

Таким образом, y' сохраняет постоянный знак в каждом из интервалов $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}, +\infty)$, а y'' — в каждом из интервалов $(-\infty, -3)$, $(-3, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 3)$ и $(3, +\infty)$.

Для того чтобы выяснить, каковы именно знаки y' (или соответственно y'') в каждом из указанных интервалов, достаточно определить знак y' (или y'') в какой-нибудь одной точке каждого из этих интервалов.

Результаты такого исследования удобно свести в таблицу (табл. I), вычислив также ординаты характерных точек графика функции. Заметим, что ввиду нечетности функции y вычисление достаточно провести лишь при $x \geqslant 0$; левая половина графика восстанавливается по принципу нечетной симметрии.

Таблица I

x	0	(0, 1)	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3} \approx 1{,}73$	$(\sqrt{3}, 3)$	3	$(3, +\infty)$
y	0	–	$\pm\infty$	+	$+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}} \approx 1{,}37$	+	1,5	+
y'	–	–	не сущ.	–	0	+	+	+
y''	0	–	не сущ.	+	+	+	0	–
Выводы	Точка перегиба	Функция убывает; график вогнут вниз	Точка разрыва	Функция убывает; график вогнут вверх	Точка минимума	Функция возрастает; график вогнут вверх	Точка перегиба	Функция возрастает; график вогнут вниз

д) Пользуясь результатами исследования, строим график функции (рис. 33).

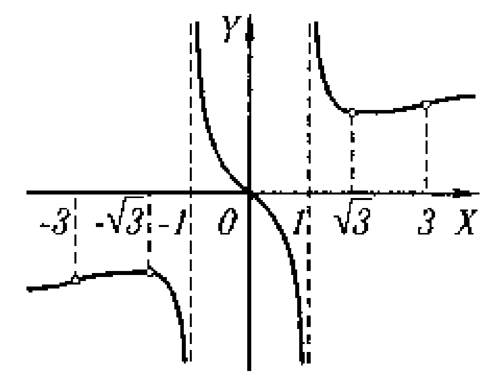


Рис. 33.

Пример 2. Построить график функции

$$y = \frac{\ln x}{x}.$$

Решение. а) Область существования функции: $0 < x < +\infty$.

б) В области существования точек разрыва нет, но при приближении к граничной точке ($x = 0$) области существования имеем

$$\lim_{x \to 0} y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty.$$

Следовательно, прямая $x = 0$ (ось ординат) является вертикальной асимптотой.

в) Ищем правую наклонную или горизонтальную асимптоту (левая наклонная асимптота отсутствует, так как невозможно, чтобы $x \to -\infty$):

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{y}{x} = 0, \qquad b = \lim_{x \to +\infty} y = 0.$$

Следовательно, правой горизонтальной асимптотой является ось абсцисс: $y = 0$.

г) Находим критические точки.

Имеем

$$y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}, \qquad y'' = \frac{2\ln x - 3}{x^3};$$

y' и y'' существуют во всех точках области существования данной функции и

$$y' = 0 \text{ при } \ln x = 1, \text{ т. е. при } x = e;$$

$$y'' = 0 \text{ при } \ln x = \frac{3}{2}, \text{ т. е. при } x = e^{3/2}.$$

Составляем таблицу, включая характерные точки (табл. II). При этом кроме найденных характерных точек полезно найти также точки пересечения графика с осями координат. Положив $y = 0$, находим $x = 1$ (точка пересечения кривой с осью абсцисс); с осью ординат график не пересекается.

Таблица II

x	0	(0, 1)	1	(1, e)	$e \approx 2{,}72$	$(e, e^{\frac{3}{2}})$	$e^{\frac{3}{2}} \approx$ $\approx 4{,}49$	$(e^{\frac{3}{2}}, +\infty)$
y	$-\infty$	—	0	+	$\frac{1}{e} =$ $\approx 0{,}37$	+	$\frac{3}{2\sqrt{e^3}} \approx$ $\approx 0{,}33$	+
y'	не сущ.	+	+	+	0	−	−	−
y''	не сущ.	−	−	−	−	−	0	+
Выводы	Граничная точка области определения функции. Вертикальная асимптота	Функция возрастает; график вогнут вниз	Функция возрастает; график вогнут вниз	Функция возрастает; график вогнут вниз	Точка максимума функции	Функция убывает; график вогнут вниз	Точка перегиба	Функция убывает; график вогнут вверх

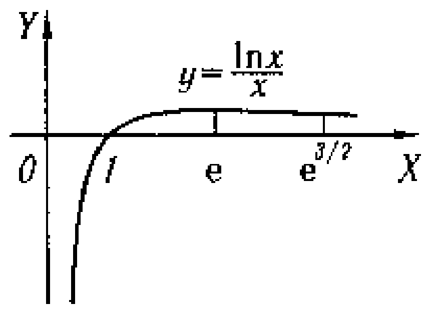


Рис. 34.

д) Пользуясь результатами исследования, строим график функции (рис. 34).

Построить графики указанных ниже функций, определив для каждой функции область ее существования, точки разрыва, точки экстремума, интервалы возрастания и убывания, точки перегиба ее графика, направление вогнутости, а также асимптоты графика.

916. $y = x^3 - 3x^2$.

917. $y = 6x^2 - x^4$.

918. $y = (x - 1)^2(x + 2)$.

919. $y = \dfrac{(x-2)^2(x+4)}{4}$.

920. $y = \dfrac{(x^2-5)^3}{125}$.

921. $y = \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

922. $y = \dfrac{x^4 - 3}{x}$.

923. $y = \dfrac{x^4 + 3}{x}$.

924. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

925. $y = \dfrac{1}{x^2 + 3}$.

926. $y = \dfrac{8}{x^2 - 4}$.

927. $y = \dfrac{4x}{4 + x^2}$.

928. $y = \dfrac{4x - 12}{(x-2)^2}$.

929. $y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$.

930. $y = \dfrac{16}{x^2(x-4)}$.

931. $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}$.

932. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4 - x}$.

933. $y = \sqrt{8 + x} - \sqrt{8 - x}$.

934. $y = x\sqrt{x + 3}$.

935. $y = \sqrt{x^3 - 3x}$.

936. $y = \sqrt[3]{1 - x^2}$.

937. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

938. $y = 2x + 2 - 3\sqrt[3]{(x+1)^2}$.

939. $y = \sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$.

940. $y = \sqrt[3]{(x+4)^2} - \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

941. $y = \sqrt[3]{(x-2)^2} + \sqrt[3]{(x-4)^2}$.

942. $y = \dfrac{4}{\sqrt{4 - x^2}}$.

943. $y = \dfrac{8}{x\sqrt{x^2 - 4}}$.

944. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$.

945. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

946. $y = xe^{-x}$.

947. $y = \left(a + \dfrac{x^2}{a}\right)e^{\frac{x}{a}}$.

948. $y = e^{8x - x^2 - 14}$.

949. $y = (2 + x^2)e^{-x^2}$.

950. $y = 2|x| - x^2$.

951. $y = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

952. $y = \dfrac{x^2}{2}\ln\dfrac{x}{a}$.

953. $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

954. $y = (x + 1)\ln^2(x + 1)$.

955. $y = \ln(x^2 - 1) + \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

956. $y = \ln\dfrac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$.

957. $y = \ln(1 + e^{-x})$.

958. $y = \left(e + \dfrac{1}{x}\right)$.

959. $y = \sin x + \cos x$.

960. $y = \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2}$.

961. $y = \cos x - \cos^2 x$.

962. $y = \sin^3 x + \cos^3 x$.

963. $y = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$.

964. $y = \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

965. $y = \sin x \cdot \cos 2x$.

966. $y = \cos x \cdot \cos 2x$.

967. $y = x + \sin x$.

968. $y = \arcsin (1 - \sqrt[3]{x^2})$.

969. $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

970. $y = 2x - \operatorname{tg} x$.

971. $y = x \operatorname{arctg} x$.

972. $y = x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $y = 0$ при $x = 0$.

973. $y = x + 2 \operatorname{arctg} x$.

974. $y = \dfrac{x}{2} + \operatorname{arcctg} x$.

975. $y = \ln \operatorname{sh} x$.

976. $y = \operatorname{Arch}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

977. $y = e^{\sin x}$.

978. $y = e^{\arcsin \sqrt{x}}$.

979. $y = e^{\operatorname{arctg} x}$.

980. $y = \ln \sin x$.

981. $y = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{2}\right)$.

982. $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$.

983. $y = \cos x - \ln \cos x$.

984. $y = \operatorname{arctg} (\ln x)$.

985. $y = \arcsin \ln (x^2 + 1)$.

986. $y = x^x$.

987. $y = x^{\frac{1}{x}}$.

Рекомендуется также построить графики функций, указанных в №№ 826—848.

Построить графики функций, заданных параметрически:

988. $x = t^2 - 2t,\ y = t^2 + 2t$.

989. $x = a \cos^3 t,\ y = a \sin t\ (a > 0)$.

990. $x = te^t,\ y = te^{-t}$.

991. $x = t + e^{-t},\ y = 2t + e^{-2t}$.

992. $x = a(\operatorname{sh} t - t),\ y = a(\operatorname{ch} t - 1)\ (a > 0)$.

§ 5. Дифференциал дуги. Кривизна

1°. Дифференциал дуги. Дифференциал дуги s плоской кривой, заданной уравнением в декартовых координатах x и y, выражается формулой

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2};$$

при этом, если уравнение кривой имеет вид:

а) $y = f(x)$, то $ds = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$ при $dx > 0$;

б) $x = f_1(y)$, то $ds = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dx}{dy}\right)^2}\, dy$ при $dy > 0$;

в) $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, то $ds = \sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$ при $dt > 0$;

г) $F(x, y) = 0$, то $ds = \dfrac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{|F_y'|}\,|dx| = \dfrac{\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}}{|F_x'|}\,|dy|$.

Обозначая через α угол, образованный положительным направлением касательной (т. е. направленной в сторону возрастания дуги кривой s) с положительным направлением оси OX, получим:

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds},$$

$$\sin \alpha = \frac{dy}{ds}.$$

В полярных координатах

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\varphi)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi.$$

Обозначая через β угол между полярным радиусом точки кривой и касательной к кривой в этой точке, имеем

$$\cos \beta = \frac{dr}{ds},$$

$$\sin \beta = r\frac{d\varphi}{ds}.$$

2°. Кривизна кривой. *Кривизной* K кривой в ее точке M называется предел отношения угла между положительными направлениями касательных в точках M и N кривой (*угол смежности*) к длине дуги $\overset{\smile}{MN} = \Delta s$, когда $N \to M$ (рис. 35), т. е.

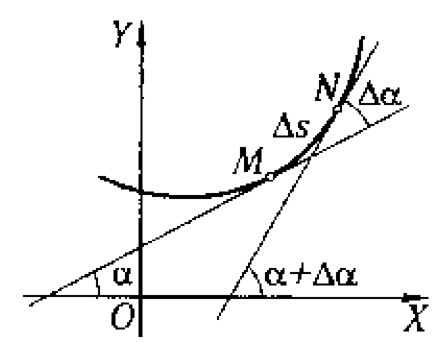


Рис. 35.

$$K = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds},$$

где α — угол между положительными направлениями касательной в точке M и оси OX.

Радиусом кривизны R называется величина, обратная модулю кривизны, т. е.

$$R = \frac{1}{|K|}.$$

Линиями постоянной кривизны являются окружность $\left(K = \dfrac{1}{a}\right.$, где a — радиус окружности$\left.\right)$ и прямая ($K = 0$).

Формулы для вычисления кривизны в прямоугольных координатах следующие (с точностью до знака):

1) если кривая задана уравнением в явной форме $y = f(x)$, то

$$K = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}};$$

2) если кривая задана уравнением в неявной форме $F(x, y) = 0$, то

$$K = \frac{\begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{vmatrix}}{(F'^2_x + F'^2_y)^{3/2}};$$

3) если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то

$$K = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

где

$$x' = \frac{dx}{dt},\ y' = \frac{dy}{dt},\ x'' = \frac{d^2x}{dt^2},\ y'' = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

В полярных координатах, когда кривая задана уравнением $r = f(\varphi)$, имеем

$$K = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}},$$

где

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} \text{ и } r'' = \frac{d^2r}{d\varphi^2}.$$

3°. **Окружность кривизны.** *Окружностью кривизны (соприкасающейся окружностью)* кривой в ее точке M называется предельное положение окружности, проведенной через точку M и две другие точки кривой P и Q, когда $P \to M$ и $Q \to M$.

Радиус окружности кривизны равен радиусу кривизны, а центр окружности кривизны (*центр кривизны*) находится на нормали к кривой, проведенной в точке M в сторону вогнутости кривой.

Координаты X и Y центра кривизны кривой вычисляются по формулам:

$$X = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''},\ Y = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Эволютой кривой называется геометрическое место ее центров кривизны.

Если в формулах для определения координат центра кривизны рассматривать X и Y как текущие координаты точки эволюты, то эти формулы дают параметрические уравнения эволюты с параметром x или y (или же t, если сама кривая задана уравнениями в параметрической форме).

Пример 1. Найти уравнение эволюты параболы $y = x^2$.

Решение. $X = -4x^3$, $Y = \dfrac{1 + 6x^2}{2}$. Исключив параметр x, найдем уравнение эволюты в явном виде: $Y = \dfrac{1}{2} + 3\left(\dfrac{X}{4}\right)^{2/3}$.

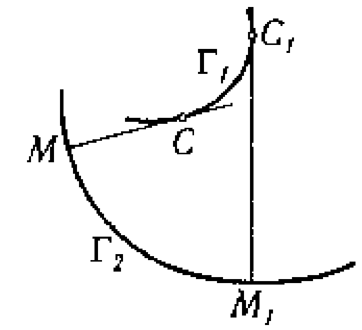


Рис. 36.

Эвольвентой (инволютой) кривой называется такая кривая, для которой данная кривая является эволютой.

Нормаль MC эвольвенты Γ_2 является касательной к эволюте Γ_1; длина дуги $\overset{\smile}{CC_1}$ эволюты равна соответствующему приращению радиуса кривизны $\overset{\smile}{CC_1} = |M_1C_1 - MC|$, поэтому эвольвенту Γ_2 называют также *разверткой* кривой Γ_1, получающейся разматыванием натянутой нити, намотанной на Γ_1 (рис. 36). Каждой эволюте соответствует бесчисленное множество эвольвент, отвечающих различным первоначальным длинам нити.

4°. **Вершины кривой.** *Вершиной* кривой называется точка кривой, в которой кривизна имеет максимум или минимум. Для определения вершин кривой составляется выражение кривизны K и находятся ее точки экстремума. Вместо кривизны K можно взять радиус кривизны $R = \dfrac{1}{|K|}$ и искать его точки экстремума, если в этом случае вычисления проще.

Пример 2. Найти вершину цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$ $(a > 0)$.

Решение. Так как $y' = \mathrm{sh}\,\dfrac{x}{a}$, а $y'' = \dfrac{1}{a}\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$, то $K = \dfrac{1}{a\,\mathrm{ch}^2\,\dfrac{x}{a}}$ и, следовательно, $R = a\,\mathrm{ch}^2\,\dfrac{x}{a}$. Имеем $\dfrac{dR}{dx} = \mathrm{sh}\,\dfrac{2x}{a}$. Приравнивая производную $\dfrac{dR}{dx}$ нулю, получаем $\mathrm{sh}\,\dfrac{2x}{a} = 0$, откуда находим единственную критическую точку $x = 0$. Вычисляя вторую производную $\dfrac{d^2R}{dx^2}$ и подставляя в нее значение $x = 0$, получаем $\left.\dfrac{d^2R}{dx^2}\right|_{x=0} = \dfrac{2}{a}\,\mathrm{ch}\left.\dfrac{2x}{a}\right|_{x=0} = \dfrac{2}{a} > 0$. Следовательно, $x = 0$ есть точка минимума радиуса кривизны (или максимума кривизны) цепной линии. Вершиной цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\dfrac{x}{a}$, таким образом, является точка $A(0, a)$.

Найти дифференциал дуги, а также косинус и синус угла, образованного с положительным направлением оси OX касательной к каждой из следующих кривых:

993. $x^2 + y^2 = a^2$ (*окружность*).

994. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (*эллипс*).

995. $y^2 = 2px$ (*парабола*).

996. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (*астроида*).

997. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ (*цепная линия*).

998. $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$ (*циклоида*).

999. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$ (*астроида*).

Найти дифференциал дуги, а также косинус или синус угла, образованного полярным радиусом и касательной к каждой из следующих кривых:

1000. $r = a\varphi$ (*архимедова спираль*).

1001. $r = \frac{a}{\varphi}$ (*гиперболическая спираль*).

1002. $r = a\sec^2 \frac{\varphi}{2}$ (*парабола*).

1003. $r = a\cos^2 \frac{\varphi}{2}$ (*кардиоида*).

1004. $r = a^{\varphi}$ (*логарифмическая спираль*).

1005. $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ (*лемниската*).

Вычислить кривизну данных кривых в указанных точках:

1006. $y = x^4 - 4x^3 - 18x^2$ в начале координат.

1007. $x^2 + xy + y^2 = 3$ в точке $(1; 1)$.

1008. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ в вершинах $A(a, 0)$ и $B(0, b)$.

1009. $x = t^2$, $y = t^3$ в точке $(1; 1)$.

1010. $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ в вершинах с полярными углами $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

1011. В какой точке параболы $y^2 = 8x$ кривизна равна 0,128?

1012. Найти вершину кривой $y = e^x$.

Найти радиусы кривизны (в любой точке) данных линий:

1013. $y = x^3$ (*кубическая парабола*).

1014. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (*эллипс*).

1015. $x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln y}{2}$.

1016. $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$ (*астроида*).

1017. $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$ (*эвольвента круга*).

1018. $r = ae^{k\varphi}$ (*логарифмическая спираль*).

1019. $r = a(1 + \cos\varphi)$ (*кардиоида*).

1020. Найти наименьшее значение радиуса кривизны параболы $y^2 = 2px$.

1021. Доказать, что радиус кривизны цепной линии $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ равен длине отрезка нормали.

Вычислить координаты центра кривизны данных кривых в указанных точках:

1022. $xy = 1$ в точке $(1; 1)$.

1023. $ay^2 = x^3$ в точке $(a; a)$.

Написать уравнения окружностей кривизны данных кривых в указанных точках:

1024. $y = x^2 - 6x + 10$ в точке $(3; 1)$.

1025. $y = e^x$ в точке $(0; 1)$.

Найти эволюты кривых:

1026. $y^2 = 2px$ (*парабола*).

1027. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (*эллипс*).

1028. Доказать, что эволютой циклоиды

$$x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t)$$

является смещенная циклоида.

1029. Доказать, что эволютой логарифмической спирали

$$r = ae^{k\varphi}$$

является также логарифмическая спираль с тем же полюсом.

1030. Показать, что кривая (*развертка окружности*)

$$x = a(\cos t + t\sin t);\ y = a(\sin t - t\cos t)$$

является эвольвентой окружности $x = a\cos t$; $y = a\sin t$.

Глава IV

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Непосредственное интегрирование

1°. Основные правила интегрирования.

1) Если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C,$$

где C — произвольная постоянная.

2) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$, где A — постоянная величина.

3) $\int [f_1(x) \pm f_2(x)]\,dx = \int f_1(x)\,dx \pm \int f_2(x)\,dx$.

4) Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то

$$\int f(u)\,du = F(u) + C.$$

В частности,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

2°. Таблица простейших интегралов.

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1.$

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

III. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C_1 \quad (a \neq 0).$

IV. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0);$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C \quad (a \neq 0).$

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln|x + \sqrt{x^2+a}| + C \quad (a \neq 0).$

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C_1 \quad (a > 0).$

VII. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0);\ \int e^x\,dx = e^x + C.$

VIII. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

IX. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

X. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

XI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

XII. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C = \ln|\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x| + C.$

XIII. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$

XIV. $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

XV. $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

XVI. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

XVII. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

Пример 1.

$$\int (ax^2 + bx + c)\,dx = \int ax^2\,dx + \int bx\,dx + \int c\,dx =$$
$$= a\int x^2\,dx + b\int x\,dx + c\int dx = a\frac{x^3}{3} + b\frac{x^2}{2} + cx + C.$$

Применяя основные правила 1), 2), 3) и формулы интегрирования, найти следующие интегралы:

1031. $\int 5a^2x^6\,dx.$

1032. $\int (6x^2 + 8x + 3)\,dx.$

1033. $\int x(x+a)(x+b)\,dx.$

1034. $\int (a + bx^3)^2\,dx.$

1035. $\int \sqrt{2px}\,dx.$

1036. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}.$

1037. $\int (nx)^{\frac{1-n}{n}}\,dx.$

1038. $\int \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx.$

1039. $\int (\sqrt{x} + 1)(x - \sqrt{x} + 1)\,dx.$

1040. $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

1041. $\int \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}\,dx.$

1042. $\int \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{x})^4}{\sqrt{ax}}\,dx.$

1043. $\int \frac{dx}{x^2+7}$.

1044. $\int \frac{dx}{x^2-10}$.

1045. $\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$.

1046. $\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}}$.

1047. $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\,dx$.

1048*. а) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$; б) $\int \operatorname{th}^2 x\,dx$.

1049. а) $\int \operatorname{ctg}^2 x\,dx$; б) $\int \operatorname{cth}^2 x\,dx$.

1050. $\int 3^x e^x\,dx$.

3°. Интегрирование путем подведения под знак дифференциала. Правило 4) значительно расширяет таблицу простейших интегралов. А именно, в силу этого правила таблица интегралов оказывается справедливой независимо от того, является переменная интегрирования независимой переменной или дифференцируемой функцией.

Пример 2. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int (5x-2)^{-1/2}\,d(5x-2) =$

$$= \frac{1}{5}\int u^{-1/2}\,du = \frac{1}{5}\cdot\frac{u^{1/2}}{1/2} + C = \frac{1}{5}\frac{(5x-2)^{1/2}}{1/2} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C,$$

где было положено $u = 5x - 2$. Использовались правило 4) и табличный интеграл I.

Пример 3. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1+(x^2)^2}} = \frac{1}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4}) + C.$

Неявно подразумевалось $u = x^2$, причем применялись правило 4) и табличный интеграл V.

Пример 4. $\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^{x^3}\,d(x^3) = \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

в силу правила 4) и табличного интеграла VII.

В примерах 2, 3, 4, прежде чем использовать тот или иной табличный интеграл, мы приводили данный интеграл к виду

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \text{ где } u = \varphi(x).$$

Такого рода преобразование называется *подведением под знак дифференциала*.

Полезно отметить часто применяемые преобразования дифференциалов, которые, в частности, использовались в примерах 2 и 3:

а) $dx = \frac{1}{a}d(ax+b)$ $(a \neq 0)$; б) $x\,dx = \frac{1}{2}d(x^2)$ и т. п.

Применяя основные правила и формулы интегрирования, найти следующие интегралы:

1051.** $\int \frac{a\,dx}{a-x}$.

1052.** $\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx$.

1053. $\int \frac{1-3x}{3+2x}\,dx$.

1054. $\int \frac{x\,dx}{a+bx}$.

1055. $\int \frac{ax+b}{\alpha x+\beta}\,dx$.

1056. $\int \frac{x^2+1}{x-1}\,dx$.

1057. $\int \frac{x^2+5x+7}{x+3}\,dx$.

1058. $\int \frac{x^4+x^2+1}{x-1}\,dx$.

1059. $\int \left(a+\frac{b}{x-a}\right)^2 dx$.

1060*. $\int \frac{x}{(x+1)^2}\,dx$.

1061. $\int \frac{b\,dy}{\sqrt{1-y}}$.

1062. $\int \sqrt{a-bx}\,dx$.

1063*. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$.

1064. $\int \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}\,dx$.

1065. $\int \frac{dx}{3x^2+5}$.

1066. $\int \frac{dx}{7x^2-8}$.

1067. $\int \frac{dx}{(a+b)-(a-b)x^2}$ $(0 < b < a)$.

1068. $\int \frac{x^2}{x^2+2}\,dx$.

1069. $\int \frac{x^3}{a^2-x^2}\,dx$.

1070. $\int \frac{x^2-5x+6}{x^2+4}\,dx$.

1071. $\int \frac{dx}{\sqrt{7+8x^2}}$.

1072. $\int \frac{dx}{\sqrt{7-5x^2}}$.

1073. $\int \frac{2x-5}{3x^2-2}\,dx$.

1074. $\int \frac{3-2x}{5x^2+7}\,dx$.

1075. $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}\,dx$.

1076. $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$.

1077. $\int \frac{x\,dx}{x^2-5}$.

1078. $\int \frac{x\,dx}{2x^2+3}$.

1079. $\int \frac{ax+b}{a^2x^2+b^2}\,dx$.

1080. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

1081. $\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$.

1082. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$.

1083. $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$.

1084. $\int \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx$.

1085. $\int \frac{x - \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}}{1 + 4x^2}\,dx$.

1086. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1 + x^2)\ln(x + \sqrt{1 + x^2})}}$.

1087. $\int a e^{-mx}\,dx$.

1088. $\int 4^{2 - 3x}\,dx$.

1089. $\int (e^t - e^{-t})\,dt$.

1090. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2 dx$.

1091. $\int \frac{(a^x - b^x)^2}{a^x b^x}\,dx$.

1092. $\int \frac{a^{2x} - 1}{\sqrt{a^x}}\,dx$.

1093. $\int e^{-(x^2 + 1)} x\,dx$.

1094. $\int x \cdot 7^{x^2}\,dx$.

1095. $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,dx$.

1096. $\int 5^{\sqrt{x}} \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1097. $\int \frac{e^x}{e^x - 1}\,dx$.

1098. $\int e^x \sqrt{a - b e^x}\,dx$.

1099. $\int \left(e^{\frac{x}{a}} + 1\right)^{\frac{1}{3}} e^{\frac{x}{a}}\,dx$.

1100*. $\int \frac{dx}{2^x + 3}$.

1101. $\int \frac{a^x\,dx}{1 + a^{2x}}$.

1102. $\int \frac{e^{-bx}}{1 - e^{-2bx}}\,dx$.

1103. $\int \frac{e^t\,dt}{\sqrt{1 - e^{2t}}}$.

1104. $\int \sin(a + bx)\,dx$.

1105. $\int \cos \frac{x}{\sqrt{2}}\,dx$.

1106. $\int (\cos ax + \sin ax)^2\,dx$.

1107. $\int \cos\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1108. $\int \sin(\lg x)\,\frac{dx}{x}$.

1109*. $\int \sin^2 x\,dx$.

1110*. $\int \cos^2 x\,dx$.

1111. $\int \sec^2(ax + b)\,dx$.

1112. $\int \operatorname{ctg}^2 ax\,dx$.

1113. $\int \frac{dx}{\sin\frac{x}{a}}$.

1114. $\int \frac{dx}{3\cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)}$.

1115. $\int \frac{dx}{\sin(ax + b)}$.

1116. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$.

1117. $\int x \sin(1 - x^2)\,dx$.

1118. $\int \left(\frac{1}{\sin x\sqrt{2}} - 1\right)^2 dx$.

1119. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

1120. $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

1121. $\int \operatorname{ctg} \frac{x}{a - b}\,dx$.

1122. $\int \frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{5}}$.

1123. $\int \operatorname{tg}\sqrt{x}\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1124. $\int x \operatorname{ctg}(x^2 + 1)\,dx$.

1125. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x}$.

1126. $\int \cos\frac{x}{a} \sin\frac{x}{a}\,dx$.

1127. $\int \sin^3 6x \cos 6x\,dx$.

1128. $\int \frac{\cos ax}{\sin^5 ax}\,dx$.

1129. $\int \frac{\sin 3x}{3 + \cos 3x}\,dx$.

1130. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{\cos^2 x - \sin^2 x}}\,dx$.

1131. $\int \sqrt{1 + 3\cos^2 x}\,\sin 2x\,dx$.

1132. $\int \operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} \sec^2 \frac{x}{3}\,dx$.

1133. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$.

1134. $\int \frac{\operatorname{ctg}^{2/3} x}{\sin^2 x}\,dx$.

1135. $\int \frac{1 + \sin 3x}{\cos^2 3x}\,dx$.

1136. $\int \frac{(\cos ax + \sin ax)^2}{\sin ax}\,dx$.

1137. $\int \frac{\operatorname{cosec}^2 3x}{b - a\operatorname{ctg} 3x}\,dx$.

1138. $\int (2\operatorname{sh} 5x - 3\operatorname{ch} 5x)\,dx$.

1139. $\int \operatorname{sh}^2 x\,dx$.

1140. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}$.

1141. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x}$.

1142. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}$.

1143. $\int \operatorname{th} x\,dx$.

1144. $\int \operatorname{cth} x\,dx$.

Найти неопределенные интегралы:

1145. $\int x \sqrt[5]{5 - x^2}\,dx$.

1146. $\int \frac{x^3 - 1}{x^4 - 4x + 1}\,dx$.

1147. $\int \frac{x^3}{x^8 + 5}\,dx$.

1148. $\int x e^{-x^2}\,dx$.

1149. $\int \frac{3 - \sqrt{2 + 3x^2}}{2 + 3x^2}\,dx$.

1150. $\int \frac{x^3 - 1}{x + 1}\,dx$.

1151. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x}}$.

1152. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}\,dx$.

1153. $\int \frac{\operatorname{tg} 3x - \operatorname{ctg} 3x}{\sin 3x}\,dx$.

1154. $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

1155. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x - 2}}\,dx$.

1156. $\int \left(2 + \frac{x}{2x^2+1}\right) \frac{dx}{2x^2+1}$.

1157. $\int a^{\sin x} \cos x\,dx$.

1158. $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}\,dx$.

1159. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^4}}$.

1160. $\int \operatorname{tg}^2 ax\,dx$.

1161. $\int \sin^2 \frac{x}{2}\,dx$.

1162. $\int \frac{\sec^2 x\,dx}{\sqrt{4-\operatorname{tg}^2 x}}$.

1163. $\int \frac{dx}{\cos \frac{x}{a}}$.

1164. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$.

1165. $\int \operatorname{tg} \sqrt{x-1}\,\frac{dx}{\sqrt{x-1}}$.

1166. $\int \frac{x\,dx}{\sin(x^2)}$.

1167. $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x} + x\ln(1+x^2) + 1}{1+x^2}\,dx$.

1168. $\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}\,dx$.

1169. $\int \frac{\left(1 - \sin \frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}{\sin \frac{x}{\sqrt{2}}}\,dx$.

1170. $\int \frac{x^2}{x^2-2}\,dx$.

1171. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\,dx$.

1172. $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x\,dx$.

1173. $\int \frac{5-3x}{\sqrt{4-3x^2}}\,dx$.

1174. $\int \frac{dx}{e^x+1}$.

1175. $\int \frac{dx}{(a+b)+(a-b)x^2}$ $(0 < b < a)$.

1176. $\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-2}}\,dx$.

1177. $\int \frac{dx}{\sin ax \cos ax}$.

1178. $\int \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right) dt$.

1179. $\int \frac{dx}{x(4-\ln^2 x)}$.

1180. $\int \frac{\arccos \frac{x}{2}}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

1181. $\int e^{-\operatorname{tg} x} \sec^2 x\,dx$.

1182. $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}\,dx$.

1183. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

1184. $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1185. $\int \frac{\sec x \operatorname{tg} x}{\sqrt{\sec^2 x + 1}}\,dx$.

1186. $\int \frac{\cos 2x}{4+\cos^2 2x}\,dx$.

1187. $\int \frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

1188. $\int \sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})}{1+x^2}}\,dx$.

1189. $\int x^2 \operatorname{ch}(x^3+3)\,dx$.

1190. $\int \frac{3^{\operatorname{th} x}}{\operatorname{ch}^2 x}\,dx$.

§ 2. Метод подстановки

1°. Замена переменной в неопределенном интеграле. Полагая

$$x = \varphi(t),$$

где t — новая переменная, φ — непрерывно дифференцируемая функция, будем иметь

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt. \qquad (1)$$

Функцию φ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) приобрела более удобный для интегрирования вид.

Пример 1. Найти

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx.$$

Решение. Естественно положить $t = \sqrt{x-1}$, отсюда $x = t^2 + 1$ и $dx = 2t\,dt$. Следовательно,

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (t^2+1)t \cdot 2t\,dt = 2\int (t^4+t^2)\,dt =$$

$$= \frac{2}{5}t^5 + \frac{2}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C.$$

Иногда применяются подстановки вида

$$u = \varphi(x).$$

Допустим, что нам удалось подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ преобразовать к такому виду:

$$f(x)\,dx = g(u)\,du, \text{ где } u = \varphi(x).$$

Если $\int g(u)\,du$ известен, т. е.

$$\int g(u)\,du = F(u) + C,$$

то

$$\int f(x)\,dx = F[\varphi(x)] + C.$$

Этим способом мы уже, собственно говоря, пользовались в § 1, 3°. Примеры 2, 3, 4 (§ 1) можно было решить следующим образом:

Пример 2. $u = 5x - 2$; $du = 5dx$; $dx = \frac{1}{5}du$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{5x-2}} = \frac{1}{5}\int \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{5}\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{5}\sqrt{5x-2} + C.$$

Пример 3. $u = x^2$; $du = 2x\,dx$; $x\,dx = \frac{du}{2}$.

$$\int \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{1}{2}\ln(u + \sqrt{1+u^2}) + C = \frac{1}{2}\ln(x^2 + \sqrt{1+x^4}) + C.$$

Пример 4. $u = x^3$; $du = 3x^2\,dx$; $x^2\,dx = \frac{du}{3}$.

$$\int x^2 e^{x^3}\,dx = \frac{1}{3}\int e^u\,du = \frac{1}{3}e^u + C = \frac{1}{3}e^{x^3} + C.$$

2°. Тригонометрические подстановки.

1) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{a^2 - x^2}$, то обычно полагают $x = a\sin t$; отсюда

$$\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t.$$

2) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 - a^2}$, то полагают $x = a\sec t$; отсюда

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\,\mathrm{tg}\,t.$$

3) Если интеграл содержит радикал $\sqrt{x^2 + a^2}$, то полагают $x = a\,\mathrm{tg}\,t$; отсюда

$$\sqrt{x^2 + a^2} = a\sec t.$$

Заметим, что тригонометрические подстановки не всегда оказываются выгодными.

Иногда вместо тригонометрических подстановок удобнее пользоваться *гиперболическими подстановками*, которые имеют аналогичный характер (см. № 1209).

О тригонометрических и гиперболических подстановках более подробно см. в § 9.

Пример 5. Найти

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx.$$

Решение. Полагаем $x = \mathrm{tg}\,t$. Следовательно, $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$.

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\,dx = \int \frac{\sqrt{\mathrm{tg}^2 t+1}}{\mathrm{tg}^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{\sec t\cos^2 t}{\sin^2 t}\frac{dt}{\cos^2 t} = \int \frac{dt}{\sin^2 t\cos t} =$$

$$= \int \frac{\sin^2 t+\cos^2 t}{\sin^2 t\cdot\cos t}\,dt = \int \frac{dt}{\cos t} + \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt = \ln|\mathrm{tg}\,t + \sec t| - \frac{1}{\sin t} + C =$$

$$= \ln|\mathrm{tg}\,t + \sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}| - \frac{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 t}}{\mathrm{tg}\,t} + C = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| - \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + C.$$

1191. Применяя указанные подстановки, найти интегралы:

а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$, $x = \frac{1}{t}$;

б) $\int \frac{dx}{e^x+1}$, $x = -\ln t$;

в) $\int x(5x^2-3)^7\,dx$, $5x^2 - 3 = t$;

г) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$, $t = \sqrt{x+1}$;

д) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$, $t = \sin x$.

Применяя подходящие подстановки, найти интегралы:

1192. $\int x(2x+5)^{10}\,dx$.

1193. $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

1194. $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

1195. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-1}}$.

1196. $\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x}\frac{dx}{x}$.

1197. $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1198. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$.

1199. $\int \frac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$.

1200*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

Применяя тригонометрические подстановки, найти интегралы:

1201. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1202. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{2-x^2}}$.

1203. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}\,dx$.

1204*. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1205. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx$.

1206*. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

1207. $\int \sqrt{1-x^2}\,dx$.

1208. Вычислить интеграл

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

с помощью подстановки $x = \sin^2 t$.

1209. Найти

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx,$$

применяя гиперболическую подстановку $x = a \operatorname{sh} t$.

Решение. Имеем $\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2 \operatorname{sh}^2 t} = a \operatorname{ch} t$ и $dx = a \operatorname{ch} dt$. Отсюда

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = \int a \operatorname{ch} t \cdot a \operatorname{ch} t\, dt = a^2 \int \operatorname{ch}^2 t\, dt = a^2 \int \frac{\operatorname{ch} 2t + 1}{2}\, dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\operatorname{sh} 2t + t\right) + C = \frac{a^2}{2}(\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t + t) + C.$$

Так как

$$\operatorname{sh} t = \frac{x}{a},\ \operatorname{ch} t = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$$

и

$$e^t = \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = \frac{x + \sqrt{a^2+x^2}}{a},$$

то окончательно получаем

$$\int \sqrt{a^2+x^2}\, dx = \frac{x}{a}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x + \sqrt{a^2+x^2}\right) + C_1,$$

где $C_1 = C - \frac{a^2}{2}\ln a$ — новая произвольная постоянная.

1210. Найти

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 - a^2}},$$

полагая $x = a \operatorname{ch} t$.

§ 3. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям. Если $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ — дифференцируемые функции, то

$$\int u\, dv = uv - \int v\, du.$$

Пример 1. Найти

$$\int x \ln x\, dx.$$

Полагая $u = \ln x$; $dv = x\, dx$, имеем $du = \frac{dx}{x}$; $v = \frac{x^2}{2}$. Отсюда

$$\int x \ln x\, dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Иногда, чтобы свести данный интеграл к табличному, приходится применять формулу интегрирования по частям несколько раз. В некоторых случаях с помощью интегрирования по частям получают уравнение, из которого определяется искомый интеграл.

Пример 2. Найти

$$\int e^x \cos x\, dx.$$

Имеем

$$\int e^x \cos x\, dx = \int e^x\, d(\sin x) = e^x \sin x - \int e^x \sin x\, dx =$$

$$= e^x \sin x + \int e^x\, d(\cos x) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx.$$

Следовательно,

$$\int e^x \cos x\, dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x\, dx,$$

откуда

$$\int e^x \cos x\, dx = \frac{e^x}{2}(\sin x + \cos x) + C.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

1211. $\int \ln x\, dx$.

1212. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$.

1213. $\int \arcsin x\, dx$.

1214. $\int x \sin x\, dx$.

1215. $\int x \cos 3x\, dx$.

1216. $\int \frac{x}{e^x}\, dx$.

1217. $\int x \cdot 2^{-x}\, dx$.

1218.** $\int x^2 e^{3x}\, dx$.

1219*. $\int (x^2 - 2x + 5)e^{-x}\, dx$.

1220*. $\int x^3 e^{-\frac{x}{3}}\, dx$.

1221. $\int x \sin x \cos x\, dx$.

1222*. $\int (x^2 + 5x + 6)\cos 2x\, dx$.

1223. $\int x^2 \ln x\, dx$.

1224. $\int \ln^2 x\, dx$.

1225. $\int \frac{\ln x}{x^3}\,dx.$

1226. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx.$

1227. $\int x \operatorname{arctg} x\,dx.$

1228. $\int x \arcsin x\,dx.$

1229. $\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx.$

1230. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2 x}.$

1231. $\int \frac{x\cos x}{\sin^2 x}\,dx.$

1232. $\int e^x \sin x\,dx.$

1233. $\int 3^x \cos x\,dx.$

1234. $\int e^{ax} \sin bx\,dx.$

1235. $\int \sin(\ln x)\,dx.$

Применяя различные методы, найти интегралы:

1236. $\int x^3 e^{-x^2}\,dx.$

1237. $\int e^{\sqrt{x}}\,dx.$

1238. $\int (x^2-2x+3)\ln x\,dx.$

1239. $\int x \ln\frac{1-x}{1+x}\,dx.$

1240. $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx.$

1241. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}\,dx.$

1242. $\int x^2 \operatorname{arctg} 3x\,dx.$

1243. $\int x(\operatorname{arctg} x)^2\,dx.$

1244. $\int (\arcsin x)^2\,dx.$

1245. $\int \frac{\arcsin x}{x^2}\,dx.$

1246. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx.$

1247. $\int x \operatorname{tg}^2 2x\,dx.$

1248. $\int \frac{\sin^2 x}{e^x}\,dx.$

1249. $\int \cos^2(\ln x)\,dx.$

1250.** $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx.$

1251*. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}.$

1252*. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx.$

1253*. $\int \sqrt{A+x^2}\,dx.$

1254*. $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}.$

§ 4. Простейшие интегралы, содержащие квадратный трехчлен

1°. Интегралы вида $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$. Основной прием вычисления — приведение квадратного трехчлена к виду

$$ax^2+bx+c = a(x+k)^2+l, \qquad (1)$$

где k и l — постоянные. Для выполнения преобразования (1) удобнее всего из квадратного трехчлена выделить полный квадрат. Можно также пользоваться подстановкой

$$2ax+b=t.$$

Если $m=0$, то, приводя квадратный трехчлен к виду (1), получаем табличные интегралы III или IV (см. § 1, 2°, таблицу простейших интегралов).

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{2x^2-5x+7} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x^2-2\cdot\frac{5}{4}x+\frac{25}{16}\right)+\left(\frac{7}{2}-\frac{25}{16}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{5}{4}\right)}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{31}{16}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{\frac{\sqrt{31}}{4}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{31}}{4}}+C = \frac{2}{\sqrt{31}}\operatorname{arctg}\frac{4x-5}{\sqrt{31}}+C.$$

Если $m \neq 0$, то из числителя выделяется производная $2ax+b$ квадратного трехчлена

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b)+\left(n-\frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{m}{2a}\ln|ax^2+bx+c| + \left(n-\frac{mb}{2a}\right)\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

и таким образом мы приходим к интегралу, разобранному выше.

Пример 2.

$$\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-1)-\frac{1}{2}}{x^2-x-1}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| - \frac{1}{2}\int \frac{d\left(x-\frac{1}{2}\right)}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-x-1| - \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\left|\frac{2x-1-\sqrt{5}}{2x-1+\sqrt{5}}\right| + C.$$

2°. Интегралы вида $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$.

Методы вычислений аналогичны разобранным выше. В конечном итоге интеграл приводится к табличному интегралу V, если $a>0$, и VI, если $a<0$.

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{16}-\left(x-\frac{3}{4}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}+C.$$

Пример 4.

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+1}} =$$

$$= \sqrt{x^2+2x+2} + 2\ln\left(x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right) + C.$$

3°. Интегралы вида $\int \frac{dx}{(mx+n)\sqrt{ax^2+bx+c}}$. С помощью обратной подстановки

$$\frac{1}{mx+n} = t$$

эти интегралы приводятся к интегралам вида 2°.

Пример 5. Найти

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

Решение. Полагаем

$$x+1 = \frac{1}{t},$$

отсюда

$$dx = -\frac{dt}{t^2}.$$

Имеем

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+1}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-2t+2t^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|t-\frac{1}{2}+\sqrt{t^2-t+\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{2(x^2+1)}}{x+1}\right| + C.$$

4°. Интегралы вида $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$. Путем выделения из квадратного трехчлена полного квадрата данный интеграл сводится к одному из следующих двух основных интегралов (см. №№ 1252 и 1253):

1) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C \ (a>0);$

2) $\int \sqrt{x^2+A}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+A} + \frac{A}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+A}\right| + C.$

Пример 6.

$$\int \sqrt{1-2x-x^2}\,dx = \int \sqrt{2-(1+x)^2}\,d(1+x) =$$

$$= \frac{1+x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + \arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}} + C.$$

Найти интегралы:

1255. $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

1256. $\int \frac{dx}{x^2+2x}$.

1257. $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$.

1258. $\int \frac{x\,dx}{x^2-7x+13}$.

1259. $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$.

1260. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}\,dx$.

1261. $\int \frac{x^2dx}{x^2-6x+10}$.

1262. $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$.

1263. $\int \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$.

1264. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$.

1265. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$.

1266. $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$.

1267. $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx$.

1268. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

1269. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x-1}}$.

1270. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$.

1271. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$.

1272. $\int \sqrt{x^2+2x+5}\,dx$.

1273. $\int \sqrt{x-x^2}\,dx$.

1274. $\int \sqrt{2-x-x^2}\,dx$.

1275. $\int \frac{x\,dx}{x^4-4x^2+3}$.

1276. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+12}\,dx$.

1277. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$.

1278. $\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}}$.

1279. $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x}}$.

§ 5. Интегрирование рациональных функций

1°. Метод неопределенных коэффициентов. Интегрирование рациональной функции после выделения целой части сводится к интегрированию *правильной рациональной дроби*

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — целые многочлены, причем степень числителя $P(x)$ ниже степени знаменателя $Q(x)$. Если

$$Q(x) = (x-a)^{\alpha} \ldots (x-l)^{\lambda},$$

где $a, \ldots, l$ — различные действительные корни многочлена $Q(x)$; $\alpha, \ldots, \lambda$ — натуральные числа (кратности корней), то справедливо разложение дроби (1) на простейшие дроби:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \equiv \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \ldots + \frac{L_2}{x-l} + \frac{L_2}{(x-l)^2} + \ldots + \frac{L_\lambda}{(x-l)^\lambda}. \tag{2}$$

Для вычисления неопределенных коэффициентов $A_1, A_2, \ldots, L_\lambda$ обе части тождества (2) приводят к целому виду, а затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях переменной x (первый способ). Можно также определять эти коэффициенты, полагая в равенстве (2), или ему эквивалентном, x равным подходяще подобранным числам (второй способ).

Пример 1. Найти

$$\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = I.$$

Решение. Имеем

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x+1} + \frac{B_2}{(x+1)^2}.$$

Отсюда

$$x \equiv A(x+1)^2 + B_1(x-1)(x+1) + B_2(x-1). \tag{3}$$

а) *Первый способ определения коэффициентов.* Перепишем тождество (3) в виде

$$x \equiv (A+B_1)x^2 + (2A+B_2)x + (A-B_1-B_2).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$0 = A + B_1;\ 1 = 2A + B_2;\ 0 = A - B_1 - B_2.$$

Отсюда

$$A = \frac{1}{4};\ B_1 = -\frac{1}{4};\ B_2 = \frac{1}{2}.$$

б) *Второй способ определения коэффициентов.* Полагая $x = 1$ в тождестве (3), будем иметь

$$1 = A \cdot 4, \text{ т. е. } A = \frac{1}{4}.$$

Полагая $x = -1$, получим

$$-1 = -B_2 \cdot 2, \text{ т. е. } B_2 = \frac{1}{2}.$$

Далее, полагая $x = 0$, будем иметь

$$0 = A - B_1 - B_2, \text{ т. е. } B_1 = A - B_2 = -\frac{1}{4}.$$

Следовательно,

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{4}\ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} + C = -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$$

Пример 2. Найти

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x} = I.$$

Решение. Имеем

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

и

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx. \tag{4}$$

При решении этого примера рекомендуется комбинировать два способа определения коэффициентов. Применяя второй способ, полагаем $x = 0$ в тождестве (4); получим $1 = A$. Затем, полагая $x = 1$, получим $1 = C$. Далее, применяя первый способ, приравняем в тождестве (4) коэффициенты при x^2. Будем иметь

$$0 = A + B, \text{ т. е. } B = -1.$$

Таким образом,

$$A = 1,\ B = -1 \text{ и } C = 1.$$

Следовательно,

$$I = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

Если многочлен $Q(x)$ имеет комплексные корни $a \pm ib$ кратности k, то в разложение (2) дополнительно войдут простейшие дроби вида

$$\frac{M_1x + N_1}{x^2 + px + q} + \ldots + \frac{M_kx + N_k}{(x^2 + px + q)^k}, \tag{5}$$

где

$$x^2 + px + q = [x - (a + ib)][x - (a - ib)]$$

и M_1, N_1, ..., M_k, N_k — неопределенные коэффициенты, определяемые способами, указанными выше. При $k = 1$ дробь (5) интегрируется непосредственно; при $k > 1$ применяется *метод понижения*, причем предварительно квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ рекомендуется представить в виде $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$ и сделать подстановку $x + \frac{p}{2} = z$.

Пример 3. Найти

$$\int \frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}\,dx = I.$$

Решение. Так как

$$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1,$$

то, полагая $x + 1 = z$, получаем

$$I = \int \frac{z-1}{(z^2+1)^2}\,dz = \int \frac{z\,dz}{(z^2+1)^2} - \int \frac{(1+z^2)-z^2}{(z^2+1)^2}\,dz =$$

$$= -\frac{1}{2(z^2+1)} - \int \frac{dz}{z^2+1} + \int z\,d\left[-\frac{1}{2(z^2+1)}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2(z^2+1)} - \operatorname{arctg} z - \frac{z}{2(z^2+1)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z = -\frac{z+1}{2(z^2+1)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} z + C =$$

$$= -\frac{x+3}{2(x^2+4x+5)} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+2) + C.$$

2°. **Метод Остроградского.** Если $Q(x)$ имеет кратные корни, то

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \frac{X(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{Y(x)}{Q_2(x)}\,dx, \qquad (6)$$

где $Q_1(x)$ — общий наибольший делитель многочлена $Q(x)$ и его производной $Q'(x)$;

$$Q_2(x) = Q(x) : Q_1(x);$$

$X(x)$ и $Y(x)$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, степени которых соответственно на единицу меньше степеней $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$.

Неопределенные коэффициенты многочленов $X(x)$ и $Y(x)$ вычисляются при помощи дифференцирования тождества (6).

Пример 4. Найти

$$\int \frac{x}{(x^3-1)^2}.$$

Решение.

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}\,dx.$$

Дифференцируя это тождество, получаем

$$\frac{1}{(x^3-1)^2} = \frac{(2Ax+B)(x^3-1)-3x^2(Ax^2+Bx+C)}{(x^3-1)^2} + \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}$$

или

$$1 = (2Ax+B)(x^3-1) - 3x^2(Ax^2+Bx+C) + (Dx^2+Ex+F)(x^3-1).$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, будем иметь:

$$D = 0;\ E - A = 0;\ F - 2B = 0;\ D + 3C = 0;\ E + 2A = 0;\ B + F = -1;$$

отсюда

$$A = 0;\ B = -\frac{1}{3};\ C = 0;\ D = 0;\ E = 0;\ F = -\frac{2}{3}$$

и, следовательно,

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{1}{3}\frac{x}{x^3-1} - \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x^3-1}. \qquad (7)$$

Для вычисления интеграла в правой части равенства (7) разлагаем дробь $\frac{1}{x^3-1}$ на элементарные дроби:

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{L}{x-1} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1},$$

т. е.

$$1 = L(x^2+x+1) + Mx(x-1) + N(x+1). \qquad (8)$$

Полагая $x = 1$, получаем $L = \frac{1}{3}$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой частях равенства (8), находим:

$$L + M = 0;\ L - N = 1,$$

т. е.

$$M = -\frac{1}{3};\ N = -\frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$$

и

$$\int \frac{dx}{(x^3-1)^2} = -\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} + \frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

Найти интегралы:

1280. $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$.

1281. $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$.

1282. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x-4)}$.

1283. $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}\,dx$.

1284. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}\,dx$.

1285. $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$.

1286. $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$.

1287. $\int \frac{x^4-6x^3+12x^2+6}{x^3-6x^2+12x-8}\,dx$.

1288. $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}\,dx$.

1289. $\int \frac{x^2-8x+7}{(x^2-3x-10)^2}\,dx$.

1290. $\int \frac{2x-3}{(x^2-3x+2)^3}\,dx$.

1291. $\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}\,dx$.

1292. $\int \frac{x^4}{x^4-1}\,dx$.

1293. $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$.

1294. $\int \frac{dx}{x^3+1}$.

1295. $\int \frac{dx}{x^4+1}$.

1296. $\int \frac{dx}{x^4+x^2+1}$.

1297. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

1298. $\int \frac{3x+5}{(x^2+2x+2)^2}\,dx$.

1299. $\int \frac{dx}{(x+1)(x^2+x+1)^2}$.

1300. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}\,dx$.

Применяя метод Остроградского, найти следующие интегралы:

1301. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$.

1302. $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$.

1303. $\int \frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

1304. $\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^2}\,dx$.

Применяя различные приемы, найти интегралы:

1305. $\int \frac{x^5}{(x^3+1)(x^2+8)}\,dx$.

1306. $\int \frac{x^7+x^3}{x^{12}-2x^4+1}\,dx$.

1307. $\int \frac{x^2-x+14}{(x-4)^3(x-2)}\,dx$.

1308. $\int \frac{dx}{x^4(x^3+1)^2}$.

1309. $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$.

1310*. $\int \frac{dx}{x(x^7+1)}$.

1311. $\int \frac{dx}{x(x^5+1)^2}$.

1312. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)(x^2+2x+5)}$.

1313. $\int \frac{x^2dx}{(x-1)^{10}}$.

1314. $\int \frac{dx}{x^8+x^6}$.

§ 6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1°. Интегралы вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_2}{q_2}}, \ldots\right] dx, \qquad (1)$$

где R — рациональная функция; $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots$ — целые числа.

Интегралы вида (1) находятся с помощью подстановки

$$\frac{ax+b}{cx+d} = z^n,$$

где n — общее наименьшее кратное числе $q_1, q_2, \ldots$.

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}}$.

Решение. Подстановка $2x-1=z^4$ приводит интеграл к виду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[4]{2x-1}} = \int \frac{2z^3dz}{z^2-z} = 2\int \frac{z^2dz}{z-1} = 2\int\left(z+1+\frac{1}{z-1}\right)dz =$$

$$= (z+1)^2 + 2\ln|z-1| + C = (1+\sqrt[4]{2x-1})^2 + \ln(\sqrt[4]{2x-1}-1)^2 + C.$$

Найти интегралы:

1315. $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

1316. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{ax+b}}$.

1317. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

1318. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

1319. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$.

1320. $\int \frac{\sqrt{x+1}+2}{(x+1)^2-\sqrt{x+1}}\,dx$.

1321. $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$.

1322. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

1323. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,dx$.

1324. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\,dx$.

1325. $\int \frac{x+3}{x^2\sqrt{2x+3}}\,dx$.

2°. Интегралы вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx, \tag{2}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n.

Полагают

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}, \tag{3}$$

где $Q_{n-1}(x)$ — многочлен степени $(n-1)$ с неопределенными коэффициентами; λ — число.

Коэффициенты многочлена $Q_{n-1}(x)$ и число λ находятся при помощи дифференцирования тождества (3).

Пример 2.

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = \int \frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+4} + \lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Отсюда

$$\frac{x^4+4x^2}{\sqrt{x^2+4}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+4} + \frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+4}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Умножая на $\sqrt{x^2+4}$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$A = \frac{1}{4};\ B = 0;\ C = \frac{1}{2};\ D = 0;\ \lambda = -2.$$

Следовательно,

$$\int x^2\sqrt{x^2+4}\,dx = \frac{x^3+2x}{4}\sqrt{x^2+4} - 2\ln(x+\sqrt{x^2+4}) + C.$$

3°. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}} \tag{4}$$

приводятся к интегралам вида (2) с помощью подстановки

$$\frac{1}{x-\alpha} = t.$$

Найти интегралы:

1326. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$.

1327. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

1328. $\int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

1329. $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

1330. $\int \frac{dx}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}$.

1331. $\int \frac{x^2+x+1}{x\sqrt{x^2-x+1}}\,dx$.

4°. Интегралы от дифференциальных биномов

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx, \tag{5}$$

где m, n и p — рациональные числа.

Условия Чебышева. Интеграл (5) выражается через конечную комбинацию элементарных функций лишь в следующих трех случаях:

1) если p — целое число;

2) если $\frac{m+1}{n}$ — целое число. Здесь применяется подстановка $a+bx^n = z^s$, где s — знаменатель дроби p;

3) если $\frac{m+1}{n}+p$ — целое число. В этом случае используется подстановка $ax^{-n}+b = z^s$.

Пример 3. Найти

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = I.$$

Решение. Здесь $m = -\frac{1}{2}$; $n = \frac{1}{4}$; $p = \frac{1}{3}$; $\frac{m+1}{n} = \frac{-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{4}} = 2$. Следовательно, имеет место случай 2) интегрируемости.

Подстановка

$$1 + x^{\frac{1}{4}} = z^3$$

дает: $x = (z^3-1)^4$; $dx = 12z^2(z^3-1)^3\,dz$. Поэтому

$$I = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = 12\int\frac{z^3(z^3-1)^3}{(z^3-1)^2}\,dz = 12\int(z^6-z^3)\,dz = \frac{12}{7}z^7 - 3z^4 + C,$$

где $z = \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$.

Найти интегралы:

1332. $\int x^3(1+2x^2)^{-\frac{3}{2}}\,dx$.

1333. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

1334. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$.

1335. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^5}}$.

1336. $\int \frac{dx}{x^2(2+x^3)^{5/3}}$.

1337. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}$.

§ 7. Интегрирование тригонометрических функций

1°. Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx = I_{m,n}, \qquad (1)$$

где m и n — целые числа.

1) Если $m = 2k+1$ — нечетное положительное число, то полагают

$$I_{m,n} = -\int \sin^{2k} x \cos^n x\, d(\cos x) = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x\, d(\cos x).$$

Аналогично поступают, если n — нечетное положительное число.

Пример 1.

$$\int \sin^{10} x \cos^3 x\, dx = \int \sin^{10} x(1-\sin^2 x)\, d(\sin x) = \frac{\sin^{11} x}{11} - \frac{\sin^{13} x}{13} + C.$$

2) Если m и n — четные положительные числа, то подынтегральное выражение (1) преобразуют с помощью формул:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x), \quad \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Пример 2.

$$\int \cos^2 3x \sin^4 3x\, dx = \int (\cos 3x \sin 3x)^2 \sin^2 3x\, dx = \int \frac{\sin^2 6x}{4}\,\frac{1-\cos 6x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int (\sin^2 6x - \sin^2 6x \cos 6x)\, dx = \frac{1}{8}\int \left(\frac{1-\cos 12x}{2} - \sin^2 6x \cos 6x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 12x}{24} - \frac{1}{18}\sin^3 6x\right) + C.$$

3) Если $m = -\mu$ и $n = -\nu$ — целые отрицательные числа одинаковой четности, то

$$I_{m,n} = \int \frac{dx}{\sin^\mu x \cos^\nu x} = \int \operatorname{cosec}^\mu x \sec^{\nu-2} x\, d(\operatorname{tg} x) =$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}\right)^{\frac{\mu}{2}} (1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\nu-2}{2}}\, d(\operatorname{tg} x) = \int \frac{(1+\operatorname{tg}^2 x)^{\frac{\mu+\nu}{2}-1}}{\operatorname{tg}^\mu x}\, d(\operatorname{tg} x).$$

В частности, к этому случаю сводятся интегралы

$$\int \frac{dx}{\sin^\mu x} = \frac{1}{2^{\mu-1}}\int \frac{d\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin^\mu \frac{x}{2} \cos^\mu \frac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{\cos^\nu x} = \int \frac{d\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\sin^\nu\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^2 x\, d(\operatorname{tg} x) = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\, d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} x + \frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C.$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{\sin^3 x} = \frac{1}{2^3}\int \frac{dx}{\sin^3 \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}} = \frac{1}{8}\int \operatorname{tg}^{-3}\frac{x}{2} \sec^6 \frac{x}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)^2}{\operatorname{tg}^3\frac{x}{2}} \sec^2\frac{x}{2}\, dx = \frac{2}{8}\int \left[\operatorname{tg}^{-3}\frac{x}{2} + \frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}} + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right] d\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-\frac{1}{2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \frac{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2}\right] + C.$$

4) Интегралы вида $\int \operatorname{tg}^m x\, dx$ $\left(\text{или } \int \operatorname{ctg}^m x\, dx\right)$, где m — целое положительное число, вычисляются с помощью формулы

$$\operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x - 1$$

(или соответственно $\operatorname{ctg}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1$).

Пример 5.

$$\int \operatorname{tg}^4 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x(\sec^2 x - 1)\, dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int \operatorname{tg}^2 x\, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x + x + C.$$

5) В общем случае интегралы $I_{m,n}$ вида (1) вычисляются с помощью *формул приведения (рекуррентных формул)*, выводимых обычно интегрированием по частям.

Пример 6.

$$\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^3 x}\, dx = \int \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos^3 x}\, dx + \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \sin x \cdot \frac{1}{2\cos^2 x} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{\cos^2 x}\, dx + \int \frac{dx}{\cos x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C.$$

Найти интегралы:

1338. $\int \cos^3 x\, dx.$

1339. $\int \sin^5 x\, dx.$

1340. $\int \sin^2 x \cos^3 x\, dx.$

1341. $\int \sin^3 \frac{x}{2} \cos^5 \frac{x}{2}\, dx.$

1342. $\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x}\, dx.$

1343. $\int \sin^4 x\, dx.$

1344. $\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx.$

1345. $\int \sin^2 x \cos^4 x \, dx.$

1346. $\int \cos^6 3x \, dx.$

1347. $\int \frac{dx}{\sin^4 x}.$

1348. $\int \frac{dx}{\cos^6 x}.$

1349. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} \, dx.$

1350. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}.$

1351. $\int \frac{dx}{\sin^5 x \cos^3 x}.$

1352. $\int \frac{dx}{\sin \frac{x}{2} \cos^3 \frac{x}{2}}.$

1353. $\int \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin x \cos x} \, dx.$

1354. $\int \frac{dx}{\sin^5 x}.$

1355. $\int \sec^5 4x \, dx.$

1356. $\int \operatorname{tg}^2 5x \, dx.$

1357. $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx.$

1358. $\int \operatorname{ctg}^4 x \, dx.$

1359. $\int \left(\operatorname{tg}^3 \frac{x}{3} + \operatorname{tg}^4 \frac{x}{3}\right) dx.$

1360. $\int x \sin^2 x^2 \, dx.$

1361. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} \, dx.$

1362. $\int \sin^5 x \sqrt[3]{\cos x} \, dx.$

1363. $\int \frac{dx}{\sqrt{\sin x \cos^3 x}}.$

1364. $\int \frac{dx}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}.$

2°. Интегралы вида

$$\int \sin mx \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \sin nx \, dx \text{ и } \int \cos mx \cos nx \, dx.$$

В этих случаях применяются формулы:

1) $\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$;

2) $\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$;

3) $\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m-n)x + \cos(m+n)x]$.

Пример 7.

$$\int \sin 9x \sin x \, dx = \int \frac{1}{2}[\cos 8x - \cos 10x] \, dx = \frac{1}{16} \sin 8x - \frac{1}{20} \sin 10x + C.$$

Найти интегралы:

1365. $\int \sin 3x \cos 5x \, dx.$

1366. $\int \sin 10x \sin 15x \, dx.$

1367. $\int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \, dx.$

1368. $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} \, dx.$

1369. $\int \cos(ax+b)\cos(ax-b) \, dx.$

1370. $\int \sin \omega t \sin(\omega t + \varphi) \, dt.$

1371. $\int \cos x \cos^2 3x \, dx.$

1372. $\int \sin x \sin 2x \sin 3x \, dx.$

3°. Интегралы вида

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx, \tag{2}$$

где R — рациональная функция.

1) С помощью подстановки

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t,$$

откуда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2},$$

интегралы вида (2) приводятся к интегралам от рациональных функций новой переменной t.

Пример 8. Найти

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x} = I.$$

Решение. Полагая $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, будем иметь

$$I = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{1+t} = \ln|1+t| + C = \ln\left|1 + \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C.$$

2) Если имеет место тождество

$$R(-\sin x, -\cos x) \equiv R(\sin x, \cos x),$$

то для приведения интеграла (2) к рациональному виду можно применить подстановку $\operatorname{tg} x = t$.

Здесь

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

и

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

Пример 9. Найти

$$\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = I. \tag{3}$$

Решение. Полагая

$$\operatorname{tg} x = t, \quad \sin^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

будем иметь

$$I = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{t^2}{1+t^2}\right)} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{d(t\sqrt{2})}{1+(t\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(t\sqrt{2}) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2}\operatorname{tg} x) + C.$$

Заметим, что интеграл (3) вычисляется более быстро, если предварительно числитель и знаменатель дроби разделить на $\cos^2 x$.

В отдельных случаях полезно применять искусственные приемы (см., например, № 1379).

Найти интегралы:

1373. $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$.

1374. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

1375. $\int \frac{\cos x}{1+\cos x}\, dx$.

1376. $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\, dx$.

1377. $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

1378. $\int \frac{dx}{\cos x+2\sin x+3}$.

1379**. $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\, dx$.

1380. $\int \frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}\, dx$.

1381*. $\int \frac{dx}{1+3\cos^2 x}$.

1382*. $\int \frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}$.

1383*. $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

1384*. $\int \frac{dx}{\sin^2 x-5\sin x\cos x}$.

1385. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3}\, dx$.

1386. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}\, dx$.

1387. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^4 x+\sin^4 x}\, dx$.

1388. $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x-6\sin x+5}\, dx$.

1389*. $\int \frac{dx}{(2-\sin x)(3-\sin x)}$.

1390*. $\int \frac{1-\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x}\, dx$.

§ 8. Интегрирование гиперболических функций

Интегрирование гиперболических функций вполне аналогично интегрированию тригонометрических функций.

Следует помнить основные формулы:

1) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$;

2) $\operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x - 1)$;

3) $\operatorname{ch}^2 x = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)$;

4) $\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\operatorname{sh} 2x$.

Пример 1. Найти

$$\int \operatorname{ch}^2 x\, dx.$$

Решение. Имеем

$$\int \operatorname{ch}^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(\operatorname{ch} 2x + 1)\, dx = \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2x + \frac{1}{2}x + C.$$

Пример 2. Найти

$$\int \operatorname{ch}^3 x\, dx.$$

Решение. Имеем

$$\int \operatorname{ch}^3 x\, dx = \int \operatorname{ch}^2 x\, d(\operatorname{sh} x) = \int (1+\operatorname{sh}^2 x)\, d(\operatorname{sh} x) =$$

$$= \operatorname{sh} x + \frac{\operatorname{sh}^3 x}{3} + C.$$

Найти интегралы:

1391. $\int \operatorname{sh}^3 x\, dx$.

1392. $\int \operatorname{ch}^4 x\, dx$.

1393. $\int \operatorname{sh}^3 x \operatorname{ch} x\, dx$.

1394. $\int \operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x\, dx$.

1395. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^2 x}$.

1396. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$.

1397. $\int \operatorname{th}^3 x\, dx$.

1398. $\int \operatorname{cth}^4 x\, dx$.

1399. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 x}$.

1400. $\int \frac{dx}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}$.

1401*. $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}$.

1402. $\int \frac{\operatorname{sh} x\, dx}{\sqrt{\operatorname{ch} 2x}}$.

§ 9. Применение тригонометрических и гиперболических подстановок для нахождения интегралов вида

$$\int R(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx, \tag{1}$$

где R — рациональная функция.

Преобразуя квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ в сумму или разность квадратов, сводим интеграл (1) к одному из интегралов следующих типов:

1) $\int R\,(z,\ \sqrt{m^2-z^2})\,dz$;

2) $\int R\,(z,\ \sqrt{m^2+z^2})\,dz$;

3) $\int R\,(z,\ \sqrt{z^2-m^2})\,dz$.

Последние интегралы берутся соответственно с помощью подстановок:

1) $z = m\sin t$ или $z = m\,\mathrm{tg}\,t$,

2) $z = m\,\mathrm{tg}\,t$ или $z = m\,\mathrm{sh}\,t$,

3) $z = m\sec t$ или $z = m\,\mathrm{ch}\,t$.

Пример 1. Найти

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} = I.$$

Решение. Имеем

$$x^2 + 2x + 2 = (x + 1)^2 + 1.$$

Положим $x + 1 = \mathrm{tg}\,t$, тогда $dx = \sec^2 t\,dt$ и

$$I = \int \frac{dx}{(x+1)^2\sqrt{(x+1)^2+1}} = \int \frac{\sec^2 t\,dt}{\mathrm{tg}^2 t\sec t} = \int \frac{\cos t}{\sin^2 t}\,dt = -\frac{1}{\sin t} + C =$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{x+1} + C.$$

Пример 2. Найти

$$\int x\sqrt{x^2+x+1}\,dx = I.$$

Решение. Имеем

$$x^2 + x + 1 = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Полагая

$$x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{sh}\,t \quad \text{и} \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{ch}\,t\,dt,$$

получим

$$I = \int\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{sh}\,t-\frac{1}{2}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{ch}\,t\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{ch}\,t\,dt = \frac{3\sqrt{3}}{8}\int \mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}^2 t\,dt - \frac{3}{8}\int \mathrm{ch}^2 t\,dt =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot\frac{\mathrm{ch}^3 t}{3} - \frac{3}{8}\left(\frac{1}{2}\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{ch}\,t + \frac{1}{2}t\right) + C.$$

Так как

$$\mathrm{sh}\,t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right), \quad \mathrm{ch}\,t = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+x+1}$$

и

$$t = \ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + \ln\frac{2}{\sqrt{3}},$$

то окончательно имеем

$$I = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}\left(x+\frac{1}{2}\right)\sqrt{x^2+x+1} - \frac{3}{16}\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right) + C.$$

Найти интегралы:

1403. $\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx.$

1404. $\int \sqrt{2+x^2}\,dx.$

1405. $\int \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}}\,dx.$

1406. $\int \sqrt{x^2-2x+2}\,dx.$

1407. $\int \sqrt{x^2-4}\,dx.$

1408. $\int \sqrt{x^2+x}\,dx.$

1409. $\int \sqrt{x^2-6x-7}\,dx.$

1410. $\int (x^2+x+1)^{\frac{3}{2}}\,dx.$

1411. $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}.$

1412. $\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^{3/2}}.$

1413. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}.$

1414. $\int \frac{dx}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}.$

§ 10. Интегрирование различных трансцендентных функций

Найти интегралы:

1415. $\int (x^2+1)^2 e^{2x}\,dx.$

1416. $\int x^2\cos^2 3x\,dx.$

1417. $\int x\sin x\cos 2x\,dx.$

1418. $\int e^{2x}\sin^2 x\,dx.$

1419. $\int e^x\sin x\sin 3x\,dx.$

1420. $\int xe^x\cos x\,dx.$

1421. $\int \frac{dx}{e^{2x}+e^x-2}.$

1422. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}}.$

1423. $\int x^2 \ln \frac{1+x}{1-x}\,dx$.

1424. $\int \ln^2 (x + \sqrt{1+x^2})\,dx$.

1425. $\int x \arccos (5x-2)\,dx$.

1426. $\int \sin x \operatorname{sh} x\,dx$.

§ 11. Применение формул приведения

Вывести формулы приведения для интегралов:

1427. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$; найти I_2 и I_3.

1428. $I_n = \int \sin^n x\,dx$; найти I_4 и I_5.

1429. $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$; найти I_3 и I_4.

1430. $I_n = \int x^n e^{-x}\,dx$; найти I_{10}.

§ 12. Интегрирование разных функций

1431. $\int \frac{dx}{2x^2-4x+9}$.

1432. $\int \frac{x-5}{x^2-2x+2}\,dx$.

1433. $\int \frac{x^3}{x^2+x+\frac{1}{2}}\,dx$.

1434. $\int \frac{dx}{x(x^2+5)}$.

1435. $\int \frac{dx}{(x+2)^2(x+3)^2}$.

1436. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)}$.

1437. $\int \frac{dx}{(x^2+2)^2}$.

1438. $\int \frac{dx}{x^4-2x^2+1}$.

1439. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-x+1)^3}$.

1440. $\int \frac{3-4x}{(1-2\sqrt{x})^2}\,dx$.

1441. $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{x^3}\,dx$.

1442. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

1443. $\int \frac{1-\sqrt[3]{2x}}{\sqrt{2x}}\,dx$.

1444. $\int \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}\right)^2}$.

1445. $\int \frac{2x+1}{\sqrt{(4x^2-2x+1)^3}}\,dx$.

1446. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{5-x}}$.

1447. $\int \frac{x^2}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\,dx$.

1448. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}$.

1449. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-2x^2-x^4}}$.

1450. $\int \frac{x+1}{(x^2+1)^{3/2}}\,dx$.

1451*. $\int \frac{dx}{(x^2+4x)\sqrt{4-x^2}}$.

1452. $\int \sqrt{x^2-9}\,dx$.

1453. $\int \sqrt{x-4x^2}\,dx$.

1454. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$.

1455. $\int x\sqrt{x^2+2x+2}\,dx$.

1456. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}}$.

1457. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^3}}$.

1458. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$.

1459. $\int \frac{5x}{\sqrt{1+x^4}}\,dx$.

1460. $\int \cos^4 x\,dx$.

1461. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^5 x}$.

1462. $\int \frac{1+\sqrt{\operatorname{ctg} x}}{\sin^2 x}\,dx$.

1463. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[5]{\cos^3 x}}\,dx$.

1464. $\int \operatorname{cosec}^5 5x\,dx$.

1465. $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}\,dx$.

1466. $\int \sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)dx$.

1467. $\int \operatorname{tg}^3\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)dx$.

1468. $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x-5}$.

1469. $\int \frac{dx}{2+3\cos^2 x}$.

1470. $\int \frac{dx}{\cos^2 x+2\sin x\cos x+2\sin^2 x}$.

1471. $\int \frac{dx}{\sin x \sin 2x}$.

1472. $\int \frac{dx}{(2+\cos x)(3+\cos x)}$.

1473. $\int \frac{\sec^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+4\operatorname{tg} x+1}}\,dx$.

1474. $\int \frac{\cos ax}{\sqrt{a^2+\sin^2 ax}}\,dx$.

1475. $\int \frac{x\,dx}{\cos^2 3x}$.

1476. $\int x\sin^2 x\,dx$.

1477. $\int x^2 e^{x^3}\,dx$.

1478. $\int xe^{2x}\,dx$.

1479. $\int x^2 \ln\sqrt{1-x}\,dx$.

1480. $\int \frac{x\operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$.

1481. $\int \sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx$.

1482. $\int \frac{dx}{(\sin x+\cos x)^2}$.

1483. $\int \frac{dx}{(\mathrm{tg}\,x+1)\sin^2 x}$.

1484. $\int \mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x\, dx$.

1485. $\int \frac{\mathrm{sh}\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}\, dx$.

1486. $\int \frac{\mathrm{sh}\, x\, \mathrm{ch}\, x}{\mathrm{sh}^2 x + \mathrm{ch}^2 x}\, dx$.

1487. $\int \frac{x}{\mathrm{sh}^2 x}\, dx$.

1488. $\int \frac{dx}{e^{2x} - 2e^x}$.

1489. $\int \frac{e^x}{e^{2x} - 6e^x + 13}\, dx$.

1490. $\int \frac{e^{2x}}{(e^x+1)^{1/4}}\, dx$.

1491. $\int \frac{2^x}{1-4^x}\, dx$.

1492. $\int (x^2-1)10^{-2x}\, dx$.

1493. $\int \sqrt{e^2+1}\, dx$.

1494. $\int \frac{\mathrm{arctg}\, x}{x^2}\, dx$.

1495. $\int x^3 \arcsin \frac{1}{x}\, dx$.

1496. $\int \cos(\ln x)\, dx$.

1497. $\int (x^2 - 3x)\sin 5x\, dx$.

1498. $\int x\, \mathrm{arctg}\,(2x+3)\, dx$.

1499. $\int \arcsin \sqrt{x}\, dx$.

1500. $\int |x|\, dx$.

Глава V

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Определенный интеграл как предел суммы

1°. Интегральная сумма. Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — произвольное разбиение этого отрезка на n частей (рис. 37). Сумма вида

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,\Delta x_i, \qquad (1)$$

где $x_i \leqslant \xi_i \leqslant x_{i+1}$; $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$;
$i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$,

называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на $[a, b]$. Геометрически S_n представляет собой алгебраическую сумму площадей соответствующих прямоугольников (см. рис. 37).

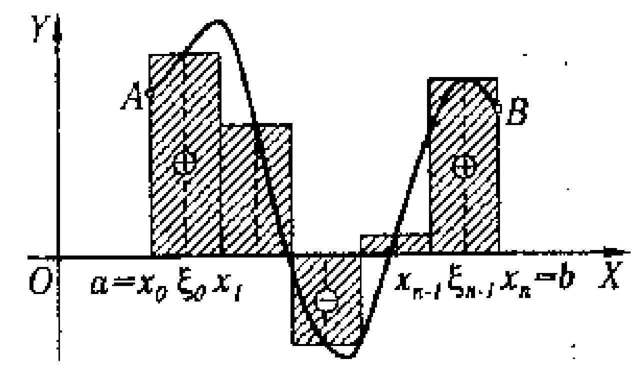


Рис. 37.

2°. Определенный интеграл. Предел суммы S_n при условии, что число разбиений n стремится к бесконечности, а наибольшая из разностей Δx_i — к нулю, называется *определенным интегралом* функции $f(x)$ в пределах от $x = a$ до $x = b$, т. е.

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad (2)$$

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то она интегрируема на $[a, b]$, т. е. предел (2) существует и не зависит от способа разбиения промежутка интегрирования $[a, b]$ на частичные отрезки и от выбора точек ξ_i на этих отрезках. Геометрически определенный интеграл (2) представляет собой алгебраическую сумму площадей фигур, составляющих криволинейную трапецию $aABb$, в которой площади частей, расположенных выше оси OX, берутся со знаком плюс, а площади частей, расположенных ниже оси OX, — со знаком минус (см. рис. 37).

Определения интегральной суммы и определенного интеграла естественно обобщаются на случай отрезка $[a, b]$, где $a > b$.

Пример 1. Составить интегральную сумму S_n для функции

$$f(x) = 1 + x$$

на отрезке [1, 10], деля этот отрезок на n равных частей и выбирая точки ξ_i совпадающими с левыми концами частичных отрезков $[x_i, x_{i+1}]$. Чему равен $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$?

Решение. Здесь $\Delta x_i = \dfrac{10-1}{n} = \dfrac{9}{n}$ и $\xi_i = x_i = x_0 + i\Delta x_i = 1 + \dfrac{9i}{n}$. Отсюда $f(\xi_i) = 1 + 1 + \dfrac{9i}{n} = 2 + \dfrac{9i}{n}$. Следовательно (рис. 38),

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1}\left(2+\frac{9i}{n}\right)\frac{9}{n} = \frac{18}{n}n + \frac{81}{n^2}(0 + 1 + \ldots + n - 1) =$$

$$= 18 + \frac{81}{n^2}\,\frac{n(n-1)}{2} = 18 + \frac{81}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) = 58\frac{1}{2} - \frac{81}{2n},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 58\frac{1}{2}.$$

Пример 2. Найти площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугой параболы $y = x^2$, осью OX и вертикалью $x = a$ $(a > 0)$.

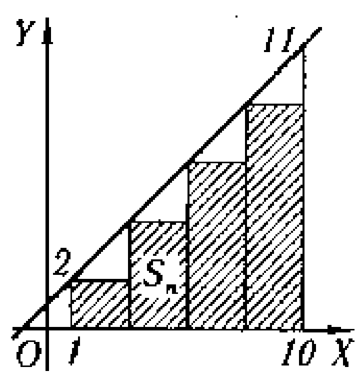


Рис. 38.

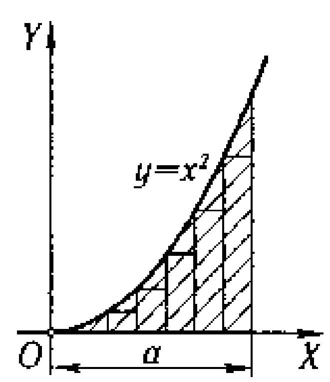


Рис. 39.

Решение. Разобьем основание a на n равных частей $\Delta x = \dfrac{a}{n}$. Выбирая значение функции в начале каждого промежутка, будем иметь:

$$y_1 = 0;\ y_2 = \left(\frac{a}{n}\right)^2;\ y_3 = \left[2\left(\frac{a}{n}\right)\right]^2;\ \ldots;\ y_n = \left[(n-1)\frac{a}{n}\right]^2.$$

Площади вписанных прямоугольников вычисляются умножением каждого y_k на основание $\Delta x = \dfrac{a}{n}$ (рис. 39). Суммируя, получим площадь ступенчатой фигуры

$$S_n = \frac{a}{n}\left(\frac{a}{n}\right)^2[1 + 2^2 + 3^2 + \ldots + (n-1)^2].$$

Пользуясь формулой суммы квадратов целых чисел

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

находим

$$S_n = \frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3};$$

отсюда, переходя к пределу, получим

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{a^3(n-1)n(2n-1)}{6n^3} = \frac{a^3}{3}.$$

Вычислить определенные интегралы, рассматривая их как пределы соответствующих интегральных сумм.

1501. $\displaystyle\int_a^b dx.$

1502. $\displaystyle\int_0^T (v_0 + gt)\,dt$, v_0 и g постоянны.

1503. $\displaystyle\int_{-2}^{1} x^2\,dx.$

1504. $\displaystyle\int_0^{10} 2^x\,dx.$

1505*. $\displaystyle\int_1^5 x^3\,dx.$

1506*. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной гиперболой

$$y = \frac{1}{x},$$

осью OX и двумя ординатами: $x = a$ и $x = b$ $(0 < a < b)$.

1507*. Найти

$$f(x) = \int_0^x \sin t\,dt.$$

§ 2. Вычисление определенных интегралов с помощью неопределенных

1°. **Определенный интеграл с переменным верхним пределом.** Если функция $f(t)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

есть первообразная для функции $f(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x) \text{ при } a \leqslant x \leqslant b.$$

2°. Формула Ньютона—Лейбница. Если $F'(x) = f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Первообразная $F(x)$ вычисляется путем нахождения неопределенного интеграла

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C.$$

Пример 1. Найти интеграл $\int_{-1}^{3} x^4\,dx$.

Решение. $\int_{-1}^{3} x^4\,dx = \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{3} = \frac{3^5}{5} - \frac{(-1)^5}{5} = 48\frac{4}{5}$.

1508. Пусть

$$I = \int_a^b \frac{dx}{\ln x} \quad (b > a > 1).$$

Найти: 1) $\frac{dI}{da}$; 2) $\frac{dI}{db}$.

Найти производные следующих функций:

1509. $F(x) = \int_1^x \ln t\,dt \; (x > 0)$.

1510. $F(x) = \int_x^0 \sqrt{1+t^4}\,dt$.

1511. $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$.

1512. $I = \int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)\,dt \; (x > 0)$.

1513. Найти точки экстремума функции

$$y = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt \text{ в области } x > 0.$$

Применяя формулу Ньютона—Лейбница, найти интегралы:

1514. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

1515. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^3}$.

1516. $\int_{-x}^{x} e^t\,dt$.

1517. $\int_0^x \cos t\,dt$.

С помощью определенных интегралов найти пределы сумм:

1518.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$.

1519.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}\right)$.

1520. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} \; (p > 0)$.

Вычислить интегралы:

1521. $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)\,dx$.

1522. $\int_0^8 (\sqrt{2x} + \sqrt[3]{x})\,dx$.

1523. $\int_1^4 \frac{1+\sqrt{y}}{y^2}\,dy$.

1524. $\int_2^6 \sqrt{x-2}\,dx$.

1525. $\int_0^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$.

1526. $\int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2-1}$.

1527. $\int_0^1 \frac{x\,dx}{x^2+3x+2}$.

1528. $\int_{-1}^1 \frac{y^5\,dy}{y+2}$.

1529. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

1530. $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-3x+2}$.

1531. $\int_0^1 \frac{z^3}{z^8+1}\,dz$.

1532. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2\alpha\,d\alpha$.

1533. $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1534. $\int_2^{3,5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$.

1535. $\int_0^1 \frac{y^2\,dy}{\sqrt{y^6+4}}$.

1536. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\alpha\,d\alpha$.

1537. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\varphi\,d\varphi$.

1538. $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$.

1539. $\displaystyle\int\limits_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x}\,dx.$

1540. $\displaystyle\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx.$

1541. $\displaystyle\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{ctg}^4\varphi\,d\varphi.$

1542. $\displaystyle\int\limits_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx.$

1543. $\displaystyle\int\limits_0^1 \operatorname{ch} x\,dx.$

1544. $\displaystyle\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x}.$

1545. $\displaystyle\int\limits_0^{\pi} \operatorname{sh}^2 x\,dx.$

§ 3. Несобственные интегралы

1°. Интегралы от неограниченных функций. Если функция $f(x)$ не ограничена в любой окрестности точки c отрезка $[a, b]$ и непрерывна при $a \leqslant x < c$ и $c < x \leqslant b$, то по определению полагают

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0}\int\limits_{c+\eta}^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если пределы в правой части равенства (1) существуют и конечны, то несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*. При $c = a$ или $c = b$ определение соответствующим образом упрощается.

Если существует непрерывная на $[a, b]$ функция $F(x)$ такая, что $F'(x) = f(x)$ при $x \neq c$ (*обобщенная первообразная*), то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Если $|f(x)| \leqslant G(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ и $\displaystyle\int\limits_a^b G(x)\,dx$ сходится, то интеграл (1) также сходится (*признак сравнения*).

Если $f(x) \geqslant 0$ и $\displaystyle\lim_{x\to c}\{f(x)\,|c-x|^m\} = A \neq \infty$, $A \neq 0$, т. е. $f(x) \sim \dfrac{A}{|c-x|^m}$ при $x \to c$, то: 1) при $m < 1$ интеграл (1) сходится, 2) при $m \geqslant 1$ интеграл (1) расходится.

2°. Интегралы с бесконечными пределами. Если функция $f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x < \infty$, то полагают

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx \qquad (3)$$

и в зависимости от существования или несуществования конечного предела в правой части равенства (3) соответствующий интеграл называется *сходящимся* или *расходящимся*.

Аналогично,

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}}\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если $|f(x)| \leqslant F(x)$ и интеграл $\displaystyle\int\limits_a^{\infty} F(x)\,dx$ сходится, то интеграл (3) тоже сходится.

Если $f(x) \geqslant 0$ и $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\{f(x)x^m\} = A \neq \infty$, $A \neq 0$, т. е. $f(x) \sim \dfrac{A}{x^m}$ при $x \to \infty$, то: 1) при $m > 1$ интеграл (3) сходится, 2) при $m \leqslant 1$ интеграл (3) расходится.

Пример 1.

$$\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2} + \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{\varepsilon}^1\frac{dx}{x^2} = \lim_{\eta\to 0}\left(\frac{1}{\eta}-1\right) + \lim_{\eta\to 0}\left(\frac{1}{\eta}-1\right) = \infty$$

— интеграл расходится.

Пример 2.

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}\int\limits_0^b\frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to\infty}(\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 3. Исследовать сходимость *интеграла Эйлера—Пуассона*

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx. \qquad (4)$$

Решение. Положим

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx + \int\limits_1^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

Первый из двух интегралов в правой части не является несобственным, а второй сходится, так как $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$ при $x \geqslant 1$ и

$$\int\limits_1^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\int\limits_1^b e^{-x}\,dx = \lim_{b\to\infty}\left(-e^{-b}+e^{-1}\right) = e^{-1};$$

следовательно, интеграл (4) сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}. \tag{5}$$

Решение. При $x \to +\infty$ имеем

$$\frac{1}{\sqrt{x^3+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}} = \frac{1}{x^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Так как интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$$

сходится, то наш интеграл (5) также сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость эллиптический интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}. \tag{6}$$

Решение. Точка разрыва подынтегральной функции: $x = 1$. Применив формулу $1 - x^4 = (1-x)(1+x)(1+x^2)$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}.$$

Следовательно, при $x \to 1$ будем иметь

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \sim \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1/2}.$$

Так как интеграл

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x}\right)^{1/2} dx$$

сходится, то данный интеграл (6) также сходится.

Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость):

1546. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

1547. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{x}$.

1548. $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.

1549. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$.

1550. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

1551. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$.

1552. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

1553. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p}$.

1554. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

1555. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$.

1556. $\int_0^{\infty} \sin x \, dx$.

1557. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln x}$.

1558. $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

1559. $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ $(a > 1)$.

1560. $\int_a^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}$ $(a > 1)$.

1561. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x \, dx$.

1562. $\int_0^{\infty} e^{-kx} dx$ $(k > 0)$.

1563. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2+1} dx$.

1564. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{(x^2-1)^2}$.

1565. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$.

1566. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3-5x^2}$.

Исследовать сходимость интегралов:

1567. $\int_0^{100} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}$.

1568. $\int_1^{-\infty} \frac{dx}{2x+\sqrt[3]{x^2+1}+5}$.

1569. $\int_{-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2+\sqrt[3]{x^4+1}}$.

1570. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\sqrt{x^5+1}}$.

1571. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}$.

1572. $\int_1^2 \frac{dx}{\ln x}$.

1573. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$.

1574*. Доказать, что эйлеров интеграл 1-го рода (*бета-функция*)

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

сходится при $p > 0$ и $q > 0$.

1575*. Доказать, что эйлеров интеграл 2-го рода (*гамма-функция*)

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$$

сходится при $p > 0$.

§ 4. Замена переменной в определенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ и $x = \varphi(t)$ — функция, непрерывная вместе со своей производной $\varphi'(t)$ на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, где $a = \varphi(\alpha)$ и $b = \varphi(\beta)$, причем $f[\varphi(t)]$ определена и непрерывна на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

Пример 1. Найти

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \ (a > 0).$$

Решение. Положим

$$x = a\sin t;$$
$$dx = a\cos t\,dt.$$

Тогда $t = \arcsin\frac{x}{a}$ и, следовательно, можно принять $\alpha = \arcsin 0 = 0$, $\beta = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. Поэтому будем иметь

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2\sin^2 t\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t\,dt = a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,dt =$$

$$= \frac{a^4}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\,dt = \frac{a^4}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\,dt = \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

1576. Можно ли интеграл

$$\int_0^2 \sqrt[3]{1-x^2}\,dx$$

вычислить с помощью подстановки $x = \cos t$?

Преобразовать определенные интегралы с помощью указанных подстановок:

1577. $\int_1^3 \sqrt{x+1}\,dx$, $x = 2t - 1$.

1578. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, $x = \sin t$.

1579. $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$, $x = \operatorname{sh} t$.

1580. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$, $x = \operatorname{arctg} t$.

1581. Для интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad (b > a)$$

указать целую линейную подстановку

$$x = \alpha t + \beta,$$

в результате которой пределы интегрирования сделались бы соответственно равными 0 и 1.

Применяя указанные подстановки, вычислить следующие интегралы:

1582. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$, $x = t^2$.

1583. $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{2/3}}{(x-2)^{2/3}+3}\,dx$, $x - 2 = z^3$.

1584. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx$, $e^x - 1 = z^2$.

1585. $\int_0^{\pi} \frac{dt}{3+2\cos t}$, $\operatorname{tg}\frac{t}{2} = z$.

1586. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2\sin^2 x}$, $\operatorname{tg} x = t$.

С помощью подходящих подстановок вычислить интегралы:

1587. $\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,dx$.

1588. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$.

1589. $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx$.

1590. $\int_0^5 \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}$.

Вычислить интегралы:

1591. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+1}}$.

1593. $\int\limits_0^a \sqrt{ax-x^2}\,dx$.

1592. $\int\limits_{-1}^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

1594. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{5-3\cos x}$.

1595. Доказать, что если $f(x)$ — четная функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_0^a f(x)\,dx.$$

Если же $f(x)$ — нечетная функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

1596. Показать, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = 2\int\limits_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

1597. Показать, что

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\arccos x} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

1598. Показать, что

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,dx.$$

§ 5. Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$, то

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\,dx. \qquad (1)$$

Применяя формулу интегрирования по частям, вычислить интегралы:

1599. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$.

1601. $\int\limits_0^1 x^3e^{2x}\,dx$.

1600. $\int\limits_1^e \ln x\,dx$.

1602. $\int\limits_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$.

1603. $\int\limits_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$.

1605. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,dx$ $(a > 0)$.

1604. $\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\cos bx\,dx$ $(a > 0)$.

1606.** Показать, что для гамма-функции (см. № 1575) справедлива *формула понижения*

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \quad (p > 0).$$

Отсюда вывести, что $\Gamma(n+1) = n!$, если n — натуральное.

1607. Показать, что для интеграла

$$I_n = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx$$

справедлива *формула понижения*

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Найти I_n, если n — натуральное. Пользуясь полученной формулой, вычислить I_9 и I_{10}.

1608. Применяя многократное интегрирование по частям, вычислить интеграл (см. № 1574)

$$B(p, q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx,$$

где p и q — целые положительные числа.

1609*. Выразить через B (бета-функцию) интеграл

$$I_{m,n} = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cos^n x\,dx,$$

если m и n — целые неотрицательные числа.

§ 6. Теорема о среднем значении

1°. Оценки интегралов. Если $f(x) \leqslant F(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, то

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b F(x)\,dx. \qquad (1)$$

Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant b$ и, кроме того, $\varphi(x) \geqslant 0$, то

$$m\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)\varphi(x)\,dx \leqslant M\int\limits_a^b \varphi(x)\,dx, \qquad (2)$$

где m — наименьшее, а M — наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

В частности, если $\varphi(x) \equiv 1$, то

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a). \qquad (3)$$

Неравенства (2) и (3) можно соответственно заменить эквивалентными им равенствами:

$$\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx = f(c)\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

и

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a),$$

где c и ξ — некоторые числа, лежащие между a и b.

Пример 1. Оценить интеграл

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{2}\sin^2 x}\,\,dx.$$

Решение. Так как $0 \leqslant \sin^2 x \leqslant 1$, то имеем

$$\frac{\pi}{2} < I < \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{3}{2}},$$

т. е.

$$1{,}57 < I < 1{,}91.$$

2°. Среднее значение функции. Число

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

называется *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$.

1610*. Не вычисляя интегралов, определить их знак:

а) $\int\limits_{-1}^{2} x^3\,dx$; б) $\int\limits_0^{\pi} x\cos x\,dx$; в) $\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1611. Выяснить (не вычисляя), какой из интегралов больше:

а) $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^2}\,dx$ или $\int\limits_0^1 x\,dx$;

б) $\int\limits_0^1 x^2\sin^2 x\,dx$ или $\int\limits_0^1 x\sin^2 x\,dx$;

в) $\int\limits_1^2 e^{x^2}\,dx$ или $\int\limits_1^2 e^x\,dx$.

Найти средние значения функций на указанных промежутках:

1612. $f(x) = x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1613. $f(x) = a + b\cos x$, $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$.

1614. $f(x) = \sin^2 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1615. $f(x) = \sin^4 x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1616. Доказать, что $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x-x^2}}$ заключен между $\frac{2}{3} \approx 0{,}67$ и $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}70$. Найти точное значение этого интеграла.

Оценить интегралы:

1617. $\int\limits_0^1 \sqrt{4+x^2}\,dx$.

1618. $\int\limits_{-1}^{+1} \frac{dx}{8+x^3}$.

1619. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dx}{10+3\cos x}$.

1620*. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} x\sqrt{\operatorname{tg} x}\,dx$.

1621. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

1622. Интегрируя по частям, доказать, что

$$0 < \int_{100\pi}^{200\pi} \frac{\cos x}{x}\,dx < \frac{1}{100\pi}.$$

§ 7. Площади плоских фигур

1°. Площадь в прямоугольных координатах. Если непрерывная кривая задана в прямоугольных координатах уравнением $y = f(x)$ $[f(x) \geqslant 0]$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями в точках $x = a$ и $x = b$ и отрезком оси абсцисс $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 40), определяется формулой

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (1)$$

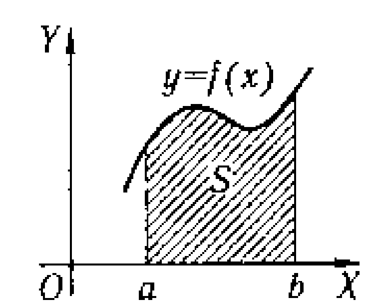


Рис. 40.

Пример 1. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = \frac{x^2}{2}$ прямыми $x = 1$ и $x = 3$ и осью абсцисс (рис. 41).

Решение. Искомая площадь выражается интегралом

$$S = \int\limits_1^3 \frac{x^2}{2}\,dx = 4\frac{1}{3}.$$

Пример 2. Вычислить площадь, ограниченную кривой $x = 2 - y - y^2$ и осью ординат (рис. 42).

Решение. Здесь изменены роли осей координат и поэтому искомая площадь выражается интегралом

$$S = \int\limits_{-2}^{1} (2 - y - y^2)\,dy = 4\frac{1}{2},$$

где пределы интегрирования $y_1 = -2$ и $y_2 = 1$ найдены как ординаты точек пересечения данной кривой с осью ординат.

В более общем случае, если площадь S ограничена двумя непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$, где $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$ (рис. 43), будем иметь

$$S = \int\limits_a^b [f_2(x) - f_1(x)]\,dx. \tag{2}$$

Пример 3. Вычислить площадь S, заключенную между кривыми

$$y = 2 - x^2 \text{ и } y^3 = x^2 \tag{3}$$

(рис. 44).

Решение. Решая совместно систему уравнений (3), находим пределы интегрирования: $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$. В силу формулы (2) получим

$$S = \int\limits_{-1}^{1} (2 - x^2 - x^{2/3})\,dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{3}{5}x^{5/3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2\frac{2}{15}.$$

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, двумя вертикалями, соответствующими $x = a$ и $x = b$, и отрезком оси OX, выражается интегралом

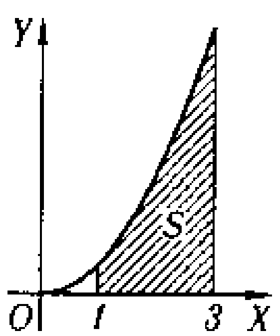


Рис. 41.

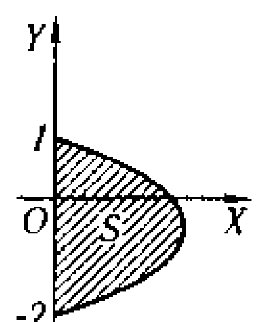


Рис. 42.

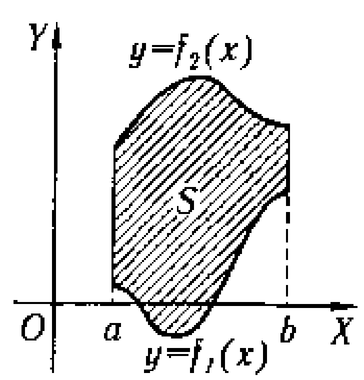


Рис. 43.

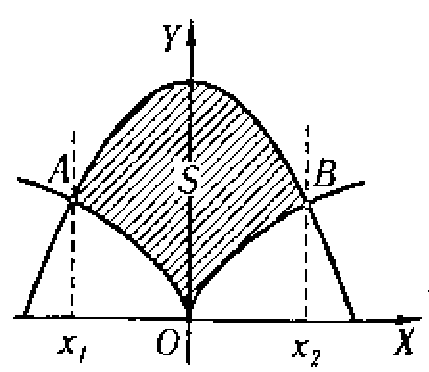


Рис. 44.

$$S = \int\limits_{t_1}^{t_2} \psi(t)\varphi'(t)\,dx,$$

где t_1 и t_2 определяются из уравнений

$$a = \varphi(t_1) \text{ и } b = \varphi(t_2)\ [\psi(t) \geqslant 0 \text{ на отрезке } [t_1, t_2]].$$

Пример 4. Найти площадь эллипса S (рис. 45), используя его параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Решение. Ввиду симметрии достаточно вычислить площадь одной четверти, а затем учетверить результат. Полагая в уравнении $x = a\cos t$ сначала $x = 0$, затем $x = a$, получим пределы интегрирования $t_1 = \frac{\pi}{2}$ и $t_2 = 0$. Поэтому

$$\frac{1}{4}S = \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{0} b\sin a\,(-\sin t)\,dt = ab\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,dt = \frac{\pi ab}{4}$$

и, следовательно, $S = \pi ab$.

2°. Площадь в полярных координатах. Если непрерывная кривая задана в полярных координатах уравнением $r = f(\varphi)$, то площадь сектора AOB (рис. 46), ограниченного дугой кривой и двумя полярными радиусами OA и OB, соответствующими значениям $\varphi_1 = \alpha$ и $\varphi_2 = \beta$, выразится интегралом

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta [f(\varphi)]^2\,d\varphi.$$

Пример 5. Найти площадь, заключенную внутри лемнискаты Бернулли $r^2 = a^2\cos 2\varphi$ (рис. 47).

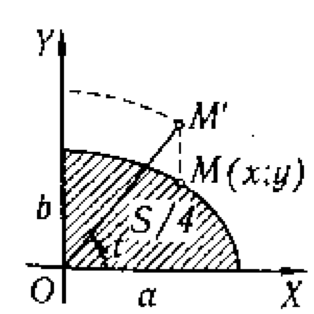


Рис. 45.

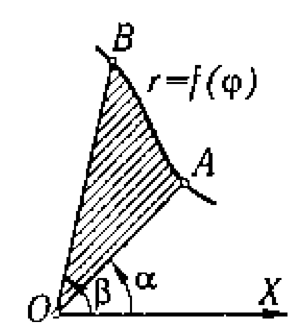


Рис. 46.

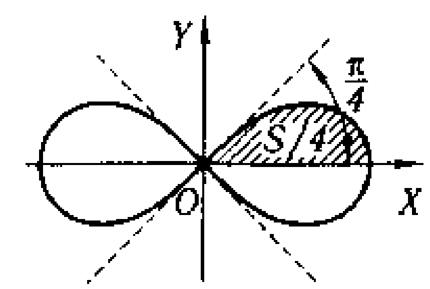


Рис. 47.

Решение. В силу симметрии кривой определяем сначала одну
верть искомой площади:

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\varphi\, d\varphi = \frac{a^2}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

Отсюда $S = a^2$.

1623. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 4x -$
и осью абсцисс.

1624. Вычислить площадь, ограниченную кривой $y = \ln x$, ос
OX и прямой $x = e$.

1625*. Найти площадь, ограниченную кривой $y = x(x-1)(x -$
и осью OX.

1626. Найти площадь, ограниченную кривой $y^3 = x$, прямой $y =$
и вертикалью $x = 8$.

1627. Вычислить площадь, ограниченную одной полуволной с
нусоиды $y = \sin x$ и осью OX.

1628. Вычислить площадь, заключенную между кривой $y = \operatorname{tg}$
осью OX и прямой $x = \frac{\pi}{3}$.

1629. Найти площадь, заключенную между гиперболой $xy = m$
вертикалями $x = a$ и $x = 3a$ $(a > 0)$ и осью OX.

1630. Найти площадь, содержащуюся между локоном Аньез
$y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ и осью абсцисс.

1631. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x$
прямой $y = 8$ и осью OY.

1632. Найти площадь, ограниченную параболами $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2p$

1633. Вычислить площадь, ограниченную параболой $y = 2x -$
и прямой $y = -x$.

1634. Вычислить площадь сегмента, отсекаемого прямой $y = 3 - 2$
от параболы $y = x^2$.

1635. Вычислить площадь, заключенную между параболами $y = x$
$y = \frac{x^2}{2}$ и прямой $y = 2x$.

1636. Вычислить площадь, заключенную между параболами $y = \frac{x}{3}$
и $y = 4 - \frac{2}{3}x^2$.

1637. Вычислить площадь, заключенную между локоном Аньез
$y = \frac{1}{1+x^2}$ и параболой $y = \frac{x^2}{2}$.

1638. Вычислить площадь, ограниченную кривыми $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и прямой $x = 1$.

1639. Найти площадь фигуры, ограниченной гиперболой $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямой $x = 2a$.

1640*. Найти площадь, ограниченную астроидой

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}.$$

1641. Найти площадь между цепной линией

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a},$$

осью OY и прямой $y = \frac{a}{2e}(e^2 + 1)$.

1642. Найти площадь, ограниченную кривой $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$.

1643. Вычислить площадь, содержащуюся внутри кривой

$$\left(\frac{x}{5}\right)^2 + \left(\frac{y}{4}\right)^{2/3} = 1.$$

1644. Найти площадь между равнобочной гиперболой $x^2 - y^2 = 9$, осью OX и диаметром, проходящим через точку $(5;\ 4)$.

1645. Найти площадь между кривой $y = \frac{1}{x^2}$, осью OX и ординатой $x = 1$ $(x > 1)$.

1646*. Найти площадь, ограниченную циссоидой $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ и ее асимптотой $x = 2a$ $(a > 0)$.

1647*. Найти площадь между строфоидой $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a - x}$ и ее асимптотой $(a > 0)$.

1648. Вычислить площади двух частей, на которые круг $x^2 + y^2 = 8$ разделен параболой $y^2 = 2x$.

1649. Вычислить площадь, содержащуюся между окружностью $x^2 + y^2 = 16$ и параболой $x^2 = 12(y - 1)$.

1650. Найти площадь, содержащуюся внутри астроиды

$$x = a\cos^3 t;\ y = b\sin^3 t.$$

1651. Найти площадь, ограниченную осью OX и одной аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t).$$

1652. Найти площадь, ограниченную одной ветвью трохоиды

$$\begin{cases} x = at - b\sin t, \\ y = a - b\cos t \end{cases} \quad (0 < b \leqslant a)$$

и касательной к ней в низших ее точках.

1653. Найти площадь, ограниченную кардиоидой

$$\begin{cases} x = a(\cos t - \cos 2t),\\ y = a(\sin t - \sin 2t).\end{cases}$$

1654*. Найти площадь петли декартова листа

$$x = \frac{3at}{1+t^3};\; y = \frac{3at^2}{1+t^3}.$$

1655*. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой

$$r = a(1+\cos\varphi).$$

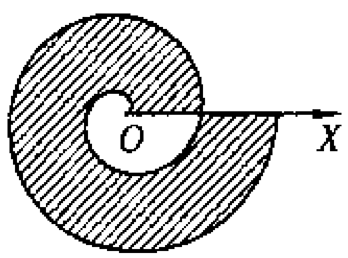


Рис. 48.

1656*. Найти площадь, содержащуюся между первым и вторым витками спирали Архимеда $r = a\varphi$ (рис. 48).

1657. Найти площадь одного лепестка кривой $r = a\cos 2\varphi$.

1658. Найти площадь, ограниченную кривой $r^2 = a^2\sin 4\varphi$.

1659*. Найти площадь, ограниченную кривой $r = a\sin 3\varphi$.

1660. Найти площадь, ограниченную улиткой Паскаля

$$r = 2 + \cos\varphi.$$

1661. Найти площадь, ограниченную параболой $r = a\sec^2\dfrac{\varphi}{2}$ и полупрямыми $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

1662. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\;(0 \leqslant \varepsilon < 1).$$

1663. Найти площадь, ограниченную кривой $r = 2a\cos 3\varphi$ и лежащую вне круга $r = a$.

1664*. Найти площадь, ограниченную кривой $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

§ 8. Длина дуги кривой

1°. Длина дуги в прямоугольных координатах. Длина дуги гладкой кривой $y = f(x)$, содержащейся между двумя точками с абсциссами $x = a$ и $x = b$, равна

$$s = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

Пример 1. Найти длину астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (рис. 49).

Решение. Дифференцируя уравнение астроиды, получаем

$$y' = -\frac{y^{1/3}}{x^{1/3}}.$$

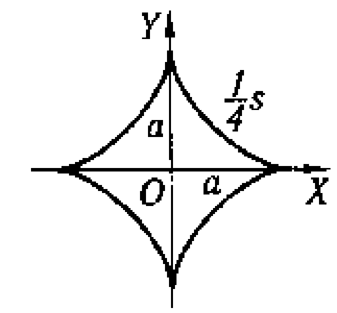


Рис. 49.

Поэтому для длины дуги одной четверти астроиды имеем

$$\frac{1}{4}s = \int_0^a \sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}\,dx = \int_0^a \frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}\,dx = \frac{3}{2}a.$$

Отсюда $s = 6a$.

2°. Длина дуги кривой, заданной параметрически. Если кривая задана уравнениями в параметрической форме $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$ ($\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции), то длина дуги s кривой равна

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt,$$

где t_1 и t_2 — значения параметра, соответствующие концам дуги.

Пример 2. Найти длину одной арки циклоиды (рис. 50)

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t),\\ y = a(1 - \cos t).\end{cases}$$

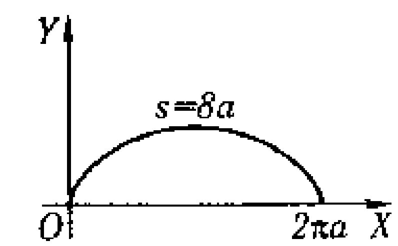


Рис. 50.

Решение. Имеем $x' = \dfrac{dx}{dt} = a(1-\cos t)$ и $y' = \dfrac{dy}{dt} = a\sin t$. Поэтому

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = 8a.$$

Пределы интегрирования $t_1 = 0$ и $t_2 = 2\pi$ соответствуют крайним точкам арки циклоиды.

Если гладкая кривая задана уравнением $r = f(\varphi)$ в полярных координатах r и φ, то длина дуги s равна

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi,$$

где α и β — значения полярного угла в крайних точках дуги.

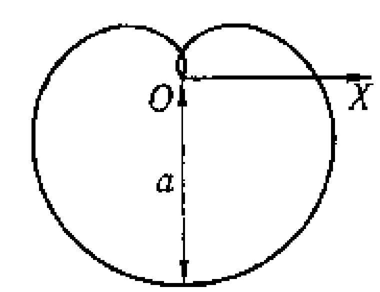


Рис. 51.

Пример 3. Найти длину всей прямой $r = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$ (рис. 51). Вся кривая описывается точкой (r, φ) при изменении φ от 0 до 3π.

Решение. Имеем $r' = a\sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$, поэтому длина всей дуги кривой

$$s = \int\limits_0^{3\pi}\sqrt{a^2\sin^6\frac{\varphi}{3} + a^2\sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = a\int\limits_0^{3\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi = \frac{3\pi a}{2}.$$

1665. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2 = x^3$ от начала координат до точки с координатами $x = 4$, $y = 8$.

1666*. Найти длину цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$ от вершины $A(0; a)$ до точки $B(b; h)$.

1667. Вычислить длину дуги параболы $y = 2\sqrt{x}$ от $x = 0$ до $x = 1$.

1668. Найти длину дуги кривой $y = e^x$, содержащейся между точками (0; 1) и (1; e).

1669. Найти длину дуги кривой $y = \ln x$ от $x = \sqrt{3}$ до $x = \sqrt{8}$.

1670. Найти длину дуги $y = \arcsin(e^{-x})$ от $x = 0$ до $x = 1$.

1671. Вычислить длину дуги кривой $x = \ln\sec y$, содержащейся между $y = 0$ и $y = \frac{\pi}{3}$.

1672. Найти длину дуги кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ от $y = 1$ до $y = e$.

1673. Найти длину дуги правой ветви трактриссы

$$x = \sqrt{a^2 - y^2} + a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}\right| \text{ от } y = a \text{ до } y = b\ (0 < b < a).$$

1674. Найти длину замкнутой части кривой $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

1675. Найти длину дуги кривой $y = \ln\left(\mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}\right)$ от $x = a$ до $x = b$ $(0 < a < b)$.

1676*. Найти длину дуги развертки окружности

$$\left.\begin{aligned} x &= a(\cos t + t\sin t),\\ y &= a(\sin t - t\cos t)\end{aligned}\right\}\text{ от } t = 0 \text{ до } t = T.$$

1677. Найти длину эволюты эллипса

$$x = \frac{c^2}{a}\cos^3 t;\ y = \frac{c^2}{b}\sin^3 t\ (c^2 = a^2 - b^2).$$

1678. Найти длину кривой

$$\left.\begin{aligned} x &= a(2\cos t - \cos 2t),\\ y &= a(2\sin t - \sin 2t).\end{aligned}\right\}$$

1679. Найти длину первого витка спирали Архимеда $r = a\varphi$.

1680. Найти всю длину кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$.

1681. Найти длину дуги части параболы $r = a\sec^2\frac{\varphi}{2}$, отсекаемой от параболы вертикальной прямой, проходящей через полюс.

1682. Найти длину дуги гиперболической спирали $r\varphi = 1$ от точки $\left(2; \frac{1}{2}\right)$ до точки $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

1683. Найти длину дуги логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$, находящейся внутри круга $r = a$.

1684. Найти длину дуги кривой $\varphi = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)$ от $r = 1$ до $r = 3$.

§ 9. Объемы тел

1°. Объем тела вращения. Объемы тел, образованных вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью OX и двумя вертикалями $x = a$ и $x = b$, вокруг осей OX и OY, выражаются соответственно формулами:

$$1)\ V_X = \pi\int\limits_a^b y^2\,dx;\quad 2)\ V_Y = 2\pi\int\limits_a^b xy\,dx^{*)}.$$

Пример 1. Вычислить объемы тел, образуемых вращением фигуры, ограниченной одной полуволной синусоиды $y = \sin x$ и отрезком $0 \leqslant x \leqslant \pi$ оси OX вокруг: а) оси OX и б) оси OY.

Решение.

$$\text{а)}\ V_X = \pi\int\limits_0^{\pi}\sin^2 x\,dx = \frac{\pi^2}{2};$$

$$\text{б)}\ V_Y = 2\pi\int\limits_0^{\pi} x\sin x\,dx = 2\pi(-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = 2\pi^2.$$

Объем тела, образованного вращением около оси OY фигуры, ограниченной кривой $x = g(y)$, осью OY и двумя параллелями $y = c$ и $y = d$, можно определять по формуле

$$V_Y = \pi\int\limits_c^d x^2\,dy,$$

*) Пусть тело образовано вращением около оси OY криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ и $y = 0$. За элемент объема этого тела принимают объем части тела, образованного вращением около оси OY прямоугольника со сторонами y и dx, отстоящего от оси OY на расстоянии x. Тогда элемент объема $dV_Y = 2\pi xy\,dx$, откуда $V_Y = 2\pi\int\limits_a^b xy\,dx$.

получающейся из приведенной выше формулы 1) путем перестановки к ординат x и y.

Если кривая задана в иной форме (параметрически, в полярных коо динатах и т. д.), то в приведенных формулах нужно сделать соответству щую замену переменной интегрирования.

В более общем случае объемы тел, образованных вращением фигуры, о раниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ (причем $f_1(x) \leqslant f_2(x)$) и прямым $x = a$, $x = b$, вокруг координатных осей OX и OY, соответственно равны

$$V_X = \pi\int_a^b (y_2^2 - y_1^2)\,dx, \quad V_Y = 2\pi\int_a^b x(y_2 - y_1)\,dx.$$

Пример 2. Найти объем тора, образованного вращением кру $x^2 + (y - b)^2 \leqslant a^2$ $(b \geqslant a)$ вокруг оси OX (рис. 52).

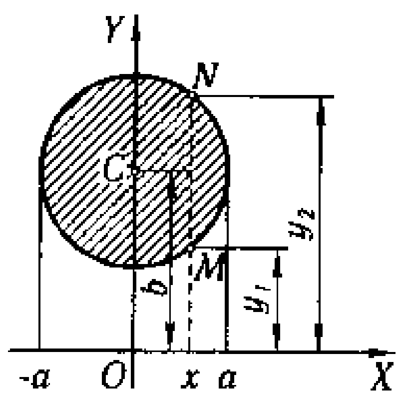


Рис. 52.

Решение. Имеем

$$y_1 = b - \sqrt{a^2 - x^2} \text{ и } y_2 = b + \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Поэтому

$$V_X = \pi\int_{-a}^{a} [(b + \sqrt{a^2 - x^2})^2 - (b - \sqrt{a^2 - x^2})^2]\,dx =$$

$$= 4\pi b\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = 2\pi^2 a^2 b$$

(последний интеграл берется подстановкой $x = a\sin t$).

Объем тела, полученного при вращении сектора, ограниченного дуго кривой $r = F(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вокруг полярно оси, может быть вычислен по формуле

$$V_P = \frac{2}{3}\pi\int_\beta^\alpha r^3 \sin\varphi\,d\varphi.$$

Этой же формулой удобно пользоваться при отыскании объема тела, по лученного вращением вокруг полярной оси фигуры, ограниченной некото рой замкнутой кривой, заданной в полярных координатах.

Пример 3. Определить объем, образованный вращением криво $r = a\sin 2\varphi$ вокруг полярной оси.

Решение.

$$V_P = 2\cdot\frac{2}{3}\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3\sin\varphi\,d\varphi = \frac{4}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{32}{3}\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\cos^3\varphi\,d\varphi = \frac{64}{105}\pi a^3.$$

2°. Вычисление объемов тел по известным поперечным сечениям. Если $S = S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной к некоторой прямой (которую принимаем за ось OX), в точке с абсциссой x, то объем этого тела равен

$$V = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx,$$

где x_1 и x_2 — абсциссы крайних сечений тела.

Пример 1. Определить объем клина, отсеченного от круглого цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания и наклоненной к основанию под углом α. Радиус основания равен R (рис. 53).

Решение. Примем за ось OX диаметр основания, по которому секущая плоскость пересекает основание, и за ось OY диаметр основания, ему перпендикулярный. Уравнение окружности основания будет $x^2 + y^2 = R^2$.

Площадь сечения ABC, отстоящего на расстоянии x от начала координат O, равна

$$S(x) = \text{пл.}\,\Delta ABC = \frac{1}{2}AB\cdot BC = \frac{1}{2}yy\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{y^2}{2}\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

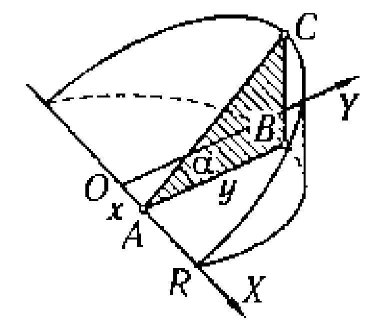


Рис. 53.

Поэтому искомый объем клина есть

$$V = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^R y^2\,\mathrm{tg}\,\alpha\,dx = \mathrm{tg}\,\alpha\int_0^R (R^2 - x^2)\,dx = \frac{2}{3}R^3\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

1685. Найти объем тела, получающегося от вращения вокруг оси OX площади, ограниченной осью OX и параболой $y = ax - x^2$ $(a > 0)$.

1686. Найти объем эллипсоида, образованного вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг оси OX.

1687. Найти объем тела, получающегося при вращении вокруг оси OX площади, ограниченной цепной линией $y = a\,\mathrm{sh}\,\frac{x}{a}$, осью OX и прямыми $x = \pm a$.

1688. Найти объем тела, образованного при вращении вокруг оси OX кривой $y = \sin^2 x$ в промежутке от $x = 0$ до $x = \pi$.

1689. Найти объем тела, образованного вращением площади, ограниченной полукубической параболой $y^2 = x^3$, осью OX и прямой $x = 1$, вокруг оси OX.

1690. Найти объем тела, образованного вращением той же площади, что в задаче 1689, вокруг оси OY.

1691. Найти объемы тел, образуемых вращением площади, ограниченной линиями $y = e^x$, $x = 0$, $y = 0$, вокруг: а) оси OX и б) оси OY.

1692. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX той части параболы $y^2 = 4ax$, которая отсекается прямой $x = a$.

1693. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $x = a$ той части параболы $y^2 = 4ax$, которая этой прямой отсекается.

1694. Найти объем тела, образованного вращением вокруг прямой $y = -p$ фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2px$ и прямой $x = \frac{p}{2}$.

1695. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX площади, содержащейся между параболами $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

1696. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси OX петли кривой $(x - 4a)y^2 = ax\,(x - 3a)$ $(a > 0)$.

1697. Найти объем тела, производимого вращением циссоиды $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ вокруг ее асимптоты $x = 2a$.

1698. Найти объем параболоида вращения, радиус основания которого R, а высота H.

1699. Прямой параболический сегмент, основание которого $2a$ и высота h, вращается вокруг основания. Определить объем тела вращения, которое при этом получается («лимон» Кавальери).

1700. Показать, что объем части, отсекаемой плоскостью $x = 2a$ от тела, образованного вращением равнобочной гиперболы $x^2 - y^2 = a^2$ вокруг оси OX, равен объему шара радиуса a.

1701. Найти объемы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью OX, вокруг: а) оси OX, б) оси OY, в) оси симметрии фигуры.

1702. Найти объем тела, образованного вращением астроиды $x = a\cos^3 y$, $y = a\sin^3 t$ вокруг оси OY.

1703. Найти объем тела, которое получается от вращения кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

1704. Найти объем тела, образованного вращением кривой $r = a\cos^2\varphi$ вокруг полярной оси.

1705. Найти объем обелиска, параллельные основания которого — прямоугольники со сторонами A, B и a, b, а высота равна h.

1706. Найти объем прямого эллиптического конуса, основание которого есть эллипс с полуосями a и b, а высота равна h.

1707. На хордах астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, параллельных оси OX, построены квадраты, стороны которых равны длинам хорд и плоскости которых перпендикулярны плоскости XOY. Найти объем тела, образованного этими квадратами.

1708. Деформирующийся круг перемещается так, что одна из точек его окружности лежит на оси OY, центр описывает эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, а плоскость круга перпендикулярна плоскости XOY. Найти объем тела, образованного кругом.

1709. Плоскость движущегося треугольника остается перпендикулярной неподвижному диаметру круга радиуса a. Основанием треугольника служит хорда круга, а вершина его скользит по прямой параллельно неподвижному диаметру на расстоянии h от плоскости круга. Найти объем тела (называемого *коноидом*), образованного движением этого треугольника от одного конца диаметра до другого.

1710. Найти объем тела, ограниченного цилиндрами $x^2 + z^2 = a^2$ и $y^2 + z^2 = a^2$.

1711. Найти объем сегмента, отсекаемого от эллиптического параболоида $\frac{y^2}{2p} + \frac{z^2}{2q} \leqslant x$ плоскостью $x = a$.

1712. Найти объем тела, ограниченного однополостным гиперболоидом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ и плоскостями $x = 0$ и $z = h$.

1713. Найти объем эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

§ 10. Площадь поверхности вращения

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги гладкой кривой $y = f(x)$ между токами $x = a$ и $x = b$, выражается формулой

$$S_X = 2\pi\int_a^b y\,\frac{ds}{dx}\,dx = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2}\,dx \qquad (1)$$

(ds — диференциал дуги кривой).

В случае иного задания уравнения кривой площадь поверхности S_X получается из формулы (1) путем соответствующей замены переменных.

Пример 1. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX петли кривой $9y^2 = x(3 - x)^2$ (рис. 54).

Решение. Для верхней части кривой при $0 \leqslant x \leqslant 3$ имеем $y = \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}$.

Отсюда дифференциал дуги $ds = \dfrac{x + 1}{2\sqrt{x}}\,dx$. На основании формулы (1) площадь поверхности

$$S = 2\pi\int_0^3 \frac{1}{3}(3 - x)\sqrt{x}\,\frac{x + 1}{2\sqrt{x}}\,dx = 3\pi.$$

Пример 2. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг ее оси симметрии (рис. 55).

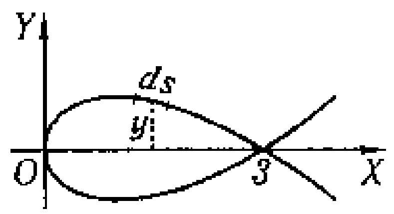


Рис. 54.

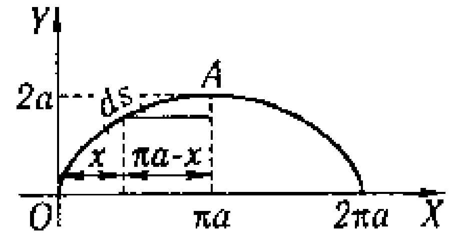


Рис. 55.

Решение. Искомая поверхность образуется вращением дуги OA вокруг прямой AB, уравнение которой $x = \pi a$. Принимая y за независимую переменную и учитывая, что ось вращения AB сдвинута относительно координатной оси OY на расстояние πa, будем иметь

$$S = 2\pi \int_0^{2a} (\pi a - x) \frac{ds}{dy} dy.$$

Переходя к переменной t, получим

$$S = 2\pi \int_0^{\pi} (\pi a - at + a \sin t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt =$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} (\pi a - at + a \sin t)\, 2a \sin\frac{t}{2}\, dt = 4\pi a^2 \int_0^{\pi} \left(\pi \sin\frac{t}{2} - t\sin\frac{t}{2} + \sin t \sin\frac{t}{2}\right) dt =$$

$$= 4\pi a^2 \left[-2\pi \cos\frac{t}{2} + 2t\cos\frac{t}{2} - 4\sin\frac{t}{2} + \frac{4}{3}\sin^3\frac{t}{2}\right]_0^{\pi} = 8\pi\left(\pi - \frac{4}{3}\right) a^2.$$

1714. Размеры параболического зеркала AOB указаны на рис. 56. Требуется найти площадь поверхности этого зеркала.

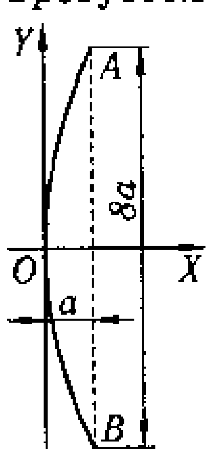


Рис. 56.

1715. Найти площадь поверхности «веретена», которое получается в результате вращения одной полуволны синусоиды $y = \sin x$ вокруг оси OX.

1716. Найти площадь поверхности, образованной вращением части тангенсоиды $y = \operatorname{tg} x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{4}$ вокруг оси OX.

1717. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX дуги кривой $y = e^{-x}$, от $x = 0$ до $x = +\infty$.

1718. Найти площадь поверхности (называемой *катеноидом*), образованной вращением цепной линии $y = a \operatorname{ch}\frac{x}{a}$ вокруг оси OX, в пределах от $x = 0$ до $x = a$.

1719. Найти площадь поверхности вращения астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ вокруг оси OY.

1720. Найти площадь поверхности вращения кривой $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y$ вокруг оси OX, от $y = 1$ до $y = e$.

1721*. Найти поверхность тора, образованного вращением окружности $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ вокруг оси OX $(b > a)$.

1722. Найти площадь поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ вокруг: 1) оси OX; 2) оси OY $(a > b)$.

1723. Найти площадь поверхности, образованной вращением одной арки циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ вокруг: а) оси OX; б) оси OY; в) касательной к циклоиде в ее высшей точке.

1724. Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси OX кардиоиды

$$\left.\begin{aligned} x &= a(2\cos t - \cos 2t),\\ y &= a(2\sin t - \sin 2t). \end{aligned}\right\}$$

1725. Определить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ вокруг полярной оси.

1726. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $r = 2a(1 + \cos\varphi)$ вокруг полярной оси.

§ 11. Моменты. Центры тяжести. Теоремы Гульдена

1°. Статический момент. *Статическим моментом* относительно оси l материальной точки A, имеющей массу m и отстоящей от оси l на расстоянии d, называется величина $M_l = md$.

Статическим моментом относительно оси l системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ называется сумма

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i, \qquad (1)$$

причем расстояния точек, лежащих по одну сторону оси l, берутся со знаком плюс (+), а по другую — со знаком минус (−). Аналогично определяется *статический момент системы точек* относительно плоскости.

Если массы непрерывно заполняют линию или фигуру плоскости XOY, то статические моменты M_X и M_Y относительно координатных осей OX и OY вместо сумм (1) выражаются соответствующими интегралами. Для случая геометрических фигур плотность считается равной единице.

В частности: 1) для кривой $x = x(s)$; $y = y(s)$, где параметр s есть длина дуги, имеем

$$M_X = \int_0^L y(s)\,\mathrm{d}s;\quad M_Y = \int_0^L x(s)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

($\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$ — дифференциал дуги);

2) для плоской фигуры, ограниченной кривой $y = y(x)$, осью OX и двумя вертикалями $x = a$ и $y = b$, получаем

$$M_X = \frac{1}{2}\int_a^b y|y|\,\mathrm{d}x;\quad M_Y = \int_a^b x|y|\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Пример 1. Найти статические моменты относительно осей OX и OY треугольника, ограниченного прямыми $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, $x = 0$, $y = 0$ (рис. 57).

Решение. Здесь $y = b\left(1 - \frac{x}{a}\right)$. Применяя формулы (3), получаем

$$M_X = \frac{b^2}{2}\int_0^a \left(1 - \frac{x}{a}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{ab^2}{6}$$

и

$$M_Y = b\int_0^a x\left(1 - \frac{x}{a}\right)\mathrm{d}x = \frac{ba^2}{6}.$$

2°. Момент инерции. *Моментом инерции* относительно оси l материальной точки массы m, отстоящей от оси l на расстоянии d, называется число $I_l = md^2$.

Моментом инерции относительно оси l системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ называется сумма

$$I_l = \sum_{i=1}^{n} m_i d_i^2,$$

где $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — расстояния точек от оси l. В случае сплошной массы вместо суммы получаем соответствующий интеграл.

Пример 2. Найти момент инерции треугольника с основанием b и высотой h относительно его основания.

Решение. Основание треугольника примем за ось OX, а его высоту — за ось OY (рис. 58).

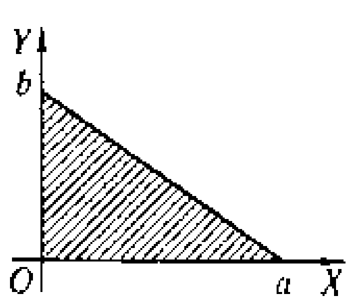


Рис. 57.

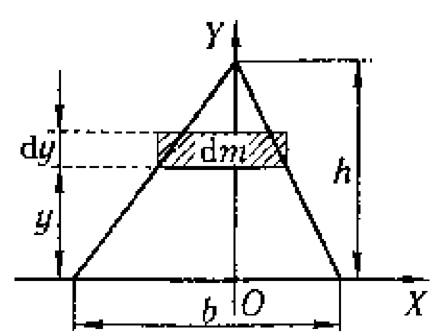


Рис. 58.

Разобьем треугольник на бесконечно тонкие горизонтальные полоски толщины $\mathrm{d}y$, играющие роль элементарных масс $\mathrm{d}m$. Используя подобие треугольников, получаем:

$$\mathrm{d}m = b\frac{h - y}{h}\,\mathrm{d}y$$

и

$$\mathrm{d}I_X = y^2\,\mathrm{d}m = \frac{b}{h}y^2(h - y)\,\mathrm{d}y.$$

Отсюда

$$I_X = \frac{b}{h}\int_0^h y^2(h - y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{12}bh^3.$$

3°. Центр тяжести. *Координаты центра тяжести* плоской фигуры (дуги или площади) массы M вычисляются по формулам

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{M},\quad \bar{y} = \frac{M_X}{M},$$

где M_X и M_Y — статические моменты массы. В случае геометрических фигур масса M численно равна соответствующей дуге или площади.

Для координат центра тяжести $(\bar{x}, \bar{y})$ дуги плоской кривой $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, соединяющей точки $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$, имеем

$$\bar{x} = \frac{\int_A^B x\,\mathrm{d}s}{s} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x},\quad \bar{y} = \frac{\int_A^B y\,\mathrm{d}s}{s} = \frac{\int_a^b y\sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x}{\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x}.$$

Координаты центра тяжести $(\bar{x}, \bar{y})$ криволинейной трапеции $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, могут быть вычислены по формулам

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy\,\mathrm{d}x}{S},\quad \bar{y} = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x}{S},$$

где $S = \int_a^b y\,\mathrm{d}x$ — площадь фигуры.

Аналогичные формулы имеют место для координат центра тяжести тела.

Пример 3. Найти центр тяжести дуги полуокружности $x^2 + y^2 = a^2$ $(y \geqslant 0)$ (рис. 59).

Решение. Имеем

$$y = \sqrt{a^2 - x^2};\quad y' = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

и

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + (y')^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

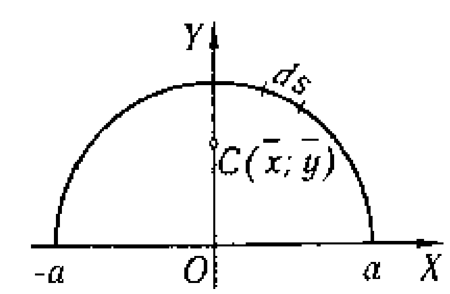


Рис. 59.

Отсюда

$$M_Y = \int_{-a}^{a} x\,ds = \int_{-a}^{a} \frac{ax}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = 0,$$

$$M_X = \int_{-a}^{a} y\,ds = \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,\frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2a^2,\ M = \int_{-a}^{a} \frac{a dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi a.$$

Следовательно,

$$\bar{x} = 0;\ \bar{y} = \frac{2}{\pi}a.$$

4°. Теоремы Гульдена.

Теорема 1. Площадь поверхности, полученной от вращения дуги плоской кривой вокруг некоторой оси, лежащей в одной плоскости с кривой и ее не пересекающей, равна произведению длины дуги на длину окружности, описываемой центром тяжести дуги кривой.

Теорема 2. Объем тела, полученного при вращении плоской фигуры вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости фигуры и ее не пересекающей, равен произведению площади этой фигуры на длину окружности, описываемой центром тяжести фигуры.

1727. Найти статические моменты относительно осей координат отрезка прямой

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

заключенного между осями координат.

1728. Найти статические моменты прямоугольника со сторонами a и b относительно его сторон.

1729. Найти статические моменты относительно осей OX и OY и координаты центра тяжести треугольника, ограниченного прямыми $x + y = a$, $x = 0$ и $y = 0$.

1730. Найти статические моменты относительно осей OX и OY и координаты центра тяжести дуги астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3},$$

лежащей в первом квадранте.

1731. Найти статический момент окружности

$$r = 2a\sin\varphi$$

относительно полярной оси.

1732. Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии

$$y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$$

от $x = -a$ до $x = a$.

1733. Найти центр тяжести дуги окружности радиуса a, стягивающей угол 2α.

1734. Найти координаты центра тяжести дуги первой арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t);\ y = a(1 - \cos t)$$

$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$.

1735. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ и осями координат OX и OY $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0)$.

1736. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кривыми

$$y = x^2;\ y = \sqrt{x}.$$

1737. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды

$$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$$

и осью OX.

1738.** Найти центр тяжести полусферы радиуса a с центром в начале координат, расположенной над плоскостью XOY.

1739.** Найти центр тяжести однородного кругового конуса с радиусом основания r и высотой h.

1740.** Найти центр тяжести однородного полушара радиуса a с центром в начале координат, расположенного над плоскостью XOY.

1741. Найти момент инерции окружности радиуса a относительно ее диаметра.

1742. Найти момент инерции прямоугольника со сторонами a и b относительно его сторон.

1743. Найти момент инерции прямого параболического сегмента с основанием $2b$ и высотой h относительно его оси симметрии.

1744. Найти моменты инерции площади эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ относительно его главных осей.

1745.** Найти полярный момент инерции кругового кольца с радиусами R_1 и R_2 $(R_1 < R_2)$, т. е. момент инерции относительно оси, проходящей через центр кольца и перпендикулярной к его плоскости.

1746.** Найти момент инерции однородного прямого кругового конуса с радиусом основания R и высотой H относительно его оси.

1747.** Найти момент инерции однородного шара радиуса a и массы M относительно его диаметра.

1748. Найти поверхность и объем тора, получающегося от вращения круга радиуса a вокруг оси, расположенной в плоскости круга и отстоящей от центра его на расстоянии b $(b \geqslant a)$.

1749. а) Определить положение центра тяжести дуги астроиды $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, лежащей в первой четверти.

б) Найти центр тяжести фигуры, ограниченной кривыми $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$.

1750.** а) Найти центр тяжести полукруга, пользуясь теоремой Гульдена.

б) Доказать, пользуясь теоремой Гульдена, что центр тяжести треугольника отстоит от его основания на одну треть высоты.

§ 12. Приложения определенных интегралов к решению физических задач

1°. Путь, пройденный точкой. Если точка движется по некоторой кривой и скорость ее $v = f(t)$ есть известная функция времени t, то *путь*, пройденный точкой за промежуток времени $[t_1, t_2]$, равен

$$s = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Пример 1. Скорость точки равна

$$v = 0{,}1t^3$$

(v выражена в м/с). Найти путь s, пройденный точкой за промежуток времени $T = 10$ с, протекший от начала движения. Чему равна средняя скорость движения за этот промежуток?

Решение. Имеем

$$s = \int_0^{10} 0{,}1t^3\,\mathrm{d}t = 0{,}1\frac{t^4}{4}\Big|_0^{10} = 250\ (\text{м})$$

и

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{T} = 25\ (\text{м/с}).$$

2°. Работа силы. Если переменная сила $X = f(x)$ действует в направлении оси OX, то *работа силы* на отрезке $[x_1, x_2]$ равна

$$A = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Пример 2. Какую работу нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 6 см, если сила 1 Н растягивает ее на 1 м?

Решение. Согласно закону Гука сила X, растягивающая пружину на x, равна $X = kx$, где k — коэффициент пропорциональности.

Полагая $x = 0{,}01$ м и $X = 1$ Н, получим $k = 100$ и, следовательно, $X = 100x$. Отсюда искомая работа

$$A = \int_0^{0{,}06} 100x\,\mathrm{d}x = 50x^2\Big|_0^{0{,}06} = 0{,}18\ (\text{Дж}).$$

3°. Кинетическая энергия. *Кинетической энергией* материальной точки, имеющей массу m и обладающей скоростью v, называется выражение

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы n материальных точек с массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, обладающих соответственно скоростями $v_1, v_2, \ldots, v_n$, равна

$$K = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i v_i^2}{2}. \tag{1}$$

Для подсчета кинетической энергии тела его надлежащим образом разбивают на элементарные частицы (играющие роль материальных точек), а затем, суммируя кинетические энергии этих частиц, в пределе вместо суммы (1) получают интеграл.

Пример 3. Найти кинетическую энергию однородного кругового цилиндра плотности δ с радиусом основания R и высотой h, вращающегося с угловой скоростью ω вокруг своей оси.

Решение. За элементарную массу $\mathrm{d}m$ принимаем массу полого цилиндра высоты h, с внутренним радиусом r и толщиной стенок $\mathrm{d}r$ (рис. 60). Имеем

$$\mathrm{d}m = 2\pi r \cdot h\delta\,\mathrm{d}r.$$

Так как линейная скорость массы $\mathrm{d}m$ равна $v = r\omega$, то элементарная кинетическая энергия есть

$$\mathrm{d}K = \frac{v^2\mathrm{d}m}{2} = \pi r^3\omega^2 h\delta\,\mathrm{d}r.$$

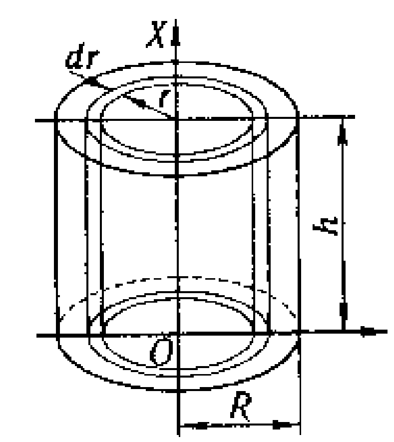


Рис. 60.

Отсюда

$$K = \pi\omega^2 h\delta\int_0^R r^3\,\mathrm{d}r = \frac{\pi\omega^2\delta R^4 h}{4}.$$

4°. Давление жидкости. Для вычисления *силы давления жидкости* используют закон Паскаля, согласно которому сила давления жидкости на площадку S с глубиной погружения h равна

$$P = \gamma g h S,$$

где γ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения.

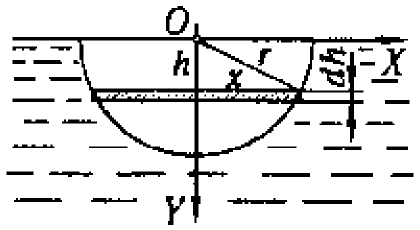


Рис. 61.

Пример 4. Найти силу давления, испытываемую полукругом*) радиуса r, погруженным вертикально в воду так, что его диаметр совпадает с поверхностью воды (рис. 61).

Решение. Разбиваем площадь полукруга на элементы — полоски, параллельные поверхности воды. Площадь одного такого элемента (отбрасывая б. м. высшего порядка), находящегося на расстоянии h от поверхности, равна

$$dS = 2x\,dh = 2\sqrt{r^2 - h^2}\,dh.$$

Сила давления, испытываемая этим элементом, равна

$$dP = \gamma gh\,dS = 2\gamma gh\sqrt{r^2 - h^2}\,dh,$$

где γ — плотность воды.

Отсюда вся сила давления есть

$$P = 2\gamma g\int\limits_0^r h\sqrt{r^2 - h^2}\,dh = -\frac{2}{3}\gamma g(r^2 - h^2)^{3/2}\Big|_0^r = \frac{2}{3}gr^3.$$

1751. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, без учета сопротивления воздуха, дается формулой

$$v = v_0 - gt,$$

где t — протекшее время, g — ускорение свободного падения. На каком расстоянии от начального положения будет находиться тело через время t от момента бросания?

1752. Скорость тела, брошенного вертикально вверх с начальной скоростью v_0, с учетом сопротивления воздуха, дается формулой

$$v = c \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{g}{c}t + \operatorname{arctg}\frac{v_0}{c}\right),$$

где t — протекшее время, g — ускорение свободного падения, c — постоянная. Найти высоту поднятия тела.

1753. Точка оси OX совершает гармонические колебания вокруг начала координат, причем скорость ее дается формулой

$$v = v_0\cos\omega t,$$

где t — время, v_0, ω — постоянные.

Найти закон колебания точки, если при $t = 0$ она имела абсциссу $x = 0$. Чему равно среднее значение скорости точки за период колебаний?

1754. Скорость движения точки $v = te^{-0{,}01t}$ (v — в м/с). Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной «остановки».

*) В этом примере, а также в задачах № № 1768—1771 под плоскими поверхностями понимаются тонкие тела (оболочки), у которых один из характерных размеров много меньше двух других.

1755. Ракетный снаряд поднимается вертикально вверх. Считая, что при постоянной силе тяги ускорение ракеты за счет уменьшения ее веса растет по закону $j = \dfrac{A}{a - bt}$ $(a - bt > 0)$, найти скорость ракеты в любой момент времени t, если начальная скорость ее равна нулю. Найти также высоту, достигнутую ракетой к моменту времени $t = t_1$.

1756*. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы выкачать воду из вертикальной цилиндрической бочки, имеющей радиус основания R и высоту H.

1757. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из конического сосуда, обращенного вершиной вниз, радиус основания которого равен R и высота H.

1758. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из полусферического котла, имеющего радиус R.

1759. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать масло через верхнее отверстие из цистерны, имеющей форму цилиндра с горизонтальной осью, если плотность масла γ, длина цистерны H и радиус основания R.

1760.** Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой R, на высоту h? Чему равна эта работа, если тело должно быть удалено на бесконечность?

1761.** Два электрических заряда $q_0 = 1$ Кл и $q_1 = 2$ Кл находятся на оси OX соответственно в точках $x_0 = 0$ и $x_1 = 1$ см. Какая работа будет произведена, если второй заряд переместится в точку $x_2 = 10$ см?

1762.** Цилиндр с подвижным поршнем диаметра $D = 20$ см и длины $l = 80$ см заполнен паром при давлении $p = 10$ Па. Какую работу надо совершить, чтобы при неизменной температуре (*изотермический процесс*) объем пара уменьшить в два раза?

1763.** Определить работу, произведенную при адиабатном расширении воздуха, имеющего начальные объем $V_0 = 1$ м^3 и давление $p_0 = 1$ Па, до объема $V_1 = 10$ м^3?

1764.** Вертикальный вал веса P и радиуса a опирается на подпятник AB (рис. 62). Сила трения между небольшой частью σ основания вала и прилегающей к ней поверхностью опоры равна $F = \mu p\sigma$, где $p = \text{const}$ есть давление вала на поверхность опоры, а μ — коэффициент трения. Найти работу силы трения при одном обороте вала.

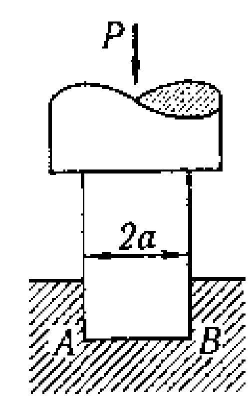


Рис. 62.

1765.** Вычислить кинетическую энергию диска массы M и радиуса R, вращающегося с угловой скоростью ω около оси, проходящей через центр диска перпендикулярно его плоскости.

1766. Вычислить кинетическую энергию прямого кругового конуса массы M, вращающегося с угловой скоростью ω около своей оси, если радиус основания конуса R, а высота H.

1767*. Какую работу надо затратить, чтобы остановить железный шар радиуса $R = 2$ м, вращающийся с угловой скоростью $\omega = 1000$ об/мин вокруг своего диаметра? (Плотность железа $\gamma = 7{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3).

1768. Вертикальный треугольник с основанием b и высотой h погружен в воду вершиной вниз так, что его основание находится на поверхности воды. Найти силу давления воды.

1769. Вертикальная плотина имеет форму трапеции. Вычислить силу давления воды на всю плотину, если известно, что верхнее основание плотины $a = 70$ м, нижнее основание $b = 50$ м, а высота плотины $h = 20$ м.

1770. Найти силу давления жидкости, удельный вес которой γ, на вертикальный эллипс с осями $2a$ и $2b$, центр которого погружен в жидкость на уровень h, причем большая ось $2a$ эллипса параллельна уровню жидкости ($h \geqslant b$).

1771. Найти силу давления воды на вертикальный круговой конус с радиусом основания R и высотой H, погруженный в воду вершиной вниз так, что его основание находится на поверхности воды.

РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

1772. Найти массу стержня длины $l = 100$ см, если линейная плотность стержня на расстоянии x (см) от одного из его концов равна

$$\delta = 2 + 0{,}001x^2 \text{ (г/см)}.$$

1773. Согласно эмпирическим данным удельная теплоемкость воды при температуре t°C ($0 \leqslant t \leqslant 100°$) равна

$$c = 0{,}9983 - 5{,}184 \cdot 10^{-5}t + 6{,}192 \cdot 10^{-7}t^2,$$

где c выражена в Дж /(г ·°C). Какое количество теплоты нужно затратить, чтобы 1 г воды нагреть от температуры 0 °C до температуры 100 °C?

1774. Ветер производит равномерное давление p на дверь, ширина которой b и высота h. Найти момент силы давления ветра, стремящейся повернуть дверь на петлях.

1775. С какой силой притяжения действует материальный стержень длины l и массы M на материальную точку массы m, находящуюся на одной прямой со стержнем на расстоянии a от одного из его концов?

1776.** При установившемся ламинарном (струйном) течении жидкости через трубу круглого сечения радиуса a скорость течения v в точке, находящейся на расстоянии r от оси трубы, дается формулой

$$v = \frac{p}{4\mu l}(a^2 - r^2),$$

где p — разность давлений жидкости на концах трубы, μ — коэффициент вязкости, l — длина трубы. Определить *расход жидкости* Q, т. е. количество жидкости, протекающей через поперечное сечение трубы в единицу времени.

1777*. Условие то же, что и в задаче № 1776, но труба имеет прямоугольное сечение, причем основание a велико по сравнению с высотой $2b$. В этом случае скорость течения v в точке $M(x, y)$ определяется формулой

$$v = \frac{p}{2\mu l}[b^2 - (b - y)^2].$$

Определить расход жидкости Q.

1778.** При изучении динамических свойств автомобиля часто используется построение диаграмм специального вида: на оси абсцисс откладываются скорости v, на оси ординат — величины, обратные соответствующим ускорениям a. Показать, что площадь S, ограниченная дугой этого графика, двумя ординатами $v = v_1$ и $v = v_2$ и осью абсцисс, численно равна времени, необходимому для того, чтобы увеличить скорость движения автомобиля от v_1 до v_2 (*время разгона*).

1779. Горизонтальная балка весом Q и длиной l находится в равновесии под действием направленной вниз вертикальной нагрузки, равномерно распределенной по длине балки, и опорных реакций A и B $\left(A = B = \frac{Q}{2}\right)$, направленных вертикально вверх. Найти изгибающий момент M_x в поперечном сечении x, т. е. момент относительно точки P с абсциссой x всех сил, действующих на часть балки AP.

1780. Горизонтальная балка длины l находится в равновесии под действием опорных реакций A и B и распределенной по длине балки нагрузки с интенсивностью $q = kx$, где x — расстояние от левой опоры, k — постоянный коэффициент. Найти изгибающий момент M_x в сечении x.

Примечание. Интенсивностью распределения нагрузки называется нагрузка (сила), отнесенная к единице длины.

1781*. Найти количество теплоты, выделяемое переменным синусоидальным током

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi\right)$$

в течение периода T в проводнике с сопротивлением R.

Глава VI

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Основные понятия

1°. Понятие функции нескольких переменных. Обозначения функций. Переменная величина z называется однозначной *функцией* двух переменных x, y, если каждой совокупности их значений (x, y) из данной области соответствует единственное определенное значение z. Переменные x, y называются *аргументами* или *независимыми переменными*. Функциональная зависимость обозначается так:

$$z = f(x, y), \text{ или } z = F(x, y) \text{ и т. п.}$$

Аналогично определяются функции трех и большего числа аргументов.

Пример 1. Выразить объем конуса V как функцию его образующей x и радиуса основания y.

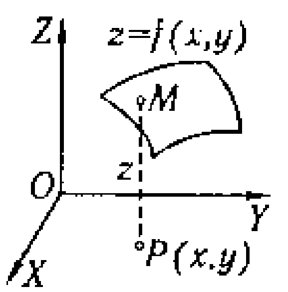


Рис. 63.

Решение. Из геометрии известно, что объем конуса равен

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2 h,$$

где h — высота конуса. Но $h = \sqrt{x^2 - y^2}$. Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}\pi y^2\sqrt{x^2 - y^2}.$$

Это и есть искомая функциональная зависимость.

Значение функции $z = f(x, y)$ в точке $P(a, b)$, т. е. при $x = a$ и $y = b$, обозначается $f(a, b)$ или $f(P)$. Геометрическим изображением функции $z = = f(x, y)$ в прямоугольной системе координат X, Y, Z, вообще говоря, является некоторая поверхность (рис. 63).

Пример 2. Найти $f(2, -3)$ и $f\left(1, \frac{y}{x}\right)$, если $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$.

Решение. Подставляя $x = 2$ и $y = -3$, находим

$$f(2, -3) = \frac{2^2 + (-3)^2}{2 \cdot 2 \cdot (-3)} = -\frac{13}{12}.$$

Подставляя $x = 1$ и заменяя y на $\frac{y}{x}$, будем иметь

$$f(1, \left(1, \frac{x}{y}\right) = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \cdot 1\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{x^2 + y^2}{2xy},$$

т. е. $f\left(1, \frac{y}{x}\right) = f(x, y)$.

2°. Область существования функции. Под *областью существования* (*определения*) функции $z = f(x, y)$ понимается совокупность точек (x, y) плоскости XOY, в которых данная функция определена (т. е. принимает определенные действительные значения). В простейших случаях область существования функции представляет собой конечную или бесконечную часть координатной плоскости XOY, ограниченную одной или несколькими кривыми (*граница области*).

Аналогично для функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ областью существования функции служит некоторое тело в пространстве $OXYZ$.

Пример 3. Найти область существования функции

$$z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Решение. Функция имеет действительные значения, если $4 - x^2 - y^2 > 0$ или $x^2 + y^2 < 4$. Последнему неравенству удовлетворяют координаты точек, лежащих внутри окружности радиуса 2 с центром в начале координат. Область существования функции есть внутренность этого круга (рис. 64).

Пример 4. Найти область существования функции

$$z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{xy}.$$

Решение. Первое слагаемое функции определено при $-1 \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 1$ или $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Второе слагаемое имеет действительные значения, если $xy \geqslant 0$, т. е. в двух случаях: при $\begin{cases} x \geqslant 0, \\ y \geqslant 0 \end{cases}$ или при $\begin{cases} x \leqslant 0, \\ y \leqslant 0. \end{cases}$

Область существования всей функции изображена на рис. 65 и включает границы области.

3°. Линии и поверхности уровня функции. *Линией уровня* функции $z = f(x, y)$ называется такая линия $f(x, y) = C$ на плоскости XOY, в точках которой функция принимает одно и то же значение $z = C$ (обычно проставляемое на чертеже в виде отметки).

Поверхностью уровня функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ называется такая поверхность $f(x, y, z) = C$, в точках которой функция принимает постоянное значение $u = C$.

Пример 5. Построить линии уровня функции $z = x^2 y$.

Решение. Уравнение линий уровня имеет вид $x^2 y = C$ или $y = \frac{C}{x^2}$. Полагая $C = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получим семейство линий уровня (рис. 66).

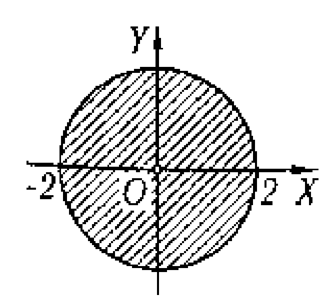


Рис. 64.

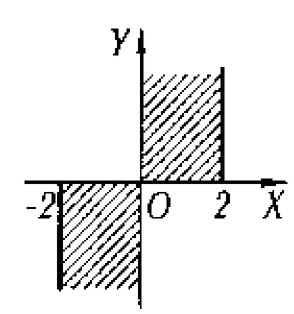


Рис. 65.

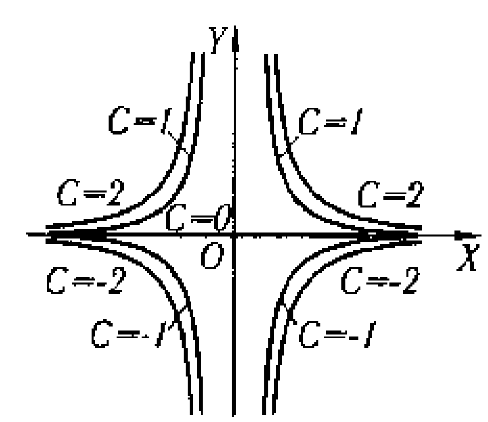


Рис. 66.

1782. Выразить объем V правильной четырехугольной пирамиды как функцию ее высоты x и бокового ребра y.

1783. Выразить площадь S боковой поверхности правильной шестиугольной усеченной пирамиды как функцию сторон x и y оснований и высоты z.

1784. Найти $f\left(\frac{1}{2}, 3\right)$, $f(1, -1)$, если

$$f(x, y) = xy + \frac{x}{y}.$$

1785. Найти $f(x, y)$, $f(-x, -y)$, $f\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$, $\frac{1}{f(x, y)}$, если

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{2xy}.$$

1786. Найти значения, принимаемые функцией

$$f(x, y) = 1 + x - y$$

в точках параболы $y = x^2$, и построить график функции

$$F(x) = f(x, x^2).$$

1787. Найти значение функции

$$z = \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{1 - x^2 - y^2}$$

в точках окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

1788*. Определить $f(x)$, если

$$f\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{y} \quad (xy > 0).$$

1789*. Найти $f(x, y)$, если

$$f(x + y, x - y) = xy + y^2.$$

1790*. Пусть $z = \sqrt{z} + f(\sqrt{x} - 1)$. Определить функции f и z, если $z = x$ при $y = 1$.

1791.** Пусть $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$. Определить функции f и z, если $z = \sqrt{1 + y^2}$ при $x = 1$.

1792. Найти и изобразить области существования следующих функций:

а) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$;

б) $z = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$;

в) $z = \ln(x + y)$;

г) $z = x + \arccos y$;

д) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$;

е) $z = \arcsin \frac{y}{x}$;

ж) $z = \sqrt{x^2 - 4} + \sqrt{4 - y^2}$;

з) $z = \sqrt{(x^2 + y^2 - a^2)(2a^2 - x^2 - y^2)}$ $(a > 0)$;

и) $z = \sqrt{y \sin x}$;

к) $z = \ln(x^2 + y)$;

л) $z = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + x^2y^2}$;

м) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$;

н) $z = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$;

о) $z = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{y}$;

п) $z = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)}$.

1793. Найти области существования следующих функций трех аргументов:

а) $u = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$;

б) $u = \ln(xyz)$;

в) $u = \arcrsin x + \arcsin y + \arcsin z$;

г) $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$.

1794. Построить линии уровня данных функций и выяснить характер изображаемых этими функциями поверхностей:

а) $z = x + y$;

б) $z = x^2 + y^2$;

в) $z = x^2 - y^2$;

г) $z = \sqrt{xy}$;

д) $z = (1 + x + y)^2$;

е) $z = 1 - |x| - |y|$;

ж) $z = \frac{y}{x^2}$;

з) $z = \frac{y}{\sqrt{x}}$;

и) $z = \frac{2x}{x^2 + y^2}$.

1795. Найти линии уровня следующих функций:

а) $z = \ln(x^2 + y)$;

б) $z = \arcsin xy$;

в) $z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$;

г) $z = f(y - ax)$;

д) $z = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

1796. Найти поверхности уровня функций трех независимых переменных:

а) $u = x + y + z$, б) $u = x^2 + y^2 + z^2$, в) $u = x^2 + y^2 - z^2$.

§ 2. Непрерывность

1°. Предел функции. Число A называется *пределом функции* $z = f(x, y)$ при стремлении точки $P'(x, y)$ к точке $P(a, b)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 < \rho < \delta$, где $\rho = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ — расстояние между точками P и P', имеет место неравенство

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = A.$$

2°. Непрерывность и точки разрыва. Функция $z = f(x, y)$ называется *непрерывной в точке* $P(a, b)$, если

$$\lim_{\substack{x \to a \\ y \to b}} f(x, y) = f(a, b).$$

Функция, непрерывная во всех точках некоторой области, называется *непрерывной в этой области*.

Нарушение условий непрерывности для функции $f(x, y)$ может происходить как в отдельных точках (*изолированная точка разрыва*), так и в точках, образующих одну или несколько линий (*линии разрыва*), а иногда и более сложные геометрические образы.

Пример 1. Найти точки разрыва функции

$$z = \frac{xy+1}{x^2-y}.$$

Решение. Функция потеряет смысл, если знаменатель обратится в нуль. Но $x^2 - y = 0$ или $y = x^2$ — уравнение параболы. Следовательно, данная функция имеет линией разрыва параболу $y = x^2$.

1797*. Найти следующие пределы функций:

а) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (x^2 + y^2)\sin\frac{1}{xy}$; г) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to k}} \left(1+\frac{y}{x}\right)^x$;

б) $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y \to \infty}} \frac{x+y}{x^2+y^2}$; д) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x}{x+y}$;

в) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \frac{\sin xy}{x}$; е) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

1798. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{при } x^2+y^2 \leqslant 1, \\ 0 & \text{при } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

1799. Найти точки разрыва следующих функций:

а) $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$; в) $z = \frac{1}{1-x^2-y^2}$;

б) $z = \frac{1}{(x-y)^2}$; г) $z = \cos\frac{1}{xy}$.

1800*. Показать, что функция

$$z = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & \text{при } x^2+y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = y = 0 \end{cases}$$

непрерывна по каждой из переменных x и y в отдельности, но не является непрерывной в точке $(0, 0)$ по совокупности этих переменных.

§ 3. Частные производные

1°. Определение частных производных. Если $z = f(x, y)$, то, полагая, например, y постоянной, получаем производную

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} = f'_x(x, y),$$

которая называется *частной производной* функции z по переменной x. Аналогично определяется и обозначается частная производная функции z по переменной y. Очевидно, что для нахождения частных производных можно пользоваться обычными формулами дифференцирования.

Пример 1. Найти частные производные функции

$$z = \ln \operatorname{tg}\frac{x}{y}.$$

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}} \frac{1}{y} = \frac{2}{y\sin\frac{2x}{y}}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную, будем иметь

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{2x}{y^2\sin\frac{2x}{y}}.$$

Пример 2. Найти частные производные функции трех аргументов

$$u = x^3y^2z + 2x - 3y + z + 5.$$

Решение.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2y^2z + 2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3yz - 3,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = x^3y^2 + 1.$$

2°. Теорема Эйлера. Функция $f(x, y)$ называется *однородной* функцией измерения n, если для любого действительного множителя k имеет место равенство

$$f(kx, ky) \equiv k^n f(x, y).$$

Целая рациональная функция будет однородной, если все члены ее одного и того же измерения.

Для однородной дифференцируемой функции измерения n справедливо соотношение (*теорема Эйлера*)

$$xf'_x(x, y) + yf'_y(x, y) = nf(x, y).$$

Найти частные производные функций:

1801. $z = x^3 + y^3 - 3axy.$

1802. $z = \frac{x-y}{x+y}.$

1803. $z = \frac{y}{x}.$

1804. $z = \sqrt{x^2 - y^2}.$

1805. $z = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

1806. $z = \ln\ (x + \sqrt{x^2+y^2}).$

1807. $z = \operatorname{acrtg} \frac{y}{x}.$

1808. $z = x^y.$

1809. $z = e^{\sin\frac{y}{x}}.$

1810. $z = \arcsin \sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}.$

1811. $z = \ln\sin \frac{x+a}{\sqrt{y}}.$

1812. $u = (xy)^z.$

1813. $u = z^{xy}.$

1814. Найти $f'_x(2; 1)$ и $f'_y(2; 1)$, если $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}.$

1815. Найти $f'_x(1; 2; 0)$, $f'_y(1; 2; 0)$, $f'_z(1; 2; 0)$, если

$$f(x, y, z) = \ln(xy + z).$$

Проверить теорему Эйлера об однородных функциях (№№ 1816—1819):

1816. $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2.$

1817. $z = \frac{x}{x^2+y^2}.$

1818. $f(x, y) = \frac{x+y}{\sqrt[3]{x^2+y^2}}.$

1819. $f(x, y) = \ln \frac{y}{x}.$

1820. Найти $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}.$

1821. Вычислить $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix}$, если $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$.

1822. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2$, если

$$z = \ln(x^2 + xy + y^2).$$

1823. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$, если

$$z = xy + xe^{\frac{y}{x}}.$$

1824. Показать, что $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, если

$$u = (x - y)(y - z)(z - x).$$

1825. Показать, что $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 1$, если

$$u = x + \frac{x-y}{y-z}.$$

1826. Найти $z = z(x, y)$, если

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

1827. Найти $z = z(x, y)$, зная, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2+y^2}{x} \text{ и } z(x, y) = \sin y \text{ при } x = 1.$$

1828. Через точку $M(1; 2; 6)$ поверхности $z = 2x^2 + y^2$ проведены плоскости, параллельные координатным плоскостям XOZ и YOZ. Определить, какие углы образуют с осями координат касательные к получившимся сечениям, проведенные в их общей точке M.

1829. Площадь трапеции с основаниями a, b и высотой h равна $S = \frac{1}{2}(a + b)h$. Найти $\frac{\partial S}{\partial a}$, $\frac{\partial S}{\partial b}$, $\frac{\partial S}{\partial h}$ и, пользуясь чертежом, выяснить их геометрический смысл.

1830*. Показать, что функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{если } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = y = 0, \end{cases}$$

имеет частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ в точке $(0; 0)$, хотя и разрывна в этой точке. Построить геометрический образ этой функции вблизи точки $(0; 0)$.

§ 4. Полный дифференциал функции

1°. Полное приращение функции. *Полным приращением* функции $z = f(x, y)$ называется разность

$$\Delta z = \Delta f(x, y) = f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) - f(x, y).$$

2°. Полный дифференциал функции. *Полным дифференциалом* функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy.

Разность между полным приращением и полным дифференциалом функции есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Функция заведомо имеет полный дифференциал в случае непрерывности ее частных производных. Если функция имеет полный дифференциал, то она называется *дифференцируемой*. Дифференциалы независимых переменных, по определению, совпадают с их приращениями, т. е. $\mathrm{d}x = \Delta x$ и $\mathrm{d}y = \Delta y$. Полный дифференциал функции $z = f(x, y)$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y.$$

Аналогично, полный дифференциал функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$ вычисляется по формуле

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z.$$

Пример 1. Для функции

$$f(x, y) = x^2 + xy - y^2$$

найти полное приращение и полный дифференциал.

Решение. $f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = (x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2;$

$$\Delta f(x, y) = [(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)(y + \Delta y) - (y + \Delta y)^2] - (x^2 + xy - y^2) =$$
$$= 2x\cdot\Delta x + \Delta x^2 + x\cdot\Delta y + y\cdot\Delta x + \Delta x\cdot\Delta y - 2y\cdot\Delta y - \Delta y^2 =$$
$$= [(2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y] + (\Delta x^2 + \Delta x\cdot\Delta y - \Delta y^2).$$

Здесь выражение $\mathrm{d}f = (2x + y)\Delta x + (x - 2y)\Delta y$ есть полный дифференциал функции, а $(\Delta x^2 + \Delta x\cdot\Delta y - \Delta y^2)$ есть бесконечно малая высшего порядка по сравнению с бесконечно малой $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

Пример 2. Найти полный дифференциал функции

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;

$$\mathrm{d}z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}y = \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

3°. Применение полного дифференциала функции к приближенным вычислениям. При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$, а значит, при достаточно малом $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ для дифференцируемой функции $z = f(x, y)$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx \mathrm{d}z$ или

$$\Delta z \approx \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

Пример 3. Высота конуса $H = 30$ см, радиус основания $R = 10$ см. Как изменится объем конуса, если увеличить H на 3 мм и уменьшить R на 1 мм?

Решение. Объем конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$. Изменение объема заменим приближенно дифференциалом

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V = \frac{1}{3}\pi(2RH\,\mathrm{d}R + R^2\,\mathrm{d}H) =$$
$$= \frac{1}{3}\pi(-2\cdot 10\cdot 30\cdot 0{,}1 + 100\cdot 0{,}3) = -10\pi \approx -31{,}4\ (\text{см}^3).$$

Пример 4. Вычислить приближенно $1{,}02^{3,01}$.

Решение. Рассмотрим функцию $z = x^y$. Искомое число можно считать наращенным значением этой функции при $x = 1$, $y = 3$, $\Delta x = 0{,}02$, $\Delta y = 0{,}01$. Первоначальное значение функции $z = 1^3 = 1$,

$$\Delta z \approx \mathrm{d}z = yx^{y-1}\Delta x + x^y\ln x\,\Delta y = 3\cdot 1\cdot 0{,}02 + 1\cdot\ln 1\cdot 0{,}01 = 0{,}06.$$

Следовательно, $1{,}02^{3,01} \approx 1 + 0{,}06 = 1{,}06$.

1831. Для функции $f(x, y) = x^2y$ найти полное приращение и полный дифференциал в точке (1; 2); сравнить их, если:

а) $\Delta x = 1$, $\Delta y = 2$; б) $\Delta x = 0{,}1$, $\Delta y = 0{,}2$.

1832. Показать, что для функций u и v нескольких (например, двух) переменных справедливы обычные правила дифференцирования:

а) $\mathrm{d}(u + v) = \mathrm{d}u + \mathrm{d}v$;

б) $\mathrm{d}(uv) = v\mathrm{d}u + u\mathrm{d}v$;

в) $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\mathrm{d}u - u\mathrm{d}v}{v^2}$.

Найти полные дифференциалы следующих функций:

1833. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

1834. $z = x^2y^3$.

1835. $z = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

1836. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$.

1837. $z = yx^y$.

1838. $z = \ln(x^2 + y^2)$.

1839. $f(x, y) = \ln\left(1 + \dfrac{x}{y}\right)$.

1840. $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

1841. $z = \ln \operatorname{tg} \dfrac{y}{x}$.

1842. Найти $df(1; 1)$, если $f(x, y) = \dfrac{x}{y^2}$.

1843. $u = xyz$.

1844. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1845. $u = \left(xy + \dfrac{x}{y}\right)^z$.

1846. $u = \operatorname{arctg} \dfrac{xy}{z^2}$.

1847. Найти $df(3; 4; 5)$, если $f(x, y, z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

1848. Одна сторона прямоугольника $a = 10$ см, а другая $b = 24$ см. Как изменится диагональ l прямоугольника, если сторону a удлинить на 4 мм, а сторону b укоротить на 1 мм? Найти приближенную величину изменения и сравнить с точной.

1849. Закрытый ящик, имеющий наружные размеры 10 см, 8 см и 6 см, сделан из фанеры толщиной 2 мм. Определить приближенно объем затраченного на ящик материала.

1850*. Центральный угол кругового сектора, равный 80°, желают уменьшить на 1°. На сколько надо удлинить радиус сектора, чтобы площадь его осталась без изменения, если первоначальная длина радиуса равна 20 см?

1851. Вычислить приближенно:

а) $(1{,}02)^3 \cdot (0{,}97)^2$; б) $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$; в) $\sin 32° \cdot \cos 59°$

(при переводе градусов в радианы и при вычислении $\sin 60°$ брать три значащие цифры; последний знак округлить).

1852. Показать, что относительная ошибка произведения приближенно равна сумме относительных ошибок сомножителей.

1853. При измерении на местности треугольника ABC получены следующие данные: сторона $a = 100$ м $\pm$ 2 м, сторона $b = 200$ м $\pm$ $\pm$ 3 м, угол $C = 60° \pm 1°$. С какой степенью точности может быть вычислена сторона c?

1854. Период T колебания маятника вычисляется по формуле

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где l — длина маятника, g — ускорение свободного падения. Найти погрешность в определении T, получаемую в результате небольших ошибок $\Delta l = \alpha$ и $\Delta g = \beta$ при измерении l и g.

1855. Расстояние между точками $P_0(x_0, y_0)$ и $P(x, y)$ равно ρ, а угол, образованный вектором $\overrightarrow{P_0P}$ с осью OX, равен α. На сколько изменится угол α, если точка P, при неизменной точке P_0, займет положение $P_1(x + dx, y + dy)$?

§ 5. Дифференцирование сложных функций

1°. Случай одной независимой переменной. Если $z = f(x, y)$ есть дифференцируемая функция аргументов x и y, которые в свою очередь являются дифференцируемыми функциями независимой переменной t:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

то производная сложной функции $z = f[\varphi(t), \psi(t)]$ может быть вычислена по формуле

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (1)$$

В частности, если t совпадает с одним из аргументов, например x, то «полная» производная функции z по x будет

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \qquad (2)$$

Пример 1. Найти $\dfrac{dz}{dt}$, если

$$z = e^{3x + 2y}, \text{ где } x = \cos t,\ y = t^2.$$

Решение. По формуле (1) имеем

$$\frac{dz}{dt} = e^{3x+2y} \cdot 3(-\sin t) + e^{3x+2y} \cdot 2 \cdot 2t = e^{3x+2y}(4t - 3\sin t) =$$

$$= e^{3\cos t + 2t^2}(4t - 3\sin t).$$

Пример 2. Найти частную производную $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и полную производную $\dfrac{dz}{dx}$, если

$$z = e^{xy}, \text{ где } y = \varphi(x).$$

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$. На основании формулы (2) получаем

$$\frac{dz}{dx} = ye^{xy} + xe^{xy}\varphi'(x).$$

2°. Случай нескольких независимых переменных. Если z есть сложная функция нескольких независимых переменных, например $z = f(x, y)$, где $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ (u и v — независимые переменные; f, φ, ψ — дифференцируемые функции), то частные производные z по u и v выражаются так:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} \qquad (3)$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (4)$$

Во всех рассмотренных случаях справедлива формула

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

(*свойство инвариантности полного дифференциала*).

Пример 3. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если

$$z = f(x, y), \text{ где } x = uv,\ y = \frac{u}{v}.$$

Решение. Применяя формулы (3) и (4), получим

$$\frac{\partial z}{\partial u} = f'_x(x, y)v + f'_y(x, y)\frac{1}{v}$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial v} = f'_x(x, y)u - f'_y(x, y)\frac{u}{v^2}.$$

Пример 4. Показать, что функция $z = \varphi(x^2 + y^2)$ удовлетворяет уравнению $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

Решение. Функция φ зависит от x и y через промежуточный аргумент $x^2 + y^2 = t$, поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial x} = \varphi'(x^2 + y^2)2x$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial t}{\partial y} = \varphi'(x^2 + y^2)2y.$$

Подставив частные производные в левую часть уравнения, будем иметь

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y\varphi'(x^2 + y^2)2x - x\varphi'(x^2 + y^2)2y =$$
$$= 2xy\varphi'(x^2 + y^2) - 2xy\varphi'(x^2 + y^2) \equiv 0,$$

т. е. функция z удовлетворяет данному уравнению.

1856. Найти $\frac{dz}{dt}$, если

$$z = \frac{x}{y}, \text{ где } x = e^t,\ y = \ln t.$$

1857. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$$u = \ln\sin\frac{x}{\sqrt{y}}, \text{ где } x = 3t^2,\ y = \sqrt{t^2+1}.$$

1858. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$$u = xyz, \text{ где } x = t^2 + 1,\ y = \ln t,\ z = \operatorname{tg} t.$$

1859. Найти $\frac{du}{dt}$, если

$$u = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \text{ где } x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = H.$$

1860. Найти $\frac{dz}{dx}$, если

$$z = u^v, \text{ где } u = \sin x,\ v = \cos x.$$

1861. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если

$$z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \text{ и } y = x^2.$$

1862. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{dz}{dx}$, если

$$z = x^y, \text{ где } y = \varphi(x).$$

1863. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$z = f(u, v), \text{ где } u = x^2 - y^2,\ v = e^{xy}.$$

1864. Найти $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$, если

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}, \quad \text{где } x = u\sin v, \quad y = u\cos v.$$

1865. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$z = f(u), \text{ где } u = xy + \frac{y}{x}.$$

1866. Показать, что если

$$u = \Phi(x^2 + y^2 + z^2),$$

где $x = R\cos\varphi\cos\psi$, $y = R\cos\varphi\sin\psi$, $z = R\sin\varphi$, то

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0 \text{ и } \frac{\partial u}{\partial \psi} = 0.$$

1867. Найти $\frac{du}{dx}$, если

$$u = f(x, y, z), \quad \text{где } y = \varphi(x), \quad z = \psi(x, y).$$

1868. Показать, что если

$$z = f(x + ay),$$

где f — дифференцируемая функция, то

$$\frac{\partial z}{\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x}.$$

1869. Показать, что функция

$$\omega = f(u, v),$$

где $u = x + at$, $v = y + bt$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y}.$$

1870. Показать, что функция

$$z = y\varphi(x^2 - y^2)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}.$$

1871. Показать, что функция

$$z = xy + x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z.$$

1872. Показать, что функция

$$z = e^y\varphi\left(ye^{\frac{x^2}{2y^2}}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$(x^2 - y^2)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xyz.$$

1873. Сторона прямоугольника $x = 20$ м возрастает со скоростью 5 м/с, другая сторона $y = 30$ м убывает со скоростью 4 м/с. С какой скоростью изменяются периметр и площадь прямоугольника?

1874. Уравнения движения материальной точки

$$x = t,\ y = t^2,\ z = t^3.$$

С какой скоростью возрастает расстояние этой точки от начала координат?

1875. Два теплохода, вышедшие одновременно из пункта A, движутся один на север, другой на северо-восток. Скорости движения теплоходов: 20 км/ч и 40 км/ч. С какой скоростью возрастает расстояние между ними?

§ 6. Производная в данном направлении и градиент функции

1°. Производная функции в данном направлении. *Производной* функции $z = f(x, y)$ *в данном направлении* $\mathbf{l} = \overrightarrow{PP_1}$ называется

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \lim_{P_1P \to 0} \frac{f(P_1) - f(P)}{P_1P},$$

где $f(P)$ и $f(P_1)$ — значения функции в точках P и P_1. Если функция z дифференцируема, то справедлива формула

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\alpha, \qquad (1)$$

где α — угол, образованный вектором $\mathbf{l}$ с осью OX (рис. 67).

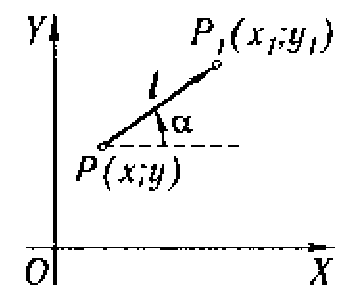


Рис. 67.

Аналогично определяется производная в данном направлении l для функции трех аргументов $u = f(x, y, z)$. В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma, \qquad (2)$$

где α, β, γ — углы между направлением l и соответствующими координатными осями. Производная в данном направлении характеризует скорость изменения функции в этом направлении.

Пример 1. Найти производную функции $z = 2x^2 - 3y^2$ в точке $P(1; 0)$ в направлении, составляющем с осью OX угол 120°.

Решение. Найдем частные производные данной функции и их значения в точке P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -6y; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 0.$$

Здесь

$$\cos\alpha = \cos 120° = -\frac{1}{2},$$

$$\sin\alpha = \sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Применяя формулу (1), получим

$$\frac{\partial z}{\partial l} = 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 0\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -2.$$

Знак минус показывает, что функция в данной точке и в данном направлении убывает.

2°. Градиент функции. *Градиентом* функции $z = f(x, y)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$\operatorname{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\mathbf{j}. \tag{3}$$

Производная данной функции в направлении l связана с градиентом функции следующей формулой:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \text{пр}_l \operatorname{grad} z,$$

т. е. производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке, т. е. при $l = \operatorname{grad} z$ производная $\dfrac{\partial z}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, равное

$$\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Аналогично определяется градиент функции трех переменных $u = f(x, y, z)$:

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}. \tag{4}$$

Градиент функции трех переменных в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Пример 2. Найти и построить градиент функции $z = x^2 y$ в точке $P(1; 1)$.

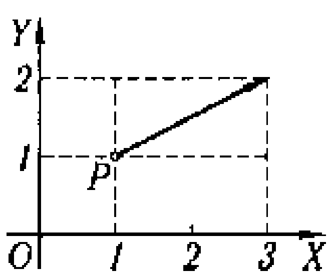


Рис. 68.

Решение. Вычислим частные производные и их значения в точке P:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_P = 2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2; \qquad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_P = 1.$$

Следовательно, $\operatorname{grad} z = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ (рис. 68).

1876. Найти производную функции $z = x^2 - xy - 2y^2$ в точке $P(1; 2)$ в направлении, составляющем с осью OX угол 60°.

1877. Найти производную функции $z = x^3 - 2x^2y + xy^2 + 1$ в точке $M(1; 2)$ в направлении от этой точки к точке $N(4; 6)$.

1878. Найти производную функции $z = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $P(1; 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

1879. Найти производную функции $u = x^2 - 3yz + 5$ в точке $M(1; 2; -1)$ в направлении, составляющем одинаковые углы со всеми координатными осями.

1880. Найти производную функции $u = xy + yz + zx$ в точке $M(2; 1; 3)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $N(5; 5; 15)$.

1881. Найти производную функции $u = \ln(e^x + e^y + e^z)$ в начале координат в направлении, образующем с осями координат OX, OY, OZ углы, соответственно, α, β, γ.

1882. Точка, в которой производная функции в любом направлении равна нулю, называется *стационарной точкой* этой функции. Найти стационарные точки следующих функций:

а) $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$;

б) $z = x^3 + y^3 - 3xy$;

в) $u = 2y^2 + z^2 - xy - yz + 2x$.

1883. Показать, что производная функции $z = \dfrac{y^2}{x}$, взятая в любой точке эллипса $2x^2 + y^2 = C^2$ вдоль нормали к эллипсу, равна нулю.

1884. Найти grad z в точке (2; 1), если

$$z = x^3 + y^3 - 3xy.$$

1885. Найти grad z в точке (5; 3), если

$$z = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

1886. Найти grad u в точке (1; 2; 3), если $u = xyz$.

1887. Найти модуль и направление grad u в точке (2; −2; 1), если

$$u = x^2 + y^2 + z^2.$$

1888. Найти угол между градиентами функции $z = \ln\dfrac{y}{x}$ в точках $A\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$ и $B(1; 1)$.

1889. Найти угол наклона наибольшего подъема поверхности

$$z = x^2 + 4y^2$$

в точке (2; 1; 8).

1890. Построить векторное поле градиента следующих функций:

а) $z = x + y$; в) $z = x^2 + y^2$;

б) $z = xy$; г) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

§ 7. Производные и дифференциалы высших порядков

1°. Частные производные высших порядков. *Частными производными 2-го порядка* функции $z = f(x, y)$ называются частные производные от ее частных производных 1-го порядка.

Для производных 2-го порядка употребляются обозначения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}\ (x, y);$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}\ (x, y) \text{ и т. д.}$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше 2-го.

Если частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то *результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.*

Пример 1. Найти частные производные 2-го порядка от функции

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}.$$

Решение. Найдем сначала частные производные 1-го порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\cdot\frac{1}{y} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\frac{x^2}{y^2}}\left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

Теперь дифференцируем вторично:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot(x^2+y^2)-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Заметим, что так называемую «смешанную» частную производную можно найти и иначе, а именно:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = \frac{1\cdot(x^2+y^2)-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

2°. Дифференциалы высших порядков. *Дифференциалом 2-го порядка* функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала (1-го порядка) этой функции

$$d^2z = d(dz).$$

Аналогично определяются дифференциалы функции z порядка выше 2-го, например

$$d^3z = d(d^2z)$$

и, вообще,

$$d^nz = d(d^{n-1}z).$$

Если $z = f(x, y)$, где x и y — независимые переменные и функция f имеет непрерывные частные производные 2-го порядка, то дифференциал 2-го порядка функции z вычисляется по формуле

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2. \qquad (1)$$

Вообще, при наличии соответствующих производных справедлива символическая формула

$$d^nz = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z,$$

которая формально развертывается по биномиальному закону.

Если $z = f(x, y)$, где аргументы x и y суть функции одного или нескольких независимых переменных, то

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y. \qquad (2)$$

Если x и y — независимые переменные, то $d^2x = 0$, $d^2y = 0$ и формула (2) становится тождественной формуле (1).

Пример 2. Найти полные дифференциалы 1-го и 2-го порядков функции

$$z = 2x^2 - 3xy - y^2.$$

Решение. 1-й способ. Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x - 3y,\ \frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 2y.$$

Поэтому

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = (4x - 3y)\,dx - (3x + 2y)\,dy.$$

Далее,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$$

откуда следует

$$d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 = 4dx^2 - 6dx\,dy - 2dy^2.$$

2-й способ. Дифференцированием находим

$$dz = 4x\,dx - 3(y\,dx + x dy) - 2y dy = (4x - 3y)\,dx - (3x + 2y)dy.$$

Дифференцируя еще раз и помня, что dx и dy не зависят от x и y, получим

$$d^2z = (4dx - 3dy)\,dx - (3dx + 2dy)\,dy = 4dx^2 - 6dx\,dy - 2dy^2.$$

1891. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$$z = c\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}.$$

1892. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$$z = \ln(x^2 + y).$$

1893. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если

$$z = \sqrt{2xy + y^2}.$$

1894. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, если

$$z = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}.$$

1895. Найти $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}$, если

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

1896. Найти все частные производные 2-го порядка функции

$$u = xy + yz + zx.$$

1897. Найти $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z}$, если

$$u = x^\alpha y^\beta z^\gamma.$$

1898. Найти $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$, если

$$z = \sin(xy).$$

1899. Найти $f''_{xx}(0, 0)$, $f''_{xy}(0, 0)$, $f''_{yy}(0, 0)$, если

$$f(x, y) = (1 + x)^m(1 + y)^n.$$

1900. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если

$$z = \arcsin\sqrt{\frac{x-y}{x}}.$$

1901. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если

$$z = x^y.$$

1902*. Показать, что для функции

$$f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

с добавочным условием $f(0, 0) = 0$ имеем

$$f''_{xy}(0, 0) = -1,\ f''_{yx}(0, 0) = +1.$$

1903. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$$z = f(u, v),$$

где $u = x^2 + y^2$, $v = xy$.

1904. Найти $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, если

$$u = f(x, y, z), \text{ где } z = \varphi(x, y).$$

1905. Найти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если

$$z = f(u, v), \text{ где } u = \varphi(x, y),\ v = \psi(x, y).$$

1906. Показать, что функция

$$u = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1907. Показать, что функция

$$u = \ln\frac{1}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1908. Показать, что функция

$$u(x,\ t) = A\sin(a\lambda t + \varphi)\sin\lambda x$$

удовлетворяет уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1909. Показать, что функция

$$u(x,\ y,\ z,\ t) = \frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\,e^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}{4a^2t}}$$

(x_0, y_0, z_0, a — постоянные) удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

1910. Показать, что функция

$$u = \varphi(x - at) + \psi(x + at),$$

где φ и ψ — произвольные дважды дифференцируемые функции, удовлетворяет уравнению колебаний струны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

1911. Показать, что функция

$$z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

1912. Показать, что функция

$$u = \varphi(xy) + \sqrt{xy}\,\psi\left(\frac{y}{x}\right)$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

1913. Показать, что функция $z = f[x + \varphi(y)]$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

1914. Найти $u = u(x,\ y)$, если

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = 0.$$

1915. Определить вид функции $u = u(x,\ y)$, удовлетворяющей уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

1916. Найти d^2z, если

$$z = e^{xy}.$$

1917. Найти d^2u, если

$$u = xyz.$$

1918. Найти d^2z, если

$$z = \varphi(t),\ \text{где}\ t = x^2 + y^2.$$

1919. Найти dz и d^2z, если

$$z = u^v,\ \text{где}\ u = \frac{x}{y},\ \ v = xy.$$

1920. Найти d^2z, если

$$z = f(u,\ v),\ \text{где}\ u = ax,\ \ v = by.$$

1921. Найти d^2z, если

$$z = f(u,\ v),\ \text{где}\ u = xe^y,\ \ v = ye^x.$$

1922. Найти d^3z, если

$$z = e^x\cos y.$$

1923. Найти дифференциал 3-го порядка функции

$$z = x\cos y + y\sin x,$$

определить все частные производные 3-го порядка.

1924. Найти $df(1,\ 2)$ и $d^2f(1,\ 2)$, если

$$f(x,\ y) = x^2 + xy + y^2 - 4\ln x - 10\ln y.$$

1925. Найти $d^2f(0,\ 0,\ 0)$, если

$$f(x,\ y,\ z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 4xz + 2yz.$$

§ 8. Интегрирование полных дифференциалов

1°. Условие полного дифференциала. Для того чтобы выражение $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$, где функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны в односвязной области D вместе со своими частными производными 1-го порядка, представляло собой в области D полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Пример 1. Убедиться в том, что выражение

$$(2x + y)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y$$

есть полный дифференциал некоторой функции, и найти эту функцию.

Решение. В данном случае $P = 2x + y$, $Q = x + 2y$. Поэтому $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y} = 1$ и, следовательно,

$$(2x + y)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y,$$

где u — искомая функция.

По условию, $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x + y$, следовательно,

$$u = \int (2x + y)\,\mathrm{d}x = x^2 + xy + \varphi(t).$$

Но, с другой стороны, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = x + \varphi'(y) = x + 2y$, откуда $\varphi'(y) = 2y$, $\varphi(y) = y^2 + C$ и

$$u = x^2 + xy + y^2 + C.$$

Окончательно

$$(2x + y)\,\mathrm{d}x + (x + 2y)\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(x^2 + xy + y^2 + C).$$

2°. Случай трех переменных. Аналогично, выражение

$$P(x, y, z)\,\mathrm{d}x + Q(x, y, z)\,\mathrm{d}y + R(x, y, z)\,\mathrm{d}z,$$

где $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ — непрерывные, вместе со своими частными производными 1-го порядка, функции переменных x, y и z, тогда и только тогда представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u(x, y, z)$ в пространственно односвязной области D, когда в D выполнены условия

$$\frac{\partial Q}{\partial x} \equiv \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} \equiv \frac{\partial R}{\partial x}.$$

Пример 2. Убедиться в том, что выражение

$$(3x^2 + 3y - 1)\,\mathrm{d}x + (z^2 + 3z)\,\mathrm{d}y + (2yz + 1)\,\mathrm{d}z$$

есть полный дифференциал некоторой функции, и найти эту функцию.

Решение. Здесь $P = 3x^2 + 3y - 1$, $Q = z^2 + 3x$, $R = 2yz + 1$. Устанавливаем, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 3, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z} = 2z, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x} = 0$$

и, следовательно,

$$(3x^2 + 3y - 1)\,\mathrm{d}x + (z^2 + 3x)\,\mathrm{d}y + (2yz + 1)\,\mathrm{d}z = \frac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\,\mathrm{d}z,$$

где u — искомая функция.

Имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 3y - 1,$$

значит,

$$u = \int (3x^2 + 3y - 1)\,\mathrm{d}x = x^3 + 3xy - x + \varphi(y, z).$$

С другой стороны,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} = z^2 + 3x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + 1,$$

откуда $\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = z^2$ и $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + 1$. Задача сводится к отысканию функции двух переменных $\varphi(y, z)$, частные производные которой известны и выполнено условие полного дифференциала.

Находим φ:

$$\varphi(y, z) = \int z^2\,\mathrm{d}y = yz^2 + \psi(z),$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 2yz + \psi'(z) = 2yz + 1,$$

$$\psi'(z) = 1, \quad \psi(z) = z + C,$$

т. е. $\varphi(y, z) = yz^2 + z + C$. Окончательно получим

$$u = x^3 + 3xy - x + yz^2 + z + C.$$

Убедившись, что данные ниже выражения являются полными дифференциалами некоторых функций, найти эти функции.

1926. $y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$.

1927. $(\cos x + 3x^2 y)\,\mathrm{d}x + (x^3 - y^2)\,\mathrm{d}y$.

1928. $\dfrac{(x + 2y)\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{(x + y)^2}$.

1929. $\dfrac{x + 2y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x - \dfrac{2x - y}{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}y$.

1930. $\dfrac{1}{y}\,\mathrm{d}x - \dfrac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y$.

1931. $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\mathrm{d}y$.

1932. Определить постоянные a и b так, чтобы выражение

$$\frac{(ax^2+2xy+y^2)\mathrm{d}x-(x^2+2xy+by^2)\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2}$$

было полным дифференциалом некоторой функции z, и найти последнюю.

Убедившись, что данные ниже выражения являются полными дифференциалами некоторых функций, найти эти функции.

1933. $(2x + y + z)\,\mathrm{d}x + (x + 2y + z)\,\mathrm{d}y + (x + y + 2z)\,\mathrm{d}z$.

1934. $(3x^2 + 2y^2 + 3z)\,\mathrm{d}x + (4xy + 2y - z)\,\mathrm{d}y + (3x - y - 2)\,\mathrm{d}z$.

1935. $(2xyz - 3y^2z + 8xy^2 + 2)\,\mathrm{d}x + (x^2z - 6xyz + 8x^2y + 1)\,\mathrm{d}y + (x^2y - 3xy^2 + 3)\,\mathrm{d}z$.

1936. $\left(\frac{1}{y}-\frac{z}{x^2}\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{1}{z}-\frac{x}{y^2}\right)\mathrm{d}y + \left(\frac{1}{x}-\frac{x}{z^2}\right)\mathrm{d}z$.

1937. $\dfrac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

1938*. Даны проекции силы на оси координат:

$$X=\frac{y}{(x+y)^2};\quad Y=\frac{\lambda x}{(x+y)^2},$$

где λ — постоянная величина. Каков должен быть коэффициент λ, чтобы сила имела потенциал?

1939. Какому условию должна удовлетворять функция $f(x, y)$, чтобы выражение

$$f(x, y)\,(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y)$$

было полным дифференциалом?

1940. Найти функцию u, если

$$\mathrm{d}u = f(xy)(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y).$$

§ 9. Дифференцирование неявных функций

1°. Случай одной независимой переменной. Если уравнение $f(x, y) = 0$, где $f(x, y)$ — дифференцируемая функция переменных x и y, определяет y как функцию от x, то производная этой неявно заданной функции при условии, что $f'_y(x, y) \neq 0$, может быть найдена по формуле

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{f'_x(x,y)}{f'_y(x,y)}. \qquad (1)$$

Производные высших порядков находятся последовательным дифференцированием формулы (1).

Пример 1. Найти $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ и $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, если

$$(x^2 + y^2)^3 - 3(x^2 + y^2) + 1 = 0.$$

Решение. Обозначая левую часть данного уравнения через $f(x, y)$, найдем частные производные

$$f'_x(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2\cdot 2x - 3\cdot 2x = 6x[(x^2 + y^2)^2 - 1],$$

$$f'_y(x, y) = 3(x^2 + y^2)^2\cdot 2y - 3\cdot 2y = 6y[(x^2 + y^2)^2 - 1].$$

Отсюда, применяя формулу (1), получим

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{f_x'(x,y)}{f'_y(x,y)}=\frac{6x[(x^2+y^2)^2-1]}{6y[(x^2+y^2)^2-1]}=-\frac{x}{y}.$$

Чтобы найти вторую производную, продифференцируем по x найденную первую производную, учитывая при этом, что y есть функция x:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(-\frac{x}{y}\right)=-\frac{1\cdot y-x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}{y^2}=\frac{y-x\left(\frac{x}{y}\right)}{y^2}=\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

2°. Случай нескольких независимых переменных. Аналогично, если уравнение $F(x, y, z) = 0$, где $F(x, y, z)$ — дифференцируемая функция переменных x, y и z, определяет z как функцию независимых переменных x и y и $F'_z(x, y, z) \neq 0$, то частные производные этой неявно заданной функции могут быть найдены по формулам

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \qquad (2)$$

Другой способ нахождения производных функции z следующий: дифференцируя уравнение $F(x, y, z) = 0$, получим

$$\frac{\partial F}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F}{\partial z}\mathrm{d}z=0.$$

Отсюда можно определить $\mathrm{d}z$, а следовательно, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Пример 2. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x^2 - 2y^2 + 3z^2 - yz + y = 0.$$

Решение. 1-й способ. Обозначая левую часть данного уравнения через $F(x, y, z)$, найдем частные производные:

$$F'_x(x, y, z) = 2x,\ F'_y(x, y, z) = -4y - z + 1,\ F'_z(x, y, z) = 6z - y.$$

Применив формулы (2), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{2x}{6z-y};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}=-\frac{1-4y-z}{6z-y}.$$

2-й способ. Дифференцируя данное уравнение, получаем

$$2x\,dx - 4y\,dy + 6z\,dz - y\,dz - z\,dy + dy = 0.$$

Отсюда определяем dz, т. е. полный дифференциал неявной функции:

$$dz = \frac{2x\,dx + (1 - 4y - z)dy}{y - 6z}.$$

Сравнивая с формулой $dz = \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$, видим, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{y - 6z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - 4y - z}{y - 6z}.$$

3°. Система неявных функций. Если система двух уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0, \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$$

определяет u и v как дифференцируемые функции переменных x и y и якобиан

$$\frac{D(F, G)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то дифференциалы этих функций (а следовательно, и их частные производные) могут быть найдены из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Пример 3. Уравнения

$$u + v = x + y,\ xu + yv = 1$$

определяют u и v как функции от x и y; найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Решение. 1-й способ. Дифференцируя оба уравнения по x, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = 1,$$

$$u + x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u + y}{x - y},\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u + x}{x - y}.$$

Аналогичным образом найдем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v + y}{x - y},\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v + y}{x - y}.$$

2-й способ. Дифференцированием находим два уравнения, связывающие дифференциалы всех четырех переменных:

$$du + dv = dx + dy,$$
$$x du + u dx + y dv + v dy = 0.$$

Решив эту систему относительно дифференциалов du и dv, получим:

$$du = -\frac{(u + y)dx + (v + y)dy}{x - y},\quad dv = \frac{(u + x)dx + (v + x)dy}{x - y}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u + y}{x - y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{v + y}{x - y},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u + x}{x - y},\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v + y}{x - y}.$$

4°. Параметрическое задание функции. Если дифференцируемая функция z от переменных x и y задана параметрически уравнениями

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v)$$

и

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то дифференциал этой функции может быть найден из системы уравнений

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv, \\ dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv, \\ dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv. \end{cases} \qquad (4)$$

Зная дифференциал $dz = p dx + p dy$, находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x} = p$ и $\frac{\partial z}{\partial y} = q$.

Пример 4. Функция z аргументов x и y задана уравнениями

$$x = u + v,\quad y = u^2 + v^2,\quad z = u^3 + v^3\quad (u \neq v).$$

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. 1-й способ. Дифференцированием находим три уравнения, связывающие дифференциалы всех пяти переменных:

$$\begin{cases} dx = du + dv, \\ dy = 2u\,du + 2v\,dv, \\ dz = 3u^2\,du + 3v^2\,dv. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений определим du и dv:

$$\mathrm{d}u = \frac{2v\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{2(v-u)}, \quad \mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}y - 2u\,\mathrm{d}x}{2(v-u)}.$$

Подставим в третье уравнение найденные выражения du и dv:

$$\mathrm{d}z = 3u^2\frac{2v\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y}{2(v-u)} + 3v^2\frac{\mathrm{d}y - 2u\,\mathrm{d}x}{2(v-u)} = \frac{6uv(u-v)\mathrm{d}x + 3(v^2-u^2)\mathrm{d}y}{2(v-u)} =$$

$$= -3uv\,\mathrm{d}x + \frac{3}{2}(u+v)\,\mathrm{d}y.$$

Отсюда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -3uv, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2}(u+v).$$

2-й способ. Из третьего заданного уравнения можно найти:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2\frac{\partial u}{\partial x} + 3v^2\frac{\partial v}{\partial x}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2\frac{\partial u}{\partial y} + 3v^2\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{5}$$

Продифференцируем первые два уравнения сначала по x, затем по y:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial x}, \\ 0 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial x} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ 0 = 2u\dfrac{\partial u}{\partial y} + 2v\dfrac{\partial v}{\partial y}, \end{cases}$$

Из первой системы найдем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{v-u}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{u}{u-v}.$$

Из второй системы найдем

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2(u-v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2(v-u)}.$$

Подставляя выражения $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ в формулу (5), получим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3u^2\frac{v}{v-u} + 3v^2\frac{u}{u-v} = -3uv,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3u^2\frac{1}{2(u-v)} + 3v^2\cdot\frac{1}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v).$$

1941. Пусть y есть функция x, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Найти $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ и $\frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}$.

1942. Пусть y есть функция, определяемая уравнением

$$x^2 + y^2 + 2axy = 0 \quad (a > 1).$$

Показать, что $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = 0$, и объяснить полученный результат.

1943. Найти $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, если $y = 1 + y^x$.

1944. Найти $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ и $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, если $y = x + \ln y$.

1945. Найти $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}_{x=1}$ и $\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=1}$, если

$$x^2 - 2xy + y^2 + x + y - 2 = 0.$$

Пользуясь полученными результатами, приближенно изобразить график данной кривой в окрестности точки $x = 1$.

1946. Функция y определяется уравнением

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = a\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x} \quad (a \neq 0).$$

Найти $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ и $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

1947. Найти $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ и $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$, если

$$1 + xy - \ln(\mathrm{e}^{xy} + \mathrm{e}^{-xy}) = 0.$$

1948. Функция z переменных x и y задана уравнением

$$x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y + 3 = 0.$$

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1949. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x\cos y + y\cos z + z\cos x = 1.$$

1950. Функция z задана уравнением

$$x^2 + y^2 - z^2 - xy = 0.$$

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ для системы значений $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$.

1951. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, если $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

1952. $f(x, y, z) = 0$. Показать, что $\frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -1$.

1953. $z = \varphi(x, y)$, где y есть функция x, определяемая уравнением $\psi(x, y) = 0$. Найти $\frac{dz}{dx}$.

1954. Найти dz и d^2z, если

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

1955. Пусть z есть функция переменных x и y, определяемая уравнением

$$2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0.$$

Найти dz и d^2z для системы значений $x = 2$, $y = 0$, $z = 1$.

1956. Найти dz и d^2z, если $\ln z = x + y + z - 1$. Чему равны производные 1-го и 2-го порядков функции z?

1957. Пусть функция z определяется уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz),$$

где φ — произвольная дифференцируемая функция, a, b, c — постоянные. Показать, что

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay.$$

1958. Показать, что функция z, определяемая уравнением

$$F(x - az, y - bz) = 0,$$

где F — произвольная дифференцируемая функция своих аргументов, удовлетворяет уравнению

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = 1.$$

1959. $F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) = 0$. Показать, что $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

1960. Показать, что функция z, определяемая уравнением $y = x\varphi(z) + \psi(z)$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 = 0.$$

1961. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \; x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4.$$

Найти $\frac{dy}{dx}$, $\frac{dz}{dx^2}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$ при $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$.

1962. Функции y и z независимой переменной x заданы системой уравнений

$$xyz = a, \; x + y + z = b.$$

Найти dy, dz, d^2y, d^2z.

1963. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$u = x + y, \; uv = y.$$

Вычислить $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ при $x = 0$, $y = 1$.

1964. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$u + v = x, \; u - yv = 0.$$

Найти du, dv, d^2u, d^2v.

1965. Функции u и v переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$x = \varphi(u, v), \; y = \psi(u, v).$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

1966. Найти:

а) $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = cv$;

б) $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если $x = u + v$, $y = u - v$, $z = uv$;

в) dz, если $x = e^{u+v}$, $y = e^{u-v}$, $z = uv$.

1967. $z = F(r, \varphi)$, где r и φ — функции переменных x и y, определяемые системой уравнений

$$x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi.$$

Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

1968. Рассматривая z как функцию x и y, найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x = a\cos\varphi\cos\psi, \; y = b\sin\varphi\cos\psi, \; z = c\sin\psi.$$

§ 10. Замена переменных

При замене переменных в дифференциальных выражениях входящие в них производные следует выразить через производные по новым переменным, используя правила дифференцирования сложных функций.

1°. Замена переменных в выражениях, содержащих обыкновенные производные.

Пример 1. Преобразовать уравнение

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + \frac{a^2}{x^2}y = 0,$$

полагая $x = \frac{1}{t}$.

Решение. Выразим производные от y по x через производные от y по t. Имеем

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{-\frac{1}{t^2}} = -t^2\frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = -\left(2t\frac{dy}{dt} + t^2\frac{d^2y}{dt^2}\right)(-t^2) = 2t^3\frac{dy}{dt} + t^4\frac{d^2y}{dt^2}.$$

Подставляя найденные выражения производных в данное уравнение и заменяя x через $\frac{1}{t}$, получим

$$\frac{1}{t^2}\cdot t^3\left(2\frac{dy}{dt} + t\frac{d^2y}{dt^2}\right) + 2\cdot\frac{1}{t} - \left(t^2\frac{dy}{dt}\right) + a^2t^2y = 0$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a^2y = 0.$$

Пример 2. Преобразовать уравнение

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{dy}{dx} = 0,$$

приняв y за аргумент, а x за функцию.

Решение. Выразим производные от y по x через производные от x по y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\right)\frac{dy}{dx} = -\left(\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\right)\cdot\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = -\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}.$$

Подставив эти выражения производных в данное уравнение, будем иметь

$$x\left[-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}\right] + \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3} - \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = 0,$$

или окончательно

$$x\frac{d^2x}{dy^2} - 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = 0.$$

Пример 3. Преобразовать уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x+y}{x-y},$$

перейдя к полярным координатам

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi. \qquad (1)$$

Решение. Рассматривая r как функцию φ, из формул (1) получим

$$dx = \cos\varphi\, dr - r\sin\varphi\, d\varphi, \; dy = \sin\varphi\, dr + r\cos\varphi\, d\varphi,$$

отсюда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin\varphi dr + r\cos\varphi d\varphi}{\cos\varphi dr - r\sin\varphi d\varphi} = \frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi} + r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi} - r\sin\varphi}.$$

Подставляя в данное уравнение выражения для x, y и $\frac{dy}{dx}$, будем иметь

$$\frac{\sin\varphi\frac{dr}{d\varphi} + r\cos\varphi}{\cos\varphi\frac{dr}{d\varphi} - r\sin\varphi} = \frac{r\cos\varphi + r\sin\varphi}{r\cos\varphi - r\sin\varphi},$$

или после упрощений

$$\frac{dr}{d\varphi} = r.$$

2°. Замена переменных в выражениях, содержащих частные производные.

Пример 4. Уравнение колебаний струны

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2} \quad (a \neq 0)$$

преобразовать к новым независимым переменным α и β, где $\alpha = x - at$, $\beta = x + at$.

Решение. Выразим частные производные от u по x и t через частные производные от u по α и β. Применяя формулы дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial t},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\beta}\frac{\partial\beta}{\partial x},$$

получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}(-a)+\frac{\partial u}{\partial\beta}a=a\left(\frac{\partial u}{\partial\beta}-\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial\alpha}\cdot 1+\frac{\partial u}{\partial\beta}\cdot 1=\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{\partial u}{\partial\beta}.$$

Дифференцируем вторично, применяя те же формулы:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\frac{\partial\beta}{\partial t}=$$

$$=a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}-\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}\right)(-a)+a\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\right)a=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial\beta}{\partial x}=$$

$$=\left(\frac{\partial^2 u}{d\alpha^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}\right)\cdot 1+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right)\cdot 1=\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}.$$

Подставив $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в данное уравнение, будем иметь

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}+\frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}$$

или

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha\partial\beta}=0.$$

Пример 5. Преобразовать уравнение $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$, приняв за новые независимые переменные $u=x$, $v=\frac{1}{y}-\frac{1}{x}$ и за новую функцию $w=\frac{1}{z}-\frac{1}{x}$.

Решение. Выразим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ через частные производные $\frac{\partial w}{\partial u}$ и $\frac{\partial w}{\partial v}$. Для этого продифференцируем данные соотношения между старыми и новыми переменными:

$$\mathrm{d}u=\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}v=\frac{\mathrm{d}x}{x^2}-\frac{\mathrm{d}x}{y^2},\quad \mathrm{d}w=\frac{\mathrm{d}z}{x^2}-\frac{\mathrm{d}z}{z^2}.$$

С другой стороны,

$$\mathrm{d}w=\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v.$$

Поэтому

$$\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}u+\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}v=\frac{dx}{x^2}-\frac{dz}{z^2}$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial u}\mathrm{d}x+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{dx}{x^2}-\frac{dy}{y^2}\right)=\frac{dx}{x^2}-\frac{dz}{z^2}.$$

Отсюда

$$\mathrm{d}z=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)\mathrm{d}x+\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}\mathrm{d}y$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

и

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z^2}{y^2}\frac{\partial w}{\partial v}.$$

Подставляя эти выражения в данное уравнение, получим

$$x^2z^2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{\partial w}{\partial u}-\frac{1}{x^2}\frac{\partial w}{\partial v}\right)+z^2\frac{\partial w}{\partial v}=z^2$$

или

$$\frac{\partial w}{\partial u}=0.$$

1969. Преобразовать уравнение

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0,$$

полагая $x=\mathrm{e}^t$.

1970. Преобразовать уравнение

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}=0,$$

полагая $x=\cos t$.

1971. Преобразовать следующие уравнения, приняв за аргумент y:

а) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+2y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2=0$, б) $\dfrac{dy}{dx}\dfrac{d^3y}{dx^3}-3\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^2=0$.

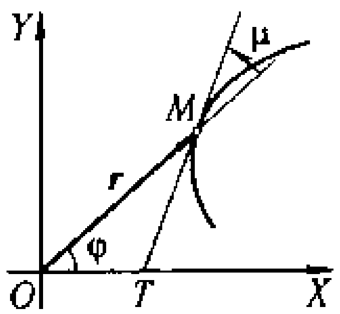


Рис. 69.

1972. Тангенс угла μ, образованного касательной MT и радиусом-вектором OM точки касания (рис. 69), выражается следующим образом:

$$\operatorname{tg}\mu=\frac{y'-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}y'}.$$

Преобразовать это выражение, перейдя к полярным координатам: $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

1973. Формулу кривизны линии

$$K=\frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

выразить в полярных координатах $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$.

1974. Преобразовать к новым независимым переменным u и v уравнение

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

если $u=x$, $v=x^2+y^2$.

1975. Преобразовать к новым независимым переменным u и v уравнение

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=0,$$

если $u=x$, $v=\dfrac{y}{x}$.

1976. Уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0$$

преобразовать к полярным координатам r и φ, полагая

$$x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi.$$

1977. Преобразовать уравнение

$$x^2\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0,$$

полагая $u=xy$ и $v=\dfrac{x}{y}$.

1978. Преобразовать уравнение

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=(y-x)z,$$

введя новые независимые переменные

$$u=x^2+y^2,\ v=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

и новую функцию $w=\ln z-(x+y)$.

1979. Преобразовать уравнение

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0,$$

приняв за новые независимые переменные $u=x+y$, $v=\dfrac{y}{x}$ и за новую функцию $w=\dfrac{z}{x}$.

1980. Преобразовать уравнение

$$\frac{\partial^2z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2z}{\partial y^2}=0,$$

полагая $u=x+y$, $v=x-y$, $w=xy-z$, где $w=w(u,v)$.

§ 11. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

1°. Уравнения касательной плоскости и нормали для случая явного задания поверхности. *Касательной плоскостью* к поверхности в точке M (точка касания) называется плоскость, в которой лежат все касательные в точке M к различным кривым, проведенным на поверхности через эту точку.

Нормалью к поверхности называется перпендикуляр к касательной плоскости в точке касания.

Если уравнение поверхности в декартовой системе координат задано в явной форме $z=f(x,y)$, где $f(x,y)$ — дифференцируемая функция, то уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0,y_0,z_0)$ поверхности есть

$$Z-z_0=f'_x(x_0,y_0)(X-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(Y-y_0). \qquad (1)$$

Здесь $z_0=f(x_0,y_0)$, а X, Y, Z — текущие координаты точки касательной плоскости.

Уравнения нормали имеют вид

$$\frac{X - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{Y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{Z - z_0}{-1}, \tag{2}$$

где X, Y, Z — текущие координаты точки нормали.

Пример 1. Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z = \frac{x^2}{2} - y^2$ в ее точке $M(2; -1; 1)$.

Решение. Найдем частные производные данной функции и их значения в точке M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = x, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_M = 2,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -2y, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_M = 2.$$

Отсюда, применяя формулы (1) и (2), будем иметь $z - 1 = 2(x - 2) + 2(y + 1)$ или $2x + 2y - z - 1 = 0$ — уравнение касательной плоскости и $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ — уравнения нормали.

2°. Уравнения касательной плоскости и нормали для случая неявного задания поверхности. В том случае, когда уравнение гладкой поверхности задано в неявной форме

$$F(x, y, z) = 0$$

и $F(x_0, y_0, z_0) = 0$, соответствующие уравнения будут иметь такой вид:

$$F'_x(x_0, y_0, z_0)(X - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(Y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(Z - z_0) = 0 \tag{3}$$

— уравнение касательной плоскости и

$$\frac{X - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{Z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)} \tag{4}$$

— уравнения нормали.

Пример 2. Написать уравнения плоскости и нормали к поверхности $3xyz - z^3 = a^3$ в точке, для которой $x = 0$, $y = a$.

Решение. Найдем аппликату точки касания, подставив $x = 0$, $y = a$ в уравнение поверхности: $-z^3 = a^3$, откуда $z = -a$. Таким образом, точка касания есть $M(0, a, -a)$.

Обозначив через $F(x, y, z)$ левую часть уравнения, найдем частные производные и их значения в точке M:

$$F'_x = 3yz, \quad (F'_x)_M = -3a^2,$$
$$F'_y = 3xz, \quad (F'_y)_M = 0,$$
$$F'_z = 3xy - 3z^2, \quad (F'_z)_M = -3a^2.$$

Применяя формулы (3) и (4), получим

$$-3a^2(x - 0) + 0(y - a) - 3a^2(z + a) = 0$$

или $x + z + a = 0$ — уравнение касательной плоскости,

$$\frac{x-0}{-3a^2} = \frac{y-a}{0} = \frac{z+a}{-3a^2}$$

или $\frac{x}{1} = \frac{y-a}{0} = \frac{z+a}{1}$ — уравнения нормали.

1981. Написать уравнение касательной плоскости и уравнения нормали к следующим поверхностям в указанных точках:

а) к параболоиду вращения $z = x^2 + y^2$ в точке $(1; -2; 5)$;

б) к конусу $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{8} = 0$ в точке $(4; 3; 4)$;

в) к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$ в точке $(R\cos\alpha; R\sin\alpha; R)$.

1982. В каких точках эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

нормаль к нему образует равные углы с осями координат?

1983. Через точку $M(3; 4; 12)$ сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 169$ проведены плоскости, перпендикулярные осям OX и OY. Написать уравнение плоскости, проходящей через касательные к получившимся сечениям в их общей точке M.

1984. Показать, что уравнение касательной плоскости к центральной поверхности 2-го порядка

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = k$$

в ее точке $M(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$ax_0x + by_0y + cz_0z = k.$$

1985. К поверхности $x^2 + 2y^2 + 3x^2 = 21$ провести касательные плоскости, параллельные плоскости $x + 4y + 6z = 0$.

1986. К эллипсоиду $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ провести касательные плоскости, отсекающие на координатных осях равные по величине отрезки.

1987. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ найти точки, в которых касательные плоскости параллельны координатным плоскостям.

1988. Доказать, что касательные плоскости к поверхности $xyz = m^3$ образуют с плоскостями координат тетраэдр постоянного объема.

1989. Показать, что касательные плоскости к поверхности $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$ отсекают на осях координат отрезки, сумма которых постоянна.

1990. Показать, что конус

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$

и сфера

$$x^2 + y^2 + \left(z - \frac{b^2+c^2}{c}\right)^2 = \frac{b^2}{c^2}(b^2 + c^2)$$

касаются друг друга в точках $(0, \pm b, c)$.

1991. *Углом между двумя поверхностями* в точке их пересечения называется угол между касательными плоскостями, проведенными к данным поверхностям, в рассматриваемой точке.

Под каким углом пересекаются цилиндр

$$x^2 + y^2 = R^2$$

и сфера

$$(x - R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

в точке $M\left(\frac{R}{2}, \frac{R\sqrt{3}}{2}, 0\right)$?

1992. Поверхности называются *ортогональными*, если они пересекаются под прямым углом в каждой точке линии их пересечения.

Показать, что поверхности $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ (сфера), $y = x\operatorname{tg}\varphi$ (плоскость) и $z^2 = (x^2 + y^2)\operatorname{tg}^2\psi$ (конус), являющиеся координатными поверхностями сферических координат r, φ, ψ, взаимно ортогональны.

1993. Показать, что все плоскости, касательные к конической поверхности $z = xf\left(\frac{y}{x}\right)$ в ее точке $M(x_0, y_0, z_0)$, где $x \neq 0$, проходят через начало координат.

1994*. Найти проекции эллипсоида

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - 1 = 0$$

на координатные плоскости.

1995. Доказать, что нормаль в любой точке поверхности вращения $z = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ $(f' \neq 0)$ пересекает ось вращения.

§ 12. Формула Тейлора для функции нескольких переменных

Пусть функция $f(x, y)$ имеет в окрестности точки (a, b) непрерывные частные производные всех порядков до $(n + 1)$-го включительно. Тогда в рассматриваемой окрестности справедлива *формула Тейлора*:

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}[f'_x(a, b)(x - a) + f'_y(a, b)(y - b)] +$$
$$+ \frac{1}{2!}[f''_{xx}(a, b)(x - a)^2 + 2f''_{xy}(a, b)(x - a)(y - b) + f''_{yy}(a, b)(y - b)^2] +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a, b) + R_n(x, y), \quad (1)$$

где

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f[a + \theta(x - a), b + \theta(y - b)]$$
$$(0 < \theta < 1).$$

В других обозначениях:

$$f(x + h, y + k) = f(x, y) + \frac{1}{1!}[hf'_x(x, y) + kf'_y(x, y)] +$$
$$+ \frac{1}{2!}[h^2f''_{xx}(x, y) + 2hkf''_{xy}(x, y) + k^2f''_{yy}(x, y)] + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x, y) + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x + \theta h; y = \theta k), \quad (2)$$

или

$$\Delta f(x, y) = df(x, y) + \frac{1}{2!}d^2f(x, y) + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{n!}d^nf(x, y) + \frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x + \theta h; y + \theta k). \quad (3)$$

Частный случай формулы (1) при $a = b = 0$ называется *формулой Маклорена*.

Аналогичные формулы справедливы для функции трех и большего числа переменных.

П р и м е р. Найти приращение, получаемое функцией $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$ при переходе от значений $x = 1$, $y = 2$ к значениям $x_1 = 1 + h$, $y_1 = 2 + k$.

Р е ш е н и е. Искомое приращение можно найти, применяя формулу (2). Вычислим предварительно последовательные частные производные и их значения в данной точке (1; 2):

$f'_x(x, y) = 3x^2 + 3y$, $\quad f'_x(1; 2) = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 9$,

$f'_y(x, y) = -6y^2 + 3x$, $\quad f'_y(1; 2) = -6 \cdot 4 + 3 \cdot 1 = -21$,

$f''_{xx}(x, y) = 6x$, $\quad f''_{xx}(1; 2) = 6 \cdot 1 = 6$,

$f''_{xy}(x, y) = 3$, $\quad f''_{xy}(1; 2) = 3$,

$f''_{yy}(x, y) = -12y$, $\quad f''_{yy}(1; 2) = -12 \cdot 2 = -24$,

$$f'''_{xxx}(x,\ y) = 6, \qquad f'''_{xxx}(1;\ 2) = 6,$$
$$f'''_{xxy}(x,\ y) = 0, \qquad f'''_{xxy}(1;\ 2) = 0,$$
$$f'''_{xyy}(x,\ y) = 0, \qquad f'''_{xyy}(1;\ 2) = 0,$$
$$f'''_{yyy}(x,\ y) = -12, \qquad f'''_{yyy}(1;\ 2) = -12.$$

Все дальнейшие производные тождественно равны нулю. Подставляя найденные результаты в формулу (2), получим

$$\Delta f(x,\ y) = f(1 + h,\ 2 + k) - f(1,\ 2) = h \cdot 9 + k(-21) +$$
$$+ \frac{1}{2!}[h^2 \cdot 6 + 2hk \cdot 3 + k^2(-24)] + \frac{1}{3!}[h^3 \cdot 6 + 3h^2k \cdot 0 + 3hk^2 \cdot 0 + k^3(-12)] =$$
$$= 9h - 21k + 3h^2 + 3hk - 12k^2 + h^3 - 2k^3.$$

1996. Разложить $f(x + h,\ y + k)$ по целым положительным степеням h и k, если

$$f(x,\ y) = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

1997. Функцию

$$f(x,\ y) = -x^2 + 2xy + 3y^2 - 6x - 2y - 4$$

разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(-2;\ 1)$.

1998. Найти приращение, получаемое функцией $f(x,\ y) = x^2y$ при переходе от значений $x = 1$, $y = 1$ к значениям

$$x_1 = 1 + h,\ \ y_1 = 1 + k.$$

1999. Функцию

$$f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - yz - 4x - 3y - z + 4$$

разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1;\ 1;\ 1)$.

2000. Разложить $f(x + h,\ y + k,\ z + l)$ по целым положительным степеням h, k и l, если

$$f(x,\ y,\ z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz.$$

2001. Разложить по формуле Маклорена до членов 3-го порядка включительно функцию

$$f(x,\ y) = e^x \sin y.$$

2002. Разложить по формуле Маклорена до членов 4-го порядка включительно функцию

$$f(x,\ y) = \cos x \cos y.$$

2003. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1;\ 1)$ до членов 2-го порядка включительно функцию

$$f(x,\ y) = y^x.$$

2004. Разложить по формуле Тейлора в окрестности точки $(1;\ -1)$ до членов 3-го порядка включительно функцию

$$f(x,\ y) = e^{x + y}.$$

2005. Вывести приближенные формулы с точностью до членов 2-го порядка относительно величин α и β для выражений:

а) $\operatorname{arctg}\dfrac{1+\alpha}{1-\beta}$; б) $\sqrt{\dfrac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}}$,

если $|\alpha|$ и $|\beta|$ малы по сравнению с 1.

2006*. Используя формулу Тейлора до членов 2-го порядка, вычислить приближенно:

а) $\sqrt{1,03}$, $\sqrt[3]{0,98}$; б) $(0,95)^{2,01}$.

2007. Пусть z есть та неявная функция от x и y, определяемая уравнением $z^3 - 2xz + y = 0$, которая принимает значение $z = 1$ при $x = 1$ и $y = 1$. Написать несколько членов разложения функции z по возрастающим степеням разностей $x - 1$ и $y = -1$.

§ 13. Экстремум функции нескольких переменных

1°. Определение экстремума функции. Говорят, что функция $f(x,\ y)$ имеет *максимум* (*минимум*) $f(a,\ b)$ в точке $P(a,\ b)$, если для всех отличных от P точек $P'(x,\ y)$ в достаточно малой окрестности точки P выполнено неравенство $f(a,\ b) > f(x,\ y)$ (или соответственно $f(a,\ b) < f(x,\ y)$). Максимум или минимум функции называется ее *экстремумом*. Аналогично определяется экстремум функции трех и большего числа переменных.

2°. Необходимые условия экстремума. Точки, в которых дифференцируемая функция $f(x,\ y)$ может достигать экстремума (так называемые *стационарные точки*), находятся путем решения системы уравнений

$$f'_x(x,\ y) = 0, \quad f'_y(x,\ y) = 0 \tag{1}$$

(*необходимые условия* экстремума). Система (1) эквивалентна одному уравнению $\mathrm{d}f(x,\ y) = 0$. В общем случае в точке экстремума $P(a,\ b)$ функции $f(x,\ y)$ или $\mathrm{d}f(a,\ b) = 0$, или $\mathrm{d}f(a,\ b)$ не существует.

3°. Достаточные условия экстремума. Пусть $P(a,\ b)$ — стационарная точка функции $f(x,\ y)$, т. е. $\mathrm{d}f(a,\ b) = 0$. Тогда:

а) если $\mathrm{d}^2f(a,\ b) < 0$ при $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 > 0$, то $f(a,\ b)$ есть *максимум* функции $f(x,\ y)$;

б) если $\mathrm{d}^2f(a,\ b) > 0$ при $\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 > 0$, то $f(a,\ b)$ есть *минимум* функции $f(x,\ y)$;

в) если $\mathrm{d}^2f(a,\ b)$ меняет знак, то $f(a,\ b)$ не является экстремумом функции $f(x,\ y)$.

Приведенные условия эквивалентны следующим: пусть $f'_x(a,\ b) = f'_y(a,\ b) = 0$ и $A = f''_{xx}(a,\ b)$, $B = f''_{xy}(a,\ b)$, $C = f''_{yy}(a,\ b)$. Составим *дискриминант*

$$\Delta = A \cdot C - B^2.$$

Тогда: 1) если $\Delta > 0$, то функция имеет экстремум в точке $P(a,\ b)$, а именно максимум, если $A < 0$ (или $C < 0$), и минимум, если $A > 0$ (или $C > 0$); 2) если

$\Delta < 0$, то экстремума в точке $P(a, b)$ нет; 3) если $\Delta = 0$, то вопрос о наличии экстремума функции в точке $P(a, b)$ остается открытым (требуется дальнейшее исследование).

4°. Случай функции многих переменных. Для функции трех и большего числа переменных необходимые условия существования экстремума аналогичны условиям 1°, (1), а достаточные условия аналогичны условиям 3°, а), б), в).

Пример 1. Исследовать на экстремум функцию

$$x = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y.$$

Решение. Найдем частные производные и составим систему уравнений (1):

$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0,\ \frac{\partial z}{\partial y} \equiv 6xy - 12 = 0$$

или

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0, \\ xy - 2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим четыре стационарные точки:

$$P_1(1;\ 2);\quad P_2(2;\ 1);\quad P_3(-1;\ -2);\quad P_4(-2;\ -1).$$

Найдем производные 2-го порядка

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6y,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6x$$

и составим дискриминант $\Delta = A \cdot C - B^2$ для каждой стационарной точки.

1) Для точки $P_1: A = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{P_1} = 6,\ B = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)_{P_1} = 12,\ C = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{P_1} = 6;$
$\Delta = AC - b^2 = 36 - 114 < 0$. Значит, в точке P_1 экстремума нет.

2) Для точки P_2: $A = 12,\ B = 6,\ C = 12;\ \Delta = 144 - 36 > 0,\ A > 0$. В точке P_2 функция имеет минимум. Минимум этот равен значению функции при $x = 2$, $y = 1$:

$$z_{\min} = 8 + 6 - 30 - 12 = -28.$$

3) Для точки P_3: $A = -6,\ B = -12,\ C = -6;\ \Delta = 36 - 114 < 0$. Экстремума нет.

4) Для точки P_4: $A = -12,\ B = -6,\ C = -12;\ \Delta = 144 - 36 > 0,\ A < 0$. В точке P_4 функция имеет максимум, равный

$$z_{\max} = -8 - 6 + 30 + 12 = 28.$$

5°. Условный экстремум. В простейшем случае *условным экстремумом* функции $f(x, y)$ называется максимум или минимум этой функции, достигнутый при условии, что ее аргументы связаны уравнением $\varphi(x, y) = 0$ (*уравнение связи*). Чтобы найти условный экстремум функции

$f(x, y)$ при наличии соотношения $\varphi(x, y) = 0$, составляют так называемую *функцию Лагранжа*

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda \cdot \varphi(x, y),$$

где λ — неопределенный постоянный множитель, и ищут обычный экстремум этой вспомогательной функции. Необходимые условия экстремума сводятся к системе трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

с тремя неизвестными x, y, λ, из которой можно, вообще говоря, определить эти неизвестные.

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании изучения знака второго дифференциала функции Лагранжа

$$\mathrm{d}^2 F(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\, \mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\, \mathrm{d}y^2$$

для испытуемой системы значений x, y, λ, полученной из (2) при условии, что $\mathrm{d}x$ и $\mathrm{d}y$ связаны уравнением

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}\, \mathrm{d}x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, \mathrm{d}y = 0\quad (\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 \neq 0).$$

А именно, функция $f(x, y)$ имеет условный максимум, если $\mathrm{d}^2 F < 0$, и условный минимум, если $\mathrm{d}^2 F > 0$. В частности, если дискриминант Δ для функции $F(x, y)$ в стационарной точке положителен, то в этой точке имеется условный максимум функции $f(x, y)$, если $A < 0$ (или $C < 0$), и условный минимум, если $A > 0$ (или $C > 0$).

Аналогично находится условный экстремум функции трех или большего числа переменных при наличии одного или нескольких уравнений связи (число которых, однако, должно быть меньше числа переменных). Здесь приходится вводить в функцию Лагранжа столько неопределенных множителей, сколько имеется уравнений связи.

Пример 2. Найти экстремум функции

$$z = 6 - 4x - 3y$$

при условии, что переменные x и y удовлетворяют уравнению

$$x^2 + y^2 = 1.$$

Решение. Геометрически задача сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значений аппликаты z плоскости $z = 6 - 4x - 3y$ для точек пересечения ее с цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

Составляем функцию Лагранжа:

$$F(x, y) = 6 - 4x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Имеем $\dfrac{\partial F}{\partial x} = -4 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = -3 + 2\lambda y$. Необходимые условия дают систему уравнений

$$\begin{cases} -4 + 2\lambda x = 0, \\ -3 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

решая которую найдем:

$$\lambda_1 = \frac{5}{2}, \quad x_1 = \frac{4}{5}, \quad y_1 = \frac{3}{5}$$

и

$$\lambda_2 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = -\frac{4}{5}, \quad y_2 = \frac{3}{5}.$$

Так как

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2\lambda, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2\lambda,$$

то

$$d^2F = 2\lambda(dx^2 + dy^2).$$

Если $\lambda = \dfrac{5}{2}$, $x = \dfrac{4}{5}$ и $y = \dfrac{3}{5}$, то $d^2F > 0$ и, следовательно, в этой точке функция имеет условный минимум. Если $\lambda = -\dfrac{5}{2}$, $x = -\dfrac{4}{5}$ и $y = -\dfrac{3}{5}$, то $d^2F < 0$ и, следовательно, в этой точке функция имеет условный максимум.

Таким образом,

$$z_{\max} = 6 + \frac{16}{5} + \frac{9}{5} = 11,$$

$$z_{\min} = 6 - \frac{16}{5} - \frac{9}{5} = 1.$$

6°. **Наибольшее и наименьшее значения функции.** Функция, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области, достигает своего наибольшего (наименьшего) значения или в стационарной точке, или в точке границы области.

Пример 3. Определить наибольшее и наименьшее значения функции

$$z = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

в области

$$x \leqslant 0, \ y \leqslant 0, \ x + y \geqslant -3.$$

Решение. Указанная область есть треугольник (рис. 70).

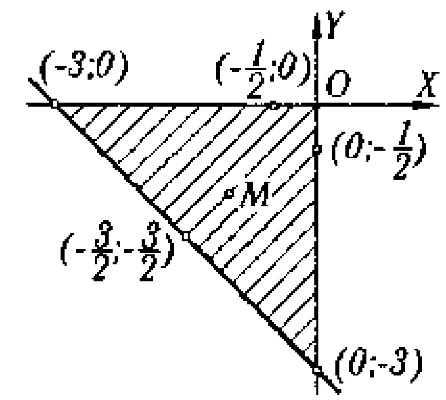


Рис. 70.

1) Найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} z'_x \equiv 2x - y + 1 = 0, \\ z'_y \equiv 2y - x + 1 = 0; \end{cases}$$

отсюда $x = -1$, $y = -1$; получаем точку $M(-1; -1)$.

В точке M значение функции $z_M = -1$. Исследование на экстремум не обязательно.

2) Исследуем функцию на границах области.

При $x = 0$ имеем $z = y^2 + y$ и задача сводится к отысканию наибольшего и наименьшего значений этой функции одного аргумента на отрезке $-3 \leqslant y \leqslant 0$. Проведя исследование, найдем, что $(z_{\text{наиб}})_{x=0} = 6$ в точке $(0; -3)$; $(z_{\text{наим}})_{x=0} = -\dfrac{1}{4}$ в точке $\left(0; -\dfrac{1}{2}\right)$.

При $y = 0$ получаем $z = x^2 + x$. Аналогично найдем, что $(z_{\text{наиб}})_{y=0} = 6$ в точке $(-3; 0)$; $(z_{\text{наим}})_{y=0} = -\dfrac{1}{4}$ в точке $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

При $x + y = -3$ или $y = -3 - x$ будем иметь $z = 3x^2 + 9x + 6$. Аналогичным образом найдем, что $(z_{\text{наим}})_{x+y=-3} = -\dfrac{3}{4}$ в точке $\left(-\dfrac{3}{2}; -\dfrac{3}{2}\right)$; $(z_{\text{наиб}})_{x+y=-3} = 6$ совпадает с $(z_{\text{наиб}})_{x=0}$ и $(z_{\text{наиб}})_{y=0}$. На прямой $x + y = -3$ можно было бы исследовать функцию на условный экстремум, не приводя к функции одного аргумента.

3) Сопоставляя все полученные значения функции z, заключаем, что $z_{\text{наиб}} = 6$ в точках $(0; -3)$ и $(-3; 0)$; $z_{\text{наим}} = -1$ в стационарной точке M.

Исследовать на экстремум следующие функции двух переменных:

2008. $z = (x - 1)^2 + 2y^2$.

2009. $z = (x - 1)^2 - 2y^2$.

2010. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$.

2011. $z = x^3y^2(6 - x - y)$ $(x > 0,\ y > 0)$.

2012. $z = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$.

2013. $z = xy\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2}}$.

2014. $z = 1 - (x^2 + y^2)^{2/3}$.

2015. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2 + y^2)}$.

2016. $z = \dfrac{1 + x - y}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$.

2016.1. $z = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$ $(x > 0,\ y > 0)$.

2016.2. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

Найти экстремумы функций трех переменных:

2017. $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$.

2018. $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

Найти экстремумы функций z, заданных неявно:

2019*. $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$.

2020. $x^3 - y^2 - 3x + 4y + z^2 + z - 8 = 0$.

Определить условные экстремумы функций:

2021. $z = xy$ при $x + y = 1$.

2022. $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

2023. $z = x^2 + y^2$ при $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$.

2024. $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ при $y - x = \frac{\pi}{4}$.

2025. $u = x - 2y + 2z$ при $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

2026. $u = x^2 + y^2 + z^2$ при $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(a > b > c > 0)$.

2027. $u = xy^2z^3$ при $x + y + z = 12$ $(x > 0,\ y > 0,\ z > 0)$.

2028. $u = xyz$ при условиях $x + y + z = 5$, $xy + yz + zx = 8$.

2029. Доказать неравенство

$$\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz},$$

если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Указание. Искать максимум функции $u = xyz$ при условии $x + y + z = S$.

2030. Определить наибольшее значение функции $z = 1 + x + 2y$ в областях:

а) $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant 1$; б) $x \geqslant 0$, $y \leqslant 0$, $x - y \leqslant 1$.

2031. Определить наибольшие и наименьшие значения функций а) $z = x^2y$ и б) $z = x^2 - y^2$ в области $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

2032. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z = \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ в области $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$.

2033. Определить наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в области $0 \leqslant x \leqslant 2$, $-1 \leqslant y \leqslant 2$.

§ 14. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений функций

Пример 1. Положительное число a требуется разбить на три неотрицательных слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Пусть искомые слагаемые будут x, y, $a - x - y$. Ищем максимум функции $f(x, y) = xy(a - x - y)$.

По смыслу задачи функция $f(x, y)$ рассматривается внутри замкнутого треугольника $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x + y \leqslant a$ (рис. 71).

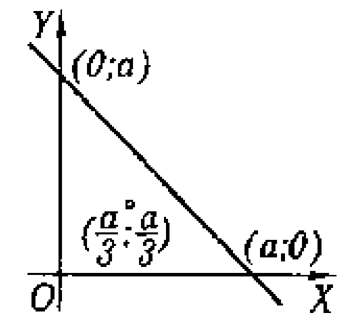


Рис. 71.

Решая систему

$$\begin{cases} f'_x(x, y) \equiv y(a - 2x - y) = 0, \\ f'_y(x, y) \equiv x(a - x - 2y) = 0, \end{cases}$$

получим для внутренности треугольника единственную стационарную точку $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$. Для нее проверяем выполнение достаточных условий. Имеем

$$f''_{xx}(x, y) = -2y, \quad f''_{xy}(x, y) = a - 2x - 2y, \quad f''_{yy}(x, y) = -2x.$$

Следовательно,

$$A = f''_{xx}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2}{3}a, \quad B = f''_{xy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{1}{3}a, \quad C = f''_{yy}\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = -\frac{2}{3}a$$

и

$$\Delta = A \cdot C - B^2 > 0, \ \ A < 0.$$

Итак, в точке $\left(\frac{a}{3}; \frac{a}{3}\right)$ функция достигает максимума. Так как на контуре треугольника функция $f(x, y) = 0$, то этот максимум будет наибольшим значением функции, т. е. произведение будет наибольшим, если $x = y = a - x - y = \frac{a}{3}$, причем наибольшее значение произведения равно $\frac{a^3}{27}$.

Примечание. Задачу можно было решать методами условного экстремума, отыскивая максимум функции $u = xyz$ при условии $x + y + z = a$.

2034. Из всех прямоугольных параллелепипедов, имеющих данный объем V, найти тот, полная поверхность которого наименьшая.

2035. При каких размерах открытая прямоугольная ванна данной вместимости V имеет наименьшую поверхность?

2036. Из всех треугольников данного периметра $2p$ найти тот, который имеет наибольшую площадь.

2037. Найти прямоугольный параллелепипед с данной площадью поверхности S, имеющий наибольший объем.

2038. Представить положительное число a в виде произведения четырех положительных сомножителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

2039. На плоскости XOY найти точку $M(x, y)$, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых $x = 0$, $y = 0$, $x - y + 1 = 0$ была бы наименьшей.

2040. Найти треугольник данного периметра $2p$, который при вращении около одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

2041. На плоскости даны три материальные точки $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, $P_3(x_3, y_3)$ массами m_1, m_2, m_3. При каком положении точки $P(x, y)$ квадратичный момент (момент инерции) данной системы точек относительно точки P (т. е. сумма $m_1|\overline{P_1P}|^2 + m_2|\overline{P_2P}|^2 + m_3|\overline{P_3P}|^2$) будет наименьшим?

2042. Через точку $M(a, b, c)$ провести плоскость, образующую с плоскостями координат тетраэдр наименьшего объема.

2043. В эллипсоид вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

2044. Определить наружные размеры открытого прямоугольного ящика с заданной толщиной стенок δ и емкостью (внутренней) V так, чтобы на его изготовление было затрачено наименьшее количество материала.

2045. В какой точке эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

касательная к нему образует с осями координат треугольник наименьшей площади?

2046*. Найти оси эллипса

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9.$$

2047. В данный шар вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

2048. Русла двух рек (в пределах некоторой области) приближенно представляют параболу $y = x^2$ и прямую $x - y - 2 = 0$. Требуется соединить данные реки прямолинейным каналом наименьшей длины. Через какие точки его провести?

2049. Найти кратчайшее расстояние от точки $M(1; 2; 3)$ до прямой

$$\frac{x}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{2}.$$

2050*. Точки A и B расположены в различных оптических средах, отделенных одна от другой прямой (рис. 72). Скорость распространения света в первой среде равна v_1, во второй — v_2. Пользуясь принципом Ферма, согласно которому световой луч распространяется по линии AMB, для прохождения вдоль которой требуется минимум времени, вывести закон преломления светового луча.

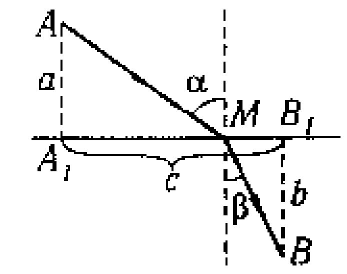


Рис. 72.

2051. Пользуясь принципом Ферма, вывести закон отражения светового луча от плоскости в однородной среде (рис. 73).

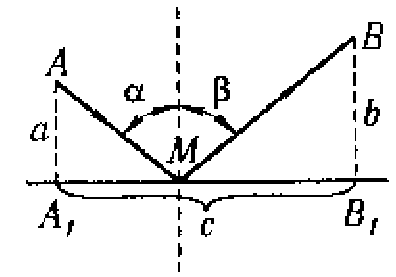


Рис. 73.

2052*. Если в электрической цепи, имеющей сопротивление R, течет ток I, то тепловая мощность в цепи равна I^2R. Определить, как следует разветвить ток I на токи I_1, I_2, I_3 при помощи трех проводов, сопротивления которых R_1, R_2, R_3, чтобы тепловая мощность была бы минимальной.

§ 15. Особые точки плоских кривых

1°. Определение особой точки. Точка $M(x_0, y_0)$ плоской кривой $f(x, y) = 0$ называется *особой точкой*, если ее координаты одновременно удовлетворяют трем уравнениям:

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad f'_x(x_0, y_0), \quad f'_y(x_0, y_0) = 0.$$

2°. Основные типы особых точек. Пусть в особой точке $M(x_0, y_0)$ производные 2-го порядка

$$A = f''_{xx}(x_0, y_0),$$
$$B = f''_{xy}(x_0, y_0),$$
$$C = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

не все равны нулю и $\Delta = A \cdot C - B^2$, тогда:

а) если $\Delta > 0$, то M — *изолированная точка* (рис. 74);

б) если $\Delta < 0$, то M — *узел (двойная точка)* (рис. 75);

в) если $\Delta = 0$, то M — или *точка возврата* 1-го рода (рис. 76), или 2-го рода (рис. 77), или *изолированная точка*, или *точка самоприкосновения* (рис. 78).

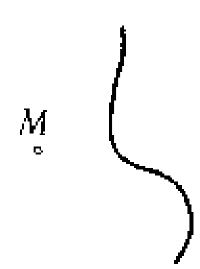


Рис. 74.

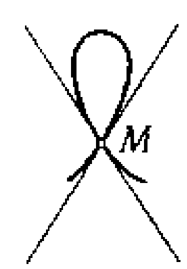


Рис. 75.

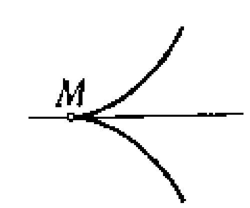


Рис. 76.

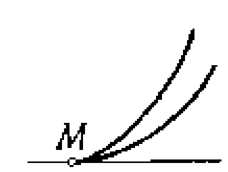


Рис. 77.

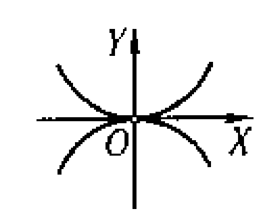


Рис. 78.

При решении задач этого раздела предполагается обязательным построение кривых.

Пример. Показать, что кривая $y^2 = ax^2 + x^3$ имеет: узел, если $a > 0$; изолированную точку, если $a < 0$; точку возврата 1-го рода, если $a = 0$.

Решение. Здесь $f(x, y) = ax^2 + x^3 - y^2$. Найдем частные производные и приравняем их нулю:

$$f'_x(x, y) \equiv 2ax + 3x^2 = 0,$$
$$f'_y(x, y) \equiv -2y = 0.$$

Эта система имеет два решения: $O(0; 0)$ и $N\left(-\frac{2}{3}a; 0\right)$, но координаты точки N не удовлетворяют уравнению данной кривой. Значит, имеется единственная особая точка $O(0; 0)$.

Найдем вторые производные и их значения в точке O:

$$f''_{xx}(x, y) = 2a + 6x, \quad A = 2a,$$
$$f''_{xy}(x, y) = 0, \qquad B = 0,$$
$$f''_{yy}(x, y) = -2, \qquad C = -2,$$
$$\Delta = A \cdot C - B^2 = -4a.$$

Следовательно,

если $a > 0$, то $\Delta < 0$ и точка O — узел (рис. 79);

если $a < 0$, то $\Delta > 0$ и точка O — изолированная точка (рис. 80);

если $a = 0$, то $\Delta = 0$. Уравнение кривой в этом случае будет $y^2 = x^3$ или $y = \pm\sqrt{x^3}$, где $x \geqslant 0$; кривая симметрична относительно оси OX, являющейся касательной. Следовательно, точка M — точка возврата 1-го рода (рис. 81).

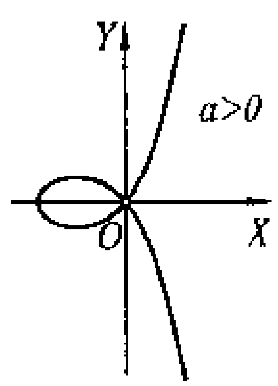


Рис. 79.

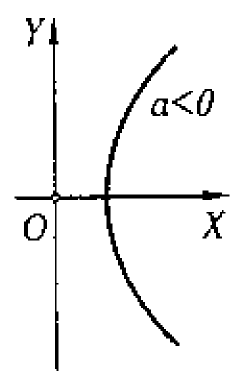


Рис. 80.

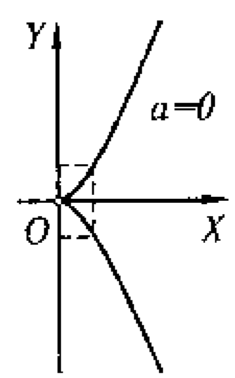


Рис. 81.

Выяснить характер особых точек кривых:

2053. $y^2 = -x^2 + x^4$.

2054. $(y - x^2)^2 = x^5$.

2055. $a^4y^2 = a^2x^4 - x^6$.

2056. $x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$.

2057. $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ (*декартов лист*).

2058. $y^2(a - x) = x^3$ (*циссоида*).

2059. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$ (*лемниската*).

2060. $(a + x)y^2 = (a - x)x^2$ (*строфоида*).

2061. $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = b^2x^2$ $(a > 0, b > 0)$ (*конхоида*). Рассмотреть три случая: 1) $a > b$, 2) $a = b$, 3) $a < b$.

2062. Выяснить изменение характера особой точки кривой $y^2 = (x - a)(x - b)(x - c)$ в зависимости от значений a, b, x ($a \leqslant b \leqslant c$ вещественны).

§ 16. Огибающая

1°. Определение огибающей. *Огибающей семейства плоских кривых* называется кривая (или совокупность нескольких кривых), которая касается всех линий данного семейства, причем в каждой своей точке касается какой-нибудь линии рассматриваемого семейства.

2°. Уравнение огибающей. Если зависящее от одного переменного параметра α семейство кривых

$$f(x, y, \alpha) = 0$$

имеет огибающую, то параметрические уравнения последней определяются из системы уравнений

$$\begin{cases} f(x, y, \alpha) = 0, \\ f'_\alpha(x, y, \alpha) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Исключая из системы (1) параметр α, получим уравнение вида

$$D(x, y) = 0. \tag{2}$$

Следует отметить, что формально получаемая кривая (2) (так называемая *дискриминантная кривая*) наряду с огибающей, если таковая имеется, может содержать геометрическое место особых точек данного семейства, не входящее в состав огибающей этого семейства.

При решении задач этого параграфа рекомендуется делать чертежи.

Пример. Найти огибающую семейства прямых

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \quad (p = \text{const}, p > 0).$$

Решение. Данное семейство прямых зависит от параметра α. Составим систему уравнений (1):

$$\begin{cases} x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0, \\ -x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Решив систему относительно x и y, получим параметрические уравнения огибающей:

$$x = p\cos\alpha, \quad y = p\sin\alpha.$$

Возводя оба уравнения в квадрат и складывая, исключим параметр α:

$$x^2 + y^2 = p^2.$$

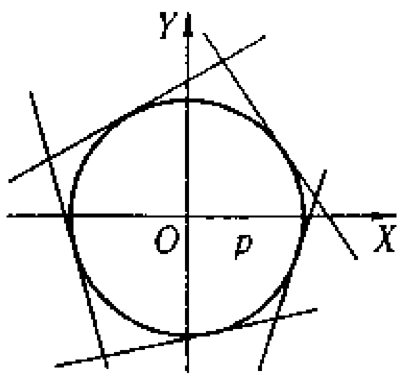


Рис. 82.

Таким образом, огибающей данного семейства прямых служит окружность радиуса p с центром в начале координат. Данное же семейство прямых есть семейство касательных к этой окружности (рис. 82).

2063. Найти огибающую семейства окружностей

$$(x - a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{2}.$$

2064. Найти огибающую семейства прямых

$$y = kx + \frac{p}{2k}$$

(k — параметр, $p = \text{const}$).

2065. Найти огибающую семейства окружностей одинакового радиуса R, центры которых находятся на оси OX.

2066. Найти кривую, которую огибает отрезок длины l, когда его концы скользят по осям координат.

2067. Найти огибающую семейства прямых, образующих с осями координат треугольник постоянной площади S.

2068. Найти огибающую эллипсов постоянной площади S, оси симметрии которых совпадают.

2069. Исследовать характер «дискриминантных кривых» семейств следующих линий (C — параметр):

а) кубических парабол $y = (x - C)^3$;

б) полукубических парабол $y^2 = (x - C)^3$;

в) парабол Нейля $y^3 = (x - C)^2$;

г) строфоид $(a + x)(y - C)^2 = x^2(a - x)$.

2070. Уравнение траектории движения снаряда, выпущенного из точки O с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту (без учета сопротивления воздуха), будет

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

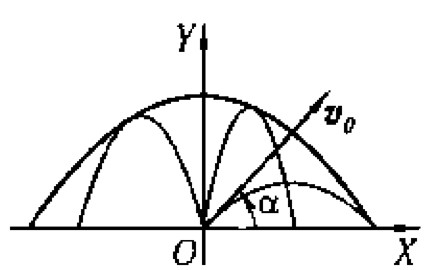


Рис. 83.

Принимая угол α за параметр, найти огибающую всех траекторий снаряда, расположенных в одной и той же вертикальной плоскости (*парабола безопасности*) (рис. 83).

§ 17. Длина дуги пространственной кривой

Дифференциал дуги пространственной кривой в прямоугольных декартовых координатах равен

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2},$$

где x, y, z — текущие координаты точки кривой.

Если

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

— параметрические уравнения пространственной кривой, то длина дуги участка ее от $t = t_1$ до $t = t_2$ равна

$$s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt.$$

В задачах №№ 2071—2076 найти длину дуги кривой:

2071. $x = t$, $y = t^2$, $z = \frac{2t^3}{3}$ от $t = 0$ до $t = 2$.

2072. $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = \frac{3}{\pi}t$ от $t = 0$ до $t = \pi$.

2073. $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$ от $t = 0$ до произвольного t.

2074. $y = \frac{x^2}{2}$, $z = \frac{x^3}{6}$ от $x = 0$ до $x = 6$.

2075. $x^2 = 3y$, $2xy = 9z$ от точки $O(0;\ 0;\ 0)$ до точки $M(3;\ 3;\ 2)$.

2076. $y = a \arcsin \frac{x}{a}$, $z = \frac{a}{4} \ln \frac{a + x}{a - x}$ от точки $O(0;\ 0;\ 0)$ до точки $M(x_0, y_0, z_0)$.

2077. Положение точки для любого момента t ($t > 0$) определяется уравнениями

$$x = 2t, \quad y = \ln t, \quad z = t^2.$$

Найти среднюю скорость движения между моментами $t_1 = 1$ и $t_2 = 10$.

§ 18. Вектор-функции скалярного аргумента

1°. Производная вектор-функции скалярного аргумента. *Вектор-функция* $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ может быть определена путем задания трех скалярных функций $a_x(t)$, $a_y(t)$ и $a_z(t)$ — ее проекций на координатные оси:

$$\mathbf{a} = a_x(t)\mathbf{i} + a_y(t)\mathbf{j} + a_z(t)\mathbf{k}.$$

Производная вектор-функции $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$ по скалярному аргументу t есть новая вектор-функция, определяемая равенством

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(t + \Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \frac{da_x(t)}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y(t)}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z(t)}{dt}\mathbf{k}.$$

Модуль производной вектор-функции равен

$$\left|\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right| = \sqrt{\left(\frac{da_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{da_z}{dt}\right)^2}.$$

Конец переменного радиуса-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ описывает в пространстве кривую

$$\mathbf{r} = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k},$$

называемую *годографом* вектора $\mathbf{r}$.

Производная $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ представляет собой вектор, касательный к годографу в соответствующей точке, причем

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \frac{ds}{dt},$$

где s — длина дуги годографа, отсчитываемая от некоторой начальной точки. В частности, $\left|\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right| = 1$.

Если параметр t есть время, то $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ — *вектор скорости* конца вектора $\mathbf{r}$, а $\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{\omega}$ — *вектор ускорения* конца вектора $\mathbf{r}$.

2°. Основные правила дифференцирования вектор-функции скалярного аргумента.

1) $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} - \frac{d\mathbf{c}}{dt}$;

2) $\frac{d}{dt}(m\mathbf{a}) = m\frac{d\mathbf{a}}{dt}$, где m — постоянный скаляр;

3) $\frac{d}{dt}(\varphi\mathbf{a}) = \frac{d\varphi}{dt}\mathbf{a} + \varphi\frac{d\mathbf{a}}{dt}$, где $\varphi(t)$ — скалярная функция от t;

4) $\frac{d}{dt}(\mathbf{ab}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{b} + \mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}$;

5) $\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}$;

6) $\frac{d}{dt}\mathbf{a}[\varphi(t)] = \frac{d\mathbf{a}}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}$;

7) $\mathbf{a}\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0$, если $|\mathbf{a}| = \text{const}$.

Пример 1. Радиус-вектор движущейся точки в любой момент времени задан уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{i} - 4t^2\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}. \qquad (1)$$

Определить траекторию движения, скорость и ускорение движения.

Решение. Из уравнения (1) имеем:

$$x = 1, \quad y = -4t^2, \quad z = 3t^2.$$

Исключая время t, находим, что траектория движения есть прямая

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{3}.$$

Из уравнения (1), дифференцируя, находим скорость движения

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -8t\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}$$

и ускорение движения

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt} = -8\mathbf{j} + 6\mathbf{k}.$$

Скорость равна

$$\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right| = \sqrt{(-8t)^2 + (6t)^2} = 10|t|.$$

Отметим, что ускорение постоянно и равно

$$\left|\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right| = \sqrt{(-8)^2 + 6^2} = 10.$$

2078. Показать, что векторное уравнение $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)t$, где $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ — радиусы-векторы двух данных точек, является уравнением прямой.

2079. Определить, какие линии являются годографами следующих вектор-функций:

а) $\mathbf{r} = \mathbf{a}t + \mathbf{c}$;

б) $\mathbf{r} = \mathbf{a}t^2 + \mathbf{b}t$;

в) $\mathbf{r} = \mathbf{a}\cos t + \mathbf{b}\sin t$;

г) $\mathbf{r} = \mathbf{a}\,\mathrm{ch}\,t + \mathbf{b}\,\mathrm{sh}\,t$,

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — постоянные векторы, причем векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ перпендикулярны друг другу.

2080. Найти производную вектор-функцию от функции $\mathbf{a}(t) = a(t)\mathbf{a}^0(t)$, где $a(t)$ — скалярная функция, а $\mathbf{a}^0(t)$ — единичный вектор, в случаях, когда вектор $\mathbf{a}(t)$ изменяется: 1) только по длине, 2) только по направлению, 3) по длине и по направлению (общий случай). Выяснить геометрический смысл полученных результатов.

2081. Пользуясь правилами дифференцирования вектор-функции по скалярному аргументу, вывести формулу для дифференцирования смешанного произведения трех вектор-функций $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

2082. Найти производную по параметру t объема параллелепипеда, построенного на трех векторах:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k};$$
$$\mathbf{b} = 2t\mathbf{i} - \mathbf{j} + t^3\mathbf{k};$$
$$\mathbf{c} = -t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

2083. Уравнение движения

$$\mathbf{r} = 3\mathbf{i}\cos t + 4\mathbf{j}\sin t,$$

где t — время. Определить траекторию движения, скорость и ускорение движения. Построить траекторию движения и векторы скорости и ускорения для моментов $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$ и $t = \frac{\pi}{2}$.

2084. Уравнение движения

$$\mathbf{r} = 2\mathbf{i}\cos t + 2\mathbf{j}\sin t + 3\mathbf{k}t.$$

Определить траекторию движения, скорость и ускорение движения. Чему равны скорость и ускорение движения и каковы их направления для моментов $t = 0$ и $t = \frac{\pi}{2}$?

2085. Уравнение движения

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}\cos\alpha\cos\omega t + \mathbf{j}\sin\alpha\cos\omega t + \mathbf{k}\sin\omega t,$$

где α и ω — постоянные, t — время. Определить траекторию движения, скорость и ускорение движения и их направления.

2086. Уравнение движения снаряда (без учета сопротивления воздуха)

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t - \frac{gt^2}{2}\mathbf{k},$$

где $\mathbf{v}_0\{v_{0x}, v_{0y}, v_{0z}\}$ — начальная скорость. Найти скорость и ускорение снаряда в любой момент времени.

2087. Доказать, что если точка движется по параболе $y = \frac{x^2}{a}$, $z = 0$ таким образом, что проекция скорости на ось OX остается постоянной $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \mathrm{const}\right)$, то и ускорение точки остается постоянным.

2088. Точка, находящаяся на нарезке винта, завинчиваемого в балку, описывает винтовую линию

$$x = a\cos\theta, \quad y = a\sin\theta, \quad z = h\theta,$$

где θ — угол поворота винта, a — радиус винта, а h — высота подъема при повороте на один радиан. Определить скорость движения точки.

2089. Найти скорость точки на окружности колеса радиуса a, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω так, что его центр при этом движется прямолинейно с постоянной скоростью v_0.

§ 19. Естественный трехгранник пространственной кривой

Во всякой неособенной точке $M(x, y, z)$ пространственной кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ можно построить *естественный трехгранник (триэдр)*, состоящий из трех взаимно перпендикулярных плоскостей (рис. 84):

1) *соприкасающейся* плоскости MM_1M_2, содержащей векторы $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$ и $\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$;

2) *нормальной* плоскости MM_2M_3, перпендикулярной вектору $\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$;

3) *спрямляющей* плоскости MM_1M_3, перпендикулярной двум первым плоскостям.

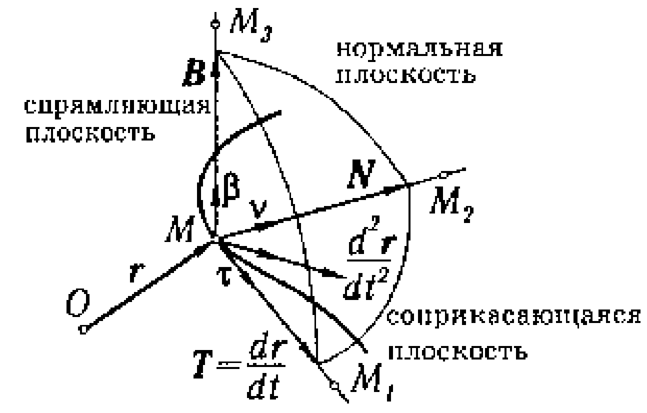


Рис. 84.

В пересечении получаются три прямые: 1) *касательная* MM_1; 2) *главная нормаль* MM_2; 3) *бинормаль* MM_3, определяемые соответственно векторами:

1) $\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}$ (*вектор касательной*);

2) $\mathbf{B} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \times \frac{\mathrm{d}^2\mathbf{r}}{\mathrm{d}t^2}$ (*вектор бинормали*);

3) $\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T}$ (*вектор главной нормали*).

Соответствующие единичные векторы

$$\tau = \frac{\mathbf{T}}{|\mathbf{T}|}; \quad \beta = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}; \quad \nu = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|}$$

могут быть вычислены по формулам

$$\tau = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}; \quad \nu = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}s}\right|}; \quad \beta = \tau \times \nu.$$

Если X, Y, Z — текущие координаты точки касательной, то уравнения касательной в точке $M(x, y, z)$ имеют вид

$$\frac{X - x}{T_x} = \frac{Y - y}{T_y} = \frac{Z - z}{T_z}, \tag{1}$$

где $T_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $T_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $T_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$; из условия перпендикулярности прямой и плоскости получаем уравнение нормальной плоскости

$$T_x(X - x) + T_y(Y - y) + T_z(X - z) = 0. \tag{2}$$

Заменяя в уравнениях (1) и (2) T_x, T_y, T_z на B_x, B_y, B_z и N_x, N_y, N_z, получим уравнения бинормали и главной нормали и, соответственно, соприкасающейся плоскости и спрямляющей плоскости.

Пример 1. Найти основные единичные векторы τ, ν и β кривой

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3$$

в точке $t = 1$.

Написать уравнения касательной, главной нормали и бинормали в этой точке.

Решение. Имеем:

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

и

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k},$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k}.$$

Отсюда при $t = 1$ получим

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k};$$

$$\mathbf{B} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 6\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k};$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 6 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -22\mathbf{i} - 16\mathbf{j} + 18\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$\tau = \frac{\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}}{\sqrt{14}}, \quad \beta = \frac{3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{19}}, \quad \nu = \frac{-11\mathbf{i} - 8\mathbf{j} + 9\mathbf{k}}{\sqrt{266}}.$$

Так как при $t = 1$ имеем $x = 1$, $y = 1$, $z = 1$, то

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

— уравнение касательной,

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$$

— уравнение бинормали,

$$\frac{x-1}{-11} = \frac{y-1}{-8} = \frac{z-1}{9}$$

— уравнение главной нормали.

Если пространственная кривая задана как пересечение двух поверхностей

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0,$$

то вместо векторов $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ и $\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$ можно брать векторы $d\mathbf{r}\{dx, dy, dz\}$ и $d^2\mathbf{r}\{d^2x, d^2y, d^2z\}$, причем одну из переменных x, y, z можно считать независимой и полагать ее второй дифференциал равным нулю.

Пример 2. Написать уравнение соприкасающейся плоскости окружности

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \; x + y + z = 0 \tag{3}$$

в точке ее $M(1; 1; -2)$.

Решение. Дифференцируя систему (3), считая x независимой переменной, будем иметь:

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$
$$dx + dy + dz = 0$$

и

$$dx^2 + dy^2 + y d^2y + dz^2 + z d^2z = 0,$$
$$d^2y + d^2z = 0.$$

Полагая $x = 1$, $y = 1$, $z = -2$, получим:

$$dy = -dx; \; dz = 0;$$
$$d^2y = -\frac{2}{3}\,dx^2; \; d^2z = \frac{2}{3}\,dx^2.$$

Следовательно, соприкасающаяся плоскость определяется векторами

$$\{dx, -dx, 0\} \text{ и } \left\{0, -\frac{2}{3}dx^2, \frac{2}{3}dx^2\right\}$$

или

$$\{1, -1, 0\} \text{ и } \{0, -1, 1\}.$$

Отсюда нормальный вектор соприкасающейся плоскости есть

$$\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

и, следовательно, ее уравнение

$$-1(x - 1) - (y - 1) - (z + 2) = 0,$$

т. е.

$$x + y + z = 0,$$

что и должно быть, так как наша кривая расположена в этой плоскости.

2090. Найти основные единичные векторы τ, ν, β кривой

$$x = 1 - \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t$$

в точке $t = \dfrac{\pi}{2}$.

2091. Найти единичные векторы касательной и главной нормали конический спирали

$$\mathbf{r} = e^t(\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t + \mathbf{k})$$

в произвольной точке. Определить углы, составляемые этими прямыми с осью OZ.

2092. Найти основные единичные векторы τ, ν, β кривой

$$y = x^2, \quad z = 2x$$

в точке $x = 2$.

2093. Для винтовой линии

$$x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt$$

написать уравнения прямых, составляющих ребра естественного трехгранника в произвольной точке линии. Определить направляющие косинусы касательной и главной нормали.

2094. Написать уравнения плоскостей, образующих естественный трехгранник кривой

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6, \quad x^2 - y^2 + z^2 = 4$$

в точке ее $M(1;\ 1;\ 2)$.

2095. Составить уравнения касательной, нормальной плоскости и соприкасающейся плоскости кривой

$$x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^3 \text{ в точке } M(2;\ 4;\ 8).$$

2096. Составить уравнения касательной, нормальной плоскости и соприкасающейся плоскости кривой

$$x = \frac{t^4}{4}, \quad y = \frac{t^3}{3}, \quad z = \frac{t^2}{2}.$$

Найти точки, в которых касательная к этой кривой будет параллельна плоскости $x + 3y + 2z - 10 = 0$.

2097. Составить уравнения касательной, соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали кривой

$$x = t, \quad y = -t, \quad z = \frac{t^2}{2}$$

в точке $t = 2$. Вычислить направляющие косинусы бинормали в этой точке.

2098. Написать уравнения касательной и нормальной плоскости к следующим кривым:

а) $x = R\cos^2 t, \quad y = R\sin t\cos t, \quad z = R\sin t \quad$ при $t = \dfrac{\pi}{4}$;

б) $z = x^2 + y^2$, $x = y$ в точке $(1;\ 1;\ 2)$.

в) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $x + z = 5$ в точке $(2;\ 2\sqrt{3};\ 3)$.

2099. Найти уравнение нормальной плоскости к кривой $z = x^2 - y^2$, $y = x$ в начале координат.

2100. Найти уравнение соприкасающейся плоскости к кривой $x = e^t$, $y = e^{-t}$, $z = t\sqrt{2}$ в точке $t = 0$.

2101. Найти уравнения соприкасающейся плоскости к кривым:

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 - y^2 = 3$ в точке $(2;\ 1;\ 2)$;

б) $x^2 = 4y$, $x^3 = 24z$ в точке $(6;\ 9;\ 9)$;

в) $x^2 + z^2 = a^2$, $y^2 + z^2 = b^2$ в любой точке кривой $(x_0,\ y_0,\ z_0)$.

2102. Составить уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали к кривой

$$y^2 = x, \quad x^2 = z \text{ в точке } (1;\ 1;\ 1).$$

2103. Составить уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали к конической винтовой линии $x = t\cos t$, $y = t\sin t$, $z = bt$ в начале координат. Найти единичные векторы касательной, главной нормали и бинормали в начале координат.

§ 20. Кривизна и кручение пространственной кривой

1°. Кривизна. Под *кривизной* кривой в точке M понимается число

$$K = \frac{1}{R} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\varphi}{\Delta s},$$

где φ — угол поворота касательной (*угол смежности*) на участке кривой $\smile MN$, Δs — длина дуги этого участка кривой. R называется *радиусом кривизны*. Если кривая задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, где s — длина дуги, то

$$\frac{1}{R} = \left|\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right|.$$

Для случая общего параметрического задания кривой имеем

$$\frac{1}{R} = \frac{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} \times \dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right|}{\left|\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\right|^3}. \tag{1}$$

2°. Кручение. Под *кручением (второй кривизной)* кривой в точке M понимается число

$$T = \frac{1}{\rho} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\theta}{\Delta s},$$

где θ — угол поворота бинормали (*угол смежности второго рода*) на участке кривой $\smile MN$. Величина ρ называется *радиусом кручения* или *радиусом второй кривизны*. Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, то

$$\frac{1}{\rho} = \mp\left|\frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}\right| = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{ds}\,\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\,\dfrac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}}{\left(\dfrac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)^2},$$

где знак минус берется в том случае, когда векторы $\dfrac{d\boldsymbol{\beta}}{ds}$ и $\boldsymbol{\nu}$ имеют одинаковое направление, и знак плюс — в противоположном случае.

Если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, где t — произвольный параметр, то

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\,\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,\dfrac{d^3\mathbf{r}}{dt^3}}{\left(\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\times\dfrac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\right)^2}. \tag{2}$$

Пример 1. Найти кривизну и кручение винтовой линии

$$\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + \mathbf{k}bt \quad (a > 0).$$

Решение. Имеем:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{i}a\sin t + \mathbf{j}a\cos t + \mathbf{k}b,$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\mathbf{i}a\cos t - \mathbf{j}a\sin t,$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = -\mathbf{i}a\sin t - \mathbf{j}a\cos t.$$

Отсюда

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i}ab\sin t - \mathbf{j}ab\cos t + a^2\mathbf{k}$$

и

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}\,\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = a^2 b.$$

Следовательно, на основании формул (1) и (2) получим

$$\frac{1}{R} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{(a^2+b^2)^{3/2}} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

и

$$\frac{1}{\rho} = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2},$$

т. е. для винтовой линии кривизна и кручение постоянны.

3°. Формулы Френе

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{ds} = \frac{\boldsymbol{\nu}}{R}, \quad \frac{d\boldsymbol{\nu}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\tau}}{R} + \frac{\boldsymbol{\beta}}{\rho}, \quad \frac{d\boldsymbol{\beta}}{ds} = -\frac{\boldsymbol{\nu}}{\rho}.$$

2104. Доказать, что если кривизна во всех точках линии равна нулю, то линия — прямая.

2105. Доказать, что если кручение во всех точках кривой равно нулю, то кривая — плоская.

2106. Показать, что кривая

$$x = 1 + 3t + 2t^2, \quad y = 2 - 2t + 5t^2, \quad z = 1 - t^2$$

— плоская; найти плоскость, в которой она лежит.

2107. Вычислить кривизну линий:

а) $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \operatorname{ch} t$ при $t = 0$;

б) $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, $y^2 - 2x + z = 0$ в точке $(1; 1; 1)$.

2108. Вычислить кривизну и кручение в любой точке кривых:

а) $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$;

б) $x = a\operatorname{ch} t$, $y = a\operatorname{sh} t$, $z = at$ (*гиперболическая винтовая линия*).

2109. Найти радиусы кривизны и кручения в произвольной точке (x, y, z) линий:

а) $x^2 = 2ay$, $x^3 = 6a^2z$;

б) $x^3 = 3p^2y$, $2xz = p^2$.

2110. Доказать, что тангенциальная и нормальная составляющие вектора ускорения $\mathbf{w}$ выражаются формулами

$$\mathbf{w}_\tau = \frac{dv}{dt}\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{w}_\nu = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{\nu},$$

где v — скорость, R — радиус кривизны траектории, $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$ — единичные векторы касательной и главной нормали к кривой.

2111. По винтовой линии $\mathbf{r} = \mathbf{i}a\cos t + \mathbf{j}a\sin t + bt\mathbf{k}$ движется равномерно точка со скоростью v. Вычислить ее ускорение w.

2112. Уравнение движения есть

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}.$$

Определить в моменты времени $t = 0$ и $t = 1$:

1) кривизну траектории;

2) тангенциальную и нормальную составляющие вектора ускорения движения.

Глава VII

КРАТНЫЕ И КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 1. Двойной интеграл в прямоугольных координатах

1°. Непосредственное вычисление двойных интегралов. *Двойным интегралом* от непрерывной функции $f(x, y)$, распространенным на ограниченную замкнутую область S плоскости XOY, называется предел соответствующей двумерной интегральной суммы

$$\int\limits_{(S)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \lim_{\substack{\max\Delta x_i \to 0 \\ \max\Delta y_k \to 0}} \sum_i \sum_k f(x_i, y_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_k, \qquad (1)$$

где $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$, $\Delta y_k = y_{k+1} - y_k$ и сумма распространена на те значения i и k, для которых точки (x_i, y_k) принадлежат области S.

2°. Расстановка пределов интегрирования в двойном интеграле. Различают два основных вида области интегрирования.

1) Область интегрирования S (рис. 85) ограничена слева и справа прямыми $x = x_1$ и $x = x_2$ $(x_2 > x_1)$, а снизу и сверху — непрерывными кривыми $y = \varphi_1(x)$ (AB) и $y = \varphi_2(x)$ (CD) $[\varphi_2(x) \geqslant \varphi_1(x)]$, каждая из которых пересекается с вертикалью $x = X(x_1 < X < x_2)$ только в одной точке (см. рис. 85). В области S переменная x меняется от x_1 до x_2, а переменная y при постоянном x меняется от $y_1 = \varphi_1(x)$ до $y_2 = \varphi_2(x)$. Вычисление интеграла (1) может быть произведено путем сведения к повторному интегралу по формуле

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

где при вычислении $\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,\mathrm{d}y$ величину x полагают постоянной.

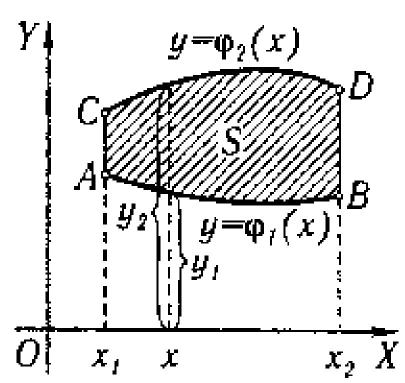


Рис. 85.

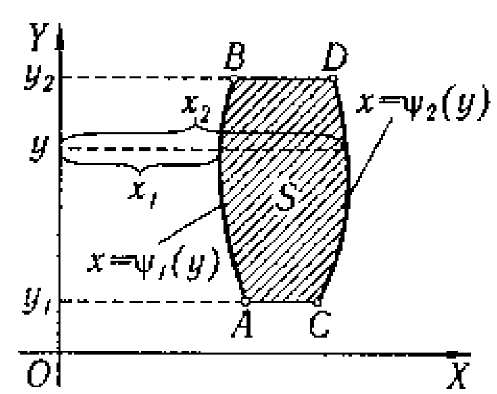


Рис. 86.

2) Область интегрирования S снизу ограничена прямыми $y = y_1$ и $y = y_2$ $(y_2 > y_1)$, а слева и справа — непрерывными кривыми $x = \psi_1(y)$ (AB) и $x = \psi_2(y)$ (CD) $[\psi_2(y) \geqslant \psi_1(y)]$, каждая из которых пересекается с горизонталью $y = Y$ $(y_1 < Y < y_2)$ только в одной точке (рис. 86).

Аналогично предыдущему имеем

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{y_1}^{y_2} \mathrm{d}y \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

где при вычислении интеграла $\int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ величина y считается постоянной.

Если область интегрирования не принадлежит ни к одному из разобранных выше видов, то ее стараются разбить на части, каждая из которых относится к одному из этих двух видов.

Пример 1. Вычислить интеграл

$$I = \int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_x^1 (x + y)\,\mathrm{d}y.$$

Решение.

$$I = \int\limits_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{y=x}^{y=1} \mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left[\left(x + \frac{1}{2}\right) - \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right)\right] \mathrm{d}x = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. Определить пределы интегрирования интеграла

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

если область интегрирования S (рис. 87) ограничена гиперболой $y^2 - x^2 = 1$ и двумя прямыми $x = 2$ и $x = -2$ (имеется в виду область, содержащая начало координат).

Решение. Область интегрирования $ABCD$ (рис. 87) ограничена прямыми $x = -2$ и $x = 2$ и двумя ветвями гиперболы:

$$y = \sqrt{1 + x^2} \text{ и } y = -\sqrt{1 + x^2},$$

т. е. принадлежит к первому виду. Имеем

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int\limits_{-2}^{2} \mathrm{d}x \int\limits_{-\sqrt{1+x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

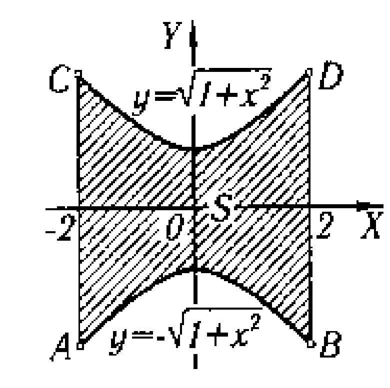


Рис. 87.

Вычислить следующие повторные интегралы:

2113. $\int\limits_0^2 \mathrm{d}y \int\limits_0^1 (x^2 + 2y)\,\mathrm{d}x.$

2114. $\int\limits_3^4 \mathrm{d}x \int\limits_1^2 \frac{\mathrm{d}y}{(x + y)^2}.$

2115. $\int\limits_0^1 \mathrm{d}x \int\limits_0^x \frac{x^2\,\mathrm{d}y}{1 + y^2}.$

2116. $\int\limits_1^2 \mathrm{d}x \int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} \frac{x^2\,\mathrm{d}y}{y^2}.$

2117. $\int\limits_{-3}^{3} dy \int\limits_{y^2-4}^{5} (x + 2y)\, dx.$ **2119.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{0}^{3\cos\varphi} r^2 \sin^2 \varphi\, dr.$

2118. $\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{a\sin\varphi}^{a} r\, dr.$ **2120.** $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\, dy.$

Написать уравнения линий, ограничивающих области, на которые распространены нижеследующие двойные интегралы, и вычертить эти области:

2121. $\int\limits_{-6}^{2} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x, y)\, dx.$ **2124.** $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{\frac{x}{3}}^{2x} f(x, y)\, dy.$

2122. $\int\limits_{1}^{3} dy \int\limits_{x^2}^{x+9} f(x, y)\, dx.$ **2125.** $\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)\, dy.$

2123. $\int\limits_{0}^{4} dy \int\limits_{y}^{10-y} f(x, y)\, dx.$ **2126.** $\int\limits_{-1}^{2} dx \int\limits_{x^2}^{x+2} f(x, y)\, dy.$

Расставить пределы интегрирования в том и другом порядке в двойном интеграле

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy$$

для указанных областей S.

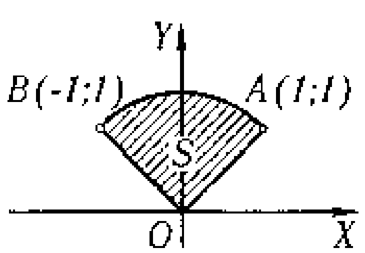


Рис. 88.

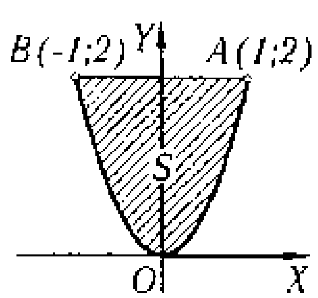


Рис. 89.

2127. S — прямоугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(2;\ 0)$, $B(2;\ 1)$, $C(0;\ 1)$.

2128. S — треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 0)$, $B(1;\ 1)$.

2129. S — трапеция с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(2,\ 0)$, $B(1;\ 1)$, $C(0;\ 1)$.

2130. S — параллелограмм с вершинами $A(1;\ 2)$, $B(2;\ 4)$, $C(2;\ 7)$, $D(1;\ 5)$.

2131. S — круговой сектор OAB с центром в точке $O(0;\ 0)$, у которого концы дуги $A(1;\ 1)$ и $B(-1;\ 1)$ (рис. 88).

2132. S — прямой параболический сегмент AOB, ограниченный параболой BOA и отрезком прямой BA, соединяющим точки $B(-1;\ 2)$ и $A(1;\ 2)$ (рис. 89).

2133. S — круговое кольцо, ограниченное окружностями радиусов $r = 1$ и $R = 2$, с общим центром $O(0;\ 0)$.

2134. S ограничена гиперболой $y^2 - x^2 = 1$ и окружностью $x^2 + y^2 = 9$ (имеется в виду область, содержащая начало координат).

2135. Расставить пределы интегрирования в двойном интеграле

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\, dx\, dy,$$

если область S определяется неравенствами:

а) $x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ x + y \leqslant 1;$ г) $y \geqslant x;\ x \geqslant -1;\ y \leqslant 1;$

б) $x^2 + y^2 \leqslant a^2;$ д) $y \leqslant x \leqslant y + 2a;$

в) $x^2 + y^2 \leqslant x;$ $0 \leqslant y \leqslant a.$

Переменить порядок интегрирования в следующих двойных интегралах:

2136. $\int\limits_{0}^{4} dx \int\limits_{3x^2}^{12x} f(x, y)\, dy.$ **2140.** $\int\limits_{0}^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{4ax}} f(x, y)\, dy.$

2137. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{2x}^{3x} f(x, y)\, dy.$ **2141.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y)\, dx.$

2138. $\int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\, dy.$ **2142.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y)\, dx.$

2139. $\int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2ax - x^2}} f(x, y)\, dy.$

2143. $\int\limits_{0}^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dx \int\limits_{0}^{x} f(x, y)\, dy + \int\limits_{\frac{R\sqrt{2}}{2}}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2 - x^2}} f(x, y)\, dy.$

2144. $\int\limits_{0}^{\pi} dx \int\limits_{0}^{\sin x} f(x, y)\, dy.$

Вычислить следующие двойные интегралы:

2145. $\iint\limits_{(S)} x\, dx\, dy$, где S — треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ 1)$ и $B(0;\ 1)$.

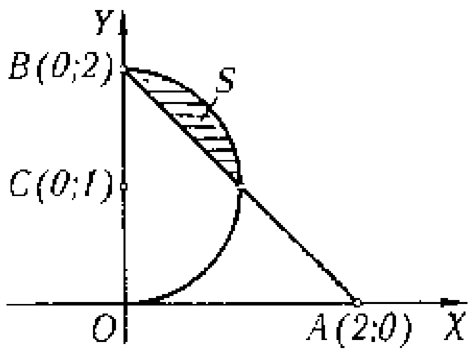


Рис. 90.

2146. $\iint\limits_{(S)} x\,dx\,dy$, где область интегрирования S ограничена прямой, проходящей через точки $A(2;\ 0)$, $B(0;\ 2)$, и дугой окружности с центром в точке $C(0;\ 1)$, радиус 1 (рис. 90).

2147. $\iint\limits_{(S)} \dfrac{dx\,dy}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$, где S — часть круга радиуса a с центром в точке $O(0;\ 0)$, лежащая в первой четверти.

2148. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{x^2-y^2}\,dx\,dy$, где S — треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(1;\ -1)$ и $B(1;\ 1)$.

2149. $\iint\limits_{(S)} \sqrt{xy-y^2}\,dx\,dy$, где S — треугольник с вершинами $O(0;\ 0)$, $A(10;\ 1)$ и $B(1;\ 1)$.

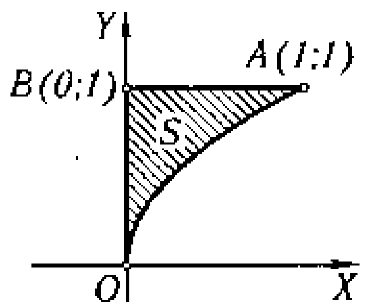


Рис. 91.

2150. $\iint\limits_{(S)} e^{x/y}\,dx\,dy$, где S — криволинейный треугольник OAB, ограниченный параболой $y^2=x$ и прямыми $x=0$, $y=1$ (рис. 91).

2151. $\iint\limits_{(S)} \dfrac{x\,dx\,dy}{x^2+y^2}$, где S — параболический сегмент, ограниченный параболой $y=\dfrac{x^2}{2}$ и прямой $y=x$.

2152. Вычислить интегралы и вычертить области, на которые они распространены:

а) $\displaystyle\int_0^{\pi} dx \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x\,dy$;

б) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx \int_{\cos x}^{1} y^4\,dy$;

в) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{3\cos y} x^2 \sin^2 y\,dx$.

При решении задач №№ 2153—2157 рекомендуется предварительно делать чертеж.

2153. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} xy^2\,dx\,dy,$$

если S есть область, ограниченная параболой $y^2=2px$ и прямой $x=p$.

2154*. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy,$$

распространенный на область S, ограниченную осью OX и верхней полуокружностью $(x-2)^2+y^2=1$.

2155. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt{2a-x}},$$

где S — круг радиуса a, касающийся осей координат и лежащий в первом квадранте.

2156*. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy,$$

где область S ограничена осью абсцисс и аркой циклоиды

$$\begin{cases} x=R(t-\sin t), \\ y=R(1-\cos t) \quad (0\leqslant t\leqslant 2\pi). \end{cases}$$

2157. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} xy\,dx\,dy,$$

в котором область интегрирования S ограничена осями координат и дугой астроиды

$$x=R\cos^3 t,\quad y=R\sin^3 t\quad \left(0\leqslant t\leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

2158. Найти среднее значение функции $f(x,\ y)=xy^2$ в области $S\ \{0\leqslant x\leqslant 1;\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

Указание. Средним значением функции $f(x,\ y)$ в области S называется число

$$\bar f=\frac{1}{\text{пл. } S}\iint\limits_{(S)} f(x,\ y)\,dx\,dy.$$

2159. Найти среднее значение квадрата расстояния точки $M(x,\ y)$ круга $(x-a)^2+y^2\leqslant R^2$ от начала координат.

§ 2. Замена переменных в двойном интеграле

1°. Двойной интеграл в полярных координатах. При переходе в двойном интеграле от прямоугольных координат x, y к полярным r, φ, связанным с прямоугольными координатами соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

имеет место формула

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi. \qquad (1)$$

Если область интегрирования S ограничена лучами $r = \alpha$ и $r = \beta$ ($\alpha < \beta$) и кривыми $r = r_1(\varphi)$ и $r = r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi)$ и $r_2(\varphi)$ ($r_1(\varphi) \leqslant r_2(\varphi)$) — однозначные функции на отрезке $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, то двойной интеграл может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_{(S)} F(\varphi, r)\,r\,dr\,d\varphi = \int\limits_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr,$$

где $F(\varphi, r) = f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$. При вычислении интеграла $\int\limits_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} F(\varphi, r)\,r\,dr$ величину φ полагают постоянной.

Если область интегрирования не принадлежит к рассмотренному виду, то ее разбивают на части, каждая из которых является областью данного вида.

2°. Двойной интеграл в криволинейных координатах. В более общем случае, если $f(x, y)$ непрерывна, и в двойном интеграле

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$$

требуется от переменных x, y перейти к переменным u, v, связанным с x, y непрерывными и дифференцируемыми соотношениями

$$x = \varphi(u, v), \; y = \psi(u, v),$$

устанавливающими взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между точками области S плоскости XOY и точками некоторой области S' плоскости $UO'V$, при этом *якобиан*

$$I = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

сохраняет постоянный знак в области S, то справедлива формула

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{(S')} f\,[\varphi(u, v), \psi(u, v)]\,|I|\,du\,dv.$$

Пределы нового интеграла определяются по общим правилам на основании вида области S'.

Пример 1. Перейдя к полярным координатам, вычислить

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dx\,dy,$$

где область S — круг радиуса $R = 1$ с центром в начале координат (рис. 92).

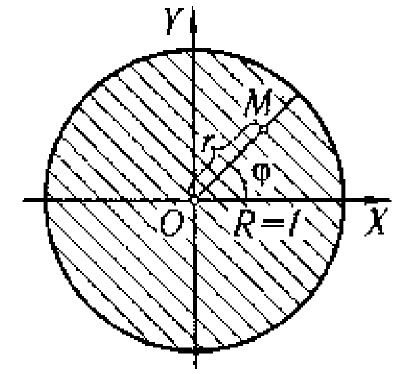


Рис. 92.

Решение. Полагая $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, получаем

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2} = \sqrt{1 - (r\cos\varphi)^2 - (r\sin\varphi)^2} = \sqrt{1 - r^2}.$$

Так как в области S координата r при любом φ изменяется от 0 до 1, а φ изменяется от 0 до 2π, то

$$\iint\limits_{(S)} \sqrt{1 - x^2 - y^2}\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\,dr = \frac{2}{3}\pi.$$

Перейти к полярным координатам r, φ и расставить пределы интегрирования по новым переменным в следующих интегралах:

2160. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x, y)\,dy.$

2161. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^x f(\sqrt{x^2 + y^2})\,dy.$

2162. $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$, где S — треугольник, ограниченный прямыми $y = x$, $y = -x$, $y = 1$.

2163. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_{x^2}^1 f\left(\dfrac{y}{x}\right) dy.$

2164. $\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy$, где область S ограничена лемнискатой

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

2165. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy,$$

где S — полукруг диаметра a с центром в точке $C\left(\dfrac{a}{2}; 0\right)$ (рис. 93).

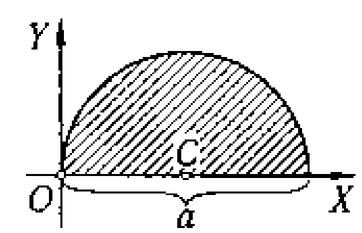


Рис. 93.

2166. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint_{(S)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

распространенный на область, ограниченную окружностью $x^2 + y^2 = 2ax$.

2167. Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл

$$\iint_{(S)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

где область интегрирования S — полукруг радиуса a с центром в начале координат, лежащий выше оси OX.

2168. Вычислить двойной интеграл от функции $f(r, \varphi) = r$ по области, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$ и окружностью $r = a$. (Имеется в виду область, не содержащая полюса.)

2169. Переходя к полярным координатам, вычислить

$$\int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy.$$

2170. Переходя к полярным координатам, вычислить

$$\iint_{(S)} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

где область S ограничена лепестком лемнискаты

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (x \geqslant 0).$$

2171*. Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{(S)} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\, dx\, dy,$$

распространенный на область S, ограниченную эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, переходя к *обобщенным полярным координатам* r и φ по формулам

$$\frac{x}{a} = r\cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = r\sin\varphi.$$

2172.** Преобразовать

$$\int_0^c dx \int_{\alpha x}^{\beta x} f(x, y)\, dy$$

$(0 < \alpha < \beta$ и $c > 0)$, введя новые переменные $u = x + y$, $uv = y$.

2173*. Выполнить замену переменных $u = x + y$, $v = x - y$ в интеграле

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x, y)\, dy.$$

2174.** Вычислить двойной интеграл

$$\iint_{(S)} dx\, dy,$$

где S — область, ограниченная кривой

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2 = \frac{x^2}{h^2} - \frac{y^2}{k^2}.$$

Указание. Произвести замену переменных

$$x = ar\cos\varphi, \quad y = br\sin\varphi.$$

§ 3. Вычисление площадей фигур

1°. Площадь в прямоугольных координатах. *Площадь плоской области* S равна

$$\text{пл. } S = \iint_{(S)} dx\, dy.$$

Если область S определена неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $\varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)$, то

$$\text{пл. } S = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy.$$

2°. Площадь в полярных координатах. Если область S в полярных координатах r и φ определена неравенствами $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$, $f(\varphi) \leqslant r \leqslant F(\varphi)$, то

$$\text{пл. } S = \iint_{(S)} r\, d\varphi\, dr = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{f(\varphi)}^{F(\varphi)} r\, dr.$$

2175. Построить области, площади которых выражаются интегралами:

а) $\displaystyle\int_{-1}^{2} dx \int_{x^2}^{x+2} dy$; б) $\displaystyle\int_0^a dy \int_{a-y}^{\sqrt{a^2 - y^2}} dx$.

Вычислить эти площади и изменить порядок интегрирования.

2176. Построить области, площади которых выражаются интегралами:

$$\text{а)} \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\operatorname{arctg} 2} d\varphi \int\limits_{0}^{3\sec\varphi} r\,dr; \qquad \text{б)} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{a}^{a(1+\cos\varphi)} r\,dr.$$

Вычислить эти площади.

2177. Вычислить площадь, ограниченную прямыми $x = y$, $x = 2y$, $x + y = a$, $x + 3y = a$ $(a > 0)$.

2178. Вычислить площадь, лежащую над осью OX и ограниченную этой осью, параболой $y^2 = 4ax$ и прямой $x + y = 3a$.

2179*. Вычислить площадь, ограниченную эллипсом

$$(y - x)^2 + x^2 = 1.$$

2180. Найти площадь, ограниченную параболами

$$y^2 = 10x + 25 \quad \text{и} \quad y^2 = -6x + 9.$$

2181. Переходя к полярным координатам, найти площадь, ограниченную линиями

$$x^2 + y^2 = 2x, \quad x^2 + y^2 = 4x, \quad y = x, \ y = 0.$$

2182. Найти площадь, ограниченную прямой $r\cos\varphi = 1$ и окружностью $r = 2$. (Имеется в виду площадь, не содержащая полюса.)

2183. Найти площадь, ограниченную кривыми

$$r = a(1 + \cos\varphi) \ \text{ и } \ r = a\cos\varphi \ \ (a > 0).$$

2184. Найти площадь, ограниченную линией

$$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}\right)^2 = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}.$$

2185*. Найти площадь, ограниченную эллипсом

$$(x - 2y + 3)^2 + (3x + 4y - 1)^2 = 100.$$

2186. Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами парабол $x^2 = ay$, $x^2 = by$, $y^2 = \alpha x$, $y^2 = \beta x$ $(0 < a < b,$ $0 < \alpha < \beta)$.

Указание. Ввести новые переменные u и v, полагая

$$x^2 = uy, \ \ y^2 = vx.$$

2187. Найти площадь криволинейного четырехугольника, ограниченного дугами кривых $y^2 = ax$, $y^2 = bx$, $xy = \alpha$, $xy = \beta$ $(0 < a < b,$ $0 < \alpha < \beta)$.

Указание. Ввести новые переменные u и v, полагая

$$xy = u, \ \ y^2 = vx.$$

§ 4. Вычисление объемов тел

Объем V цилиндроида, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости XOY область S (рис. 94), равен

$$V = \iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

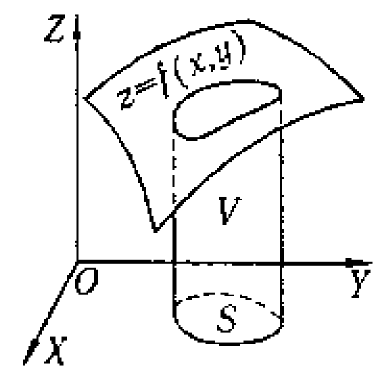


Рис. 94.

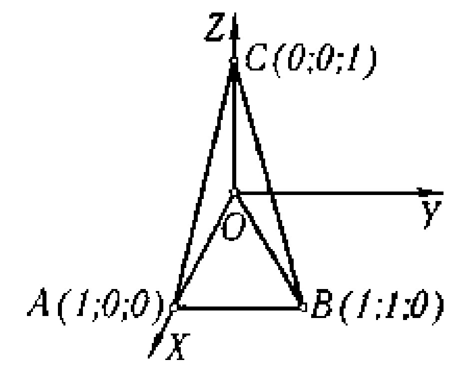


Рис. 95.

2188. Выразить при помощи двойного интеграла объем пирамиды с вершинами $O(0;\ 0;\ 0)$, $A(1;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 0)$ и $C(0;\ 0;\ 1)$ (рис. 95). Расставить пределы интегрирования.

В задачах №№ 2189—2192 нарисовать тела, объемы которых выражаются данными двойными интегралами:

2189. $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1 - x - y)\,dy.$ **2191.** $\displaystyle\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x)\,dy.$

2190. $\displaystyle\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} (4 - x - y)\,dy.$ **2192.** $\displaystyle\int\limits_0^2 dx \int\limits_{2-x}^{2} (4 - x - y)\,dy.$

2193. Нарисовать тело, объем которого выражается интегралом $\displaystyle\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\,dy$, и из геометрических соображений найти значение этого интеграла.

2194. Найти объем тела, ограниченного эллиптическим параболоидом $z = 2x^2 + y^2 + 1$, плоскостью $x + y = 1$ и координатными плоскостями.

2195. Тело ограничено гиперболическим параболоидом $z = x^2 - y^2$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $z = 1$. Вычислить его объем.

2196. Тело ограничено цилиндром $x^2 + z^2 = a^2$ и плоскостями $y = 0$, $z = 0$, $y = x$. Вычислить его объем.

Найти объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

2197. $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$.

2198. $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x + z = 6$, $z = 0$.

2199. $z = x^2 + y^2$, $y = x^2$, $y = 1$, $z = 0$.

2200. $x + y + z = a$, $3x + y = a$, $\frac{3}{2}x + y = a$, $y = 0$, $z = 0$.

2201. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $y = \frac{b}{a}x$, $y = 0$, $z = 0$.

2202. $x^2 + y^2 = 2ax$, $z = \alpha x$, $z = \beta x$ $(\alpha > \beta)$.

В задачах №№ 2203—2211 использовать полярные и обобщенные полярные координаты.

2203. Найти весь объем, заключенный между цилиндром $x^2 + y^2 = a^2$ и гиперболоидом $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

2204. Найти весь объем, заключенный между конусом $2(x^2 + y^2) - z^2 = 0$ и гиперболоидом $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$.

2205. Найти объем, ограниченный поверхностями $2az = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$, $z = 0$.

2206. Определить объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2207. Найти объем тела, ограниченного параболоидом $2az = x^2 + y^2$ и шаром $x^2 + y^2 + z^2 = 3a^2$. (Подразумевается объем, лежащий внутри параболоида.)

2208. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью XOY, цилиндром $x^2 + y^2 = 2ax$ и конусом $x^2 + y^2 = z^2$.

2209. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью XOY, поверхностью $z = a\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ и цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$.

2210. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью XOY, параболоидом $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ и цилиндром $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2\frac{x}{a}$.

2211. В каком отношении гиперболоид $x^2 + y^2 - z^2 = a^2$ делит объем шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$?

2212*. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $z = x + y$, $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$, $y = 2x$, $z = 0$ $(x > 0,\ y > 0)$.

§ 5. Вычисление площадей поверхностей

Площадь σ гладкой однозначной поверхности $z = f(x, y)$, имеющей своей проекцией на плоскость XOY область S, равна

$$\sigma = \iint\limits_{(S)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

2213. Найти площадь части плоскости $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, заключенной между координатными плоскостями.

2214. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = R^2$ $(z \geqslant 0)$, содержащейся между плоскостями $z = mx$ и $z = nx$ $(m > n > 0)$.

2215*. Вычислить площадь части поверхности конуса $x^2 - y^2 = z^2$, расположенной в первом октанте и ограниченную плоскостью $y + z = a$.

2216. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = ax$, вырезанной из него сферой $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2217. Вычислить площадь части поверхности шара $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, вырезанной поверхностью $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2218. Вычислить площадь части поверхности параболоида $y^2 + z^2 = 2ax$, содержащейся между цилиндром $y^2 = ax$ и плоскостью $x = a$.

2219. Вычислить площадь части поверхности цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$, содержащейся между плоскостью XOY и конусом $x^2 + y^2 = z^2$.

2220. 1*. Вычислить площадь части поверхности конуса $x^2 - y^2 = z^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2ax$.

2*. Найти площадь части цилиндра $y^2 = 4x$, вырезанной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 5x$.

3*. Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, вырезанной цилиндром $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

2221*. Доказать, что площади частей поверхностей параболоидов $x^2 + y^2 = 2az$ и $x^2 - y^2 = 2az$, вырезаемых цилиндром $x^2 + y^2 = R^2$, равновелики.

2222*. Шар радиуса a прорезан двумя круглыми цилиндрами, диаметры оснований которых равны радиусу шара и которые касаются друг друга вдоль одного из диаметров шара. Найти объем и площадь поверхности оставшейся части шара.

2223*. В шаре радиуса a вырезан просвет с квадратным основанием, сторона которого также равна a. Ось просвета совпадает с диаметром шара. Найти площадь поверхности шара, вырезанной просветом.

2224*. Вычислить площадь части винтовой поверхности $z = c \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, лежащей в первом октанте и заключенной между цилиндрами $x^2 + y^2 = a^2$ и $x^2 + y^2 = b^2$.

§ 6. Приложения двойного интеграла к механике

1°. Масса и статические моменты пластинки. Если S — область плоскости XOY, занятая пластинкой, и $\rho(x, y)$ — поверхностная плотность пластинки в точке (x, y), то масса M пластинки и ее статические моменты M_X и M_Y относительно осей OX и OY выражаются двойными интегралами

$$M = \iint\limits_{(S)} \rho(x, y)\, dx\, dy,$$

$$M_X = \iint\limits_{(S)} y\, \rho(x, y)\, dx\, dy, \quad M_Y = \iint\limits_{(S)} x\rho(x, y)\, dx\, dy. \qquad (1)$$

Если пластинка однородна, то $\rho(x, y) = \text{const}$.

2°. Координаты центра тяжести пластинки. Если $C(\bar{x}, \bar{y})$ — центр тяжести пластинки, то

$$\bar{x} = \frac{M_Y}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_X}{M},$$

где M — масса пластинки, M_X, M_Y — ее статические моменты относительно осей координат (см. 1°). Если пластинка однородна, то в формулах (1) можно положить $\rho = 1$.

3°. Моменты инерции пластинки. Моменты инерции пластинки относительно осей OX и OY соответственно равны

$$I_X = \iint\limits_{(S)} y^2\rho(x, y)\, dx\, dy, \quad I_Y = \iint\limits_{(S)} x^2\rho(x, y)\, dx\, dy. \qquad (2)$$

Момент инерции пластинки относительно начала координат

$$I_0 = \iint\limits_{(S)} (x^2 + y^2)\rho(x, y)\, dx\, dy = I_X + I_Y. \qquad (3)$$

Полагая $\rho(x, y) = 1$ в формулах (2) и (3), получаем геометрические моменты инерции плоской фигуры.

2225. Найти массу круглой пластинки радиуса R, если плотность ее пропорциональна расстоянию точки от центра и равна δ на краю пластинки.

2226. Пластинка имеет форму прямоугольного треугольника с катетами $OB = a$ и $OA = b$, причем плотность ее в любой точке равна расстоянию точки от катета OA. Найти статические моменты пластинки относительно катетов OA и OB.

2227. Вычислить координаты центра тяжести фигуры $OmAnO$ (рис. 96), ограниченной кривой $y = \sin x$ и прямой OA, проходящей через начало координат и вершину $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ синусоиды.

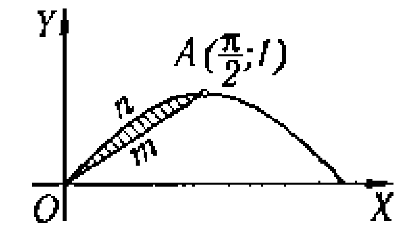


Рис. 96.

2228. Найти координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$.

2229. Найти координаты центра тяжести кругового сектора радиуса a с углом при вершине 2α (рис. 97).

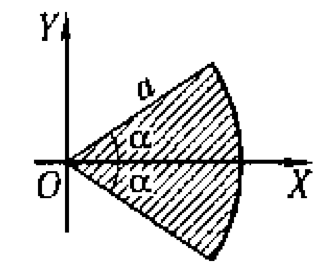


Рис. 97.

2230. Вычислить координаты центра тяжести фигуры, ограниченной параболами $y^2 = 4x + 4$ и $y^2 = -2x + 4$.

2231. Вычислить момент инерции треугольника, ограниченного прямыми $x + y = 2$, $x = 2$, $y = 2$, относительно оси OX.

2232. Найти момент инерции кругового кольца с диаметрами d и D $(d < D)$: а) относительно его центра и б) относительно его диаметра.

2233. Вычислить момент инерции квадрата со стороной a относительно оси, проходящей через его вершину перпендикулярно плоскости квадрата.

2234*. Вычислить момент инерции сегмента, отсекаемого от параболы $y^2 = ax$ прямой $x = a$, относительно прямой $y = -a$.

2235*. Вычислить момент инерции площади, ограниченной гиперболой $xy = 4$ и прямой $x + y = 5$, относительно прямой $x = y$.

2236*. В квадратной пластинке со стороной a плотность пропорциональна расстоянию от одной из ее вершин. Вычислить момент инерции пластинки относительно стороны, проходящей через эту вершину.

2237. Найти момент инерции кардиоиды $r = a(1 + \cos\varphi)$ относительно полюса.

2238. Вычислить момент инерции площади лемнискаты $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$ относительно оси, перпендикулярной ее плоскости в полюсе.

2239*. Вычислить момент инерции однородной пластинки, ограниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и осью OX, относительно оси OX.

§ 7. Тройные интегралы

1°. Тройной интеграл в прямоугольных координатах. Тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$, распространенным на область V, называется предел соответствующей трехкратной суммы:

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0\\ \max \Delta y_j \to 0\\ \max \Delta z_k \to 0}} \sum_i \sum_j \sum_k f(x_i, y_j, z_k)\,\Delta x_i\,\Delta y_j\,\Delta z_k.$$

Вычисление тройного интеграла сводится к последовательному вычислению трех обыкновенных (однократных) интегралов или к вычислению одного двойного и одного однократного.

Пример 1. Вычислить

$$I = \iiint\limits_{(V)} x^3y^2x\,dx\,dy\,dz,$$

где область V определяется неравенствами

$$0 \leqslant x \leqslant 1,\quad 0 \leqslant y \leqslant x,\quad 0 \leqslant z \leqslant xy.$$

Решение. Имеем:

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3y^2z\,dz = \int_0^1 dx \int_0^x x^3y^2 \frac{z^2}{2}\Big|_0^{xy} dy =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^x \frac{x^5y^4}{2}\,dy = \int_0^1 \frac{x^5}{2}\frac{y^5}{5}\Big|_0^x dx = \int_0^1 \frac{x^{10}}{10}\,dx = \frac{1}{110}.$$

Пример 2. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz,$$

распространенный на объем эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$

Решение.

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz = \int_{-a}^{a} x^2\,dx \iint\limits_{(S_{yz})} dy\,dz = \int_{-a}^{a} x^2 S_{yz}\,dx,$$

где S_{yz} есть площадь эллипса $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2}$, $x = \text{const}$, равная

$$S_{yz} = \pi b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Поэтому окончательно имеем

$$\iiint\limits_{(V)} x^2\,dx\,dy\,dz = \pi bc\int_{-a}^{a} x^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{15}\pi a^3bc.$$

2°. Замена переменных в тройном интеграле. Если в тройном интеграле

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

от переменных x, y, z требуется перейти к переменным u, v, w, связанным с x, y, z соотношениями $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, где функции φ, ψ, χ:

1) непрерывны вместе со своими частными производными 1-го порядка;

2) устанавливают взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие между точками области интегрирования V пространства $OXYZ$ и точками некоторой области V' пространства $O'UVW$;

3) функциональный определитель (якобиан) этих функций

$$I = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

сохраняет в области V постоянный знак, то справедлива формула

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{(V')} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)]\,|I|\,du\,dv\,dw.$$

В частности:

1) для цилиндрических координат r, φ, h (рис. 98), где

$$x = r\cos\varphi,\quad y = r\sin\varphi,\quad z = h,$$

получаем, что $I = r$;

2) для сферических координат φ, ψ, r (φ — долгота, ψ — широта, r — радиус-вектор) (рис. 99), где

$$x = r\cos\psi\cos\varphi,\quad y = r\cos\psi\sin\varphi,\quad z = r\sin\psi,$$

имеем $I = r^2\cos\psi$.

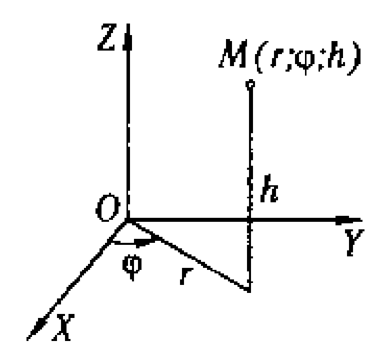


Рис. 98.

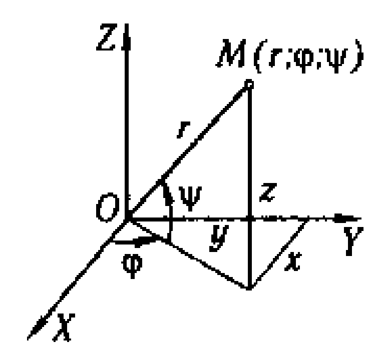


Рис. 99.

Пример 3. Переходя к сферическим координатам, вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где V — шар радиуса R.

Решение. Для шара пределы изменения сферических координат φ (долготы), ψ (широты) и r (радиуса-вектора) будут:

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \ -\frac{\pi}{2} \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}, \ 0 \leqslant r \leqslant R.$$

Поэтому будем иметь

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\, dx\, dy\, dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int\limits_0^R rr^2 \cos\psi\, dr = \pi R^4.$$

3°. Приложения тройных интегралов. *Объем* области трехмерного пространства $OXYZ$ равен

$$V = \iiint\limits_{(V)} dx\, dy\, dz.$$

Масса тела, занимающего область V,

$$M = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

где $\gamma(x, y, z)$ — плотность тела в точке $(x; y; z)$.

Статические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$M_{XY} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z) z\, dx\, dy\, dz;$$

$$M_{YZ} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z) x\, dx\, dy\, dz;$$

$$M_{ZX} = \iiint\limits_{(V)} \gamma(x, y, z) y\, dx\, dy\, dz.$$

Координаты центра тяжести:

$$\bar{x} = \frac{M_{YZ}}{M}, \ \bar{y} = \frac{M_{ZX}}{M}, \ \bar{z} = \frac{M_{XY}}{M}.$$

Если тело однородно, то в формулах для координат центра тяжести можно положить $\gamma(x, y, z) = 1$.

Моменты инерции относительно осей координат:

$$I_X = \iiint\limits_{(V)} (y^2 + z^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$I_Y = \iiint\limits_{(V)} (z^2 + x^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz;$$

$$I_Z = \iiint\limits_{(V)} (x^2 + y^2)\, \gamma(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Положив в этих формулах $\gamma(x, y, z) = 1$, получим геометрические моменты инерции тела.

А. ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$$\iiint\limits_{(V)} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

для указанных областей V:

2240. V — тетраэдр, ограниченный плоскостями

$$x + y + z = 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0.$$

2241. V — цилиндр, ограниченный поверхностями

$$x^2 + y^2 = R^2, \ z = 0, \ z = H.$$

2242*. V — конус, ограниченный поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}, \ z = c.$$

2243. V — объем, ограниченный поверхностями

$$z = 1 - x^2 - y^2, \ z = 0.$$

Вычислить следующие интегралы:

2244. $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 \frac{dz}{\sqrt{x+y+z+1}}$.

2245. $\displaystyle\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2\sqrt{x}} dy \int\limits_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x\, dz$.

2246. $\displaystyle\int\limits_0^a dx \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} \frac{dz}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$.

2247. $\displaystyle\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} xyz\, dz$.

2248. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\, dy\, dz}{(x+y+z+1)^3},$$

где V — область интегрирования, ограниченная координатными плоскостями и плоскостью $x + y + z = 1$.

2249. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} (x + y + z)^2\, dx\, dy\, dz,$$

где V — общая часть параболоида $2az \geqslant x^2 + y^2$ и шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2$.

2250. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} z^2\,dx\,dy\,dz,$$

где V — общая часть шаров $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$ и $x^2+y^2+z^2 \leqslant 2Rz$.

2251. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

где V — объем, ограниченный плоскостью $z=0$ и верхней половиной эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2252. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz,$$

где V — внутренность эллипсоида $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2253. Вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} z\,dx\,dy\,dz,$$

где V — область, ограниченная конусом $z^2=\frac{h^2}{R^2}(x^2+y^2)$ и плоскостью $z=h$.

2254. Переходя к цилиндрическим координатам, вычислить

$$\iiint\limits_{(V)} dx\,dy\,dz,$$

где V — область, ограниченная поверхностями $x^2+y^2+z^2=2Rz$, $x^2+y^2=z^2$ и содержащая точку $(0;\ 0;\ R)$.

2255. Вычислить

$$\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz,$$

преобразовав его предварительно к цилиндрическим координатам.

2256. Вычислить

$$\int\limits_0^{2r} dx \int\limits_{-\sqrt{2rx-x^2}}^{\sqrt{2rx-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{4r^2-x^2-y^2}} dz,$$

преобразовав его предварительно к цилиндрическим координатам.

2257. Вычислить

$$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)\,dz,$$

преобразовав его предварительно к сферическим координатам.

2258. Перейдя к сферическим координатам, вычислить интеграл

$$\iiint\limits_{(V)} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz,$$

где V — внутренность шара $x^2+y^2+z^2 \leqslant x$.

Б. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОБЪЕМОВ С ПОМОЩЬЮ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

2259. Вычислить с помощью тройного интеграла объем тела, ограниченного поверхностями

$$y^2=4a^2-3ax,\ y^2=ax,\ z=\pm h.$$

2260*. Вычислить объем части цилиндра $x^2+y^2=2ax$, содержащейся между параболоидом $x^2+y^2=2az$ и плоскостью XOY.

2261*. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ и конусом $z^2=x^2+y^2$ (внешнего по отношению к конусу).

2262*. Вычислить объем тела, ограниченного сферой $x^2+y^2+z^2=4$ и параболоидом $x^2+y^2=3z$ (внутреннего по отношению к параболоиду).

2263. Вычислить объем тела, ограниченного плоскостью XOY, цилиндром $x^2+y^2=ax$ и сферой $x^2+y^2+z^2=a^2$ (внутреннего по отношению к цилиндру).

2264. 1. Вычислить объем тела, ограниченного параболоидом $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2\frac{x}{a}$ и плоскостью $x=a$.

2. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностью

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}.$$

3. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=2,\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0,\ z \geqslant 0.$$

В. ПРИЛОЖЕНИЯ ТРОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ В МЕХАНИКЕ И ФИЗИКЕ

2265. Найти массу M прямоугольного параллелепипеда $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$, если плотность $\rho(x, y, z)$ в точке (x, y, z) численно равна $x+y+z$.

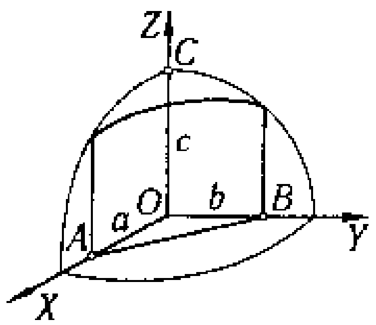


Рис. 100.

2266. Из октанта шара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant c^2$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$ вырезано тело $OABC$, ограниченное координатными плоскостями и плоскостью $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ($a \leqslant c$, $b \leqslant x$) (рис. 100). Найти массу этого тела, если плотность его в каждой точке (x, y, z) равна аппликате этой точки.

2267*. В теле, имеющем форму полушара $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2$, $z \geqslant 0$, плотность изменяется пропорционально расстоянию точки от центра. Найти центр тяжести этого тела.

2268. Найти центр тяжести тела, ограниченного параболоидом $y^2 + 2z^2 = 4x$ и плоскостью $x = 2$.

2269. Найти момент инерции круглого цилиндра, высота которого h и радиус основания a, относительно оси, служащей диаметром основания цилиндра.

2270*. Найти момент инерции круглого конуса, высота которого h, радиус основания a и плотность ρ, относительно диаметра основания.

2271.** Найти силу притяжения однородного конуса высоты h с углом α при вершине (в осевом сечении) к материальной точке единичной массы, расположенной в вершине конуса.

2272.** Показать, что сила притяжения, действующая со стороны однородного шара на внешнюю материальную точку, не изменится, если всю массу шара сосредоточить в его центре.

§ 8. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Несобственные кратные интегралы

1°. Дифференцирование по параметру. При некоторых ограничениях*), налагаемых на функции $f(x, \alpha)$, $f'_\alpha\,(x, \alpha)$ и на соответствующие несобственные интегралы, имеет место *правило Лейбница*

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^\infty f(x, \alpha)\,dx = \int_a^\infty f'_\alpha\,(x, \alpha)\,dx.$$

Пример 1. С помощью дифференцирования по параметру вычислить

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$$

*) См.: Л. Д. Кудрявцев. Краткий курс математического анализа, т. 2, гл. 5, § 49, 50. — Висагинас: «Alfa», 1998.

Решение. Пусть

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\alpha x^2} - e^{-\beta x^2}}{x}\,dx = F(\alpha, \beta).$$

Тогда

$$\frac{\partial F(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = -\int_0^\infty x e^{-\alpha x^2}\,dx = \frac{1}{2\alpha} x e^{-\alpha x^2}\Big|_0^\infty = -\frac{1}{2\alpha}.$$

Отсюда $F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + C(\beta)$. Чтобы найти $C(\beta)$, полагаем в последнем равенстве $\alpha = \beta$. Имеем $0 = -\frac{1}{2}\ln\beta + C(\beta)$.

Отсюда $C(\beta) = \frac{1}{2}\ln\beta$. Следовательно,

$$F(\alpha, \beta) = -\frac{1}{2}\ln\alpha + \frac{1}{2}\ln\beta = \frac{1}{2}\ln\frac{\alpha}{\beta}.$$

2°. Несобственные двойные интегралы. а) Случай бесконечной области. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в неограниченной области S, то полагают

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\sigma \to S}\iint\limits_{(\sigma)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{1}$$

где σ — конечная область, целиком лежащая в S, причем $\sigma \to S$ означает, что мы расширяем область σ по произвольному закону, так чтобы в нее вошла и осталась в ней любая точка области S. Если предел в правой части существует и не зависит от выбора области α, то соответствующий несобственный интеграл называется *сходящимся*, в противном случае — *расходящимся*.

Если подынтегральная функция $f(x, y)$ неотрицательна ($f(x, y) \geqslant 0$), то для сходимости несобственного интеграла необходимо и достаточно, чтобы предел в правой части равенства (1) существовал хотя бы для одной системы областей σ, исчерпывающих область S.

б) Случай разрывной функции. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в ограниченной замкнутой области S всюду, за исключением точки $P(a;\ b)$, то полагают

$$\iint\limits_{(S)} f(x, y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon \to 0}\iint\limits_{(S_\varepsilon)} f(x, y)\,dx\,dy, \tag{2}$$

где S_ε — область, получаемая из S путем удаления малой области диаметра ε, содержащей точку P. В случае существования предела (2), не зависящего от вида удаляемых из области S малых областей, рассматриваемый несобственный интеграл называется *сходящимся*, а в противном случае — *расходящимся*.

Если $f(x, y) \geqslant 0$, то предел в правой части равенства (2) не зависит от вида удаляемых из области S областей; в частности, в качестве таких областей можно брать круги радиуса $\frac{\varepsilon}{2}$ с центром в точке P.

Понятие несобственных двойных интегралов легко переносится на случай тройных интегралов.

Пример 2. Исследовать на сходимость

$$\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p}, \tag{3}$$

где S — вся плоскость XOY.

Решение. Пусть σ — круг радиуса ρ с центром в начале координат. Переходя к полярным координатам, при $p \neq 1$ имеем

$$I(\sigma) = \iint\limits_{(\sigma)} \frac{dx\,dy}{(1+x^2+y^2)^p} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho} \frac{r\,dr}{(1+r^2)^p} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} \frac{1}{2}\,\frac{(1+r^2)^{1-p}}{1-p}\bigg|_0^{\rho} d\varphi = \frac{\pi}{1-p}\left[(1+\rho^2)^{1-p} - 1\right].$$

Если $p < 1$, то $\lim\limits_{\sigma\to S} I(\sigma) = \lim\limits_{\rho\to\infty} I(\sigma) = \infty$ и интеграл расходится. Если же $p > 1$, то $\lim\limits_{\rho\to\infty} I(\sigma) = \frac{\pi}{p-1}$ и интеграл сходится. При $p = 1$ имеем $I(\sigma) = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\rho} \frac{r\,dr}{1+r^2} = \pi\ln(1+\rho^2)$; $\lim\limits_{\rho\to\infty} I(\sigma) = \infty$, т. е. интеграл расходится.

Таким образом, интеграл (3) сходится при $p > 1$.

2273. Найти $f'(x)$, если

$$f(x) = \int\limits_x^{\infty} e^{-xy}\,dy \quad (x > 0).$$

2274. Доказать, что функция

$$u = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{xf(z)}{x^2+(y-z)^2}\,dz$$

удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2275. Преобразование Лапласа $F(p)$ для функции $f(t)$ определяется формулой

$$F(p) = \int\limits_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt.$$

Найти $F(p)$, если: а) $f(t) = 1$; б) $f(t) = e^{\alpha t}$; в) $f(t) = \sin\beta t$; г) $f(t) = \cos\beta t$.

2276. Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\,dx = \frac{1}{n} \quad (n > 0),$$

вычислить интеграл

$$\int\limits_0^1 x^{n-1}\ln x\,dx.$$

2277*. Пользуясь формулой

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-pt}\,dt = \frac{1}{p} \quad (p > 0),$$

вычислить интеграл

$$\int\limits_0^{\infty} t^2 e^{-pt}\,dt.$$

Применяя дифференцирование по параметру, вычислить следующие интегралы:

2278. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

2279. $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x}\sin mx\,dx \quad (\alpha > 0,\ \beta > 0).$

2280. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}\alpha x}{x(1+x^2)}\,dx.$

2281. $\int\limits_0^{1} \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (|\alpha| < 1).$

2282. $\int\limits_0^{\infty} e^{-\alpha x}\frac{\sin\beta x}{x}\,dx \quad (\alpha \geqslant 0).$

Вычислить следующие несобственные интегралы:

2283. $\int\limits_0^{\infty} dx \int\limits_0^{\infty} e^{-(x+y)}\,dy.$ **2284.** $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_0^{y^2} e^{x/y}\,dx.$

2285. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{x^4+y^2}$, где S — область, определяемая неравенствами $x \geqslant 1$, $y \geqslant x^2$.

2286*. $\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty \frac{dy}{(x^2+y^2+a^2)^2}\ (a>0).$

2287. *Интеграл Эйлера—Пуассона*, определяемый формулой $I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$, может быть записан также в виде $I=\int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,dy$. Перемножая эти формулы и переходя затем к полярным координатам, вычислить I.

2288. Вычислить $\int\limits_0^\infty dx \int\limits_0^\infty dy \int\limits_0^\infty \frac{dz}{(x^2+y^2+z^2+1)^2}$.

Исследовать на сходимость несобственные двойные интегралы:

2289.** $\iint\limits_{(S)} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$, где S — круг $x^2+y^2\leqslant 1$.

2290. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{(x^2+y^2)^\alpha}$, где S — область, определяемая неравенством $x^2+y^2\geqslant 1$ («внешность» круга).

2291*. $\iint\limits_{(S)} \frac{dx\,dy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$, где S — квадрат $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$.

2292. $\iiint\limits_{(V)} \frac{dx\,dy\,dz}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$, где V — область, определяемая неравенством $x^2+y^2+z^2\geqslant 1$ («внешность» шара).

§ 9. Криволинейные интегралы

1°. Криволинейный интеграл первого типа. Пусть $f(x, y)$ — непрерывная функция, $y=\varphi[a\leqslant x\leqslant b]$ — некоторая гладкая кривая C.

Построим систему точек $M_i(x_i, y_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$, разбивающих кривую C на элементарные дуги $\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}=\Delta s_i$, и составим интегральную сумму $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta s_i$. Предел этой суммы при $n\to\infty$ и $\max\Delta s_i\to 0$ называется *криволинейным интегралом первого типа*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta s_i=\int\limits_C f(x, y)\,ds$$

(ds — дифференциал дуги) и вычисляется по формуле

$$\int\limits_C f(x, y)\,ds=\int\limits_a^b f(x, \varphi(x))\sqrt{1+(\varphi'(x))^2}\,dx.$$

В случае параметрического задания кривой C: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ $[\alpha\leqslant t\leqslant\beta]$ имеем

$$\int\limits_C f(x, y)\,ds=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t), \psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\,dt.$$

Рассматривают также криволинейные интегралы первого типа от функции трех переменных $f(x, y, z)$, взятые по пространственной кривой, которые вычисляются аналогично. Криволинейный интеграл первого типа *не зависит от направления пути интегрирования*; если подынтегральную функцию f интерпретировать как линейную плотность кривой интеграции C, то этот интеграл представляет собой *массу кривой* C.

Пример 1. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_C (x+y)\,ds,$$

где C — контур треугольника ABO с вершинами $A(1; 0)$, $B(0; 1)$ и $O(0; 0)$ (рис. 101).

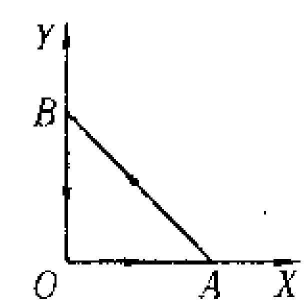


Рис. 101.

Решение. Здесь уравнение AB: $y=1-x$, уравнение OB: $x=0$, уравнение OA: $y=0$.

Поэтому будем иметь

$$\int\limits_C (x+y)\,ds=\int\limits_{AB}(x+y)\,ds+\int\limits_{BO}(x+y)\,ds+\int\limits_{OA}(x+y)\,ds=\int\limits_0^1\sqrt{2}\,dx+\int\limits_0^1 y\,dy+\int\limits_0^1 x\,dx=\sqrt{2}+1.$$

2°. Криволинейный интеграл второго типа. Если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — непрерывные функции, $y=\varphi(x)$ — гладкая кривая C, пробегаемая при изменении x от a до b, то соответствующий *криволинейный интеграл второго типа* выражается следующим образом:

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\int\limits_a^b [P(x, \varphi(x))+\varphi'(x)Q(x, \varphi(x))]\,dx.$$

В более общем случае, когда кривая C задана параметрически: $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, где t изменяется от α до β, имеем

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=\int\limits_\alpha^\beta [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t)+Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)]\,dt.$$

Аналогичные формулы справедливы для криволинейного интеграла второго типа, взятого по пространственной кривой.

Криволинейный интеграл второго типа меняет свой знак на обратный при изменении направления пути интегрирования. Механически этот интеграл можно интерпретировать как работу соответствующей переменной силы $\{P(x, y), Q(x, y)\}$ вдоль кривой интеграции C.

Пример 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\int\limits_C y^2\,dx + x^2\,dy,$$

где C — верхняя половина эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, пробегаемая по часовой стрелке.

Решение. Имеем

$$\int\limits_C y^2\,dx + x^2\,dy = \int\limits_{\pi}^{0} [b^2\sin^2 t\cdot(-a\sin t) + a^2\cos^2 t\cdot b\cos t]\,dt =$$

$$= -ab^2\int\limits_{\pi}^{0}\sin^3 t\,dt + a^2b\int\limits_{\pi}^{0}\cos^3 t\,dt = \frac{4}{3}ab^2.$$

3°. Случай полного дифференциала. Если подынтегральное выражение криволинейного интеграла второго типа есть полный дифференциал некоторой однозначной функции $U = U(x, y)$, т. е. $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = dU(x, y)$, то этот криволинейный интеграл не зависит от пути интегрирования и имеет место формула Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_{(x_1;\,y_1)}^{(x_2;\,y_2)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = U(x_2, y_2) - U(x_1, y_1), \tag{1}$$

где $(x_1; y_1)$ — начальная и $(x_2; y_2)$ — конечная точки пути. В частности, если контур интегрирования C замкнут, то

$$\int\limits_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \tag{2}$$

Если 1) контур интегрирования C содержится целиком внутри некоторой односвязной области S и 2) функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ вместе со своими частными производными 1-го порядка непрерывны в области S, то необходимым и достаточным условием для существования функции U является тождественное выполнение в области S равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \tag{3}$$

(см. § 8 гл. VI). При невыполнении условий 1) и 2) соотношение (3) еще не гарантирует существования однозначной функции U и формулы (1) и (2) могут оказаться неверными (см. задачу № 2332). Укажем способ нахождения функции $U(x, y)$ по ее полному дифференциалу, основанный на использовании криволинейных интегралов (т. е. еще один способ интегрирования полного дифференциала). За контур интегрирования C возьмем ломаную P_0P_1M (рис. 102), где $P_0(x_0; y_0)$ — фиксированная точка, $M(x; y)$ — переменная точка. Тогда вдоль P_0P_1 имеем $y = y_0$ и $dy = 0$, а вдоль P_1M имеем $dx = 0$. Получаем

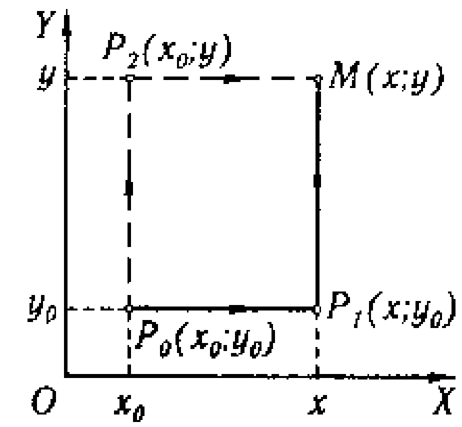


Рис. 102.

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int\limits_{(x_0;\,y_0)}^{(x;\,y)} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy.$$

Аналогично, интегрируя по ломаной P_0P_2M, имеем

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx.$$

Пример 3. $(4x + 2y)\,dx + (2x - 6y)\,dy = dU$. Найти U.

Решение. Здесь $P(x, y) = 4x + 2y$ и $Q(x, y) = 2x - 6y$; причем условие (3), очевидно, выполнено. Пусть $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Тогда

$$U(x, y) = \int\limits_0^x 4x\,dx + \int\limits_0^y (2x - 6y)\,dy + C = 2x^2 + 2xy - 3y^2 + C$$

или

$$U(x, y) = \int\limits_0^y -6y\,dy + \int\limits_0^x (4x + 2y)\,dx + C = -3y^2 + 2x^2 + 2xy + C,$$

где $C = U(0; 0)$ — произвольная постоянная.

4°. Формула Грина для плоскости. Если C — граница области S и функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны, вместе со своими частными производными 1-го порядка, в замкнутой области $S + C$, то справедлива *формула Грина*

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_{(S)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy,$$

где обход контура C выбирается так, чтобы область S оставалась слева.

5°. Приложения криволинейных интегралов. 1) *Площадь*, ограниченная замкнутым контуром C, равна

$$S = -\oint\limits_C y\,dx = \oint\limits_C x\,dy$$

(направление обхода контура выбирается обратным движению часовой стрелки).

Более удобна для приложений следующая формула площади:

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_C (x\,dy - y\,dx) = \frac{1}{2}\oint\limits_C x^2\,d\left(\frac{y}{x}\right).$$

2) *Работа силы*, имеющей проекции $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$ (или соответственно работа силового поля), вдоль пути C выражается интегралом

$$A = \int\limits_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz.$$

Если существует функция $U = U(x, y, z)$ (потенциальная или силовая функция) такая, что

$$\frac{\partial U}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = Z,$$

то работа, независимо от вида пути C, равна

$$A = \int\limits_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = \int\limits_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} dU = U(x_2, y_2, z_2) - U(x_1, y_1, z_1),$$

где (x_1, y_1, z_1) — начальная, (x_2, y_2, x_2) — конечная точки пути.

А. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ПЕРВОГО ТИПА

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

2293. $\int\limits_C xy\,ds$, где C — контур квадрата $|x| + |y| = a$ $(a > 0)$.

2294. $\int\limits_C \frac{ds}{\sqrt{x^2+y^2+4}}$, где C — отрезок прямой, соединяющей точки $O(0; 0)$ и $A(1; 2)$.

2295. $\int\limits_C xy\,ds$, где C — четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащая в первом квадранте.

2296. $\int\limits_C y^2\,ds$, где C — первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

2297. $\int\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,ds$, где C — дуга развертки окружности $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$ $[0 \leqslant t \leqslant 2\pi]$.

2298. $\int\limits_C (x^2 + y^2)^2\,ds$, где C — дуга логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ $(m > 0)$ от точки $A(0; a)$ до точки $O(-\infty; 0)$.

2299. $\int\limits_C (x + y)\,ds$, где C — правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

2300. $\int\limits_C (x + z)\,ds$, где C — дуга кривой $x = t$, $y = \frac{3t^2}{\sqrt{2}}$, $z = t^3$ $[0 \leqslant t \leqslant 1]$.

2301. $\int\limits_C \frac{ds}{x^2+y^2+z^2}$, где C — первый виток винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

2302. $\int\limits_C \sqrt{2y^2+z^2}\,ds$, где C — окружность $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x = y$.

2303*. Найти площадь боковой поверхности параболического цилиндра $y = \frac{3}{8}x^2$, ограниченной плоскостями $z = 0$, $x = 0$, $z = x$, $y = 6$.

2304. Найти длину дуги конической винтовой линии $x = ae^t\cos t$, $y = ae^t\sin t$, $z = ae^t$ от точки $O(0; 0; 0)$ до точки $A(a; 0; a)$.

2305. Определить массу контура эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, если линейная плотность его в каждой точке $M(x, y)$ равна $|y|$.

2306. Найти массу первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, если плотность в каждой точке численно равна значению радиуса-вектора этой точки.

2307. Определить координаты центра тяжести полуарки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)\ [0 \leqslant t \leqslant \pi].$$

2308. Найти момент инерции относительно оси OZ первого витка винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$.

2309. С какой силой масса M, распределенная с постоянной плотностью на окружности $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, воздействует на массу m, помещенную в точке A $(0; 0; b)$?

Б. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ВТОРОГО ТИПА

Вычислить следующие криволинейные интегралы:

2310. $\int\limits_{AB} (x^2 - 2xy)\,dx + (2xy + y^2)\,dy$, где AB — дуга параболы $y = x^2$ от точки $A(1; 1)$ до точки $B(2; 4)$.

2311. $\int\limits_C (2a - y)\,dx + x\,dy$, где C — дуга первой арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t),$$

пробегаемая в направлении возрастания параметра t.

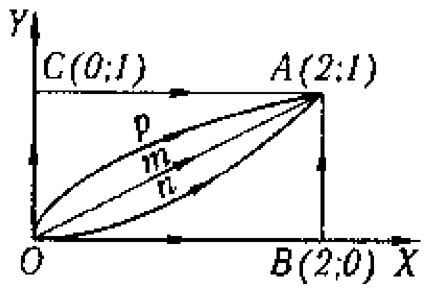


Рис. 103.

2312. $\int\limits_{OA} 2xy\,dx - x^2\,dy$, взятый вдоль различных путей, выходящих из начала координат $O(0;\,0)$ и заканчивающихся в точке $A(2;\,1)$ (рис. 103):

а) прямой OmA;
б) параболы OnA осью симметрии которой является ось OY;
в) параболы OpA, осью симметрии которой является ось OX;
г) ломаной линии OBA;
д) ломаной линии OCA.

2313. $\int\limits_{OA} 2xy\,dx + x^2\,dy$ в условиях задачи № 2312.

2314*. $\oint \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2+y^2}$, взятый вдоль окружности $x^2 + y^2 = a^2$ против хода часовой стрелки.

2315. $\int\limits_{C} y^2\,dx + x^2\,dy$, где C есть верхняя половина эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, пробегаемая по ходу часовой стрелки.

2316. $\int\limits_{AB} \cos y\,dx - \sin x\,dy$, взятый вдоль отрезка AB биссектрисы второго координатного угла, если абсцисса точки A равна 2 и ордината точки B равна 2.

2317. $\oint\limits_{C} \frac{xy(y\,dx - x\,dy)}{x^2+y^2}$, где C — правый лепесток лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$, пробегаемый против хода часовой стрелки.

2318. Вычислить криволинейные интегралы от выражений, являющихся полными дифференциалами:

а) $\int\limits_{(-1;\,2)}^{(2;\,3)} x\,dy + y\,dx$,

б) $\int\limits_{(0;\,1)}^{(3;\,4)} x\,dx + y\,dy$,

в) $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} (x + y)(dx + dy)$,

г) $\int\limits_{(1;\,2)}^{(2;\,1)} \frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}$ (по пути, не пересекающему ось OX),

д) $\int\limits_{\left(\frac{1}{2};\,\frac{1}{2}\right)}^{(x;\,y)} \frac{dx - dy}{x + y}$ (по пути, не пересекающему прямую $x + y = 0$),

е) $\int\limits_{(x_2;\,y_1)}^{(x_2;\,y_2)} \varphi(x)\,dx + \psi(y)\,dy$.

2319. Найдя первообразные функции подынтегральных выражений, вычислить интегралы:

а) $\int\limits_{(-2;\,-1)}^{(3;\,0)} (x^4 + 4xy^3)\,dx + (6x^2y^2 - 5y^4)\,dy$,

б) $\int\limits_{(0;\,-1)}^{(1;\,0)} \frac{x\,dy - y\,dx}{(x-y)^2}$ (путь интегрирования не пересекает прямой $y = x$),

в) $\int\limits_{(1;\,1)}^{(3;\,1)} \frac{(x+2y)\,dx + y\,dy}{(x+y)^2}$ (путь интегрирования не пересекает прямой $y = -x$),

г) $\int\limits_{(0;\,0)}^{(1;\,1)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x\right)dy$.

2320. Вычислить

$$I = \int \frac{x\,dx - y\,dy}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}},$$

взятый по ходу часовой стрелки вдоль четверти эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащей в первом квадранте.

2321. Показать, что если $f(u)$ есть непрерывная функция и C — замкнутый кусочно-гладкий контур, то

$$\oint\limits_{C} f(x^2 + y^2)(x\,dx + y\,dy) = 0.$$

2322. Найти первообразную функцию U, если:

а) $du = (2x + 3y)\,dx + (3x - 4y)\,dy$;
б) $du = (3x^2 - 2xy + y^2)\,dx - (x^2 - 2xy + 3y^2)\,dy$;
в) $du = e^{x-y}[(1 + x + y)\,dx + (1 - x - y)\,dy]$;
г) $du = \frac{dx}{x+y} + \frac{dy}{x+y}$.

Вычислить криволинейные интегралы, взятые вдоль пространственных кривых:

2323. $\int\limits_C (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$, где C — виток винтовой линии

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt, \end{cases}$$

соответствующий изменению параметра t от 0 до 2π.

2324. $\oint\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$, где C — окружность

$$\begin{cases} x = R\cos\alpha\cos t, \\ y = R\cos\alpha\sin t, \\ z = R\sin\alpha\ (\alpha = \text{const}), \end{cases}$$

пробегаемая в направлении возрастания параметра.

2325. $\int\limits_{OA} xy\,dx + yz\,dy + zx\,dz$, где OA — дуга окружности

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx,\ z = x,$$

расположенная по ту сторону от плоскости XOZ, где $y > 0$.

2326. Вычислить криволинейные интегралы от полных дифференциалов:

а) $\int\limits_{(1;\,0;\,-3)}^{(6;\,4;\,8)} x\,dx + y\,dy - z\,dz$,

б) $\int\limits_{(1;\,1;\,1)}^{(a;\,b;\,c)} yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz$,

в) $\int\limits_{(0;\,0;\,0)}^{(3;\,4;\,5)} \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$,

г) $\int\limits_{(1;\,1;\,1)}^{\left(x;\,y;\,\frac{1}{xy}\right)} \dfrac{yz\,dx + zx\,dy + xy\,dz}{xyz}$ (путь интегрирования расположен в первом октанте).

В. ФОРМУЛА ГРИНА

2327. С помощью формулы Грина преобразовать криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C \sqrt{x^2+y^2}\,dx + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})]\,dy,$$

где контур C ограничивает область S.

2328. Применяя формулу Грина, вычислить

$$I = \oint\limits_C 2(x^2+y^2)\,dx + (x+y)^2\,dy,$$

где C — пробегаемый в положительном направлении контур треугольника с вершинами в точках $A(1;\,1)$, $B(2;\,2)$ и $C(1;\,3)$. Проверить найденный результат, вычисляя интеграл непосредственно.

2329. Применяя формулу Грина, вычислить интеграл

$$\oint\limits_C -x^2y\,dx + xy^2\,dy,$$

где C — окружность $x^2 + y^2 = R^2$, пробегаемая против хода часовой стрелки.

2330. Через точки $A(1;\,0)$ и $B(2;\,3)$ проведены парабола AmB, осью которой является ось OY, и хорда ее AnB. Найти

$$\oint\limits_{AmBnA} (x+y)\,dx - (x-y)\,dy$$

непосредственно и применяя формулу Грина.

2331. Найти $\int\limits_{AmB} e^{xy}[y^2\,dx + (1+xy)\,dy]$, если точки A и B лежат на оси OX, а площадь, ограниченная путем интеграции AmB и отрезком AB, равна S.

2332*. Вычислить $\oint\limits_C \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$. Рассмотреть два случая:

а) когда начало координат находится вне контура C,

б) когда контур окружает n раз начало координат.

2333.** Показать, что если C — замкнутая кривая, то

$$\oint\limits_C \cos(X,\,n)\,ds = 0,$$

где s — длина дуги, n — внешняя нормаль.

2334. Применяя формулу Грина, найти интеграл

$$I = \oint\limits_C [x\cos(X, n) + y\sin(X, n)]\,ds,$$

где ds — дифференциал дуги, n — внешняя нормаль к контуру C.

2335*. Вычислить интеграл

$$\oint\limits_C \frac{dx - dy}{x + y},$$

взятый вдоль контура квадрата с вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(0; 1)$, $C(-1; 0)$ и $D(0; -1)$, при условии обхода контура против часовой стрелки.

Г. ПРИЛОЖЕНИЯ КРИВОЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛА

Вычислить площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

2336. Эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

2337. Астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

2338. Кардиоидой $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = a(2\sin t - \sin 2t)$.

2339*. Петлей декартова листа $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $(a > 0)$.

2340. Кривой $(x + y)^3 = axy$.

2341*. Окружность радиуса r катится без скольжения по неподвижной окружности радиуса R, оставаясь вне нее. Предполагая, что $\frac{R}{r}$ — целое число, найти площадь, ограниченную кривой (эпициклоидой), описанной какой-нибудь точкой подвижной окружности. Разобрать частный случай $r = R$ (кардиоида).

2342*. Окружность радиуса r катится без скольжения по неподвижной окружности радиуса R, оставаясь внутри нее. Предполагая, что $\frac{R}{r}$ — целое число, найти площадь, ограниченную кривой (гипоциклоидой), описанной какой-нибудь точкой подвижной окружности. Разобрать частный случай, когда $r = \frac{R}{4}$ (астроида).

2343. Поле образовано постоянной силой F, направленной вдоль положительной полуоси OX. Найти работу поля, когда материальная точка описывает по ходу часовой стрелки четверть окружности $x^2 + y^2 = R^2$, лежащую в первом квадранте.

2344. Найти работу, производимую силой тяжести при перемещении материальной точки массы m из положения $A(x_1; y_1; z_1)$ в положение $B(x_2; y_2; z_2)$ (ось OZ направлена вертикально вверх).

2345. Найти работу упругой силы, направленной к началу координат и пропорциональной удалению точки от начала координат, если точка приложения силы описывает против часовой стрелки четверть эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, лежащую в первом квадранте.

2346. Найти потенциальную функцию силы $R\{X, Y, Z\}$ и определить работу силы на данном участке пути, если:

а) $X = 0$, $Y = 0$, $Z = -mg$ (сила тяжести) и материальная точка перемещается из положения $A(x_1, y_1, z_1)$ в положение $B(x_2, y_2, z_2)$;

б) $X = -\frac{\mu x}{r^3}$, $Y = -\frac{\mu y}{r^3}$, $Z = -\frac{\mu z}{r^3}$, где $\mu = \text{const}$ и $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (сила ньютоновского притяжения) и материальная точка из положения $A(a, b, c)$ удаляется в бесконечность;

в) $X = -k^2 x$, $Y = -k^2 y$, $Z = -k^2 z$, где $k = \text{const}$ (упругая сила), причем начальная точка пути находится на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, а конечная — на сфере $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ $(R > r)$.

§ 10. Поверхностные интегралы

1°. Поверхностный интеграл первого типа. Пусть $f(x, y, z)$ — непрерывная функция, $z = \varphi(x, y)$ — гладкая поверхность S.

Поверхностный интеграл первого типа представляет собой предел интегральной суммы

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\,\Delta S_i,$$

где ΔS_i — площадь i-го элемента поверхности S, точка (x_i, y_i, z_i) принадлежит этому элементу, причем максимальный диаметр элементов разбиения стремится к нулю.

Значение этого интеграла не зависит от выбора стороны поверхности S, по которой производится интегрирование.

Если проекция σ поверхности S на плоскость XOY однозначна, т. е. всякая прямая, параллельная оси OZ, пересекает поверхность S лишь в одной точке, то соответствующий поверхностный интеграл первого типа может быть вычислен по формуле

$$\iint\limits_S f(x, y, z)\,dS = \iint\limits_{(\sigma)} f[x, y, \varphi(x, y)]\sqrt{1 + \varphi_x'^2\ (x, y) + 1 + \varphi_y'^2\ (x, y)}\ dx\,dy.$$

Пример 1. Вычислить поверхностный интеграл

$$\iint\limits_S (x + y + z)\,dS,$$

где S — поверхность куба $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$.

Вычислим сумму поверхностных интегралов по верхней грани куба ($z = 1$) и по нижней грани куба ($z = 0$):

$$\int_0^1\int_0^1 (x + y + 1)\,dx\,dy + \int_0^1\int_0^1 (x + y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 (2x + 2y + 1)\,dx\,dy = 2.$$

Очевидно, что искомый поверхностный интеграл в три раза больше и равен

$$\iint_S (x + y + z)\,dS = 9.$$

2°. Поверхностный интеграл второго типа. Если $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — непрерывные функции, S^+ — сторона гладкой поверхности S, характеризуемая направлением нормали $n\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то соответствующий *поверхностный интеграл второго типа* выражается следующим образом:

$$\iint_{S^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS.$$

При переходе на другую сторону S^- поверхности этот интеграл меняет свой знак на обратный.

Если поверхность S задана в неявном виде $F(x, y, z) = 0$, то направляющие косинусы нормали этой поверхности определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial x},\quad \cos\beta = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial y},\quad \cos\gamma = \frac{1}{D}\frac{\partial F}{\partial z},$$

где

$$D = \pm\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2},$$

и выбор знака перед радикалом должен быть согласован со стороной поверхности S.

3°. Формула Стокса. Если функции $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ непрерывно дифференцируемы и C — замкнутый контур, ограничивающий двустороннюю поверхность S, то имеет место *формула Стокса*

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к поверхности S, причем направление нормали определяется так, чтобы со стороны нормали обход контура C совершался против часовой стрелки (в правой системе координат).

Вычислить следующие поверхностные интегралы первого типа:

2347. $\iint_S (x^2 + y^2)\,dS$, где S — сфера $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2348. $\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\,dS$, где S — боковая поверхность конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ $[0 \leqslant z \leqslant b]$.

Вычислить следующие поверхностные интегралы второго типа:

2349. $\iint_S yz\,dy\,dz + xz\,dz\,dx + xy\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности тетраэдра, ограниченного плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y + z = a$.

2350. $\iint_S z\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

2351. $\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности полусферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(z \geqslant 0)$.

2352. Найти массу поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$, $0 \leqslant z \leqslant 1$, если поверхностная плотность в точке $M(x; y; z)$ равна xyz.

2353. Определить координаты центра тяжести однородной параболической оболочки $az = x^2 + y^2$ $(0 \leqslant z \leqslant a)$.

2354. Найти момент инерции части боковой поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $[0 \leqslant z \leqslant h]$ относительно оси OZ.

2355. Применяя формулу Стокса, преобразовать интегралы:

а) $\oint_C (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - zx)\,dy + (z^2 - xy)\,dz$;

б) $\oint_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$.

Применяя формулу Стокса, найти данные интегралы и проверить результаты непосредственным вычислением:

2356. $\oint_C (y + z)\,dx + (z + x)\,dy + (x + y)\,dz$, где C — окружность

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\quad x + y + z = 0.$$

2357. $\oint_C (y - z)\,dx + (z - x)\,dy + (x - y)\,dz$, где C — эллипс

$$x^2 + y^2 = 1,\quad x + z = 1.$$

2358. $\oint\limits_C x\,dx + (x+y)\,dy + (x+y+z)\,dz$, где C — кривая $x = a\sin t$, $y = a\cos t$, $z = a(\sin t + \cos t)$ $[0 \leqslant t \leqslant 2\pi]$.

2359. $\oint\limits_C y^2\,dx + z^2\,dy + x^2\,dz$, где $ABCA$ — контур ΔABC с вершинами $A(a;\,0;\,0)$, $B(0;\,a;\,0)$, $C(0;\,0;\,a)$.

2360. В каком случае криволинейный интеграл

$$I = \oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

по любому замкнутому контуру C равен нулю?

§ 11. Формула Остроградского—Гаусса

Если S — замкнутая гладкая поверхность, ограничивающая объем V, и $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$ — функции, непрерывные вместе со своими частными производными 1-го порядка в замкнутой области V, то имеет место *формула Остроградского—Гаусса*

$$\iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

Применяя формулу Остроградского—Гаусса, преобразовать следующие поверхностные интегралы по замкнутым поверхностям S, ограничивающим объем V ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S).

2361. $\iint\limits_S xy\,dx\,dy + yz\,dy\,dz + zx\,dz\,dx.$

2362. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy.$

2363. $\iint\limits_S \dfrac{x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dS.$

2364. $\iint\limits_S \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \dfrac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right) dS.$

С помощью формулы Остроградского—Гаусса вычислить следующие поверхностные интегралы:

2365. $\iint\limits_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона поверхности куба $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant a$.

2366. $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$, где S — наружная сторона пирамиды, ограниченной поверхностями $x + y + z = a$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

2367. $\iint\limits_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$, где S — внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

2368. $\iint\limits_S (x^2\cos\alpha + y^2\cos\beta + z^2\cos\gamma)\,dS$, где S — внешняя полная поверхность конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 0\ [0 \leqslant z \leqslant b].$$

2369. Доказать, что если S — замкнутая поверхность и l — любое постоянное направление, то

$$\iint\limits_S \cos(n, l)\,dS = 0,$$

где n — внешняя нормаль к поверхности S.

2370. Доказать, что объем тела V, ограниченного поверхностью S, равен

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы внешней нормали к поверхности S.

§ 12. Элементы теории поля

1°. Скалярное и векторное поля. *Скалярное поле* определяется скалярной функцией точки $u = f(P) = f(u, y, z)$, где $P(x, y, z)$ — точка пространства. Поверхности $f(x, y, z) = C$, где $C = \text{const}$, называются *поверхностями уровня* скалярного поля.

Векторное поле определяется векторной функцией точки $\mathbf{a} = \mathbf{a}(P) = \mathbf{a}(\mathbf{r})$, где P — точка пространства, $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ — радиус-вектор точки P. В координатной форме $\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$, где $a_x = a_x(x, y, z)$, $a_y = a_y(x, y, z)$, $a_z = a_z(x, y, z)$ — проекции вектора $\mathbf{a}$ на координатные оси. *Векторные линии (силовые линии, линии тока)* векторного поля находятся из системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z}.$$

Скалярное или векторное поле, не зависящее от времени t, называется *стационарным*, а зависящее от времени — *нестационарным*.

2°. Градиент. Вектор

$$\operatorname{grad} U(P) = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k} \equiv \nabla U,$$

где $\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$ — оператор Гамильтона (набла), называется *градиентом* поля $U = f(P)$ в данной точке P (ср. гл. VI, § 6). Градиент направлен по нормали n к поверхности уровня в точке P в сторону возрастания функции U и имеет длину, равную

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2}.$$

Если направление задано единичным вектором $l\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$, то

$$\frac{\partial U}{\partial l} = \operatorname{grad} U \cdot \mathbf{l} = \operatorname{grad}_l U = \frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma$$

(*производная функции U по направлению l*).

3°. Дивергенция и вихрь. *Дивергенцией* векторного поля

$$\mathbf{a}(P) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

называется скаляр $\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \equiv \nabla\mathbf{a}$.

Вихрем векторного поля $\mathbf{a}(P) = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_k\mathbf{k}$ называется вектор

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \equiv \nabla\times\mathbf{a}.$$

4°. Поток вектора. *Потоком* векторного поля $\mathbf{a}(P)$ через поверхность S в сторону, определяемую единичным вектором нормали $\mathbf{n}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ к поверхности S, называется интеграл

$$\iint_S \mathbf{an}\,dS = \iint_S a_n\,dS = \iint_S (a_x\cos\alpha + a_y\cos\beta + a_z\cos\gamma)\,dS.$$

Если S — замкнутая поверхность, ограничивающая объем V, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности S, то справедлива *формула Остроградского—Гаусса*, которая в векторной форме имеет вид

$$\iint_S a_n\,dS = \iiint_{(V)} \operatorname{div}\mathbf{a}\,dx\,dy\,dz.$$

5°. Циркуляция вектора; работа поля. *Линейный интеграл* от вектора $\mathbf{a}$ по кривой C определяется формулой

$$\int_C \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \int_C a_s\,ds = \int_C a_x\,dx + a_y\,dy + a_z\,dz \qquad (1)$$

и представляет собой *работу* поля $\mathbf{a}$ вдоль кривой C (a_s — проекция вектора $\mathbf{a}$ на касательную к C).

Если кривая C — замкнутая, то линейный интеграл (1) называется *циркуляцией* векторного поля $\mathbf{a}$ вдоль контура C.

Если замкнутая кривая C ограничивает двустороннюю поверхность S, то справедлива *формула Стокса*, которая в векторной форме имеет вид

$$\oint_C \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = \iint_S \mathbf{n}\operatorname{rot}\mathbf{a}\,dS = \iint_S (\operatorname{rot}\mathbf{a})_n\,dS,$$

где $\mathbf{n}$ — вектор нормали к поверхности S, направление которого должно быть выбрано так, чтобы для наблюдателя, смотрящего по направлению $\mathbf{n}$, обход контура C совершался в правой системе координат против часовой стрелки.

6°. Потенциальное и соленоидальное поля. Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется *потенциальным*, если

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} U,$$

где $U = f(\mathbf{r})$ — скалярная функция (*потенциал* поля).

Для потенциальности поля $\mathbf{a}$, заданного в односвязной области, необходимо и достаточно, чтобы оно было *безвихревым*, т. е. чтобы $\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0$. В этом случае существует потенциал U, определяемый из уравнения

$$dU = a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Если потенциал U — однозначная функция, то $\int_{AB} \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = U(B) - U(A)$; в частности, циркуляция вектора $\mathbf{a}$ равна нулю: $\oint_C \mathbf{a}\,d\mathbf{r} = 0$.

Векторное поле $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ называется *соленоидальным*, если в каждой точке поля $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$; в этом случае поток вектора через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Если поле является одновременно потенциальным и соленоидальным, то $\operatorname{div}(\operatorname{grad} U) = 0$ и потенциальная функция является гармонической, т. е. удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$, или $\Delta U = 0$, где $\Delta = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа.

2371. Определить поверхности уровня скалярного поля $U = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Каковы будут поверхности уровня поля $U = F(\rho)$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$?

2372. Определить поверхности уровня скалярного поля

$$U = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

2373. Показать, что векторными линиями векторного поля $\mathbf{a}(P) = \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, являются прямые, параллельные вектору $\mathbf{c}$.

2374. Найти векторные линии поля $\mathbf{a} = -\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}$, где ω — постоянная.

2375. Вывести формулы:

а) $\operatorname{grad}(C_1U + C_2V) = C_1\operatorname{grad} U + C_2\operatorname{grad} V$, где C_1 и C_2 — постоянные;

б) $\operatorname{grad}(UV) = U\operatorname{grad} V + V\operatorname{grad} U$;

в) $\operatorname{grad}(U^2) = 2U\operatorname{grad} U$;

г) $\operatorname{grad}\left(\frac{U}{V}\right) = \frac{V \operatorname{grad} U - U \operatorname{grad} V}{V^2}$;

д) $\operatorname{grad}\varphi(U) = \varphi'(U)\operatorname{grad} U$.

2376. Найти модуль и направление градиента поля

$$U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

в точке $A(2;\ 1;\ 1)$. Определить, в каких точках градиент поля перпендикулярен оси OZ и в каких точках равен нулю.

2377. Вычислить $\operatorname{grad} U$, если U равно соответственно: а) r, б) r^2, в) $\frac{1}{r}$, г) $f(r)$ $(r = \sqrt{x^2+y^2+z^2})$.

2378. Найти градиент скалярного поля $U = \mathbf{c}\mathbf{r}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор. Каковы будут поверхности уровня этого поля и как они расположены относительно вектора $\mathbf{c}$?

2379. Найти производную функции $U = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ в данной точке $P(x, y, z)$ в направлении радиуса-вектора $\mathbf{r}$ этой точки. В каком случае эта производная будет равна величине градиента?

2380. Найти производную функции $U = \frac{1}{r}$ в направлении $\mathbf{l}\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$. В каком случае эта производная равна нулю?

2381. Вывести формулы:

а) $\operatorname{div}(C_1\mathbf{a}_1 + C_2\mathbf{a}_2) = C_1\operatorname{div}\mathbf{a}_1 + C_2\operatorname{div}\mathbf{a}_2$, где C_1 и C_2 — постоянные;

б) $\operatorname{div}(U\mathbf{c}) = \operatorname{grad} U \cdot \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор;

в) $\operatorname{div}(U\mathbf{a}) = \operatorname{grad} U \cdot \mathbf{a} + U\operatorname{div}\mathbf{a}$.

2382. Вычислить $\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$.

2383. Найти $\operatorname{div}\mathbf{a}$ для центрального векторного поля $\mathbf{a}(P) = f(r)\left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

2384. Вывести формулы:

а) $\operatorname{rot}(C_1\mathbf{a}_1 + C_2\mathbf{a}_2) = C_1\operatorname{rot}\mathbf{a}_1 + C_2\operatorname{rot}\mathbf{a}_2$, где C_1 и C_2 — постоянные;

б) $\operatorname{rot}(U\mathbf{c}) = \operatorname{grad} U \times \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор;

в) $\operatorname{rot}(U\mathbf{a}) = \operatorname{grad} U \times \mathbf{a} + U\operatorname{rot}\mathbf{a}$.

2385. Вычислить дивергенцию и вихрь вектора $\mathbf{a}$, если: а) $\mathbf{a} = \mathbf{r}$; б) $\mathbf{a} = r\mathbf{c}$; в) $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

2386. Найти дивергенцию и вихрь поля линейных скоростей точек тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси OZ в направлении против хода часовой стрелки.

2387. Вычислить вихрь поля линейных скоростей $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ точек тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат.

2389. Доказать, что $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{a}) = 0$.

2390. Пользуясь теоремой Остроградского—Гаусса, доказать, что поток вектора $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ через замкнутую поверхность, ограничивающую произвольный объем V, равен утроенному объему.

2391. Найти поток вектора $\mathbf{r}$ через полную поверхность цилиндра $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, $0 \leqslant z \leqslant H$.

2392. Найти поток вектора $\mathbf{a} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ через: а) боковую поверхность конуса $\frac{x^2+y^2}{R^2} \leqslant \frac{z^2}{H^2}$, $0 \leqslant z \leqslant H$; б) через полную поверхность этого конуса.

2393*. Вычислить дивергенцию и поток силы притяжения $\mathbf{F} = -\frac{m\mathbf{r}}{r^3}$ точки массы m, помещенной в начале координат, через произвольную замкнутую поверхность, окружающую эту точку.

2394. Вычислить линейный интеграл вектора $\mathbf{r}$ вдоль одного витка винтовой линии $x = R\cos t$; $y = R\sin t$; $z = ht$ от $t = 0$ до $t = 2\pi$.

2395. С помощью теоремы Стокса вычислить циркуляцию вектора $\mathbf{a} = x^2y^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + z\mathbf{k}$ вдоль окружности $x^2 + y^2 = R^2$; $z = 0$, приняв в качестве поверхности полусферу $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$.

2396. Показать, что если сила $\mathbf{F}$ — центральная, т. е. направлена к неподвижной точке 0 и зависит только от расстояния r до этой точки: $\mathbf{F} = f(r)\mathbf{r}$, где $f(r)$ — однозначная непрерывная функция, то поле — потенциальное. Найти потенциал U поля.

2397. Найти потенциал U гравитационного поля, создаваемого материальной точкой массы m, помещенной в начале координат: $\mathbf{a} = -\frac{m}{r^3}\mathbf{r}$. Показать, что потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta U = 0$.

2398. Выяснить, имеет ли данное векторное поле потенциал U, и найти U, если потенциал существует:

а) $\mathbf{a} = (5x^2y - 4xy)\mathbf{i} + (3x^2 - 2y)\mathbf{j}$;

б) $\mathbf{a} = yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$;

в) $\mathbf{a} = (y + z)\mathbf{i} + (x + z)\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}$.

2399. Доказать, что пространственное центральное поле $\mathbf{a} = f(r)\mathbf{r}$ будет соленоидальным только при $f(r) = \frac{k}{r^3}$, где $k = \text{const}$.

2400. Будет ли соленоидальным векторное поле $\mathbf{a} = r(\mathbf{c} \times \mathbf{r})$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор?

Глава VIII

РЯДЫ

§ 1. Числовые ряды

1°. Основные понятия. Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1)$$

называется *сходящимся*, если его *частичная сумма*

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

имеет предел при $n \to \infty$. Величина $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется при этом *суммой* ряда, а число

$$R_n = S - S_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$$

— *остатком* ряда. Если предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд называется *расходящимся*.

Если ряд сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ *(необходимый признак сходимости)*. Обратное утверждение неверно.

Для сходимости ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для всякого положительного числа ε можно было подобрать такое N, что при $n > N$ и любом положительном p выполнялось неравенство

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

(критерий Коши).

Сходимость или расходимость ряда не нарушится, если прибавить или отбросить конечное число его членов.

2°. Признаки сходимости и расходимости знакоположительных рядов.

а) Признак сравнения I. Если $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ начиная с некоторого $n = n_0$ и ряд

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad (2)$$

сходится, то ряд (1) также сходится. Если ряд (1) расходится, то расходится и ряд (2).

В качестве рядов для сравнения удобно, в частности, выбирать *геометрическую прогрессию*

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n \quad (a \neq 0),$$

которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geqslant 1$, и *гармонический ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

являющийся рядом расходящимся.

Пример 1. Ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2^2} + \frac{1}{3\cdot 2^3} + \dots + \frac{1}{n\cdot 2^2} + \dots$$

сходится, так как здесь

$$a_n = \frac{1}{n\cdot 2^n} < \frac{1}{2^n},$$

причем геометрическая прогрессия

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n},$$

знаменатель которой $q = \frac{1}{2}$, сходится.

Пример 2. Ряд

$$\frac{\ln 2}{2} + \frac{\ln 3}{3} + \dots + \frac{\ln n}{n} + \dots$$

расходится, так как его общий член $\frac{\ln n}{n}$ больше соответствующего члена $\frac{1}{n}$ гармонического ряда (который расходится).

б) Признак сравнения II. Если существует конечный и отличный от нуля предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ (в частности, если $a_n \sim b_n$), то ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Пример 3. Ряд

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \dots$$

расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n-1} : \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \neq 0,$$

в то время как ряд с общим членом $\frac{1}{n}$ расходится.

Пример 4. Ряд

$$\frac{1}{2-1}+\frac{1}{2^2-2}+\frac{1}{2^3-3}+\ldots+\frac{1}{2^n-n}+\ldots$$

сходится, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n-n}:\frac{1}{2^n}\right)=1,\text{ т. е. }\frac{1}{2^n-n}\sim\frac{1}{2^n},$$

а ряд с общим членом $\frac{1}{2^n}$ сходится.

в) Признак Даламбера. Пусть $a_n > 0$ (начиная с некоторого n) и существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=q.$$

Тогда ряд (1) сходится, если $q < 1$, и расходится, если $q > 1$. Если $q = 1$, то вопрос о сходимости ряда остается открытым.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}+\ldots$$

Решение. Здесь

$$a_n=\frac{2n-1}{2^n},\qquad a_{n+1}=\frac{2n+1}{2^{n+1}}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\,2^n}{2^{n+1}(2n-1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2n}}{1-\frac{1}{2n}}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

г) Признак Коши. Пусть $a_n \geqslant 0$ (начиная с некоторого n_0) существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q.$$

Тогда ряд (1) сходится, если $q<1$, и расходится, если $q>1$. В том случае, когда $q = 1$, вопрос о сходимости ряда остается открытым.

д) Интегральный признак Коши. Если $a_n = f(n)$, где функция $f(x)$ положительна, монотонно убывает и непрерывна при $x \geqslant a \geqslant 1$, то ряд (1) и интеграл

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

сходятся или расходятся одновременно.

С помощью интегрального признака доказывается, что *ряд Дирихле*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\tag{3}$$

сходится, если $p > 1$, и расходится, если $p \leqslant 1$. Сходимость многих рядов можно исследовать при помощи сравнения с соответствующим рядом Дирихле (3).

Пример 6. Исследовать сходимость ряда

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)2n}+\ldots$$

Решение. Имеем

$$a_n=\frac{1}{(2n-1)2n}=\frac{1}{4n^2}\frac{1}{1-\frac{1}{2n}}\sim\frac{1}{4n^2}.$$

Так как ряд Дирихле при $p = 2$ сходится, то на основании признака сравнения II можно утверждать, что и данный ряд сходится.

3°. Признаки сходимости знакопеременных рядов. Если ряд

$$|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|+\ldots,\tag{4}$$

составленный из модулей членов ряда (1), сходится, то ряд (1) также сходится и называется *абсолютно сходящимся*. Если же ряд (1) сходится, а ряд (4) расходится, то ряд (1) называется *условно* (*неабсолютно*) *сходящимся*.

Для исследования на абсолютную сходимость ряда (1) можно использовать для ряда (4) известные признаки сходимости знакоположительных рядов. В частности, ряд (1) сходится абсолютно, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|<1\text{ или }\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}<1.$$

В общем случае из расходимости ряда (4) не следует расходимость ряда (1). Но если $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n+1}{a_n}\right|>1$ или $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}>1$, то расходится не только ряд (4), но и ряд (1).

Признак Лейбница. Если для знакочередующегося ряда

$$b_1-b_2+b_3-b_4+\ldots\quad(b_n\geqslant 0)\tag{5}$$

выполнены условия: 1) $b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \ldots$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, то ряд (5) сходится.

Для остатка ряда R_n в этом случае справедлива оценка

$$|R_n|\leqslant b_{n-1}.$$

Пример 7. Исследовать сходимость ряда

$$1-\left(\frac{2}{3}\right)^2-\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\ldots.$$

Решение. Составим ряд из модулей членов данного ряда:

$$1+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{7}\right)^4+\ldots+\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n+\ldots.$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n-1}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2},$$

то данный ряд сходится абсолютно.

Пример 8. Ряд

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots$$

сходится, так как выполнены условия признака Лейбница. Этот ряд сходится неабсолютно (условно), так как ряд

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

расходится (гармонический ряд).

Примечание. Для сходимости знакочередующегося ряда недостаточно, чтобы его общий член стремился к нулю. Признак Лейбница утверждает лишь, что знакочередующийся ряд сходится, если модуль общего члена ряда стремится к нулю монотонно. Так, например, ряд

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}-\ldots+\frac{1}{k}-\frac{1}{5^k}+\ldots$$

расходится, несмотря на то что его общий член стремится к нулю (монотонность изменения модуля общего члена здесь, конечно, нарушена). Действительно, здесь $S_{2k}=S'_k+S''_k$, где

$$S'_k=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k},\qquad S''_k=-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^k}\right),$$

причем $\lim\limits_{k\to\infty}S'_k=\infty$ (S''_k — частная сумма гармонического ряда), в то время как предел $\lim\limits_{k\to\infty}S''_k$ существует и конечен (S''_k — частная сумма сходящейся геометрической прогрессии), следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}S_{2k}=\infty$.

С другой стороны, для сходимости знакочередующегося ряда выполнение признака Лейбница не необходимо: знакочередующийся ряд может сходиться, если абсолютная величина его общего члена стремится к нулю не монотонно.

Так, ряд

$$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)^3}-\frac{1}{(2n)^2}+\ldots$$

сходится, и притом абсолютно, хотя признак Лейбница и не выполнен: абсолютная величина общего члена ряда хотя и стремится к нулю, но не монотонно.

4°. Ряды с комплексными членами. Ряд с общим членом $c_n=a_n+ib_n$ ($i^2=-1$) сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся ряды с действительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$, причем в этом случае

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n+i\sum_{n=1}^{\infty}b_n. \tag{6}$$

Ряд (6) заведомо сходится и называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n^2+b_n^2},$$

членами которого являются модули членов ряда (6).

5°. Действия над рядами.

а) Сходящийся ряд можно умножать почленно на любое число k, т. е. если

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=S,$$

то

$$ka_1+ka_2+\ldots+ka_n+\ldots=kS.$$

б) Под *суммой (разностью)* двух сходящихся рядов

$$a_1+a_2+\ldots+a_n+\ldots=S_1, \tag{7}$$

$$b_1+b_2+\ldots+b_n+\ldots=S_2 \tag{8}$$

понимается соответствующий ряд

$$(a_1\pm b_1)+(a_2\pm b_2)+\ldots+(a_n\pm b_n)+\ldots=S_1\pm S_2.$$

в) *Произведением* рядов (7) и (8) называется ряд

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots, \tag{9}$$

где $c_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1$ ($n=1, 2, \ldots$).

Если ряды (7) и (8) сходятся абсолютно, то ряд (9) сходится также абсолютно и имеет сумму, равную S_1S_2.

г) Если ряд сходится абсолютно, то его сумма не изменяется при перестановке членов ряда. Это свойство не имеет места в случае, если ряд сходится неабсолютно.

Написать простейшую формулу n-го члена ряда по указанным членам:

2401. $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots.$

2402. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\ldots.$

2403. $1+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}\ldots.$

2404. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\ldots.$

2405. $\frac{3}{4}+\frac{4}{9}+\frac{5}{16}+\frac{6}{25}+\ldots$. **2406.** $\frac{2}{5}+\frac{4}{8}+\frac{6}{11}+\frac{8}{14}+\ldots$.

2407. $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\ldots$.

2408. $1+\frac{1\cdot 3}{1\cdot 4}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10}\ \ldots$.

2409. $1-1+1-1+1-1+\ldots$.

2410. $1+\frac{1}{2}+3+\frac{1}{4}+5+\frac{1}{6}+\ldots$.

В примерах №№ 2411—2415 требуется написать 4—5 первых членов ряда по известному общему члену a_n.

2411. $a_n=\frac{3n-2}{n^2+1}$.

2412. $a_n=\frac{(-1)^n n}{2^n}$.

2413. $a_n=\frac{2+(-1)^n}{n^2}$.

2414. $a_n=\frac{1}{[3+(-1)^n]^n}$.

2415. $a_n=\frac{\left(2+\sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$.

Исследовать сходимость рядов, применяя признаки сравнения (или необходимый признак):

2416. $1-1+1-1+\ldots+(-1)^{n-1}+\ldots$.

2417. $\frac{2}{5}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3+\ldots+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{5}\right)^n+\ldots$.

2418. $\frac{2}{3}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}+\ldots+\frac{n+1}{2n+1}+\ldots$.

2419. $\frac{1}{\sqrt{10}}-\frac{1}{\sqrt[3]{10}}+\frac{1}{\sqrt[4]{10}}-\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[n+1]{10}}+\ldots$.

2420. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{2n}+\ldots$.

2421. $\frac{1}{11}+\frac{1}{21}+\frac{1}{31}+\ldots+\frac{1}{10n+1}+\ldots$.

2422. $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}+\ldots$.

2423. $2+\frac{2^2}{2}+\frac{2^3}{3}+\ldots+\frac{2^n}{n}+\ldots$.

2424. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$.

2425. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)^2}+\ldots$.

2426. $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt[3]{2}}{3\sqrt{2}}+\frac{\sqrt[3]{3}}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}+\ldots$.

С помощью признака Даламбера исследовать сходимость рядов:

2427. $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2}+\frac{5}{2\sqrt{2}}+\ldots+\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}+\ldots$.

2428. $\frac{2}{1}+\frac{2\cdot 5}{1\cdot 5}+\frac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$.

С помощью признака Коши исследовать сходимость рядов:

2429. $\frac{2}{1}+\left(\frac{3}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n+\ldots$.

2430. $\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{5}\right)^3+\left(\frac{3}{8}\right)^5+\ldots\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}+\ldots$.

Исследовать сходимость знакоположительных рядов:

2431. $1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\ldots$.

2432. $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^2-1}+\ldots$.

2433. $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$.

2434. $\frac{1}{3}+\frac{4}{9}+\frac{9}{19}+\ldots+\frac{n^2}{2n^2+1}+\ldots$.

2435. $\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\ldots+\frac{n}{n^2+1}+\ldots$.

2436. $\frac{3}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5}{3^2\cdot 4^2}+\frac{7}{4^2\cdot 5^2}+\ldots+\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}+\ldots$.

2437. $\frac{3}{4}+\left(\frac{6}{7}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\ldots+\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n+\ldots$.

2438. $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\frac{5}{7}+\left(\frac{7}{10}\right)^{\frac{3}{2}}+\ldots\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}+\ldots$.

2439. $\frac{1}{e}+\frac{8}{e^2}+\frac{27}{e^n}+\ldots+\frac{n^3}{e^n}+\ldots$.

2440. $1+\frac{2}{2^2}+\frac{4}{3^3}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{n^n}+\ldots$.

2441. $\dfrac{1!}{2+1}+\dfrac{2!}{2^2+1}+\dfrac{3!}{2^3+1}+\ldots+\dfrac{n!}{2^n+1}+\ldots$.

2442. $1+\dfrac{2}{1!}+\dfrac{4}{2!}+\ldots+\dfrac{2^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$.

2443. $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1\cdot 3}{4\cdot 8}+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 8\cdot 12}+\ldots+\dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\ldots 4n}+\ldots$.

2444. $\dfrac{(1!)^2}{2!}+\dfrac{(2!)^2}{4!}+\dfrac{(3!)^2}{6!}+\ldots+\dfrac{(n!)^2}{2n!}+\ldots$.

2445. $1000+\dfrac{1000\cdot 1002}{1\cdot 4}+\dfrac{1000\cdot 1002\cdot 1004}{1\cdot 4\cdot 7}+\ldots$

$$\ldots+\frac{1000\cdot 1002\cdot 1004\ldots(998+2n)}{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}+\ldots .$$

2446. $\dfrac{2}{1}+\dfrac{2\cdot 5\cdot 8}{1\cdot 5\cdot 9}+\ldots+\dfrac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdot 14\ldots(6n-7)(6n-4)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot 13\cdot 17\ldots(8n-11)(8n-7)}+\ldots$.

2447. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1\cdot 5\cdot 9\ldots(4n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\ldots(4n-4)(4n-2)}+\ldots$.

2448. $\dfrac{1}{1!}+\dfrac{1\cdot 11}{3!}+\dfrac{1\cdot 11\cdot 21}{5!}+\ldots+\dfrac{1\cdot 11\cdot 21\ldots(10n-9)}{(2n-1)!}+\ldots$.

2449. $1+\dfrac{1\cdot 4}{1\cdot 3\cdot 5}+\dfrac{1\cdot 4\cdot 9}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}+\ldots+\dfrac{1\cdot 4\cdot 9\ldots n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(4n-3)}+\ldots$.

2450. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2451. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$.

2452. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

2453. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+1}{n^2}$.

2454. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$.

2455. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

2456. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$.

2457. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$.

2458. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$.

2459. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

2460. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$.

2461. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n+\sqrt{\ln^3 n}}$.

2462. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$.

2463. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}-1)}$.

2464. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

2465. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

2466. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$.

2467. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$.

2468*. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$.

2469. Доказать, что ряд $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p\ln^q n}$:

1) сходится при произвольном q, если $p>1$, и при $q>1$, если $p=1$;
2) расходится при произвольном q, если $p<1$, и при $q\leqslant 1$, если $p=1$.

Исследовать сходимость следующих знакопеременных рядов. В случае сходимости исследовать на абсолютную и условную сходимости.

2470. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\ldots$.

2471. $1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{3}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}+\ldots$.

2472. $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{9}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}+\ldots$.

2473. $1-\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{13}-\ldots+\dfrac{(-1)^{n-1}n}{6n-5}+\ldots$.

2474. $\dfrac{3}{1\cdot 2}-\dfrac{5}{2\cdot 3}+\dfrac{7}{3\cdot 4}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}+\ldots$.

2475. $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{16}-\ldots+(-1)^{\frac{n^2+n}{2}}\cdot\dfrac{n}{2^n}+\ldots$.

2476. $-\dfrac{2}{2\sqrt{2}-1}+\dfrac{3}{3\sqrt{3}-1}-\dfrac{4}{4\sqrt{4}-1}+\ldots+(-1)^n\dfrac{n+1}{(n+1)\sqrt{n+1}-1}+\ldots$.

2477. $-\dfrac{3}{4}+\left(\dfrac{5}{7}\right)^2-\left(\dfrac{7}{10}\right)^3+\ldots+(-1)^n\left(\dfrac{2n+1}{3n+1}\right)^n+\ldots$.

2478. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\cdot 5}{2\cdot 5}+\dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{2\cdot 5\cdot 8}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}+\ldots$.

2479. $\dfrac{1}{7}-\dfrac{1\cdot 4}{7\cdot 9}+\dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{7\cdot 9\cdot 11}-\ldots+(-1)^{n-1}\dfrac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{7\cdot 9\cdot 11\ldots(2n+5)}+\ldots$.

2480. $\dfrac{\sin\alpha}{\ln 10}+\dfrac{\sin 2\alpha}{(\ln 10)^2}+\ldots+\dfrac{\sin n\alpha}{(\ln 10)^n}$.

2481. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$. **2482.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \operatorname{tg} \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

2483. Убедиться в том, что признак сходимости Даламбера не решает вопроса о сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, где

$$a_{2k-1} = \frac{2^{k-1}}{3^{k-1}}, \quad a_{2k} = \frac{2^{k-1}}{3^k} \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

в то время как с помощью признака Коши можно установить, что этот ряд сходится.

2484*. Убедиться в том, что признак Лейбница неприменим к знакочередующимся рядам а) — г). Выяснить, какие из этих рядов расходятся, какие сходятся условно, какие сходятся абсолютно:

а) $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{4}-1} - \frac{1}{\sqrt{4}+1} + \ldots$

$$\left(a_{2k-1} = \frac{1}{\sqrt{k+1}-1}, \quad a_{2k} = -\frac{1}{\sqrt{k+1}+1}\right);$$

б) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^5} + \ldots$

$$\left(a_{2k-1} = \frac{1}{2^{k-1}}, \quad a_{2k} = -\frac{1}{3^{2k-1}}\right);$$

в) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3^3} + \ldots$

$$\left(a_{2k-1} = \frac{1}{2k-1}, \quad a_{2k} = -\frac{1}{3^k}\right);$$

г) $\frac{1}{3} - 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{9} + \ldots$

$$\left(a_{2k-1} = \frac{1}{4k-1}, \quad a_{2k} = -\frac{1}{4k-3}\right).$$

Исследовать сходимость рядов с комплексными членами:

2485. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$. **2487.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(3+i)^n}$.

2486. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2i-1)^n}{3^n}$. **2488.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}$.

2489. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+1}$. **2491.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[n+(2n-1)i]^2}$.

2490. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+i)\sqrt{n}}$. **2492.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n(2-i)+1}{n(3-2i)-3i}\right]^n$.

2493. Между кривыми $y = \frac{1}{x^3}$ и $y = \frac{1}{x^2}$, справа от точки из пересечения, построены отрезки, параллельные оси OY и отстоящие один от другого на одинаковом расстоянии. Будет ли сумма длин этих отрезков конечной?

2494. Будет ли конечной сумма длин отрезков, о которых шла речь в предыдущей задаче, если кривую $y = \frac{1}{x^2}$ заменить кривой $y = \frac{1}{x}$?

2495. Составить сумму рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n - n}{3^n}$. Сходится ли эта сумма?

2496. Составить разность расходящихся рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ и исследовать ее сходимость.

2497. Сходится ли ряд, образованный вычитанием ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ из ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?

2498. Подобрать такие два ряда, чтобы их сумма сходилась, а разность расходилась.

2499. Составить произведение рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Сходится ли это произведение?

2500. Составить ряд $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} + \ldots\right)^2$. Сходится ли этот ряд?

2501. Дан ряд $-1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots$. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы этого ряда суммой первых его четырех членов, суммой первых пяти членов. Что можно сказать о знаках этих ошибок?

2502*. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots$$

суммой его первых n членов.

2503. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \frac{1}{n!} + \ldots$$

суммой его первых n членов. В частности, оценить точность такого приближения при $n = 10$.

2504**. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

суммой его первых n членов. В частности, оценить точность такого приближения при $n = 1000$.

2505**. Оценить ошибку, допускаемую при замене суммы ряда

$$1 + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{4}\right)^4 + \ldots + n\left(\frac{1}{4}\right)^{2n-2} + \ldots$$

суммой его первых n членов.

2506. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01? до 0,001?

2507. Сколько членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)5^n}$ нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,01? до 0,001? до 0,0001?

2508*. Найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$.

2509. Найти сумму ряда

$$\sqrt[3]{x} + (\sqrt[5]{x} - \sqrt[3]{x}) + (\sqrt[7]{x} - \sqrt[5]{x}) + \ldots + (\sqrt[2k+1]{x} - \sqrt[2k-1]{x}) + \ldots .$$

§ 2. Функциональные ряды

1°. Область сходимости. Множество значений аргумента x, для которых функциональный ряд

$$f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

сходится, называется *областью сходимости* этого ряда. Функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x),$$

где $S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$, а x принадлежит области сходимости, называется *суммой* ряда, а $R_n(x) = S(x) - S_n(x)$ — *остатком* ряда.

В простейших случаях для определения области сходимости ряда (1) достаточно применить к этому ряду известные признаки сходимости, считая x фиксированным.

Пример 1. Определить область сходимости ряда

$$\frac{x+1}{1\cdot 2} + \frac{(x+1)^2}{2\cdot 2^2} + \frac{(x+1)^3}{3\cdot 2^3} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{n\cdot 2^n} + \ldots . \qquad (2)$$

Решение. Обозначив через u_n общий член ряда, будем иметь

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n+1|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x+1|^{n+1}2^n n}{2^{n+1}(n+1)|x+1|^n} = \frac{|x+1|}{2} .$$

На основании признака Даламбера можно утверждать, что ряд сходится (и притом абсолютно), если $\frac{|x+1|}{2} < 1$, т. е. при $-3 < x < 1$; ряд расходится, если $\frac{|x+1|}{2} > 1$, т. е. если $-\infty < x < -3$ или $1 < x < \infty$ (рис. 104). При $x = 1$ получаем гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$, который расходится, а при $x = -3$ — ряд $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots$, который (в соответствии с признаком Лейбница) сходится (неабсолютно).

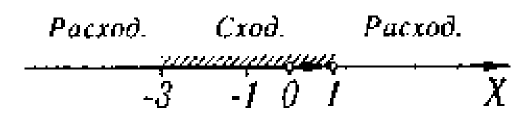


Рис. 104.

Итак, ряд сходится при $-3 \leqslant x < 1$.

2°. Степенные ряды. Для всякого *степенного ряда*

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n + \ldots \qquad (3)$$

(c_n и a — действительные числа) существует такой интервал (*интервал сходимости*) $|x - a| < R$ с центром в точке $x = a$, внутри которого ряд (3) сходится абсолютно; при $|x - a| > R$ ряд расходится. *Радиус сходимости* R может быть в частных случаях равен также 0 и ∞. В концевых точках интервала сходимости $x = a \pm R$ возможна как сходимость, так и расходимость степенного ряда. Интервал сходимости определяют обычно с помощью признаков Даламбера или Коши, применяя их к ряду, членами которого являются абсолютные величины членов данного ряда (3).

Применив к ряду модулей

$$|c_0| + |c_1||x - a| + \ldots + |c_n||x - a|^n + \ldots$$

признаки сходимости Даламбера и Коши, получим для радиуса сходимости степенного ряда (3) соответственно формулы

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|c_n|}} \quad \text{и} \quad R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| .$$

Однако пользоваться ими следует весьма осторожно, так как пределы, стоящие в правых частях этих формул, часто не существуют. Так, например, если бесконечное множество коэффициентов c_n обращается в нуль (это, в частности, имеет место, если ряд содержит члены только с четными или только с нечетными степенями $(x - a)$), то пользоваться указанными формулами нельзя. В связи с этим рекомендуется при определении интервала сходимости применять признаки Даламбера или Коши непосредственно, как это сделано выше при исследовании ряда (2), не прибегая к общим формулам для радиуса сходимости.

Если $z = x + iy$ — комплексное переменное, то для степенного ряда

$$c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \ldots + c_n(z - z_0)^n + \ldots \qquad (4)$$

($c_n = a_n + ib_n$, $z_0 = x_0 + iy_0$) существует некоторый круг (*круг сходимости*) $|z - z_0| < R$ с центром в точке $z = z_0$, внутри которого ряд сходится абсолютно; при $|z - z_0| > R$ ряд расходится. В точках, лежащих на самой окружности круга сходимости, ряд (4) может как сходиться, так и расходиться. Круг сходимости обычно определяют с помощью признаков Даламбера или Коши, примененных к ряду

$$|c_0| + |c_1| \cdot |z - z_0| + |c_2| \cdot |z - z_0|^2 + \ldots + |c_n| \cdot |z - z_0|^n + \ldots,$$

членами которого являются модули членов данного ряда. Так, например, с помощью признака Даламбера легко обнаружить, что круг сходимости ряда

$$\frac{z+1}{1 \cdot 2} + \frac{(z+1)^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{(z+1)^3}{3 \cdot 2^3} + \ldots + \frac{(z+1)^n}{n \cdot 2^n} + \ldots$$

определяется неравенство $|z + 1| < 2$ (достаточно повторить приведенные на с. 301 выкладки, служившие для определения интервала сходимости ряда (2), заменив лишь x на z). Центр круга сходимости находится в точке $z = -1$, а радиус R этого круга (радиус сходимости) равен 2.

3°. Равномерная сходимость. Функциональный ряд (1) сходится на некотором промежутке равномерно, если, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, можно найти такое N, не зависящее от x, что при $n > N$ для всех x из данного промежутка имеет место неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$, где $R_n(x)$ — остаток данного ряда.

Если $|f_n(x)| \leqslant c_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) при $a \leqslant x \leqslant b$ и числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ сходится, то функциональный ряд (1) сходится на отрезке $[a, b]$ абсолютно и равномерно (*признак Вейерштрасса*).

Степенной ряд (3) сходится абсолютно и равномерно на всяком отрезке, лежащем внутри его интервала сходимости. Степенной ряд (3) можно почленно дифференцировать и интегрировать внутри его интервала сходимости (при $|x - a| < R$), т. е. если

$$c_0 + c_1(x - 1) + c_2(x - a)^2 + \ldots + c_n(x - a)^n + \ldots = f(x), \qquad (5)$$

то для любого x из интервала сходимости ряда (3) имеем:

$$c_1 + 2c_2(x - a) + \ldots + nc_n(x - a)^{n-1} + \ldots = f'(x), \qquad (6)$$

$$\int\limits_{x_0}^{x} c_0\,dx + \int\limits_{x_0}^{x} c_1(x - a)\,dx + \int\limits_{x_0}^{x} c_2(x - a)^2\,dx + \ldots + \int\limits_{x_0}^{x} c_n(x - a)^n\,dx + \ldots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}(x_0-a)^{n+1}}{n+1} = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx \qquad (7)$$

(число x_0 также принадлежит интервалу сходимости ряда (3)). При этом ряды (6) и (7) имеют тот же интервал сходимости, что и ряд (3).

Найти область сходимости ряда:

2510. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$.

2511. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^x}$.

2512. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$.

2513. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$.

2514. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^n \sin\frac{x}{3^n}$.

2515.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{e^{nx}}$.

2516. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-n \sin x}$.

2517. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{x^n}$.

2518. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!\,x^n}$.

2519. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)x^n}$.

2520. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x-2)^n}$.

2521. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{(n+1)^5 x^{2n}}$.

2522. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n (x-5)^n}$.

2523. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{x^{n^n}}$.

2524*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(x^n + \frac{1}{2^n x^n}\right)$.

2525. $\sum\limits_{n=-1}^{\infty} x^n$.

Найти интервал сходимости степенного ряда и исследовать сходимость на концах интервала сходимости:

2526. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$.

2527. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$.

2528. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

2529. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{2n-1}}{(4n-3)^2}$.

2530. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

2531. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^5 x^{2n}}{2n+1}$.

2532. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (2n+1)^2 x^n$.

2533. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

2534. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^n$.

2535. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n^n}$.

2536. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^{2n-1} x^n$.

2537. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$.

2538. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n+1}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$.

2539. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!x^n}{n^n}$.

2540. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n \cdot \ln n}$.

2541. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n!}$.

2542*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!x^{n!}$.

2543*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n^2}}{2^{n-1}n^n}$.

2544*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n^n}}{n^n}$.

2545. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{(x-5)^n}{n\cdot 3^n}$.

2546. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^n}{n\cdot 5^n}$.

2547. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^{2n}}{n\cdot 9^n}$.

2548. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{2n}}{2n}$.

2549. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+3)^n}{n^2}$.

2550. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n(x+3)^n$.

2551. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+5)^{2n-1}}{2n\cdot 4^n}$.

2552. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-2)^n}{(2n-1)2^n}$.

2553. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{(2n-1)^{2n}(x-1)^n}{(3n-2)^{2n}}$.

2554. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!(x+3)^n}{n^n}$.

2555. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{(n+1)\ln^2(n+1)}$.

2556. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-3)^{2n}}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2557. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\dfrac{(x-2)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

2558. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^{n^2}}{n^n}$.

2559*. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}(x-1)^n$.

2560. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^{n-1}\cdot n^n}$.

2561. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\dfrac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1}(x-2)^n$.

2562. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 2^{n+1}}$.

2563. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n\dfrac{(x+3)^n}{(2n+1)\sqrt{n+1}}$.

Определить круг сходимости:

2564. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n z^n$.

2565. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1+ni)z^n$.

2566. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(z-2i)^n}{n\cdot 3^n}$.

2567. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{2^n}$.

2568. $(1+2i) + (1+2i)(3+2i)z + \ldots + (1+2i)(3+2i)\ldots$ $\ldots(2n+1+2i)z^n + \ldots$.

2569. $1 + \dfrac{z}{1-i} + \dfrac{z^2}{(1-i)(1-2i)} + \ldots + \dfrac{z^n}{(1-i)(1-2i)\ldots(1-ni)} + \ldots$.

2570. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\dfrac{1+2ni}{n+2i}\right)^n z^n$.

2571. Исходя из определения равномерной сходимости, доказать, что ряд

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$$

не сходится равномерно в интервале $(-1, 1)$, но сходится равномерно на всяком отрезке, лежащем внутри этого интервала.

Р е ш е н и е. Пользуясь формулой суммы геометрической прогрессии, получим при $|x| < 1$

$$R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \ldots = \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Возьмем лежащий внутри интервала $(-1, 1)$ отрезок $[-1+\alpha, 1-\alpha]$, где α — сколь угодно малое положительное число. На этом отрезке $|x| \leqslant 1-\alpha$, $|1-x| \geqslant \alpha$ и, следовательно,

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha}.$$

Для того чтобы доказать равномерную сходимость данного ряда на отрезке $[-1+\alpha, 1-\alpha]$, нужно показать, что к любому $\varepsilon > 0$ можно подобрать такое N, зависящее только от ε, что при всяком $n > N$ будет иметь место неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ для в с е х x из рассматриваемого отрезка.

Взяв любое $\varepsilon > 0$, потребуем, чтобы $\dfrac{(1-\alpha)^{n+1}}{\alpha} < \varepsilon$; отсюда $(1-\alpha)^{n-1} < \varepsilon\alpha$, $(n+1)\ln(1-\alpha) < \ln(\varepsilon\alpha)$, т. е. $n+1 > \dfrac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)}$ (так как $\ln(1-\alpha) < 0$) и

$n > \dfrac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)} - 1$. Положив, таким образом, $N = \dfrac{\ln(\varepsilon\alpha)}{\ln(1-\alpha)} - 1$, мы убеждаемся, что при $n > N$, действительно, $|R_n(x)| < \varepsilon$ для всех x из отрезка $[-1+\alpha, 1-\alpha]$ и равномерная сходимость данного ряда на любом отрезке, лежащем внутри интервала $(-1, 1)$, тем самым доказана.

Что же касается всего интервала $(-1, 1)$, то он содержит точки, сколь угодно близкие к точке $x = 1$, а так как $\lim\limits_{x\to 1} R_n(x) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = \infty$, то как велико бы ни было n, найдутся точки x, для которых $R_n(x)$ больше любого, сколь угодно большого числа. Следовательно, нельзя подобрать такое N, чтобы при $n > N$ неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ имело место во всех точках интервала $(-1, 1)$, а это и означает, что сходимость ряда в интервале $(-1, 1)$ не является равномерной.

2572. Исходя из определения равномерной сходимости, доказать, что:
а) ряд

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

сходится равномерно во всяком конечном интервале;
б) ряд

$$\frac{x^2}{1} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n} + \ldots$$

сходится равномерно во всем интервале сходимости $(-1, 1)$;
в) ряд

$$1 + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \ldots + \frac{1}{n^x} + \ldots$$

сходится равномерно в интервале $(1+\delta, \infty)$, где δ — любое положительное число;
г) ряд

$$(x^2 - x^4) + (x^4 - x^6) + (x^6 - x^8) + \ldots + (x^{2n} - x^{2n+2}) + \ldots$$

сходится не только внутри интервала $(-1, 1)$, но и на концах этого интервала, однако сходимость ряда в интервале $(-1, 1)$ — неравномерная.

Доказать равномерную сходимость функциональных рядов в указанных промежутках:

2573. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^2}$ на отрезке $[-1; 1]$.

2574. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{2^n}$ на всей числовой оси.

2575. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ на отрезке $[0, 1]$.

Применяя почленное дифференцирование и интегрирование, найти суммы рядов:

2576. $x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{3} + \ldots + \dfrac{x^2}{n} + \ldots$.

2577. $x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^2}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n} + \ldots$.

2578. $x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \ldots + \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$.

2579. $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots$.

2580. $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + (n+1)x^n + \ldots$.

2581. $1 - 3x^2 + 5x^4 - \ldots + (-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} + \ldots$.

2582. $1\cdot 2 + 2\cdot 3x + 3\cdot 4x^2 + \ldots + n(n+1)x^{n-1} + \ldots$.

Найти суммы рядов:

2583. $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{3}{x^3} + \ldots + \dfrac{n}{x^n} + \ldots$.

2584. $x + \dfrac{x^5}{5} + \dfrac{x^9}{9} + \ldots + \dfrac{x^{4n-3}}{4n-3} + \ldots$.

2585*. $1 - \dfrac{1}{3\cdot 3} + \dfrac{1}{5\cdot 3^2} - \dfrac{1}{7\cdot 3^3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)3^{n-1}} + \ldots$.

2586. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2^2} + \dfrac{5}{2^3} + \ldots + \dfrac{2n-1}{2^n} + \ldots$.

§ 3. Ряд Тейлора

1°. Разложение функции в степенной ряд. Если функция $f(x)$ допускает в некоторой окрестности $|x - a| < R$ точки a разложение в степенной ряд по степеням $x - a$, то этот ряд (*ряд Тейлора*) имеет вид

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots \quad (1)$$

При $a = 0$ ряд Тейлора называют также *рядом Маклорена*. Равенство (1) справедливо, если при $|x - a| < R$ *остаточный член* ряда Тейлора

$$R_n(x) = f(x) - \left[f(a) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right] \to 0$$

при $n \to \infty$.

Для оценки остаточного члена можно пользоваться формулой

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}\, f^{(n+1)}[a + \theta(x-a)], \text{ где } 0 < \theta < 1 \quad (2)$$

(*форма Лагранжа*).

Пример 1. Разложить функцию $f(x) = \operatorname{ch} x$ в ряд по степеням x.

Решение. Находим производные данной функции $f(x) = \operatorname{ch} x$, $f'(x) = \operatorname{sh} x$, $f''(x) = \operatorname{ch} x$, $f'''(x) = \operatorname{sh} x$, ...; вообще $f^{(n)}(x) = \operatorname{ch} x$, если n — четное, и $f^{(n)}(x) = \operatorname{sh} x$, если n — нечетное. Полагая $a = 0$, получим $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 1$, $f'''(0) = 0$, ...; вообще $f^{(n)}(0) = 1$, если n — четное, и $f^{(n)}(0) = 0$, если n — нечетное. Отсюда на основании (1) имеем

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots . \tag{3}$$

Для определения интервала сходимости ряда (3) применим признак Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0$$

при любом x. Следовательно, ряд сходится в интервале $-\infty < x < \infty$. Остаточный член в соответствии с формулой (2) имеет вид

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{ch} \theta x, \text{ если } n \text{ — нечетное,}$$

и

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \operatorname{sh} \theta x, \text{ если } n \text{ — четное.}$$

Так как $0 > \theta > 1$, то

$$|\operatorname{ch} \theta x| = \frac{e^{\theta x} + e^{-\theta x}}{2} \leqslant e^{|x|}, \quad |\operatorname{sh} \theta x| = \left|\frac{e^{\theta x} - e^{-\theta x}}{2}\right| \leqslant e^{|x|},$$

и поэтому $|R_n(x)| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x|}$. Ряд с общим членом $\frac{|x|^n}{n!}$ сходится при любом x (в этом можно легко убедиться с помощью признака Даламбера), поэтому в соответствии с необходимым признаком сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0,$$

а следовательно, и $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ при любом x. Это означает, что сумма ряда (3) для любого x действительно равна $\operatorname{ch} x$.

2°. Приемы, применяемые при разложении в степенные ряды.

Пользуясь основными разложениями:

I. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

II. $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

III. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots \quad (-\infty < x < \infty)$,

IV. $(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n + \ldots$

$(-1 < x < 1)$*),

V. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1)$,

а также формулой для суммы геометрической прогрессии, можно во многих случаях просто получать разложение данной функции в степенной ряд, причем отпадает необходимость исследования остаточного члена. Иногда при разложении полезно использовать почленное дифференцирование или интегрирование. При разложении в степенные ряды рациональных функций рекомендуется разлагать эти функции на простейшие дроби.

Пример 2. Разложить по степеням x**) функцию

$$f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)}.$$

Решение. Разложив функцию на простейшие дроби, будем иметь

$$f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}.$$

Так как

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \tag{4}$$

и

$$\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + (2x)^2 - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n, \tag{5}$$

то окончательно

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n 2^{n+1}] x^n. \tag{6}$$

Геометрические прогрессии (4) и (5) сходятся соответственно при $|x| < 1$ и $|x| < \frac{1}{2}$; следовательно, формула (6) справедлива при $|x| < \frac{1}{2}$, т. е. при $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$.

*) На границах интервала сходимости (т. е. при $x = -1$ и при $x = 1$) разложение IV ведет себя следующим образом: при $m \geqslant 0$ абсолютно сходится на обеих границах; при $0 > m > -1$ расходится при $x = -1$ и условно сходится при $x = 1$; при $m \leqslant -1$ расходится на обеих границах.

**) Здесь и в дальнейшем подразумевается «по целым и положительным степеням».

3°. Ряд Тейлора для функции двух переменных. Разложение функций двух переменных $f(x, y)$ в *ряд Тейлора* в окрестности точки $(a; b)$ имеет вид

$$f(x, y) = f(a, b) + \frac{1}{1!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right] f(a, b) + \frac{1}{2!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(a, b) + \ldots + \frac{1}{n!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^n f(a, b) + \ldots . \quad (7)$$

Если $a = b = 0$, ряд Тейлора называют также *рядом Маклорена*. Здесь приняты следующие обозначения:

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right] f(a, b) = \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a) + \left.\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(y-b);$$

$$\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^2 f(a, b) = \left.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a)^2 +$$

$$+ 2\left.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a)(y-b) + \left.\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=a\\y=b}}(x-a)^2 \text{ и т. д.}$$

Разложение (7) имеет место, если остаточный член ряда

$$R_n(x, y) = f(x, y) - \left[f(a, b) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^k f(a, b)\right] \to 0$$

при $n \to \infty$. Остаточный член может быть представлен в виде

$$R_n(x, y) = \frac{1}{(n+1)!}\left[(x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right]^{n+1} f(x, y)\Big|_{\substack{x=a+\theta(x-a)\\y=b+\theta(y-b)}},$$

где $0 < \theta < 1$.

Разложить по целым положительным степеням x указанные функции, найти интервалы сходимости полученных рядов и исследовать поведение их остаточных членов:

2587. a^x $(a > 0)$.

2588. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2589. $\cos(x + a)$.

2590. $\sin^2 x$.

2591*. $\ln(2 + x)$.

Пользуясь основными разложениями I—V и геометрической прогрессией, написать разложение по степеням x следующих функций и указать интервалы сходимости рядов:

2592. $\frac{2x-3}{(x-1)^2}$.

2593. $\frac{3x-5}{x^2-4x+3}$.

2594. xe^{-2x}.

2595. e^{x^2}.

2596. $\operatorname{sh} x$.

2597. $\cos 2x$.

2598. $\cos^2 x$.

2599. $\sin 3x + x\cos 3x$.

2600. $\frac{x}{9+x^2}$.

2601. $\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$.

2602. $\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2603. $\ln(1 + x - 2x^2)$.

Применяя дифференцирование, разложить по степеням x следующие функции и указать интервалы, в которых эти разложения имеют место:

2604. $(1 + x)\ln(1 + x)$.

2605. $\operatorname{arctg} x$.

2606. $\arcsin x$.

2607. $\ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$.

Применяя различные приемы, разложить по степеням x заданные функции и указать интервалы, в которых эти разложения имеют место:

2608. $\sin^2 x\cos^2 x$.

2609. $(1 + x)e^{-x}$.

2610. $(1 + e^x)^3$.

2611. $\sqrt[3]{8+x}$.

2612. $\frac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$.

2613. $\operatorname{ch}^3 x$.

2614. $\frac{1}{4-x^2}$.

2615. $\ln(x^2 + 3x + 2)$.

2616. $\int\limits_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$.

2617. $\int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx$.

2618. $\int\limits_0^x \frac{\ln(1+x)dx}{x}$.

2619. $\int\limits_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Написать три первых отличных от нуля члена разложения в ряд по степеням x функций:

2620. $\operatorname{tg} x$.

2621. $\operatorname{th} x$.

2622. $e^{\cos x}$.

2623. $\sec x$.

2624. $\ln\cos x$.

2625. $e^x\sin x$.

2626*. Показать, что для вычисления длины эллипса можно пользоваться приближенной формулой

$$s \approx 2\pi a\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{4}\right),$$

где ε — эксцентриситет, $2a$ — большая ось эллипса.

2627. Тяжелая нить под влиянием собственного веса провисает по цепной линии $y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$, причем $a = \frac{H}{q}$, где H — продольное натяжение нити, а q — масса единицы длины. Показать, что при малых x, с точностью до величин порядка x^4, можно принять, что нить провисает по параболе $y = a + \frac{x^2}{2a}$.

2628. Разложить функцию $x^3 - 2x^2 - 5x - 2$ в ряд по степеням $x + 4$.

2629. $f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2$. Разложить $f(x + h)$ в ряд по степеням h.

2630. Разложить $\ln x$ в ряд по степеням $x - 1$.

2631. Разложить $\frac{1}{x}$ в ряд по степеням $x - 1$.

2632. Разложить $\frac{1}{x^2}$ в ряд по степеням $x + 1$.

2633. Разложить $\frac{1}{x^2+3x+2}$ в ряд по степеням $x + 4$.

2634. Разложить $\frac{1}{x^2+4x+7}$ в ряд по степеням $x + 2$.

2635. Разложить e^x в ряд по степеням $x + 2$.

2636. Разложить $\sqrt{x}$ в ряд по степеням $x - 4$.

2637. Разложить $\cos x$ в ряд по степеням $x - \frac{\pi}{2}$.

2638. Разложить $\cos^2 x$ в ряд по степеням $x - \frac{\pi}{4}$.

2639*. Разложить $\ln x$ в ряд по степеням $\frac{1-x}{1+x}$.

2640. Разложить $\frac{x}{\sqrt{1+x}}$ в ряд по степеням $\frac{x}{1+x}$.

2641. Какова величина допущенной ошибки, если приближенно положить

$$e \approx 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!}?$$

2642. С какой точностью будет вычислено число $\frac{\pi}{4}$, если воспользоваться рядом

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots,$$

взяв сумму его первых пяти членов при $x = 1$?

2643*. Вычислить число $\frac{\pi}{6}$ с точностью до 0,001 при помощи разложения в ряд по степеням x функции $\arcsin x$ (см. № 2606).

2644. Сколько нужно взять членов ряда

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

чтобы вычислить $\cos 18°$ с точностью до 0,001?

2645. Сколько нужно взять членов ряда

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots,$$

чтобы вычислить $\sin 15°$ с точностью до 0,0001?

2646. Сколько нужно взять членов ряда

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots,$$

чтобы найти число e с точностью до 0,0001?

2647. Сколько нужно взять членов ряда

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \ldots,$$

чтобы вычислить $\ln 2$ с точностью до 0,01? до 0,001?

2648. Вычислить $\sqrt[4]{7}$ с точностью до 0,01 с помощью разложения функции $\sqrt[3]{8+x}$ в ряд по степеням x.

2649. Выяснить происхождение приближенной формулы

$$\sqrt{a^2 + x} \approx a + \frac{x}{2a} \quad (a > 0),$$

вычислить с ее помощью $\sqrt{23}$, положив $a = 5$, и оценить допущенную при этом ошибку.

2650. Вычислить $\sqrt[4]{19}$ с точностью до 0,001.

2651. При каких значениях x приближенная формула

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$$

дает ошибку, не превышающую 0,01? 0,001? 0,0001?

2652. При каких значениях x приближенная формула

$$\sin x \approx x$$

дает ошибку, не превышающую 0,01? 0,001?

2653. Вычислить $\int\limits_0^{1/2} \frac{\sin x}{x}\,dx$ с точностью до 0,0001.

2654. Вычислить $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,0001.

2655. Вычислить $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\,\cos x\,dx$ с точностью до 0,001.

2656. Вычислить $\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx$ с точностью до 0,001.

2657. Вычислить $\int\limits_0^{1/4} \sqrt{1+x^3}\,dx$ с точностью до 0,0001.

2658. Вычислить $\int\limits_0^{1/9} \sqrt{x}\,e^x\,dx$ с точностью до 0,001.

2659. Разложить в ряд по степеням x и y функцию $\cos(x-y)$, найти область сходимости полученного ряда и исследовать остаточный член.

Написать разложения по степеням x и y следующих функций и указать области сходимости рядов:

2660. $\sin x \cdot \sin y$.

2661. $\sin(x^2+y^2)$.

2662*. $\frac{1-x+y}{1+x-y}$.

2663*. $\ln(1-x-y+xy)$.

2664*. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$.

2665. $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Разложить $f(x+h, y+k)$ по степеням h и k.

2666. $f(x, y) = x^3 - 2y^3 + 3xy$. Найти приращение этой функции при переходе от значений $x = 1$, $y = 2$ к значениям $x = 1 + h$, $y = 2 + k$.

2667. Разложить функцию e^{x+y} по степеням $x-2$ и $y+2$.

2668. Разложить функцию $\sin(x+y)$ по степеням x и $y - \frac{\pi}{2}$.

Написать три—четыре первых члена разложения в ряд по степеням x и y функций:

2669. $e^x \cos y$.

2670. $(1+x)^{1+y}$.

§ 4. Ряды Фурье

1°. **Теорема Дирихле.** Говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *условиям Дирихле* в интервале (a, b), если в этом интервале функция:

1) равномерно ограничена, т. е. $|f(x)| \leqslant M$ при $a < x < b$, где M — постоянная;

2) имеет не более чем конечное число точек разрыва и все они 1-го рода (т. е. в каждой точке разрыва ξ функция $f(x)$ имеет конечный левый предел $f(\xi-0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\xi-\varepsilon)$ и конечный правый предел $f(\xi+0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} f(\xi+\varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$);

3) имеет не более чем конечное число точек строгого экстремума.

Теорема Дирихле утверждает, что функцию $f(x)$, удовлетворяющую в интервале $(-\pi, \pi)$ условиям Дирихле, во всякой точке x этого интервала, в которой $f(x)$ непрерывна, можно разложить в тригонометрический *ряд Фурье*:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x + b_2\sin 2x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots, \quad (1)$$

где *коэффициенты Фурье* a_n и b_n вычисляются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если x — принадлежащая интервалу $(-\pi, \pi)$ точка разрыва функции $f(x)$, то сумма ряда Фурье $S(x)$ равна среднему арифметическому левого и правого пределов функции:

$$S(x) = \frac{1}{2}\,[f(x-0) + f(x+0)].$$

В концах интервала $x = -\pi$ и $x = \pi$

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2}\,[f(-\pi+0) + f(\pi-0)].$$

2°. **Неполные ряды Фурье.** Если функция $f(x)$ — четная (т. е. $f(-x) = f(x)$), то в формуле (1)

$$b_n = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если функция $f(x)$ — нечетная (т. е. $f(-x) = -f(x)$), то

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Функция, заданная в интервале $(0, \pi)$, может быть по нашему усмотрению продолжена в интервал $(-\pi, 0)$ либо как четная, либо как нечетная; следовательно, ее можно по желанию разложить в интервале $(0, \pi)$ в неполный ряд Фурье по синусам или по косинусам кратных дуг.

3°. Ряды Фурье периода $2l$. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле в некотором интервале $(-l, l)$ длины $2l$, то в точках непрерывности функции, принадлежащих этому интервалу, справедливо разложение

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{l} + b_1\sin\frac{\pi x}{l} + a_2\cos\frac{2\pi x}{l} + b_2\sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots$$

$$\ldots + a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l} + \ldots,$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),\\ b_n &= \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

В точках разрыва функции $f(x)$ и в концах $x = \pm l$ интервала сумма ряда Фурье определяется аналогично тому, как это имеет место при разложении в интервале $(-\pi, \pi)$.

В случае разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье в произвольном интервале $(a, a + 2l)$ длины $2l$ пределы интегрирования в формулах (2) следует заменить соответственно через a и $a + 2l$.

Указанные ниже функции разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$, определить сумму ряда в точках разрыва и на концах интервала ($x = -\pi$, $x = \pi$), построить график самой функции и суммы соответствующего ряда (также и вне интервала $(-\pi, \pi)$):

2671. $f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{при } -\pi < x \leqslant 0,\\ c_2 & \text{при } 0 < x < \pi. \end{cases}$

Рассмотреть частный случай, когда $c_1 = -1$, $c_2 = 1$.

2672. $f(x) = \begin{cases} ax & \text{при } -\pi < x \leqslant 0,\\ bx & \text{при } 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$

Рассмотреть частные случаи: а) $a = b = 1$; б) $a = -1$, $b = 1$; в) $a = 0$, $b = 1$; г) $a = 1$, $b = 0$.

2673. $f(x) = x^2$.

2674. $f(x) = e^{ax}$.

2675. $f(x) = \sin ax$.

2676. $f(x) = \cos ax$.

2677. $f(x) = \operatorname{sh} ax$.

2678. $f(x) = \operatorname{ch} ax$.

2679. Функцию $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ разложить в ряд Фурье в интервале $(0, 2\pi)$.

2680. Разложить в интервале $(0, \pi)$ по синусам кратных дуг функцию $f(x) = \frac{\pi}{4}$. Полученное разложение использовать для суммирования числовых рядов:

а) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$;

б) $1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} - \ldots$;

в) $1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots$

Указанные ниже функции разложить в интервале $(0, \pi)$ в неполные ряды Фурье: а) по синусам кратных дуг; б) по косинусам кратных дуг. Нарисовать графики функций и графики сумм соответствующих рядов в области их существования.

2681. $f(x) = x$. Найти с помощью полученного разложения сумму ряда

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots .$$

2682. $f(x) = x^2$. Найти с помощью полученного разложения суммы числовых рядов:

1) $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$; 2) $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$.

2683. $f(x) = e^{ax}$.

2684. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{2} \leqslant x < \pi. \end{cases}$

2685. $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2},\\ \pi - x & \text{при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

Разложить в интервале $(0, \pi)$ по синусам кратных дуг функции:

2686. $f(x) = \begin{cases} x & \text{при } 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2},\\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

2687. $f(x) = x(\pi - x)$.

2688. $f(x) = \sin\frac{x}{2}$.

Разложить в интервале $(0, \pi)$ по косинусам кратных дуг функции:

2689. $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } 0 < x \leqslant h, \\ 0 \text{ при } h < x < \pi. \end{cases}$

2690. $f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x}{2h} \text{ при } 0 < x \leqslant 2h, \\ 0 \text{ при } 2h < x < \pi. \end{cases}$

2691. $f(x) = x \sin x$.

2692. $f(x) = \begin{cases} \cos x \text{ при } 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ -\cos x \text{ при } \dfrac{\pi}{2} < x < \pi. \end{cases}$

2693. Используя разложение функций x и x^2 в интервале $(0, \pi)$ по косинусам кратных дуг (см. №№ 2681, 2682), доказать равенство

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2}{12} \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi).$$

2694.** Доказать, что если функция $f(x)$ — четная и при этом $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то ее ряд Фурье в интервале $(-\pi, \pi)$ представляет собой разложение по косинусам нечетных кратных дуг, а если функция $f(x)$ — нечетная и $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то она разлагается в интервале $(-\pi, \pi)$ по синусам нечетных кратных дуг.

В указанных интервалах разложить в ряд Фурье функции:

2695. $f(x) = |x| \ (-1 < x < 1)$.

2696. $f(x) = 2x \ (0 < x < 1)$.

2697. $f(x) = e^x \ (-l < x < l)$.

2698. $f(x) = 10 - x \ (5 < x < 15)$.

Разложить в указанных интервалах в неполные ряды Фурье: а) по синусам кратных дуг, б) по косинусам кратных дуг следующие функции:

2699. $f(x) = 1 (0 < x < 1)$.

2700. $f(x) = x (0 < x < l)$.

2701. $f(x) = x^2 (0 < x < 2\pi)$.

2702. $f(x) = \begin{cases} x \quad \text{ при } 0 < x \leqslant 1, \\ 2 - x \text{ при } 1 < x < 2. \end{cases}$

2703. Разложить по косинусам кратных дуг в интервале $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } \dfrac{3}{2} < x \leqslant 2, \\ 3 - x & \text{при } 2 < x < 3. \end{cases}$$

Глава IX

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Проверка решений. Составление дифференциальных уравнений семейств кривых. Начальные условия

1°. Основные понятия. Уравнение вида

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

где $y = y(x)$ — искомая функция, называется *дифференциальным уравнением n-го порядка*. Любая функция $y = \varphi(x)$, обращающая уравнение (1) в тождество, называется *решением* этого уравнения, а график этой функции — *интегральной кривой*. Если решение задано в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$, то оно обычно называется *интегралом*.

Пример 1. Проверить, что функция $y = \sin x$ является решением уравнения

$$y'' + y = 0.$$

Решение. Имеем

$$y' = \cos x, \quad y'' = -\sin x$$

и, следовательно,

$$y'' + y = -\sin x + \sin x \equiv 0.$$

Интеграл

$$\Phi(x, y, C_1, \ldots, C_n) = 0 \tag{2}$$

дифференциального уравнения (1), содержащий n независимых произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$ и эквивалентный (в данной области) уравнению (1), называется *общим интегралом* этого уравнения (в соответствующей области). Придавая в соотношении (2) постоянным $C_1, \ldots, C_n$ определенные значения, получаем *частный интеграл* уравнения (1).

Обратно, имея семейство кривых (2) и исключая параметры $C_1, \ldots, C_n$ из системы уравнений

$$\Phi = 0, \ \frac{d\Phi}{dx} = 0, \ \ldots, \ \frac{d^n\Phi}{dx^n} = 0,$$

получим, вообще говоря, дифференциальное уравнение вида (1), общим интегралом которого в соответствующей области является соотношение (2).

Пример 2. Найти дифференциальное уравнение семейства парабол

$$y = C_1(x - C_2)^2. \tag{3}$$

Решение. Дифференцируя два раза уравнение (3), будем иметь

$$y' = 2C_1(x - C_2) \text{ и } y'' = 2C_1. \tag{4}$$

Исключая из уравнений (3) и (4) параметры C_1 и C_2, получим искомое дифференциальное уравнение

$$2yy'' = y'^2.$$

Легко проверить, что функция (3) обращает это уравнение в тождество.

2°. Начальные условия. Если для искомого частного решения $y = y(x)$ дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{5}$$

заданы *начальные условия (задача Коши)*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

и известно *общее решение* уравнения (5)

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n),$$

то произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$ определяются, если это возможно, из системы уравнений

$$\left.\begin{array}{l} y_0 = \varphi(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, \ldots, C_n), \\ \ldots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, \ldots, C_n). \end{array}\right\}$$

Пример 3. Найти кривую семейства

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}, \tag{6}$$

для которой $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Решение. Имеем

$$y' = C_1 e^x - 2C_2 e^{-2x}. \tag{7}$$

Полагая в формулах (6) и (7) $x = 0$, получим

$$1 = C_1 + C_2,\quad -2 = C_1 - 2C_2,$$

откуда

$$C_1 = 0,\quad C_2 = 1$$

и, следовательно,

$$y = e^{-2x}.$$

Выяснить, являются ли решениями данных дифференциальных уравнений указанные функции:

2704. $xy' = 2y$, $y = 5x^2$.

2705. $y'' = x^2 + y^2$, $y = \dfrac{1}{x}$.

2706. $(x + y)\,dx + x\,dy = 0$, $y = \dfrac{C^2 - x^2}{2x}$.

2707. $y'' + y = 0$, $y = 3\sin x - 4\cos x$.

2708. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$, $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t$.

2709. $y'' - 2y' + y = 0$; а) $y = xe^x$, б) $y = x^2e^x$.

2710. $y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0$, $y = C_1e^{\lambda_1 x} + C_2e^{\lambda_2 x}$.

Показать, что для данных дифференциальных уравнений указанные соотношения являются интегралами:

2711. $(x - 2y)y' = 2x - y$, $x^2 - xy + y^2 = C^2$.

2712. $(x - y + 1)y' = 1$, $y = x + Ce^y$.

2713. $(xy - x)y'' + xy'^2 + yy' - 2y' = 0$, $y = \ln(xy)$.

Составить дифференциальные уравнения заданных семейств кривых (C, C_1, C_2, C_3 — произвольные постоянные):

2714. $y = Cx$.

2715. $y = Cx^2$.

2716. $y^2 = 2Cx$.

2717. $x^2 + y^2 = C^2$.

2718. $y = Ce^x$.

2719. $x^3 = C(x^2 - y^2)$.

2720. $y^2 + \dfrac{1}{x} = 2 + Ce^{-\frac{y^2}{2}}$.

2721. $\ln\dfrac{x}{y} = 1 + ay$ (a — параметр).

2722. $(y - y_0)^2 = 2px$ (y_0, p — параметры).

2723. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$.

2724. $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

2725. $y = (C_1 + C_2x)e^x + C_3$.

2726. Составить дифференциальное уравнение всех прямых на плоскости XOY.

2727. Составить дифференциальное уравнение всех парабол с вертикальной осью на плоскости XOY.

2728. Составить дифференциальное уравнение всех окружностей на плоскости XOY.

Для данных семейств кривых найти линии, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

2729. $x^2 - y^2 = C$, $y(0) = 5$.

2730. $y = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2731. $y = C_1 \sin(x - C_2)$, $y(\pi) = 1$, $y'(\pi) = 0$.

2732. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}$ $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -2$.

§ 2. Дифференциальные уравнения 1-го порядка

1°. Виды дифференциальных уравнений 1-го порядка. Дифференциальное уравнение 1-го порядка с неизвестной функцией y, разрешенное относительно производной y', имеет вид

$$y' = f(x, y), \tag{1}$$

где $f(x, y)$ — данная функция. В некоторых случаях выгодно за искомую функцию считать переменную x и записывать уравнение (1) в виде

$$x' = g(x, y), \tag{1'}$$

где $g(x, y) = \dfrac{1}{f(x, y)}$.

Учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$ и $x' = \dfrac{dx}{dy}$, дифференциальные уравнения (1) и (1′) можно записать в симметрической форме:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \tag{2}$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — известные функции.

Под решениями уравнения (2) понимаются функции вида $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$, удовлетворяющие этому уравнению. Общий интеграл уравнений (1) и (1′), или уравнения (2), имеет вид

$$\Phi(x, y, C) = 0,$$

где C — произвольная постоянная.

2°. Поле направлений. Совокупность направлений

$$\operatorname{tg}\alpha = f(x, y)$$

называется *полем направлений* дифференциального уравнения (1) и обычно изображается при помощи системы черточек или стрелок с углом наклона α.

Кривые $f(x, y) = k$, в точках которых наклон поля имеет постоянное значение, равное k, называются *изоклинами*. Построив изоклины и поле направлений, в простейших случаях можно приближенно нарисовать поле интегральных кривых, рассматривая последние как кривые, которые в каждой своей точке имеют заданное направление поля.

Пример 1. Методом изоклин построить поле интегральных кривых уравнения

$$y' = x.$$

Решение. Построив изоклины $x = k$ (прямые линии) и поле направлений, приближенно получаем поле интегральных кривых (рис. 105). Общим решением является семейство парабол

$$y = \frac{x^2}{2} + C.$$

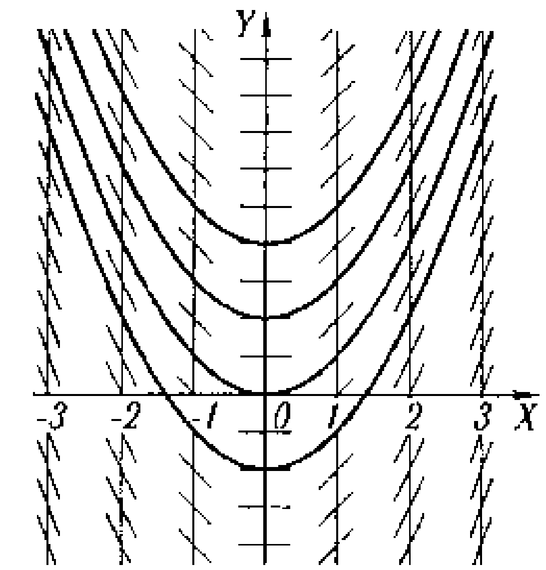


Рис. 105.

Методом изоклин построить приближенно поле интегральных кривых для указанных ниже дифференциальных уравнений:

2733. $y' = -x$.

2734. $y' = -\dfrac{x}{y}$.

2735. $y' = 1 + y^2$.

2736. $y' = \dfrac{x + y}{x - y}$.

2737. $y' = x^2 + y^2$.

3°. Теорема Коши. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области $U\{a < x < A,\ b < y < B\}$ и имеет в этой области ограниченную производную $f'_y(x, y)$, то через каждую точку (x_0, y_0), принадлежащую U, проходит одна и только одна интегральная кривая $y = \varphi(x)$ уравнения (1) ($\varphi(x_0) = y_0$).

4°. Метод ломаных Эйлера. Для приближенного построения интегральной кривой уравнения (1), проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$, эту кривую заменяют ломаной с вершинами $M_i(x_i, y_i)$, где

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$
$$\Delta x_i = h \text{ (шаг процесса)},$$
$$\Delta y_i = hf(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Пример 2. Методом Эйлера для уравнения

$$y' = \frac{xy}{2}$$

найти $y(1)$, если $y(0) = 1$ ($h = 0{,}1$).

Составляем таблицу:

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
y_i	1	1	1,005	1,015	1,030	1,051	1,077	1,109	1,148	1,194	1,248
$\Delta y_i = \dfrac{x_i y_i}{20}$	0	0,005	0,010	0,015	0,021	0,026	0,032	0,039	0,046	0,054	

Итак, $y(1) = 1{,}248$. Для сравнения приводим точное значение $y(1) = e^{1/4} \approx 1{,}284$.

Методом Эйлера найти частные решения данных дифференциальных уравнений для указанных значений x:

2738. $y' = y$, $y(0) = 1$; найти $y(1)$ $(h = 0{,}1)$.

2739. $y' = x + y$, $y(1) = 1$; найти $y(2)$ $(h = 0{,}1)$.

2740. $y' = -\dfrac{y}{1+x}$, $y(0) = 2$; найти $y(1)$ $(h = 0{,}1)$.

2741. $y' = y - \dfrac{2x}{y}$, $y(0) = 1$; найти $y(1)$ $(h = 0{,}2)$.

§ 3. Дифференциальные уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Ортогональные траектории

1°. Уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными. Уравнением с *разделяющимися переменными* называется уравнение 1-го порядка вида

$$y' = f(x)\,g(y) \tag{1}$$

или

$$X(x)Y(y)\,dx + X_1(x)Y_1(y)\,dy = 0. \tag{1'}$$

Разделив обе части уравнения (1) на $g(y)$ и умножив на dx, будем иметь $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx$. Отсюда, интегрируя, получим общий интеграл уравнения (1) в виде

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C. \tag{2}$$

Аналогично, разделив обе части уравнения (1′) на $X_1(x)Y(y)$ и проинтегрировав, получим общий интеграл уравнения (1′) в виде

$$\int \frac{X(x)}{X_1(x)}\,dx + \int \frac{Y_1(y)}{Y(y)}\,dy = C. \tag{2'}$$

Если для некоторого значения $y = y_0$ мы имеем $g(y_0) = 0$, то функция $y = y_0$ является также, как непосредственно легко убедиться, решением уравнения (1). Аналогично, прямые $x = a$ и $y = b$ будут интегральными кривыми уравнения (1′), если a и b являются соответственно корнями уравнений $X_1(x) = 0$ и $Y(y) = 0$, на левые части которых приходилось делить исходное уравнение.

Пример 1. Решить уравнение

$$y' = -\frac{y}{x}. \tag{3}$$

В частности, найти решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$y(1) = 2.$$

Решение. Уравнение (3) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}.$$

Отсюда, разделяя переменные, будем иметь

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}.$$

и, следовательно,

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C_1,$$

где произвольная постоянная $\ln C_1$ взята в логарифмическом виде. После потенцирования получим общее решение

$$y = \frac{C}{x}, \tag{4}$$

где $C = \pm C_1$.

При делении на y мы могли потерять решение $y = 0$, но последнее содержится в формуле (4) при $C = 0$.

Используя заданное начальное условие, получим $C = 2$, и, следовательно, искомое частное решение есть

$$y = \frac{2}{x}.$$

2°. Некоторые дифференциальные уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными. Дифференциальные уравнения вида

$$y' = f(ax + by + c) \quad (b \neq 0)$$

приводятся к уравнениям вида (1) при помощи замены $u = ax + by + c$, где u — новая искомая функция.

3°. Ортогональные траектории — кривые, пересекающие линии данного семейства $\Phi(x, y, a) = 0$ (a — параметр) под прямым углом. Если $F(x, y, y') = 0$ есть дифференциальное уравнение семейства, то

$$F\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0$$

— дифференциальное уравнение ортогональных траекторий.

Пример 2. Найти ортогональные траектории семейства эллипсов

$$x^2 + 2y^2 = a^2. \tag{5}$$

Решение. Дифференцируя обе части уравнения (5), находим дифференциальное уравнение семейства

$$x + 2yy' = 0.$$

Отсюда, заменяя y' на $-\dfrac{1}{y'}$, получим дифференциальное уравнение ортогональных траекторий

$$x - \frac{2y}{y'} = 0 \text{ или } y' = \frac{2y}{x}.$$

Интегрируя, будем иметь $y = Cx^2$ (семейство парабол) (рис. 106).

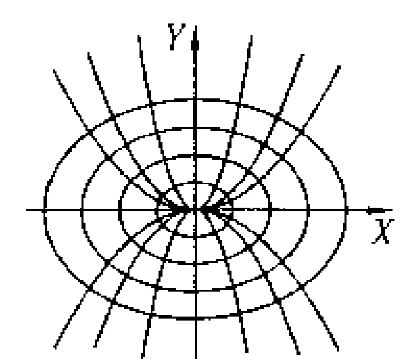


Рис. 106.

4°. Составление дифференциальных уравнений. При составлении дифференциального уравнения в геометрических задачах часто может быть использован геометрический смысл производной как тангенса угла, образованного касательной к кривой с положительным направлением оси OX; это позволяет во многих случаях сразу установить соотношения между ординатой y искомой кривой, ее абсциссой x и y', т. е. получить дифференциальное уравнение. В других случаях (см. №№ 2783, 2890, 2895) используется геометрический смысл определенного интеграла как площади криволинейной трапеции или длины дуги. При этом непосредственно из условия задачи получается простейшее интегральное уравнение (поскольку искомая функция содержится под знаком интеграла), однако путем дифференцирования обеих его частей можно легко перейти к дифференциальному уравнению.

Пример 3. Найти кривую, проходящую через точку (3; 2), для которой отрезок любой ее касательной, заключенный между координатными осями, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $M(x, y)$ есть середина касательной AB, по условию являющаяся точкой касания (точки A и B — это точки пересечения касательной с осями OY и OX). В силу условия $OA = 2y$ и $OB = 2x$. Угловой коэффициент касательной к кривой в точке $M(x, y)$ равен

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{OA}{OB} = -\frac{y}{x}.$$

Это и есть дифференциальное уравнение искомой кривой. Преобразовав, получим

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

и, следовательно,

$$\ln x + \ln y = \ln C \quad \text{или} \quad xy = C.$$

Используя начальное условие, определим $C = 3 \cdot 2 = 6$. Итак, искомая кривая есть гипербола $xy = 6$.

Решить дифференциальные уравнения:

2742. $\operatorname{tg} x \sin^2 y\, dx + \cos^2 x \operatorname{ctg} y\, dy = 0$.

2743. $xy' - y = y^3$.

2744. $xyy' = 1 - x^2$.

2745. $y - xy' = a(1 + x^2y')$.

2746. $3e^x \operatorname{tg} y\, dx + (1 - e^x) \sec^2 y\, dy = 0$.

2747. $y' \operatorname{tg} x = y$.

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

2748. $(1 + e^x) \cdot y \cdot y' = e^x$; $y = 1$ при $x = 0$.

2749. $(xy^2 + x)\, dx + (x^2y - y)\, dy = 0$; $y = 1$ при $x = 0$.

2750. $y' \sin x = y \ln y$; $y = 1$ при $x = \frac{\pi}{2}$.

Решить дифференциальные уравнения, использовав замену переменных:

2751. $y' = (x + y)^2$.

2752. $y' = (8x + 2y + 1)^2$.

2753. $(2x + 3y - 1)\, dx + (4x + 6y - 5)\, dy = 0$.

2754. $(2x - y)\, dx + (4x - 2y + 3)\, dy = 0$.

В №№ 2755 и 2756 перейти к полярным координатам:

2755. $y' = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}$. **2756.** $(x^2 + y^2)\, dx - xy\, dy = 0$.

2757*. Найти кривую, у которой отрезок касательной равен расстоянию точки касания от начала координат.

2758. Найти кривую, у которой отрезок нормали в любой точке кривой, заключенный между осями координат, делится пополам в этой точке.

2759. Найти кривую, у которой подкасательная имеет постоянную длину a.

2760. Найти кривую, у которой подкасательная вдвое более абсциссы точки касания.

2761*. Найти кривую, у которой абсцисса центра тяжести плоской фигуры, ограниченной осями координат, этой кривой и ординатой любой ее точки, равна 3/4 абсциссы этой точки.

2762. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (3; 1), для которой отрезок касательной между точкой касания и осью OX делится пополам в точке пересечения с осью OY.

2763. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (2; 0), если отрезок касательной к кривой между точкой касания и осью OY имеет постоянную длину 2.

Найти ортогональные траектории данных семейств кривых (a — параметр), построить семейства и их ортогональные траектории.

2764. $x^2 + y^2 = a^2$. **2766.** $xy = a$.

2765. $y^2 = ax$. **2767.** $(x - a)^2 + y^2 = a^2$.

§ 4. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка

1°. Однородные уравнения. Дифференциальное уравнение

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \tag{1}$$

называется *однородным*, если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ — однородные функции одинакового измерения. Уравнение (1) может быть приведено к виду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

и при помощи подстановки $y = xu$, где u — новая неизвестная функция, преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными. Можно также применять подстановку $x = yu$.

Пример 1. Найти общее решение уравнения

$$y' = e^{y/x} + \frac{y}{x}.$$

Решение. Полагаем $y = ux$; тогда $u + xu' = e^u + u$ или

$$e^{-u}\,du = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируя, получим $u = -\ln\ln\frac{C}{x}$, откуда

$$y = -x\ln\ln\frac{C}{x}.$$

2°. Уравнения, приводящиеся к однородным. Если

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (2)$$

и $\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то, полагая в уравнении (2) $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, где постоянные α и β определяются из системы уравнений

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0,\quad a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0,$$

получим однородное дифференциальное уравнение относительно переменных u и v. Если $\delta = 0$, то, полагая в уравнении (2) $a_1x + b_1y = u$, получим уравнение с разделяющимися переменными.

Проинтегрировать дифференциальные уравнения:

2768. $y' = \frac{y}{x} - 1.$

2769. $y' = -\frac{x+y}{x}.$

2770. $(x - y)y\,dx - x^2\,dy = 0.$

2771. Для уравнения $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$ найти семейство интегральных кривых, а также выделить кривые, проходящие соответственно через точки (4; 0) и (1; 1).

2772. $y\,dx + (2\sqrt{xy} - x)\,dy = 0.$

2773. $x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2 + y^2}\,dx.$

2774. $(4x^2 + 3xy + y^2)\,dx + (4y^2 + 3xy + x^2)\,dy = 0.$

2775. Найти частное решение уравнения

$$(x^2 - 3y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$$

из условия, что $y = 1$ при $x = 2$.

Решить уравнения:

2776. $(2x - y + 4)\,dy + (x - 2y + 5)\,dx = 0.$

2777. $y' = \frac{1 - 3x - 3y}{1 + x + y}.$

2778. $y' = \frac{x + 2y + 1}{2x + 4y + 3}.$

2779. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 0) и обладающей тем свойством, что отрезок, отсекаемый касательной на оси OY, равен полярному радиусу точки касания.

2780.** Какую форму следует придать зеркалу прожектора, чтобы лучи от точечного источника света отразились параллельным пучком?

2781. Найти уравнение кривой, у которой подкасательная равна среднему арифметическому координат точки касания.

2782. Найти уравнение кривой, для которой отрезок, отсекаемый на оси ординат нормалью в любой точке кривой, равен расстоянию этой точки от начала координат.

2783*. Найти уравнение кривой, для которой площадь, заключенная между осью абсцисс, кривой и двумя ординатами, одна из которых постоянная, а другая — переменная, равна отношению куба переменной ординаты к соответствующей абсциссе.

2784. Найти кривую, для которой отрезок на оси ординат, отсекаемой любой касательной, равен абсциссе точки касания.

§ 5. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Уравнение Бернулли

1°. Линейные уравнения. Дифференциальное уравнение вида

$$y' + P(x)y = Q(x) \qquad (1)$$

относительно y и y' называется *линейным*.

Если функция $Q(x) \equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$y' + P(x)y = 0 \qquad (2)$$

и называется *однородным линейным* дифференциальным уравнением. В этом случае переменные разделяются и общее решение уравнения (2) есть

$$y = Ce^{-\int P(x)\,dx}. \qquad (3)$$

Для решения неоднородного линейного уравнения (1) применяем так называемый метод *вариации произвольной постоянной*; этот метод состоит в том, что сначала находим общее решение соответствующего однородного линейного уравнения, т. е. соотношение (3). Затем, полагая в этом соотношении величину C функцией от x, ищем решение неоднородного уравнения (1) в виде (3). Для этого подставляем в уравнение (1) y и y', определяемые из (3), и из полученного дифференциального уравнения определяем функцию $C(x)$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения (1) получаем в виде

$$y = C(x)e^{-\int P(x)\,dx}.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$y' = \operatorname{tg} x \cdot y + \cos x. \tag{4}$$

Решение. Соответствующее однородное уравнение есть

$$y' - \operatorname{tg} x \cdot y = 0.$$

Решая его, получим

$$y = C\frac{1}{\cos x}.$$

Считая C функцией от x, дифференцируя, находим

$$y = \frac{1}{\cos x}\frac{dC}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}C.$$

Подставляя y и y' в уравнение (4), получим

$$\frac{1}{\cos x}\frac{dC}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}C = \operatorname{tg} x\frac{C}{\cos x} + \cos x, \text{ или } \frac{dC}{dx} = \cos^2 x,$$

откуда

$$C(x) = \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1.$$

Следовательно, общее решение уравнения (4) имеет вид

$$y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C_1\right)\frac{1}{\cos x}.$$

Для решения линейного уравнения (1) можно также применить подстановку

$$y = uv, \tag{5}$$

где u и v — функции от x. Тогда уравнение (1) примет вид

$$[u' + P(x)u]v + v'u = Q(x). \tag{6}$$

Если потребовать, чтобы

$$u' + P(x)u = 0, \tag{7}$$

то из (7) найдем u, затем из (6) найдем v, а следовательно, из (5) найдем y.

2°. Уравнение Бернулли. Уравнение 1-го порядка вида

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha},$$

где $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, называется *уравнением Бернулли*. Оно приводится к линейному с помощью подстановки $z = y^{1-\alpha}$. Можно также непосредственно применять подстановку $y = uv$, или метод вариации произвольной постоянной.

Пример 2. Решить уравнение

$$y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}.$$

Решение. Это — уравнение Бернулли $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$. Полагая

$$y = uv,$$

получим

$$u'v + v'u = \frac{4}{x}uv + x\sqrt{uv} \text{ или } v\left(u' - \frac{4}{x}u\right) + v'u = x\sqrt{uv}. \tag{8}$$

Для определения функции u потребуем выполнения соотношения

$$u' - \frac{4}{x}u = 0,$$

откуда

$$u = x^4.$$

Подставляя это выражение в уравнение (8), получим

$$v'x^4 = x\sqrt{vx^4},$$

отсюда находим v:

$$v = \left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2;$$

следовательно, общее решение получим в виде

$$y = x^4\left(\frac{1}{2}\ln|x| + C\right)^2.$$

Найти общие интегралы уравнений:

2785. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = x.$

2786. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x} = x^3.$

2787*. $(1 + y^2)\,dx = (\sqrt{1 + y^2}\sin y - xy)\,dy.$

2788. $y^2\,dx - (2xy + 3)\,dy = 0.$

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям:

2789. $xy' + y - e^x = 0$; $y = b$ при $x = a$.

2790. $y' - \dfrac{y}{1 - x^2} - 1 - x = 0$; $y = 0$ при $x = 0$.

2791. $y' - y\operatorname{tg} x = \dfrac{1}{\cos x}$; $y = 0$ при $x = 0$.

Найти общие решения уравнений:

2792. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = -xy^2$.

2793. $2xy\dfrac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$.

2794. $y\,dx + \left(x - \dfrac{1}{2}x^3y\right)\,dy = 0$.

2795. $3x\,dy = y(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)\,dx$.

2796. Даны три частных решения y, y_1, y_2 линейного уравнения. Доказать, что выражение $\dfrac{y_2 - y}{y - y_1}$ сохраняет постоянное значение при любом x. Каков геометрический смысл этого результата?

2797. Найти кривые, для которых площадь треугольника, образованного осью OX, касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянна.

2798. Найти уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси абсцисс, равен квадрату ординаты точки касания.

2799. Найти уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, равен поднормали.

2800. Найти уравнение кривой, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси ординат, пропорционален квадрату ординаты точки касания.

2801. Найти уравнение кривой, для которой отрезок касательной равен расстоянию точки пересечения этой касательной с осью OX от точки $M(0, a)$.

§ 6. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель

1°. Уравнения в полных дифференциалах. Если для дифференциального уравнения

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0, \qquad (1)$$

выполнено тождество $\dfrac{\partial P}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то уравнение (1) может быть записано в виде $dU(x, y) = 0$ и называется *уравнением в полных дифференциалах*. Общий интеграл уравнения (1) есть $U(x, y) = C$. Функция $U(x, y)$ определяется способом, указанным в гл. VI, § 8, или по формуле

$$U = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy$$

(см. гл. VII, § 9).

Пример 1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения

$$(3x^2 + 6xy^2)\,dx + (6x^2y + 4y^3)\,dy = 0.$$

Решение. Это — уравнение в полных дифференциалах, так как $\dfrac{\partial(3x^2+6xy^2)}{\partial y} = \dfrac{\partial(6x^2y+4y^3)}{\partial x} = 12xy$ и, следовательно, уравнение имеет вид $dU = 0$.

Здесь

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 3x^2 + 6xy^2 \text{ и } \frac{\partial U}{\partial y} = 6x^2y + 4y^3;$$

отсюда

$$U = \int (3x^2 + 6xy^2)\,dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y).$$

Дифференцируя U по y, найдем $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3$ (по условию); отсюда $\varphi'(y) = 4y^3$ и $\varphi(y) = y^4 + C_0$. Окончательно получим $U(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C_0$, следовательно, $x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$ есть искомый общий интеграл данного уравнения.

2°. Интегрирующий множитель. Если левая часть уравнения (1) не является полным дифференциалом и выполнены условия теоремы Коши, то существует функция $\mu = \mu(x, y)$ *(интегрирующий множитель)* такая, что

$$\mu(P\,dx + Q\,dy) = dU. \qquad (2)$$

Отсюда получаем, что функция μ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

Интегрирующий множитель μ легко находится в двух случаях:

1) $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = F(x)$, тогда $\mu = \mu(x)$;

2) $\dfrac{1}{P}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = F_1(y)$, тогда $\mu = \mu(y)$.

Пример 2. Решить уравнение $\left(2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}\right)dx + (x^2 + y^2)\,dy = 0$.

Решение. Здесь $P = 2xy + x^2y + \dfrac{y^3}{3}$, $Q = x^2 + y^2$ и $\dfrac{1}{Q}\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}\right) = \dfrac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1$, следовательно, $\mu = \mu(x)$.

Так как $\dfrac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \dfrac{\partial(\mu Q)}{\partial x}$ или $\mu\dfrac{\partial P}{\partial y} = Q\dfrac{d\mu}{dx} + \mu\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)dx = dx \text{ и } \ln\mu = x,\ \mu = e^x.$$

Умножая уравнение на $\mu = e^x$, получим

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\,dx + e^x(x^2 + y^2)\,dy = 0$$

— уравнение в полных дифференциалах. Проинтегрировав его, будем иметь общий интеграл

$$ye^x\left(x^2 + \frac{y^2}{3}\right) = C.$$

Найти общие интегралы уравнений:

2802. $(x + y)\,dx + (x + 2y)\,dy = 0.$

2803. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2xy\,dy = 0.$

2804. $(x^3 - 3xy^2 + 2)\,dx - (3x^2y - y^2)\,dy = 0.$

2805. $x\,dx + y\,dy = \dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}.$

2806. $\dfrac{2x\,dx}{y^3} + \dfrac{y^2 - 3x^2}{y^4}\,dy = 0.$

2807. Найти частный интеграл уравнения

$$\left(x + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0,$$

удовлетворяющий начальному условию $y(0) = 2$.

Решить уравнения, допускающие интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$ или $\mu = \mu(y)$:

2808. $(x + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0.$

2809. $y(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0.$

2810. $\dfrac{y}{x}\,dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0.$

2811. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0.$

§ 7. Дифференциальные уравнения 1-го порядка, не разрешенные относительно производной

1°. Дифференциальные уравнения 1-го порядка высших степеней. Если дано уравнение

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

например, второй степени относительно y', то, разрешая уравнение (1) относительно y', получим два уравнения:

$$y' = f_1(x, y),\quad y' = f_2(x, y). \tag{2}$$

Таким образом, через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ некоторой области плоскости проходят, вообще говоря, две интегральные кривые. Общий интеграл уравнения (1) в этом случае имеет вид

$$\Phi(x, y, C) \equiv \Phi_1(x, y, C)\Phi_2(x, y, C) = 0, \tag{3}$$

где Φ_1 и Φ_2 — общие интегралы уравнения (2).

Кроме того, для уравнения (1) может существовать *особый интеграл*. Геометрически особый интеграл представляет собой огибающую семейства кривых (3) и может быть получен в результате исключения C из системы уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0,\quad \Phi'_C(x, y, C) = 0 \tag{4}$$

или в результате исключения $p = y'$ из системы уравнений

$$F(x, y, p) = 0,\quad F'_p(x, y, p) = 0. \tag{5}$$

Заметим, что кривые, определяемые уравнениями (4) или (5), не всегда являются решениями уравнения (1); поэтому в каждом отдельном случае необходима проверка.

Пример 1. Найти общий и особый интегралы уравнения

$$xy'^2 + 2xy' - y = 0.$$

Решение. Решая относительно y', имеем два однородных уравнения:

$$y' - 1 + \sqrt{1 + \frac{y}{x}},\quad y' = -1 - \sqrt{1 + \frac{y}{x}},$$

определенных в области

$$x(x + y) > 0,$$

общие интегралы которых

$$\left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} - 1\right)^2 = \frac{C}{x};\quad \left(\sqrt{1 + \frac{y}{x}} + 1\right)^2 = \frac{C}{x}$$

или

$$(2x + y - C) - 2\sqrt{x^2 + xy} = 0,\quad (2x + y - C) + 2\sqrt{x^2 + xy} = 0.$$

Перемножая, получаем общий интеграл данного уравнения

$$(2x + y - C)^2 - 4(x^2 + xy) = 0$$

или

$$(y - C)^2 = 4Cx$$

(семейство парабол).

Дифференцируя общий интеграл по C и исключая C, найдем особый интеграл

$$x + y = 0.$$

(Проверка показывает, что $x + y = 0$ есть решение данного уравнения.)

Особый интеграл можно также найти, дифференцируя $xp^2 + 2xp - y = 0$ по p и исключая p.

2°. Решение дифференциального уравнения методом введения параметра. Если дифференциальное уравнение 1-го порядка имеет вид

$$x = \varphi(y, y'),$$

то переменные y и x могут быть определены из системы уравнений

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{ds}, \quad x = \varphi(y, p),$$

где $p = y'$ играет роль параметра.

Аналогично, если $y = \psi(x, y')$, то x и y определяются из системы уравнений

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\frac{dp}{dx}, \quad y = \psi(x, p).$$

Пример 2. Найти общий и особый интегралы уравнения

$$y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2}.$$

Решение. Делая подстановку $y' = p$, перепишем уравнение в виде

$$y = p^2 - xp + \frac{x^2}{2}.$$

Дифференцируя по x, считая p функцией от x, имеем

$$p = 2p\frac{dp}{dx} - p - x\frac{dp}{dx} + x,$$

или $\frac{dp}{dx}(2p - x) = (2p - x)$, или $\frac{dp}{dx} = 1$. Интегрируя, получим $p = x + C$. Подставляя в первоначальное уравнение, имеем общее решение:

$$y = (x + C)^2 - x(x + C) + \frac{x^2}{2} \text{ или } y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Дифференцируя общее решение по C и исключая C, получаем особое решение: $y = \frac{x^2}{4}$. (Проверка показывает, что $y = \frac{x^2}{4}$ есть решение данного уравнения.)

Если приравнять нулю множитель $2p - x$, на который было произведено сокращение, то получим $p = \frac{x}{2}$ и, подставив p в данное уравнение, получим $y = \frac{x^2}{4}$ — то же самое особое решение.

Найти общие и особые интегралы уравнений (в №№ 2812, 2813 построить поле интегральных кривых):

2812. $y'^2 - \frac{2y}{x}y' + 1 = 0.$

2813. $4y'^2 - 9x = 0.$

2814. $yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0.$

2815. $yy'^2 - 2xy' + y = 0.$

2816. Найти интегральные кривые уравнения $y'^2 + y^2 = 1$, проходящие через точку $M\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Вводя параметр $y' = p$, решить уравнения:

2817. $x = \sin y' + \ln y'$,

2818. $y = y'^2 e^{y'}$.

2819. $y = y'^2 + 2\ln y'$.

2820. $4y = x^2 + y'^2$.

2821. $e^x = \frac{y^2 + y'^2}{2y'}$.

§ 8. Уравнения Лагранжа и Клеро

1°. Уравнение Лагранжа. Уравнение вида

$$y = x\varphi(p) + \psi(p), \tag{1}$$

где $p = y'$, называется *уравнением Лагранжа*. При помощи дифференцирования, учитывая, что $dy = p\,dx$, уравнение (1) сводится к линейному относительно x:

$$p\,dx = \varphi(p)\,dx + [x\varphi'(p) + \psi'(p)]\,dp. \tag{2}$$

Если $p \equiv \varphi(p)$, то из уравнений (1) и (2) получаем общее решение в параметрическом виде:

$$x = Cf(p) + g(p), \; y = [Cf(p) + g(p)]\varphi(p) + \psi(p),$$

где p — параметр, $f(p)$, $g(p)$ — некоторые известные функции. Кроме того, может существовать особое решение, отыскиваемое обычным приемом.

2°. Уравнение Клеро. Если в уравнении (1) $\varphi(p) \equiv p$, то получаем *уравнение Клеро*

$$y = xp + \psi(p).$$

Общее решение его имеет вид $y = Cx + \psi(C)$ (семейство прямых). Кроме того, существует особое решение (огибающая), получающееся в результате исключения параметра p из системы уравнений

$$\begin{cases} x = -\psi'(p), \\ y = px + \psi(p). \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение

$$y = 2y'x + \frac{1}{y'}. \tag{3}$$

Решение. Полагаем $y' = p$, тогда $y = 2px + \frac{1}{p}$; дифференцируя и заменяя dy на $p\,dx$, получим

$$p\,dx = 2p\,dx + 2x\,dp - \frac{dp}{p^2}$$

или

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2}{p}x + \frac{1}{p^3}.$$

Решив это линейное уравнение, будем иметь

$$x = \frac{1}{p^2}(\ln p + C).$$

Следовательно, общий интеграл будет

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{p^2}(\ln p + C) \\ y = 2px + \dfrac{1}{p}. \end{cases}$$

Для нахождения особого интеграла по общему правилу составляем систему:

$$y = 2px + \frac{1}{p}, \quad 0 = 2x - \frac{1}{p^2}.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{2p^2}, \quad y = \frac{2}{p}$$

и, следовательно,

$$y = \pm 2\sqrt{2}x.$$

Подставляя y в уравнение (3), убеждаемся, что полученная функция не является решением и, следовательно, уравнение (3) не имеет особого интеграла.

Решить уравнения Лагранжа:

2822. $y = \frac{1}{2}x\left(y' + \frac{4}{y'}\right)$.

2823. $y = y' + \sqrt{1 - y'^2}$.

2824. $y = (1 + y')x + y'^2$.

2825*. $y = -\frac{1}{2}y'(2x + y')$.

Найти общий и особый интегралы уравнений Клеро и построить поле интегральных кривых:

2826. $y = xy' + y'^2$.

2827. $y = xy' + y'$.

2828. $y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$.

2829. $y = xy' + \frac{1}{y'}$.

2830. Найти кривую, для которой площадь треугольника, образованного касательной в любой точке и осями координат, постоянна.

2831. Найти кривую, если расстояние данной точки до любой касательной к этой кривой постоянно.

2832. Найти кривую, для которой отрезок любой ее касательной, заключенный между осями координат, имеет постоянную длину l.

§ 9. Смешанные дифференциальные уравнения 1-го порядка

2833. Определить типы дифференциальных уравнений и указать методы их решения:

а) $(x + y)y' = x\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}$;

б) $(x - y)y' = y^2$;

в) $y' = 2xy + x^3$;

г) $y' = 2xy + y^3$;

д) $xy' + y = \sin y$;

е) $(y - xy')^2 = y'^3$;

ж) $y = xe^{y'}$;

з) $(y' - 2xy)\sqrt{y} = x^3$;

и) $y' = (x + y)^2$;

к) $x\cos y' + y\sin y' = 1$;

л) $(x^2 - xy)y' = y^4$;

м) $(x^2 + 2xy^3)\,dx + (y^2 + 3x^2y^2)\,dy = 0$;

н) $(x^3 - 3xy)\,dx + (x^2 + 3)\,dy = 0$;

о) $(xy^3 + \ln x)\,dx = y^2\,dy$.

Решить уравнения:

2834. а) $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$; б) $x\ln\frac{x}{y}\,dy - y\,dx = 0$.

2835. $x\,dx = \left(\frac{x^2}{y} - y^3\right)dy$.

2836. $(2xy^2 - y)\,dx + x\,dy = 0$.

2837. $xy' + y = xy^2\ln x$.

2838. $y = xy' + y'\ln y'$.

2839. $y = xy' + \sqrt{-ay'}$.

2840. $x^2(y + 1)\,dx + (x^3 - 1)(y - 1)\,dy = 0$.

2841. $(1 + y^2)(e^{2x}\,dx - e^y\,dy) - (1 + y)\,dy = 0$.

2842. $y' - y\frac{2x - 1}{x^2} = 1$.

2843. $ye^y = (y^3 + 2xe^y)y'$.

2844. $y' + y\cos x = \sin x\cos x$.

2845. $(1 - x^2)y' + xy = a$.

2846. $xy' - \frac{y}{x + 1} - x = 0$.

2847. $y'(x\cos y + a\sin 2y) = 1$.

2848. $(x^2y - x^2 + y - 1)\,dx + (xy + 2x - 3y - 6)\,dy = 0$.

2849. $y' = \left(1 + \frac{y - 1}{2x}\right)^2$.

2850. $xy^3\,dx = (x^2y + 2)\,dy$.

2851. $y' = \frac{3x^2}{x^3 + y + 1}$.

2852. $2\,dx + \sqrt{\frac{x}{y}}\,dy - \sqrt{\frac{y}{x}}\,dx = 0$.

2853. $y' = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\,\frac{y}{x}$.

2854. $yy' + y^2 = \cos x$.

2855. $x\,dy + y\,dx = y^2\,dx$.

2856. $y'(x + \sin y) = 1$.

2857. $y\frac{dp}{dy} = -p + p^2$.

2858. $x^3\,dx - (x^4 + y^3)\,dy = 0$.

2859. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0.$

2860. $\dfrac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{x\,dy - y\,dx}{y^2} = 0.$

2861. $e^y\,dx + (xe^y - 2y)\,dy = 0.$

2862. $y = 2xy' + \sqrt{1+y'^2}.$

2863. $y' = \dfrac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x).$

2864. $(2e^x + y^4)\,dy - ye^x\,dx = 0.$

2865. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2.$

2866. $xy(xy^2 + 1)\,dy - dx = 0.$

2867. $a(xy' + 2y) = xyy'.$

2868. $x\,dy - y\,dx = y^2\,dx.$

2869. $(x^2 - 1)^{3/2}\,dy + (x^3 + 3xy\sqrt{x^2-1})\,dx = 0.$

2870. $\operatorname{tg} x\,\dfrac{dy}{dx} - y = a.$

2871. $\sqrt{a^2+x^2}\,dy + (x + y - \sqrt{a^2+x^2})\,dx = 0.$

2872. $xyy'^2 - (x^2 + y^2)y' + xy = 0.$

2873. $y = xy' + \dfrac{1}{y'^2}.$

2874. $(3x^2 + 2xy - y^2)\,dx + (x^2 - 2xy - 3y^2)\,dy = 0.$

2875. $2yp\,\dfrac{dp}{dy} = 3p^2 + 4y^2.$

Найти решения уравнений при указанных начальных условиях:

2876. $y' = \dfrac{y+1}{x}$; $y = 0$ при $x = 1$.

2877. $e^{x-y}y' = 1$; $y = 1$ при $x = 1$.

2878. $y'\operatorname{ctg} x + y = 2$; $y = 2$ при $x = 0$.

2879. $e^y(y' + 1) = 1$; $y = 0$ при $x = 0$.

2880. $y' + y = \cos x$; $y = \dfrac{1}{2}$ при $x = 0$.

2881. $y' - 2y = -x^2$; $y = \dfrac{1}{4}$ при $x = 0$.

2882. $y' + y = 2x$; $y = -1$ при $x = 0$.

2883. $xy' = y$; а) $y = 1$ при $x = 1$; б) $y = 0$ при $x = 0$.

2884. $2xy' = y$; а) $y = 1$ при $x = 1$; б) $y = 0$ при $x = 0$.

2885. $2xyy' + x^2 - y^2 = 0$; а) $y = 0$ при $x = 0$; б) $y = 1$ при $x = 0$; в) $y = 0$ при $x = 1$.

2886. Найти кривую, проходящую через точку (0; 1), у которой подкасательная равна сумме координат точки касания.

2887. Найти кривую, зная, что сумма отрезков, отсекаемых касательной к ней на осях координат, постоянна и равна $2a$.

2888. Сумма длин нормали и поднормали равна единице. Найти уравнение кривой, если известно, что кривая проходит через начало координат.

2889*. Найти кривую, у которой угол, образованный касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянен.

2890. Найти кривую, зная, что площадь, заключенная между осями координат, этой кривой и ординатой любой точки на ней, равна кубу этой ординаты.

2891. Найти кривую, зная, что площадь сектора, ограниченного полярной осью, этой кривой и полярным радиусом любой ее точки, пропорциональна кубу этого радиуса.

2892. Найти кривую, у которой отрезок, отсекаемый касательной на оси OX, равен длине этой касательной.

2893. Найти кривую, у которой отрезок касательной, заключенный между осями координат, делится пополам параболой $y^2 = 2x$.

2894. Найти кривую, у которой нормаль в любой ее точке равна расстоянию этой точки от начала координат.

2895*. Площадь фигуры, ограниченной кривой, осями координат и ординатой какой-либо точки кривой, равна длине соответствующей дуги кривой. Найти уравнение этой кривой, если известно, что она проходит через точку (0; 1).

2896. Найти кривую, у которой площадь треугольника, образованного осью абсцисс, касательной и радиусом-вектором точки касания, постоянна и равна a^2.

2897. Найти кривую, если известно, что середина отрезка, отсекаемого на оси OX касательной и нормалью к кривой, есть постоянная точка $(a; 0)$.

При составлении дифференциального уравнения 1-го порядка, особенно в физических задачах, часто бывает целесообразно применять так называемый *метод дифференциалов*, заключающийся в том, что приближенные соотношения между бесконечно малыми приращениями искомых величин, справедливые с точностью до бесконечно малых высшего порядка, заменяются соответствующими соотношениями между их дифференциалами, что не отражается на результате.

З а д а ч а. В резервуаре находится 100 л водного раствора, содержащего 10 кг соли. Вода вливается в резервуар со скоростью 3 л в 1 мин, и смесь вытекает из него со скоростью 2 л в 1 мин, причем концентрация поддерживается равномерной посредством перемешивания. Сколько соли будет содержать резервуар по истечении 1 ч?

Р е ш е н и е. Концентрацией c данного вещества называется количество его, заключенное в единице объема. Если концентрация равномерна, то количество вещества в объеме V равно cV.

Пусть количество соли, находящееся в резервуаре по истечении времени t (в минутах), есть x. Количество смеси в резервуаре в этот момент будет $(100 + t)$ л и, следовательно, концентрация $c = \dfrac{x}{100+t}$ кг/л.

В течение промежутка времени dt из резервуара вытекает $2dt$ литров смеси, содержащих соли $2c\,dt$ кг. Поэтому изменение dx количества соли в резервуаре характеризуется соотношением

$$-dx = 2c\,dt, \quad \text{или} \quad -dx = \frac{2x}{100+t}\,dt.$$

Это и есть искомое дифференциальное уравнение. Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\ln x = -2\ln(100 + t) + \ln C$$

или

$$x = \frac{C}{(100+t)^2}.$$

Постоянное C определится из условия, что при $t = 0$ $x = 10$, т. е. $C = 100\,000$. По истечении часа в резервуаре будет содержаться соли $x = \frac{100000}{160^2}$ кг $\approx 3{,}9$ кг.

2898*. Доказать, что для тяжелой жидкости, вращающейся около вертикальной оси, свободная поверхность имеет форму параболоида вращения.

2899*. Найти зависимость давления воздуха от высоты, если известно, что это давление равно 10^5Па на уровне моря и $9{,}2 \cdot 10^4$Па на высоте 500 м.

2900*. Согласно закону Гука, эластичный шнур длины l под действием растягивающей силы F получает приращение длины klF ($k = \text{const}$). На сколько увеличится длина шнура под действием его веса W, если подвесить шнур за один конец? (Начальная длина шнура l.)

2901. Решить ту же задачу при условии, что к концу шнура подвешен груз P.

При решении задач №№ 2902—2903 использовать закон Ньютона, по которому скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и окружающей его среды.

2902. Найти зависимость температуры T от времени t, если тело, нагретое до температуры T_0, внесено в помещение, температура которого постоянна и равна a.

2903. Через сколько времени температура тела, нагретого до 100°С, понизится до 30°С, если температура помещения равна 20°С и за первые 20 мин тело охладилось до 60°С?

2904. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 100 об/мин, по истечении 1 мин вращается со скоростью 60 об/мин.

2905*. Скорость распада радия пропорциональна наличному количеству его. Известно, что по истечении 1600 лет остается половина первоначального запаса радия. Найти, какой процент радия окажется распавшимся по истечении 100 лет.

2906*. Скорость истечения воды из отверстия на расстоянии h по вертикали от свободной поверхности определяется формулой

$$v = c\sqrt{2gh},$$

где $c \approx 0{,}6$ — безразмерный коэффициент, определяемый экспериментально, и g — ускорение свободного падения.

В какое время вода, заполняющая полусферический котел диаметра 2 м, вытечет из него через круглое отверстие на дне радиуса 0,1 м?

2907*. Интенсивность света, проходящего через тонкий слой воды, уменьшается пропорционально интенсивности падающего света и толщине слоя. Если при прохождении слоя воды толщиной 3 м интенсивность света вдвое уменьшается, то какова будет интенсивность на глубине 30 м?

2908*. Сила сопротивления воздуха при падении тела с парашютом пропорциональна квадрату скорости движения. Найти предельную скорость падения тела.

2909*. Дно резервуара, вместимость которого 300 л, покрыто смесью соли и нерастворимого вещества. Допуская, что скорость растворения соли пропорциональна разности между концентрацией в данный момент и концентрацией насыщенного раствора (1 кг соли на 3 л воды) и что данное количество чистой воды растворяет 1/3 кг соли в 1 мин, найти, сколько соли будет содержать раствор по истечении 1 ч.

2910*. Электродвижущая сила e в цепи с током i, имеющей сопротивление R и индуктивность L, складывается из падения напряжения Ri и электродвижущей силы самоиндукции $L\frac{di}{dt}$. Определить ток i в момент времени t, если $e = E\sin\omega t$ (E и ω — постоянные) и $i = 0$ при $t = 0$.

§ 10. Дифференциальные уравнения высших порядков

1°. Случай непосредственного интегрирования. Если

$$y^{(n)} = f(x),$$

то

$$y = \underbrace{\int dx \int \ldots \int f(x)\,dx}_{n \text{ раз}} + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \ldots + C_n.$$

2°. Случаи понижения порядка. 1) Если дифференциальное уравнение явно не содержит y, например

$$F(x, y', y'') = 0,$$

то, полагая $y' = p$, получим уравнение порядка на единицу ниже

$$F(x, p, p') = 0.$$

Пример 1. Найти частное решение уравнения

$$xy'' + y' + x = 0,$$

удовлетворяющее условиям

$$y = 0,\ y' = 0 \text{ при } x = 0.$$

Решение. Полагая $y' = p$, имеем $y'' = p'$, откуда

$$xp' + p + x = 0.$$

Решая последнее уравнение как линейное относительно функции p, получим

$$px = C_1 - \frac{x^2}{2}.$$

Из условия $y' = p = 0$ при $x = 0$ имеем $0 = C_1 - 0$, т. е. $C_1 = 0$. Следовательно,

$$p = -\frac{x}{2},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2},$$

откуда, интегрируя еще раз, получим

$$y = -\frac{x^2}{4} + C_2.$$

Полагая $y = 0$ при $x = 0$, находим $C_2 = 0$. Следовательно, искомое частное решение есть

$$y = -\frac{1}{4}x^2.$$

2) Если дифференциальное уравнение явно не содержит x, например

$$F(x, y', y'') = 0,$$

то, полагая $y' = p$, $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$, получим уравнение порядка на единицу ниже

$$F\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right) = 0.$$

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$yy'' - y'^2 = y^4$$

при условии $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

Решение. Полагаем $y' = p$, тогда $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$ и наше уравнение преобразуется в следующее:

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = y^4.$$

Мы получили уравнение типа Бернулли относительно p (y считаем аргументом). Решая его, найдем

$$p = \pm y\sqrt{C_1 + y^2}.$$

Из условия $y' = p = 0$ при $y = 1$ имеем $C_1 = -1$. Следовательно,

$$p = \pm y\sqrt{y^2 - 1}$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \pm y\sqrt{y^2 - 1}.$$

Интегрируя, имеем

$$\arccos\frac{1}{y} \pm x = C_2.$$

Полагая $y = 1$ и $x = 0$, получим $C_2 = 0$, откуда $\dfrac{1}{y} = \cos x$ или $y = \sec x$.

Решить уравнения:

2911. $y'' = \dfrac{1}{x}$.

2912. $y'' = -\dfrac{1}{2y^3}$.

2913. $y'' = 1 - y'^2$.

2914. $xy'' + y' = 0$.

2915. $yy'' = y'^2$.

2916. $yy'' + y'^2 = 0$.

2917. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

2918. $y'(1 + y'^2) = ay''$.

2919. $x^2y'' + xy' = 1$.

2920. $yy'' = y^2y' + y'^2$.

2921. $yy'' - y'(1 + y') = 0$.

2922. $y'' = -\dfrac{x}{y'}$.

2923. $(x + 1)y'' - (x + 2)y' + x + 2 = 0$.

2924. $xy'' = y' \ln \dfrac{y'}{x}$.

2925. $y' + \dfrac{1}{4}(y'')^2 = xy''$.

2926. $xy''' + y'' = 1 + x$.

2927. $y'''^2 + y''^2 = 1$.

Найти частные решения при указанных начальных условиях:

2928. $(1 + x^2)y'' - 2xy' = 0$; $y = 0$, $y' = 3$ при $x = 0$.

2929. $1 + y'^2 = 2yy''$; $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 1$.

2930. $yy'' + y'^2 = y'^3$; $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

2931. $xy'' = y'$; $y = 0$, $y' = 0$ при $x = 0$.

Найти общие интегралы уравнений:

2932. $yy' = \sqrt{y^2 + y'^2}\, y'' - y'y''$.

2933. $yy'' = y'^2 + y'\sqrt{y^2 + y'^2}$.

2934. $y'^2 - yy'' = y^2y'$.

2935. $yy'' + y'^2 - y'^3 \ln y = 0$.

Найти решения, удовлетворяющие указанным условиям:

2936. $y''y^3 = 1$; $y = 1$, $y' = 1$ при $x = \frac{1}{2}$.

2937. $yy'' + y'^2 = 1$; $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

2938. $xy'' = \sqrt{1 + y'^2}$; $y = 0$ при $x = 1$; $y = 1$ при $x = e^2$.

2939. $y''(1 + \ln x) + \frac{1}{x} \cdot y' = 2 + \ln x$; $y = \frac{1}{2}$, $y' = 1$ при $x = 1$.

2940. $y'' = \frac{y'}{x}\left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right)$; $y = \frac{1}{2}$, $y' = 1$ при $x = 1$.

2941. $y'' - y'^2 + y'(y - 1) = 0$; $y = 2$, $y' = 2$ при $x = 0$.

2942. $3y'y'' = y + y'^3 + 1$; $y = -2$; $y' = 0$ при $x = 0$.

2943. $y^2 + y'^2 - 2yy'' = 0$; $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

2944. $yy' + y'^2 + yy'' = 0$; $y = 1$ при $x = 0$ и $y = 0$ при $x = -1$.

2945. $2y' + (y'^2 - 6x) \cdot y'' = 0$; $y' = 2$ при $x = 2$.

2946. $y'y^2 + yy' - y'^2 = 0$; $y = 1$, $y' = 2$ при $x = 0$.

2947. $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$; $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

2948. $2yy'' - y^2 - y'^2 = 0$; $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

2949. $y'' = y'^2 - y$; $y = -\frac{1}{4}$, $y' = \frac{1}{2}$ при $x = 1$.

2950. $y'' + \frac{1}{y^2} e^{y^2} y' - 2yy'^2 = 0$; $y = 1$, $y' = e$ при $x = -\frac{1}{2e}$.

2951. $1 + yy'' + y'^2 = 0$; $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 1$.

2952. $(1 + yy')y'' = (1 + y'^2)y'$; $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

2953. $(x + 1)y'' + xy'^2 = y'$; $y = -2$, $y' = 4$ при $x = 1$.

Решить уравнения:

2954. $y' = xy''^2 + y''^2$.

2955. $y' = xy'' + y'' - y''^2$.

2956. $y'''^2 = 4y''$.

2957. $yy'y'' = y'^3 + y''^2$. Выделить интегральную кривую, проходящую через точку $(0; 0)$ и касающуюся в ней прямой $y + x = 0$.

2958. Найти кривые постоянного радиуса кривизны.

2959. Найти кривую, у которой радиус кривизны пропорционален кубу нормали.

2960. Найти кривую, у которой радиус кривизны равен нормали.

2961. Найти кривую, у которой радиус кривизны вдвое больше нормали.

2962. Найти кривые, у которых проекция радиуса кривизны на ось OY постоянна.

2963. Найти уравнение каната подвесного моста, предполагая, что нагрузка распределена равномерно по проекции каната на горизонтальную прямую. Весом каната пренебречь.

2964*. Найти положение равновесия гибкой нерастяжимой нити, укрепленной концами в двух точках и имеющей постоянную нагрузку q (включая вес нити) на единицу длины.

2965*. Тяжелое тело без начальной скорости скользит по наклонной плоскости. Найти закон движения, если угол наклона равен α, а коэффициент трения μ.

Указание. Сила трения равна μN, где N — сила реакции плоскости.

2966*. Силу сопротивления воздуха при падении тела можно считать пропорциональной квадрату скорости. Найти закон движения, если начальная скорость равна нулю.

2967*. Моторная лодка массой 300 кг движется прямолинейно со скоростью 66 м/с. Сила сопротивления воды пропорциональна скорости лодки и равна 10 Н при скорости 1 м/с. Через сколько времени после выключения мотора скорость лодки будет равна 8 м/с?

§ 11. Линейные дифференциальные уравнения

1°. Однородные уравнения. Функции $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, ..., $y_n = \varphi_n(x)$ называются *линейно зависимыми* на (a, b), если существуют постоянные C_1, C_2, ..., C_n, не все равные нулю, такие, что

$$C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots C_ny_n \equiv 0 \text{ при } a < x < b;$$

в противном случае данные функции называются *линейно независимыми*.

Общее решение *однородного линейного* дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

с непрерывными коэффициентами $P_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеет вид

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n,$$

где y_1, y_2, ..., y_n — линейно независимые решения уравнения (1) (*фундаментальная система решений*).

2°. Неоднородные уравнения. Общее решение *неоднородного линейного* дифференциального уравнения

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)y = f(x) \qquad (2)$$

с непрерывными коэффициентами $P_i(x)$ и правой частью $f(x)$ имеет вид

$$y = y_0 + Y,$$

где y_0 — общее решение соответствующего однородного уравнения (1); Y — частное решение данного неоднородного уравнения (2).

Если известна фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного уравнения (1), то общее решение соответствующего неоднородного уравнения (2) может быть найдено по формуле

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n,$$

где функции $C_i(x)$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} C_1'(x)y_1 + C_2'(x)y_2 + \ldots + C_n'(x)y_n &= 0,\\ C_1''(x)y_1' + C_2(x)y_2' + \ldots + C_n(x)y_n' &= 0,\\ &\ldots\\ &\ldots\\ C_1'(x)y_1^{(n-2)} + C_2'(x)y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-2)} &= 0,\\ C_1'(x)y_1^{(n-1)} + C_2'(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x)y_n^{(n-1)} &= f(x) \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

(метод вариации произвольных постоянных).

Пример. Решить уравнение

$$xy'' + y' = x^2. \quad (4)$$

Решение. Решая однородное уравнение

$$xy'' + y' = 0,$$

получаем

$$y = C_1 \ln x + C_2. \quad (5)$$

Следовательно, можно принять

$$y_1 = \ln x \text{ и } y_2 = 1$$

и решение уравнения (4) искать в виде

$$y = C_1(x)\ln x + C_2(x).$$

Составляя систему (3) и учитывая, что приведенный вид уравнения (4) есть $y'' + \dfrac{y'}{x} = x$, получим

$$\begin{cases} C_1'(x)\ln x + C_2'(x)\cdot 1 = 0,\\ C_1'(x)\dfrac{1}{x} + C_2'(x)\cdot 0 = x. \end{cases}$$

Отсюда

$$C_1(x) = \frac{x^3}{3} + A \quad \text{и} \quad C_2(x) = -\frac{x^3}{3}\ln x + \frac{x^3}{9} + B$$

и, следовательно,

$$y = \frac{x^3}{9} + A\ln x + B,$$

где A и B — произвольные постоянные.

2968. Исследовать на линейную зависимость следующие системы функций:

а) $x,\ x + 1$; в) $0,\ 1,\ x$;
б) $x^2,\ -2x^2$; г) $x,\ x + 1,\ x + 2$;
д) $x,\ x^2,\ x^3$; ж) $\sin x,\ \cos x,\ 1$;
е) $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}$; з) $\sin^2 x,\ \cos^2 x,\ 1$.

2969. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная его фундаментальную систему решений:

а) $y_1 = \sin x,\ \ y_2 = \cos x$;

б) $y_1 = e^x,\ \ y_2 = xe^x$;

в) $y_1 = x,\ \ y_2 = x^2$;

г) $y_1 = e^x,\ \ y_2 = e^x\sin x,\ \ y_3 = e^x\cos x$.

2970. Зная фундаментальную систему решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$y_1 = x,\ y_2 = x^2,\ y_3 = x^3,$$

найти его частное решение y, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=1} = 0,\ y'|_{x=1} = -1,\ y''|_{x=1} = 2.$$

2971*. Решить уравнение

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0,$$

зная его частное решение $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$.

2972. Решить уравнение

$$x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0,$$

зная его частное решение $y_1 = x$.

Методом вариации произвольных постоянных решить неоднородные линейные уравнения:

2973. $x^2y'' - xy' = 3x^3$.

2974*. $x^2y'' + xy' - y = x^2$.

2975. $y''' + y' = \sec x$.

§ 12. Линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами

1°. Однородное уравнение. Линейное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами p и q без правой части имеет вид

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (1)$$

Если k_1 и k_2 — корни характеристического уравнения

$$\varphi(k) \equiv k^2 + pk + q = 0, \quad (2)$$

то общее решение уравнения (1) записывается в одном из следующих трех видов:

1) $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$, если k_1 и k_2 вещественны и $k_1 \neq k_2$;

2) $y = e^{k_1 x}(C_1 + C_2 x)$, если $k_1 = k_2$;

3) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$, если $k_1 = \alpha + \beta i$ и $k_2 = \alpha - \beta i$ $(\beta \neq 0)$.

2°. Неоднородное уравнение. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{3}$$

можно записать в виде суммы

$$y = y_0 + Y,$$

где y_0 — общее решение соответствующего уравнения (1) без правой части, определяемое по формулам (1)—(3), и Y — частное решение данного уравнения (3).

Функция Y может быть найдена *методом неопределенных коэффициентов* в следующих простейших случаях:

1. $f(x) = e^{ax}P_n(x)$, где $P_n(x)$ — многочлен степени n.

Если a не является корнем характеристического уравнения (2), т. е. $\varphi(a) \neq 0$, то полагают $Y = e^{ax}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ — многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Если a есть корень характеристического уравнения (2), т. е. $\varphi(a) = 0$, то $Y = x^r e^{ax} Q_n(x)$, где r — кратность корня a ($r = 1$ или $r = 2$).

2. $f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx]$.

Если $\varphi(a \pm bi) \neq 0$, то полагают

$$Y = e^{ax}[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx],$$

где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ — многочлены степени $N = \max\{n, m\}$.

Если же $\varphi(a \pm bi) = 0$, то

$$Y = x^r e^{ax}[S_N(x)\cos bx + T_N(x)\sin bx],$$

где r — кратность корней $a \pm bi$ (для уравнений 2-го порядка $r = 1$).

В общем случае для решения уравнения (3) применяется *метод вариации произвольных постоянных* (см. § 11).

Пример 1. Найти общее решение уравнения $2y'' - y' - y = 4xe^{2x}$.

Решение. Характеристическое уравнение $2k^2 - k - 1 = 0$ имеет корни $k_1 = 1$ и $k_2 = -\dfrac{1}{2}$. Общее решение соответствующего однородного уравнения (первый вид) $y_0 = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{x}{2}}$. Правая часть заданного уравнения $f(x) = 4xe^{2x} \equiv e^{ax}P_n(x)$. Следовательно, $Y = e^{3x}(Ax + B)$, так как $n = 1$ и $r = 0$. Дифференцируя Y два раза и подставляя производные в данное уравнение, получаем

$$2e^{2x}(4Ax + 4B + 4A) - e^{2x}(2Ax + 2B + A) - e^{2x}(Ax + B) = 4xe^{2x}.$$

Сокращая на e^{2x} и приравнивая друг другу коэффициенты при первых степенях x и свободные члены в левой и правой частях равенства, имеем

$$5A = 4 \text{ и } 7A + 5B = 0, \text{ откуда } A = \frac{4}{5} \text{ и } B = -\frac{28}{25}.$$

Таким образом, $Y = e^{2x}\left(\dfrac{4}{5}x - \dfrac{28}{25}\right)$, а общее решение данного уравнения есть

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + e^{2x}\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = xe^x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 1 = 0$ имеет двукратный корень $k = 1$. Правая часть уравнения имеет вид $f(x) = xe^x$; здесь $a = 1$ и $n = 1$. Частное решение $Y = x^2 e^x(Ax + B)$, так как a совпадает с двукратным корнем $k = 1$ и, следовательно, $r = 2$.

Дифференцируя Y два раза, подставляя в уравнение и приравнивая коэффициенты, получим $A = \dfrac{1}{6}$, $B = 0$. Следовательно, общее решение данного уравнения запишется в виде

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + \frac{1}{6}x^3 e^x.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + y = x \sin x$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 1 = 0$ имеет корни $k_1 = i$ и $k_2 = -i$. Общее решение соответствующего однородного уравнения будет [см. (3), где $\alpha = 0$ и $\beta = 1$]:

$$y_0 = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Правая часть вида

$$f(x) = e^{ax}[P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx],$$

где $a = 0$, $b = 1$, $P_n(x) = 0$, $Q_m(x) = x$. Ей соответствует частное решение

$$Y = x[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x]$$

(здесь $N = 1$, $a = 0$, $b = 1$, $r = 1$).

Дифференцируя два раза и подставляя в уравнение, приравниваем коэффициенты в обеих частях равенства при $\cos x$, $x \cos x$, $\sin x$ и $x \sin x$. В результате получатся четыре уравнения $2A + 2D = 0$, $4C = 0$, $-2B + 2C = 0$, $-4A = 1$, из которых и определяются $A = -1/4$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 1/4$. Поэтому

$$Y = -\frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

Общее решение

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x^2}{4}\cos x + \frac{x}{4}\sin x.$$

3°. Принцип наложения решений. Если правая часть уравнения (3) есть сумма нескольких функций

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)$$

и Y_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — соответствующие решения уравнений

$$y'' + py' + qy = f_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

то сумма

$$y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

является решением уравнения (3).

Найти общие решения уравнений:

2976. $y'' - 5y' + 6y = 0.$

2977. $y'' - 9y = 0.$

2978. $y'' - y' = 0.$

2979. $y'' + y' = 0.$

2980. $y'' - 2y' + 2y = 0.$

2981. $y'' + 4y' + 13y = 0.$

2982. $y'' + 2y' + y = 0.$

2983. $y'' - 4y' + 2y = 0.$

2984. $y'' - ky = 0$ $(k \neq 0)$.

2985. $y = y'' + y'.$

2986. $\dfrac{y' - y}{y''} = 3.$

Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным условиям:

2987. $y'' - 5y' + 4y = 0$; $y = 5$, $y' = 8$ при $x = 0$.

2988. $y'' + 3y' + 2y = 0$; $y = 1$, $y' = -1$ при $x = 0$.

2989. $y'' + 4y = 0$; $y = 0$, $y' = 2$ при $x = 0$.

2990. $y'' + 2y' = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

2991. $y'' = \dfrac{y}{a^2}$; $y = a$, $y' = 0$ при $x = 0$.

2992. $y'' + 3y' = 0$; $y = 0$ при $x = 0$ и $y = 0$ при $x = 3$.

2993. $y'' + \pi^2 y = 0$; $y = 0$ при $x = 0$ и $y = 0$ при $x = 1$.

2994. Указать вид частных решений для данных неоднородных уравнений:

а) $y'' - 4y = x^2 e^{2x}$;

б) $y'' + 9y = \cos 2x$;

в) $y'' - 4y' + 4y = \sin 2x + e^{2x}$;

г) $y'' + 2y' + 2y = e^x \sin x$;

д) $y'' - 5y' + 6y = (x^2 + 1)e^x + xe^{2x}$;

е) $y'' - 2y' + 5y = xe^x \cos 2x - x^2 e^x \sin 2x$.

Найти общие решения уравнений:

2995. $y'' - 4y' + 4y = x^2.$

2996. $y'' - y' + y = x^3 + 6.$

2997. $y'' + 2y' + y = e^{2x}.$

2998. $y'' - 8y' + 7y = 14.$

2999. $y'' - y = e^x.$

3000. $y'' + y = \cos x.$

3001. $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x.$

3002. $y'' + y' - 6y = xe^{2x}.$

3003. $y'' - 2y' + y = \sin x + \operatorname{sh} x.$

3004. $y'' + y' = \sin^2 x.$

3005. $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x.$

3006. Найти решение уравнения $y'' + 4y = \sin x$, удовлетворяющее условиям $y = 1$, $y' = 1$ при $x = 0$.

Решить уравнения:

3007. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = A\sin pt$. Рассмотреть случаи: 1) $p \neq \omega$; 2) $p = \omega$.

3008. $y'' - 7y' + 12y = -e^{4x}.$

3009. $y'' - 2y' = x^2 - 1.$

3010. $y'' - 2y' + y = 2e^x.$

3011. $y'' - 2y' = e^{2x} + 5.$

3012. $y'' - 2y' - 8y = e^x - 8\cos 2x.$

3013. $y'' + y' = 5x + 2e^x.$

3014. $y'' - y' = 2x - 1 - 3e^x.$

3015. $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x}.$

3016. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x.$

3017. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \dfrac{x}{2}.$

3018. $y'' - 3y' = x + \cos x.$

3019. Найти решение уравнения $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 - 1$, удовлетворяющее условиям: $y = \dfrac{1}{8}$, $y' = 1$ при $x = 0$.

Решить уравнения:

3020. $y'' - y = 2x\sin x.$

3021. $y'' - 4y = e^{2x}\sin 2x.$

3022. $y'' + 4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1.$

3023. $y'' - 2y' + 2y = 4e^x \sin x.$

3024. $y'' = xe^x + y.$

3025. $y'' + 9y = 2x\sin x + xe^{3x}.$

3026. $y'' - 2y' - 3y = x(1 + e^{3x}).$

3027. $y'' - 2y' = 3x + 2xe^x.$

3028. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}.$

3029. $y'' + 2y' - 3y = 2xe^{-3x} + (x + 1)e^x.$

3030*. $y'' + y = 2x\cos x \cos 2x.$

3031. $y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x).$

Применяя метод вариации произвольных постоянных, решить уравнения:

3032. $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

3033. $y'' + y = \operatorname{ctg} x$.

3034. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$.

3035. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$.

3036. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$.

3037. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$.

3038. а) $y'' - y = \operatorname{th} x$;

б) $y'' - 2y = 4x^2 e^{x^2}$.

3039. Два одинаковых груза подвешены к концу пружины. Найти уравнение движения, которое будет совершать один из этих грузов, если другой оборвется.

Р е ш е н и е. Пусть увеличение длины пружины под действием одного груза в состоянии покоя равно a и масса груза m. Обозначим через x координату груза, отсчитываемую по вертикали от положения равновесия при наличии одного груза. Тогда

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x + a),$$

где, очевидно, $k = \dfrac{mg}{a}$ и, следовательно, $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{g}{a}x$. Общее решение есть $x = C_1 \cos\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t + C_2 \sin\sqrt{\dfrac{g}{a}}\,t$. Начальные условия дают $x = a$ и $\dfrac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0$; отсюда $C_1 = a$ и $C_2 = 0$, следовательно,

$$x = a\cos\sqrt{\frac{g}{a}}\,t.$$

3040*. К пружине с коэффициентом жесткости k подвешен груз массой m. Найти период колебательного движения, которое будет совершать этот груз, если его слегка оттянуть от положения равновесия и затем отпустить.

3041*. Груз массой M подвешен на пружине с коэффициентом жесткости k. Найти уравнение движения груза, если верхний конец пружины совершает вертикальное гармоническое колебание $y = A\sin\omega t$ и в начальный момент груз находился в покое (сопротивлением среды пренебрегаем).

3042. Материальная точка массы m притягивается каждым из двух центров с силой, пропорциональной расстоянию (коэффициент пропорциональности равен k). Найти закон движения точки, зная, что расстояние между центрами $2b$, в начальный момент точка находилась на отрезке, соединяющем центры, на расстоянии c от середины его, и имела скорость, равную нулю.

3043. Цепь длины 6 м скользит вниз с подставки без трения. Если движение начинается с момента, когда свисает 1 м цепи, то во сколько времени соскользнет вся цепь?

3044*. Узкая длинная трубка вращается с постоянной угловой скоростью ω около перпендикулярной к ней вертикальной оси. Шарик, находящийся внутри трубки, скользит по ней без трения. Найти законы движения шарика относительно трубки, считая, что:

а) в начальный момент шарик находился на расстоянии a от оси вращения и начальная скорость шарика равна нулю;

б) в начальный момент шарик находился на оси вращения и имел начальную скорость v_0.

§ 13. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами порядка выше 2-го

1°. О д н о р о д н о е у р а в н е н и е. Фундаментальная система решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \qquad (1)$$

строится на основе характера корней *характеристического уравнения*

$$k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n k + a_n = 0. \qquad (2)$$

А именно: 1) если k есть вещественный корень уравнения (2) кратности m, то ему соответствует m линейно независимых решений уравнения (1):

$$y_1 = e^{kx},\ \ y_2 = xe^{kx},\ \ \ldots,\ \ y_m = x^{m-1}e^{kx};$$

2) если $\alpha \pm \beta i$ — пара комплексных корней уравнения (2) кратности m, то ей соответствует $2m$ линейно независимых решений уравнения (1):

$$y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,$$
$$y_{2m-1} = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ y_{2m} = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

2°. Н е о д н о р о д н о е у р а в н е н и е. Частное решение неоднородного уравнения

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x) \qquad (3)$$

отыскивается на основе правил § 12, 2° и 3°.

Найти общие решения уравнений:

3045. $y''' - 13y'' + 12y' = 0$.

3046. $y''' - y' = 0$.

3047. $y''' + y = 0$.

3048. $y^{IV} - 2y'' = 0$.

3049. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.

3050. $y^{IV} + 4y = 0$.

3051. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$.

3052. $y^{IV} + y' = 0$.

3053. $y^{IV} - 2y'' + y = 0$.

3054. $y^{IV} - a^4 y = 0$.

3055. $y^{IV} - 6y'' + 9y = 0.$

3056. $y^{IV} + a^2y'' = 0.$

3057. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0.$

3058. $y^{IV} + 2y'' + y = 0.$

3059. $y^{(n)} + \frac{n}{1}y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1}y' + y = 0.$

3060. $y^{IV} - 2y''' + y'' = e^x.$

3061. $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3.$

3062. $y''' - y = x^3 - 1.$

3063. $y^{IV} + y''' = \cos 4x.$

3064. $y''' + y'' = x^2 + 1 + 3xe^x.$

3065. $y''' + y'' + y' + y = xe^x.$

3066. $y''' + y' = \operatorname{tg} x \sec x.$

3067. Найти частное решение уравнения

$$y''' + 2y'' + 2y' + y = x,$$

удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

§ 14. Уравнения Эйлера

Линейное уравнение вида

$$(ax+b)^n y^{(n)} + A_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(ax+b)y' + A_n y = f(x), \quad (1)$$

где a, b, A_1, ..., A_{n-1}, A_n — постоянные, называется *уравнением Эйлера*.

Для области $ax + b > 0$ вводим новую независимую переменную t, полагая

$$ax + b = e^t.$$

Тогда

$$y' = ae^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad y'' = a^2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right),$$

$$y''' = a^3e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) \quad \text{и т. д.}$$

и уравнение Эйлера преобразуется в линейное уравнение с постоянными коэффициентами. При $ax + b < 0$ полагаем $ax + b = -e^t$.

Пример 1. Решить уравнение $x^2y'' + xy' + y = 1$.

Решение. Полагая $x = e^t$, получим

$$\frac{dy}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{dy}{dt^2} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right).$$

Следовательно, данное уравнение примет вид

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = 1,$$

откуда

$$y = C_1\cos t + C_2\sin t + 1$$

или

$$y = C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x) + 1.$$

Для однородного уравнения Эйлера

$$x^n y^{(n)} + A_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}xy' + A_ny = 0 \quad (2)$$

при $x > 0$ решение можно искать в виде

$$y = x^k. \quad (3)$$

Подставляя в (2) y, y', ..., $y^{(n)}$, определяемые из соотношения (3), получим характеристическое уравнение, из которого можно найти показатель k.

Если k — действительный корень характеристического уравнения кратности m, то ему соответствуют m линейно независимых решений

$$y_1 = x^k, \quad y_2 = x^k\ln x, \quad y_3 = x^k(\ln x)^2, \quad \ldots, \quad y_m = x^k(\ln x)^{m-1}.$$

Если $\alpha \pm \beta i$ — пара комплексных корней кратности m, то ей соответствует $2m$ линейно независимых решений

$$y_1 = x^\alpha\cos(\beta\ln x), \quad y_2 = x^\alpha\sin(\beta\ln x), \quad y_3 = x^\alpha\ln x\cos(\beta\ln x),$$

$$y_4 = x^\alpha\ln x\sin(\beta\ln x), \quad \ldots, \quad y_{2m-1} = x^\alpha(\ln x)^{m-1}\cos(\beta\ln x),$$

$$y_{2m} = x^\alpha(\ln x)^{m-1}\sin(\beta\ln x).$$

Пример 2. Решить уравнение $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$.

Решение. Полагая

$$y = x^k, \quad y' = kx^{k-1}, \quad y'' = k(k-1)x^{k-2}.$$

Подставляя в данное уравнение, после сокращения на x^k получим характеристическое уравнение

$$k^2 - 4k + 4 = 0.$$

Решая его, находим

$$k_1 = k_2 = 2,$$

следовательно, общее решение будет

$$y = C_1x^2 + C_2x^2\ln x.$$

Решить уравнения:

3068. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0.$

3069. $x^2y'' - xy' - 3y = 0.$

3070. $x^2y'' + xy' + 4y = 0.$

3071. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0.$

3072. $(3x + 2)y'' + 7y' = 0.$

3073. $y'' = \frac{2y}{x^2}.$

3074. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0.$

3075. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x.$

3076. $(1+x)^2y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3$.

3077. Найти частное решение уравнения

$$x^2y'' - xy' + y = 2x,$$

удовлетворяющее начальным условиям: $y = 0$, $y' = 1$ при $x = 1$.

§ 15. Системы дифференциальных уравнений

Метод исключения. Для нахождения решения, например, нормальной системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка, т. е. системы вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, z), \quad \frac{dz}{dx} = g(x, y, z), \tag{1}$$

разрешенной относительно производных от искомых функций y и z, дифференцируем по x одно из них. Имеем, например,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}f + \frac{\partial f}{\partial z}g. \tag{2}$$

Определяя z из первого уравнения системы (1) и подставляя найденное выражение

$$z = \varphi\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \tag{3}$$

в уравнение (2), получим уравнение 2-го порядка с одной неизвестной функцией y. Решая его, находим

$$y = \psi(x, C_1, C_2), \tag{4}$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Подставляя функцию (4) в формулу (3), определяем функцию z без новых интеграций. Совокупность формул (3) и (4), где y заменено на ψ, дает *общее решение системы* (1).

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + 4z = 1 + 4x, \\ \dfrac{dz}{dx} + y - z = \dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение по x:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 4\frac{dz}{dx} = 4.$$

Из первого уравнения определяется $z = \frac{1}{4}\left(1 + 4x - \frac{dy}{dx} - 2y\right)$ и тогда из второго будем иметь $\frac{dz}{dx} = \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{3}{2}y - \frac{1}{4}\frac{dy}{dx}$. Подставляя z и $\frac{dz}{dx}$ в

уравнение, полученное после дифференцирования, приходим к уравнению 2-го порядка с одной неизвестной y:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = -6x^2 - 4x + 3.$$

Решая его, найдем

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + x^2 + x$$

и тогда

$$z = \frac{1}{4}\left(1 + 4x - \frac{dy}{dx} - 2y\right) = -C_1e^{2x} + \frac{C_2}{4}e^{-3x} - \frac{1}{2}x^2.$$

Аналогично можно поступать и в случае системы с большим числом уравнений.

Решить системы:

3078. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z, \\ \dfrac{dz}{dx} = -y. \end{cases}$

3079. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + 5z, \\ \dfrac{dz}{dx} + y + 3z = 0. \end{cases}$

3080. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -3y - z, \\ \dfrac{dz}{dx} = y - z. \end{cases}$

3081. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x. \end{cases}$

3082. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z, \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y. \end{cases}$

3083. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z, \\ \dfrac{dz}{dx} = x + y + z. \end{cases}$

3084. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + z = \sin x, \\ \dfrac{dz}{dx} - 4y - 2z = \cos x. \end{cases}$

3085. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 3y + 4z = 2x. \\ \dfrac{dz}{dx} - y - z = x; \end{cases}$
$y = 0$, $z = 0$ при $x = 0$.

3086. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} - 4x - y + 36t = 0, \\ \dfrac{dz}{dx} + 2x - y + 2e^t = 0. \end{cases}$

3087. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z}, \\ \dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{2}y. \end{cases}$

3088*. а) $\dfrac{dx}{x^3+3xy^2} = \dfrac{dy}{2y^3} = \dfrac{dz}{2y^2 z}$;

б) $\dfrac{dx}{x-y} = \dfrac{dy}{x+y} = \dfrac{dz}{z}$;

в) $\dfrac{dx}{y-z} = \dfrac{dy}{z-x} = \dfrac{dz}{x-y}$, выделить интегральную кривую, проходящую через точку (1; 1; − 2).

3089. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + z = 1, \\ \dfrac{dz}{dx} + \dfrac{2}{x^2} y = \ln x. \end{cases}$ **3090.** $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2y + 4z = e^x, \\ \dfrac{d^2z}{dx^2} - y - 3z = -x. \end{cases}$

3091.** Снаряд вылетает из орудия с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найти уравнение движения снаряда, принимая сопротивление воздуха пропорциональным скорости.

3092*. Материальная точка M притягивается центром O с силой, пропорциональной расстоянию. Движение начинается из точки A на расстоянии a от центра с начальной скоростью v_0, перпендикулярной отрезку OA. Найти траекторию точки M.

§ 16. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов

Если интегрирование дифференциального уравнения при помощи элементарных функций не удается, то его решение в некоторых случаях можно искать в виде степенного ряда

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n. \tag{1}$$

Неопределенные коэффициенты c_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$) находятся путем подстановки ряда (1) в уравнение и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях бинома $x - x_0$ в левой и правой частях полученного равенства.

Можно также искать решение уравнения

$$y' = f(x, y), \quad \text{где} \quad y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

в виде ряда Тейлора

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \tag{3}$$

где $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ и дальнейшие производные $y^{(n)}(x_0)$ ($n = 2, 3, \ldots$) последовательно находятся при помощи дифференцирования уравнения (2) и подстановки вместо x числа x_0.

Пример 1. Найти решение уравнения

$$y'' - xy = 0,$$

если $y = y_0$, $y' = y'_0$ при $x = 0$.

Решение. Полагаем

$$y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots,$$

отсюда, дифференцируя, получаем

$$y'' = 2 \cdot 1 c_2 + 3 \cdot 2 c_3 x + \ldots + n(n-1) c_n x^{n-2} + (n+1) n c_{n+1} x^{n-1} + \\ + (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \ldots .$$

Подставляя y и y'' в данное уравнение, приходим к тождеству

$$[2 \cdot 1 c_2 + 3 \cdot 2 c_3 x + \ldots + n(n-1) c_n x^{n-2} + (n+1) n c_{n+1} x^{n-1} + \\ + (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \ldots] - x[c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + \ldots] \equiv 0.$$

Собирая в левой части полученного равенства члены с одинаковыми степенями x и приравнивая нулю коэффициенты при этих степенях, будем иметь:

$$c_2 = 0; \quad 3 \cdot 2 c_3 - c_0 = 0, \quad c_3 = \frac{c_0}{3 \cdot 2}; \quad 4 \cdot 3 c_4 - c_1 = 0, \quad c_4 = \frac{c_1}{4 \cdot 3};$$

$$5 \cdot 4 c_5 - c_2 = 0, \quad c_5 = \frac{c_2}{5 \cdot 4} \quad \text{и т. д.}$$

Вообще,

$$c_{3k} = \frac{c_0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (3k-1) 3k}, \quad c_{3k+1} = \frac{c_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 3k(3k+1)},$$
$$c_{3k+2} = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Следовательно,

$$y = c_0 \left(1 + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^6}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots + \frac{x^{3k}}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \ldots (3k-1) 3k} + \ldots \right) + \\ + c_1 \left(x + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^7}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots + \frac{x^{3k+1}}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 3k(3k+1)} + \ldots \right), \tag{4}$$

где $c_0 = y_0$ и $c_1 = y'_0$.

Применяя признак Даламбера, легко убедиться, что ряд (4) сходится при $-\infty < x < \infty$.

Пример 2. Найти решение уравнения

$$y' = x + y; \quad y_0 = y(0) = 1.$$

Решение. Полагаем

$$y = y_0 + y'_0 x + \frac{y''_0}{2!} x^2 + \frac{y'''_0}{3!} x^3 + \ldots .$$

Имеем $y_0 = 1$, $y'_0 = 0 + 1 = 1$. Дифференцируя обе части уравнения $y' = x + y$, последовательно находим $y'' = 1 + y'$, $y''_0 = 1 + 1 = 2$, $y''' = y''$, $y'''' = 2$ и т. д. Следовательно,

$$y = 1 + x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{2}{3!}x^3 + \ldots .$$

Для разбираемого примера найденное решение можно записать в конечном виде

$$y = 1 + x + 2(e^x - 1 - x) \quad \text{или} \quad y = 2e^x - 1 - x.$$

Аналогично следует поступать в случае дифференциальных уравнений высших порядков. Исследование сходимости полученных рядов, вообще говоря, сложно и при решении задач этого параграфа обязательным не предполагается.

Найти с помощью степенных рядов решения уравнений при указанных начальных условиях.

В №№ 3097, 3098, 3099, 3101 исследовать сходимость полученных решений.

3093. $y' = y + x^2$; $y = -2$ при $x = 0$.

3094. $y' = 2y + x - 1$; $y = y_0$ при $x = 1$.

3095. $y' = y^2 + x^3$; $y = \frac{1}{2}$ при $x = 0$.

3096. $y' = x^2 - y^2$; $y = 0$ при $x = 0$.

3097. $(1 - x)y' = 1 + x - y$; $y = 0$ при $x = 0$.

3098*. $xy'' + y = 0$; $y = 0$; $y' = 1$ при $x = 0$.

3099. $y'' + xy = 0$; $y = 1$; $y' = 0$ при $x = 0$.

3100*. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

3101*. $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 0$.

3102. $\frac{d^2x}{dt^2} + x\cos t = 0$; $x = a$, $\frac{dx}{dt} = 0$ при $t = 0$.

§ 17. Задачи на метод Фурье

Для нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения в частных производных по методу Фурье сначала отыскивают частные решения этого уравнения специального типа, каждое из которых представляет собой произведение функций, зависящих только от одного аргумента. В простейшем случае имеется бесконечная совокупность таких решений u_n ($n = 1, 2, \ldots$), линейно независимых в любом конечном числе между собой и удовлетворяющих заданным *граничным условиям*. Искомое решение u представляется в виде ряда, расположенного по этим частным решениям:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n u_n. \tag{1}$$

Остающиеся неопределенными коэффициенты C_n находятся из *начальных условий*.

З а д а ч а. Поперечное смещение $u = u(x, t)$ точек струны с абсциссой x в момент времени t удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{2}$$

где $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ (T_0 — сила натяжения, ρ — линейная плотность струны). Найти форму струны в момент времени t, если концы ее $x = 0$ и $x = l$ закреплены и в начальный момент $t = 0$ струна имела форму параболы $u = \frac{4h}{l^2}x(l - x)$ (рис. 107) и точки ее имели скорость, равную нулю.

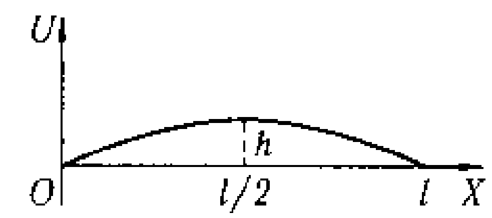


Рис. 107.

Р е ш е н и е. Согласно условию задачи требуется найти решение $u = u(x, t)$ уравнения (2), удовлетворяющее граничным условиям:

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0 \tag{3}$$

и начальным условиям:

$$u(x, 0) = \frac{4h}{l^2}x(l - x), \quad u'_t(x, 0) = 0. \tag{4}$$

Ищем ненулевые решения уравнения (2) специального вида $u = X(x)T(t)$. Подставив это выражение в уравнение (2) и разделив переменные, получим

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{5}$$

Так как переменные x и t являются независимыми, то тождество (5) возможно лишь в том случае, когда общая величина отношения (5) будет постоянной. Обозначая эту постоянную через $-\lambda^2$, найдем два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T''(t) + (a\lambda)^2 T(t) = 0 \text{ и } X''(x) + \lambda^2X(x) = 0.$$

Решая эти уравнения, получим

$$T(t) = A\cos a\lambda t + B\sin a\lambda t,$$
$$X(x) = C\cos \lambda x + D\sin \lambda x,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Из условия (3) имеем $X(0) = 0$ и $X(l) = 0$, следовательно, $C = 0$ и $\sin \lambda l = 0$ (так как D не может одновременно с C быть равно нулю). Поэтому $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, где k — целое число. Легко убедиться, что мы не потеряем общности, взяв для k лишь положительные значения ($k = 1, 2, 3, \ldots$). Каждому значению λ_k соответствует частное решение

$$u_k = \left(A_k \cos \frac{ka\pi}{l} t + B_k \sin \frac{ka\pi}{l} t\right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

удовлетворяющее граничным условиям (3).

Составим ряд

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{ka\pi t}{l} + B_k \sin \frac{ka\pi t}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

сумма которого, очевидно, удовлетворяет уравнению (2) и граничным условиям (3).

Подберем постоянные A_k и B_k так, чтобы сумма ряда удовлетворяла начальным условиям (4). Так как

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka\pi}{l}\left(-A_k \sin \frac{ka\pi t}{l} + B_k \cos \frac{ka\pi t}{l}\right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

то, полагая $t = 0$, получим

$$u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{k\pi x}{l} \equiv \frac{4h}{l^2} x(l - x)$$

и

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{ka\pi}{l} B_k \sin \frac{k\pi x}{l} \equiv 0.$$

Следовательно, для определения коэффициентов A_k и B_k надо разложить в ряд Фурье по одним синусам функцию $u(x, 0) = \dfrac{4h}{l^2} x(l - x)$ и функцию $\dfrac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \equiv 0$.

По известным формулам (гл. VIII, § 4, 3°) имеем

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{4h}{l^2} x(l - x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = \frac{32h}{\pi^3 k^3},$$

если k — нечетное, и $A_k = 0$, если k — четное;

$$\frac{ka\pi}{l} B_k = \frac{2}{l} \int_0^l 0 \cdot \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx = 0, \quad Bk = 0.$$

Искомое решение будет

$$u = \frac{32h}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos \dfrac{(2n+1)a\pi t}{l}}{(2n+1)^3} \sin \frac{(2\pi + 1)\pi x}{l}.$$

3103*. В начальный момент $t = 0$ струна, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, имела форму синусоиды $u = A \sin \dfrac{\pi x}{l}$, причем скорости точек ее были равны нулю. Найти форму струны в момент времени t.

3104*. В начальный момент $t = 0$ точкам прямолинейной струны $0 < x < l$ сообщена скорость $\dfrac{\partial u}{\partial t} = 1$. Найти форму струны в момент времени t, если концы ее $x = 0$ и $x = l$ закреплены (см. № 3103).

3105*. Струна длиной $l = 100$ см, закрепленная на концах $x = 0$ и $x = l$, в начальный момент оттянута в точке $x = 50$ см на расстояние $h = 2$ см, а затем отпущена без толчка. Определить форму струны для любого момента времени t.

3106*. При продольных колебаниях тонкого однородного прямолинейного стержня, ось которого совпадает с осью OX, смещение $u = u(x, t)$ поперечного сечения стержня с абсциссой x в момент времени t удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где $a^2 = \dfrac{E}{\rho}$ (E — модуль Юнга, ρ — плотность стержня). Определить продольные колебания упругого горизонтального стержня длины $l = 100$ см, закрепленного на конце $x = 0$ и оттянутого на конце $x = 100$ на длину $\Delta l = 1$ см, а затем отпущенного без толчка.

3107*. Для прямолинейного однородного стержня, ось которого совпадает с осью OX, температура $u = u(x, t)$ в сечении с абсциссой x в момент времени t при отсутствии источников тепла удовлетворяет уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

где a — постоянная. Определить распределение температуры для любого момента времени t в стержне длины $l = 100$ см, если известно начальное распределение температуры

$$u(x, 0) = 0{,}01x(100 - x).$$

Глава X

ПРИБЛИЖЕННЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Действия с приближенными числами

1°. Абсолютная погрешность. *Абсолютной погрешностью (абсолютной ошибкой)* приближенного числа a, заменяющего точное число A, называется абсолютная величина разности между ними. Число Δ, удовлетворяющее неравенству

$$|A - a| \leqslant \Delta, \tag{1}$$

называется *предельной абсолютной погрешностью*. Точное число A находится в границах $a - \Delta \leqslant A \leqslant a + \Delta$ или, короче, $A = a \pm \Delta$.

2°. Относительная погрешность. Под *относительной погрешностью (относительной ошибкой)* приближенного числа a, заменяющего точное число A ($A > 0$), понимается отношение абсолютной погрешности числа a к точному числу A. Число δ, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{|A - a|}{A} \leqslant \delta, \tag{2}$$

называется *предельной относительной погрешностью* приближенного числа a. Так как на практике $A \approx a$, то за предельную относительную погрешность часто принимают число $\delta = \dfrac{\Delta}{a}$.

3°. Число верных десятичных знаков. Говорят, что положительное приближенное число a, записанное в виде десятичного разложения, имеет n *верных десятичных знаков* (цифр) *в узком смысле*, если абсолютная погрешность этого числа не превышает $\dfrac{1}{2}$ единицы n-го разряда. В этом случае при $n > 1$ за предельную относительную погрешность можно принять число

$$\delta = \frac{1}{2k}\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1},$$

где k — первая значащая цифра числа a. Обратно, если известно, что $\delta \leqslant \dfrac{1}{2(k+1)}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n-1}$, то число a имеет n верных десятичных знаков в узком смысле. В частности, число a заведомо имеет n верных знаков в узком смысле, если $\delta \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{10}\right)^{n}$.

Если абсолютная погрешность приближенного числа a не превышает единицы последнего разряда (таковы, например, числа, возникшие при измерении с точностью до соответствующей единицы), то говорят, что все десятичные знаки этого приближенного числа *верные в широком смысле*. При наличии большего числа значащих цифр в приближенном числе последнее, если оно является окончательным результатом вычислений, обычно округляют так, чтобы все оставшиеся цифры были верными в узком или широком смысле.

В дальнейшем мы будем предполагать, что в записи исходных данных все цифры верные (если не оговорено противное) в узком смысле. Что касается результатов промежуточных вычислений, то они могут содержать одну-две запасные цифры.

Заметим, что примеры этого параграфа, как правило, представляют собой результат окончательных вычислений и поэтому ответы к ним даются приближенными числами, содержавшими лишь верные десятичные знаки.

4°. Сложение и вычитание приближенных чисел. Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы нескольких чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей этих чисел. Поэтому, чтобы иметь в сумме небольшого количества приближенных чисел, все десятичные знаки которых верны, лишь верные цифры (по меньшей мере в широком смысле), следует подравнять все слагаемые по образцу того слагаемого, десятичная запись которого обрывается ранее других, сохраняя в каждом из них запасной знак. Затем сложить полученные числа, как точные, и округлить сумму на один знак.

Если приходится складывать неокругленные приближенные числа, то их следует округлить, сохраняя в каждом из слагаемых один-два запасных знака, а затем руководствоваться приведенным выше правилом сложения, удерживая соответствующие лишние знаки в сумме до конца выкладок.

Пример 1. $215{,}21 + 14{,}182 + 21{,}4 = 215{,}2(1) + 14{,}1(8) + 21{,}4 = 250{,}8$.

Относительная погрешность суммы положительных слагаемых не превышает наибольшей из относительных погрешностей этих слагаемых.

Относительная погрешность разности не поддается простому учету. Особенно неблагоприятна в этом смысле разность двух близких чисел.

Пример 2. При вычислении приближенных чисел 6,135 и 6,131, с четырьмя верными десятичными знаками, получаем разность 0,004. Предельная относительная погрешность ее равна $\delta = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 0,001 + \frac{1}{2}\cdot 0,001}{0,004} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$; следовательно, ни один знак разности не является достоверным. Поэтому следует по возможности избегать вычитания близких между собой приближенных чисел, преобразуя, в случае надобности, данное выражение так, чтобы эта нежелательная операция отсутствовала.

5°. Умножение и деление приближенных чисел. Предельная относительная погрешность произведения и частного приближенных чисел равна сумме предельных относительных погрешностей этих чисел. Исходя из этого и применяя правило числа верных знаков (3°), мы сохраняем в ответе лишь определенное количество знаков.

Пример 3. Произведение приближенных чисел $25{,}3 \cdot 4{,}12 = 104{,}236$. Предполагая, что все знаки сомножителей верные, получаем, что предельная относительная погрешность произведения

$$\delta = \frac{1}{2\cdot 2}0{,}01 + \frac{1}{4\cdot 2}0{,}01 \approx 0{,}003.$$

Отсюда число верных знаков произведения равно трем и результат, если он является окончательным, следует писать так: $25{,}3 \cdot 4{,}12 = 104$ или точнее $25{,}3 \cdot 4{,}12 = 104{,}2 \pm 0{,}3$.

6°. Возведение в степень и извлечение корня из приближенных чисел. Предельная относительная погрешность m-й степени приближенного числа a равна m-кратной предельной относительной погрешности этого числа.

Предельная относительная погрешность корня m-й степени из приближенного числа a составляет $\frac{1}{m}$-ю часть предельной относительной погрешности числа a.

7°. Вычисление погрешности результата различных действий над приближенными числами. Если $\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n$ — предельные абсолютные погрешности приближенных чисел $a_1, \ldots, a_n$, то предельная абсолютная погрешность ΔS результата

$$S = f(a_1, \ldots, a_n)$$

приближенно может быть оценена по формуле

$$\Delta S = \left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right| \Delta a_n.$$

Предельная относительная погрешность S тогда равна

$$\delta S = \frac{\Delta S}{|S|} = \left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right| \frac{\Delta a_1}{|f|} + \ldots + \left|\frac{\partial f}{\partial a_n}\right| \frac{\Delta a_n}{|f|} = \left|\frac{\partial \ln f}{\partial a_1}\right| \Delta a_1 + \ldots + \left|\frac{\partial \ln f}{\partial a_n}\right| \Delta a_n.$$

Пример 4. Вычислить $S = \ln(10{,}3 + \sqrt{4{,}4})$; приближенные числа 10,3 и 4,4 верны в написанных знаках.

Решение. Подсчитаем сначала предельную абсолютную погрешность ΔS в общем виде: $S = \ln(a + \sqrt{b})$, $\Delta S = \frac{1}{a+\sqrt{b}}\left(\Delta a + \frac{1}{2}\frac{\Delta b}{\sqrt{b}}\right)$. Имеем $\Delta a = \Delta b \approx \frac{1}{20}$; $\sqrt{4{,}4} = 2{,}0976\ldots$; мы оставляем 2,1, так как относительная погрешность приближенного числа $\sqrt{4{,}4}$ равна $\approx \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{40} = \frac{1}{80}$; абсолютная погрешность тогда равна $\approx 2\cdot\frac{1}{80} = \frac{1}{40}$; за десятые доли можно поручиться. Следовательно,

$$\Delta S = \frac{1}{10{,}3+2{,}1}\left(\frac{1}{20} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{20\cdot 2{,}1}\right) = \frac{1}{12{,}4\cdot 20}\left(1 + \frac{1}{4{,}2}\right) = \frac{13}{2604} \approx 0{,}005.$$

Значит, сотые доли будет верны.

Теперь ведем вычисления с одним запасным знаком:

$$\lg(10{,}3 + \sqrt{4{,}4}) \approx \lg 12{,}4 = 1{,}093;\ \ln(10{,}3 + \sqrt{4{,}4}) \approx 1{,}093 \cdot 2{,}303 = 2{,}517.$$

Получаем ответ: 2,52.

8°. Установление допустимых погрешностей приближенных чисел при заданной погрешности результата действий над ними. Применяя формулы пункта 7 при заданных нам величинах ΔS или δS, считая при этом равными друг другу все частные дифференциалы $\left|\frac{\partial f}{\partial a_k}\right| \Delta a_k$ или величины $\left|\frac{\partial f}{\partial a_1}\right| \frac{\Delta a_k}{|f|}$, мы вычисляем допустимые абсолютные погрешности $\Delta a_1, \ldots, \Delta a_n, \ldots$ приближенных чисел $a_1, \ldots, a_n, \ldots$, входящих в действия *(принцип равных влияний)*.

Следует отметить, что иногда при подсчете допустимых погрешностей аргументов функции невыгодно пользоваться принципом равных влияний, так как последний может предъявить практически невыполнимые требования. В этих случаях рекомендуется разумно перераспределить погрешности, если это возможно, с таким расчетом, чтобы суммарная погрешность не превышала заданной величины. Таким образом, поставленная задача, строго говоря, неопределенна.

Пример 5. Объем «цилиндрического отрезка», т. е. тела, отсеченного от кругового цилиндра плоскостью, проходящей через диаметр основания, равный $2R$, под углом α к основанию, вычисляется по формуле $V = \frac{2}{3}R^3 \operatorname{tg}\alpha$. С какой точностью следует измерять радиус $R \approx 60$ см и угол наклона α, чтобы объем цилиндрического отрезка был известен с точностью до 1%?

Решение. Если ΔV, ΔR и $\Delta\alpha$ — предельные абсолютные погрешности величин V, R и α, то предельная относительная погрешность вычисляемого объема V есть

$$\delta = \frac{3\Delta R}{R} + \frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha} \leqslant \frac{1}{100}.$$

Полагаем $\frac{3\Delta R}{R} \leqslant \frac{1}{200}$ и $\frac{2\Delta\alpha}{\sin 2\alpha} \leqslant \frac{1}{200}$. Отсюда

$$\Delta R \leqslant \frac{R}{600} \approx \frac{60\text{ см}}{600} = 1\text{ мм};$$

$$\Delta\alpha \leqslant \frac{\sin 2\alpha}{400} \leqslant \frac{1}{400}\text{ рад} \approx 9'.$$

Итак, мы обеспечим требуемую точность ответа в 1%, если будем измерять радиус с точностью до 1 мм, а угол наклона α с точностью до 9′.

3108. В результате измерения получены верные в широком смысле в написанных знаках приближенные числа:

а) 12°07′14″; б) 38,5 см; в) 62,215 кг.

3109. Вычислить абсолютные и относительные погрешности приближенных чисел, верных в узком смысле в написанных знаках:

а) 241,7; б) 0,035; в) 3,14.

3110. Определить число верных знаков[*)] и дать соответствующую запись приближенных чисел:

а) 48 361 при точности в 1%;

б) 14,9360 при точности в 1%;

в) 592,8 при точности в 2%.

3111. Произвести сложение приближенных чисел, верных в написанных знаках:

а) $25{,}386 + 0{,}49 + 3{,}10 + 0{,}5$;

б) $1{,}2 \cdot 10^2 + 41{,}72 + 0{,}09$;

в) $38{,}1 + 2{,}0 + 3{,}124$.

3112. Произвести вычитание приближенных чисел, верных в написанных знаках:

а) $148{,}1 - 63{,}871$; б) $29{,}72 - 11{,}25$; в) $34{,}22 - 34{,}21$.

3113*. Вычислить разность площадей двух квадратов, стороны которых по измерению равны 15,28 см и 15,22 см (с точностью до 0,05 мм).

3114. Вычислить произведение приближенных чисел, верных в написанных знаках:

а) $3{,}49 \cdot 8{,}6$; б) $25{,}1 \cdot 1{,}734$; в) $0{,}02 \cdot 16{,}5$.

Указать возможные границы результатов.

3115. Стороны прямоугольника равны 4,02 м и 4,96 м (с точностью до 1 см). Вычислить площадь прямоугольника.

3116. Вычислить частное приближенных чисел, верных в написанных знаках:

а) $5{,}684 : 5{,}032$; б) $0{,}144 : 1{,}2$; в) $216 : 4$.

3117. Катеты прямоугольного треугольника равны 12,10 см и 25,21 см (с точностью до 0,01 см). Вычислить тангенс угла, противолежащего первому катету.

3118. Вычислить указанные степени приближенных чисел (основания степеней верны в написанных знаках):

а) $0{,}4158^2$; б) $65{,}2^3$; в) $1{,}5^2$.

3119. Сторона квадрата равна 45,3 см (с точностью до 1 мм). Найти площадь квадрата.

3120. Вычислить значения корней (подкоренные числа верны в написанных знаках):

а) $\sqrt{2{,}715}$; б) $\sqrt[3]{65{,}2}$; в) $\sqrt{81{,}1}$.

3121. Радиусы оснований и образующая усеченного конуса равны: $R = 23{,}64$ см $\pm\, 0{,}01$ см, $r = 17{,}31$ см $\pm\, 0{,}01$ см; $l = 10{,}21$ см $\pm\, 0{,}01$ см; число $\pi = 3{,}14$. Вычислить по этим данным полную поверхность усеченного конуса. Оценить абсолютную и относительную погрешности результата.

[*)] Верные знаки понимаются в узком смысле.

3122. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 15,4 см $\pm$ $\pm$ 0,1 см; один из катетов равен 6,8 см $\pm$ 0,1 см. Как точно могут быть определены по этим данным второй катет и прилежащий к нему острый угол? Найти их значения.

3123. Вычислить плотность алюминия, если масса алюминиевого цилиндра диаметром 2 см и высотой 11 см равна 93,4 г. Относительная погрешность измерения длин равна 0,01, а относительная погрешность взвешивания равна 0,001.

3124. Вычислить силу тока, если электродвижущая сила равна 221 В $\pm$ 1 В, а сопротивление равно 809 Ом $\pm$ 1 Ом.

3125. Период колебания маятника длины l равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

где g — ускорение свободного падения. С какой точностью следует измерить длину маятника, период колебаний которого близок к 2 с, чтобы получить период его колебаний с относительной погрешностью в 0,5%? Как точно должны быть взяты числа π и g?

3126. Требуется измерить с точностью в 1% площадь боковой поверхности усеченного конуса, радиусы оснований которого 2 м и 1 м, а образующая 5 м (приближенно). С какой точностью следует измерить радиусы и образующую и со сколькими знаками следует взять число π?

3127. Для определения модуля Юнга по прогибу стержня прямоугольного сечения применяется формула

$$E = \frac{1}{4}\cdot\frac{l^3P}{d^3bs},$$

где l — длина стержня, b и d — основание и высота поперечного сечения стержня, s — стрела прогиба, P — нагрузка. С какой точностью следует измерить длину l и стрелу s, чтобы погрешность E не превышала 5,5% при условии, что P известна с точностью до 0,1%, величины d и b известны с точностью до 1%, $l \approx 50$ см, $s \approx 2{,}5$ см?

§ 2. Интерполирование функций

1°. Интерполяционная формула Ньютона. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — табличные значения аргумента, разность которых $h = \Delta x_i$ ($\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$; $i = 0, 1, \ldots, n-1$) постоянна (*шаг таблицы*), и $y_0, y_1, \ldots, y_n$ — соответствующие значения функции y. Тогда значение функции y для промежуточного значения аргумента x приближенно дается *интерполяционной формулой Ньютона*

$$y = y_0 + q\cdot\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \ldots + \frac{q(q-1)\ldots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \qquad (1)$$

где $q = \dfrac{x - x_0}{h}$ и $\Delta y_0 = y_1 - y_0$, $\Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0$, ... — последовательные конечные разности функции y. При $x = x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ полином (1) принимает соответственно табличные значения y_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Как частные случаи формулы Ньютона получаем: при $n = 1$ — *линейное интерполирование*; при $n = 2$ — *квадратичное интерполирование*. Для удобства пользования формулой Ньютона рекомендуется предварительно составлять таблицу конечных разностей.

Если $y = f(x)$ — многочлен n-й степени, то

$$\Delta^n y_i = \text{const и } \Delta^{n+1} y_i = 0$$

и, следовательно, формула (1) является точной.

В общем случае, если $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n+1)}(x)$ на отрезке $[a, b]$, включающем точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и x, то погрешность формулы (1) равна

$$R_n(x) = y - \sum_{i=0}^{n} \frac{q(q-1)\ldots(q-i+1)}{i!}\Delta^i y_0 = h^{n+1}\frac{q(q-1)\ldots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad (2)$$

где ξ — некоторое промежуточное значение между x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и x. На практике пользуются более удобной приближенной формулой

$$R_n(x) \approx \frac{\Delta^{n+1} y_0}{(n+1)!} q(q-1) \ldots (q-n).$$

Если число n можно взять любым, то его следует выбирать так, чтобы разность $\Delta^{n+1} y_0 \approx 0$ в пределах данной точности; иными словами, разности $\Delta^n y_0$ должны быть постоянны в заданных десятичных разрядах.

Пример 1. Найти $\sin 26°15'$, пользуясь табличными данными $\sin 26° = 0{,}43837$, $\sin 27° = 0{,}45399$, $\sin 28° = 0{,}46947$.

Решение. Составляем таблицу:

i	x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$
0	26°	0,43837	1562	–14
1	27°	0,45399	1548	
2	28°	0,46947		

Здесь $h = 60'$, $q = \dfrac{26°15' - 26°}{60'} = \dfrac{1}{4}$.

Применяя формулу (1), используя первую горизонтальную строку таблицы, имеем

$$\sin 26°15' = 0{,}43837 + \frac{1}{4}0{,}01562 + \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)}{2!} \cdot (-0{,}00014) = 0{,}44229.$$

Оценим погрешность R_2. Используя формулу (2) и учитывая, что если $y = \sin x$, то $|y^{(n)}| \leqslant 1$, будем иметь

$$|R_2| \leqslant \frac{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - 1\right)\left(\frac{1}{4} - 2\right)}{3!}\left(\frac{\pi}{180}\right)^3 = \frac{7}{128} \cdot \frac{1}{57{,}33^3} \approx \frac{1}{4} \cdot 10^{-6}.$$

Таким образом, все приведенные знаки $\sin 26°15'$ — верные.

С помощью формулы Ньютона можно также по заданному промежуточному значению функции y находить соответствующее значение аргумента x *(обратное интерполирование)*. Для этого сначала определяем соответствующее значение q методом последовательных приближений, полагая

$$q^{(0)} = \frac{y - y_0}{\Delta y_0}$$

и

$$q^{(i+1)} = q^{(0)} - \frac{q^{(i)}(q^{(i)} - 1)}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} - \ldots - \frac{q^{(i)}(q^{(i)} - 1)\ldots(q^{(i)} - n + 1)}{n!}\frac{\Delta^n y_0}{\Delta y_0}$$
$$(i = 0, 1, 2, \ldots).$$

За q принимаем общее значение (с заданной точностью!) двух последовательных приближений $q^{(m)} = q^{(m-1)}$. Отсюда $x = x_0 + q \cdot h$.

Пример 2. Пользуясь таблицей

x	$y = \operatorname{sh} x$	Δy	$\Delta^2 y$
2,2	4,457	1,009	0,220
2,4	5,466	1,229	
2,6	6,695		

приближенно вычислить корень уравнения $\operatorname{sh} x = 5$.

Решение. Принимая $y_0 = 4{,}457$, имеем

$$q^{(0)} = \frac{5 - 4{,}457}{1{,}009} = \frac{0{,}543}{1{,}009} = 0{,}538;$$

$$q^{(1)} = q^{(0)} + \frac{q^{(0)}(1 - q^{(0)})}{2} \cdot \frac{\Delta^2 y_0}{\Delta y_0} =$$

$$= 0{,}538 + \frac{0{,}538 \cdot 0{,}462}{2} \cdot \frac{0{,}220}{1{,}009} = 0{,}528 + 0{,}027 = 0{,}565;$$

$$q^{(2)} = 0{,}538 + \frac{0{,}565 \cdot 0{,}435}{2} \cdot \frac{0{,}220}{1{,}009} = 0{,}538 + 0{,}027 = 0{,}565.$$

Таким образом, можно принять

$$x = 2{,}2 + 0{,}565 \cdot 0{,}2 = 2{,}2 + 0{,}113 = 2{,}313.$$

2°. Интерполяционная формула Лагранжа. В общем случае полином степени n, принимающий при $x = x_i$ заданные значения y_i ($i = 0, 1, \ldots, n$), дается *интерполяционной формулой Лагранжа*

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}y_1 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}y_k + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_{n-1})}y_n.$$

3128. Дана таблица значений величин x и y:

x	1	2	3	4	5	6
y	3	10	15	12	9	5

Составить таблицу конечных разностей функции y.

3129. Составить таблицу разностей функции $y = x^3 - 5x^2 + x - 1$ для значений $x = 1, 3, 5, 7, 9, 11$. Убедиться в том, что все конечные разности 3-го порядка равны между собой.

3130*. Используя постоянство разностей 4-го порядка, составить таблицу разностей функции $y = x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 3x$ для целых значений x, заключенных в промежутке $1 \leqslant x \leqslant 10$.

3131. Дана таблица

$$\lg 1 = 0{,}000,$$
$$\lg 2 = 0{,}301,$$
$$\lg 3 = 0{,}477,$$
$$\lg 4 = 0{,}602.$$
$$\lg 5 = 0{,}699.$$

Вычислить с помощью линейного интерполирования числа $\lg 1{,}7$, $\lg 2{,}5$, $\lg 3{,}1$ и $\lg 4{,}6$.

3132. Дана таблица

$\sin 10° = 0{,}1736$	$\sin 13° = 0{,}2250$
$\sin 11° = 0{,}1908$	$\sin 14° = 0{,}2419$
$\sin 12° = 0{,}2079$	$\sin 15° = 0{,}2588$

Уплотнить таблицу, вычислив по формуле Ньютона (при $n = 2$) значения синуса через полградуса.

3133. Составить интерполирующий многочлен Ньютона для функции, заданной таблицей

x	0	1	2	3	4
y	1	4	15	40	85

3134*. Составить интерполирующий многочлен Ньютона для функции, заданной таблицей

x	2	4	6	8	10
y	3	11	27	50	83

Найти y при $x = 5{,}5$. При каком x величина $y = 20$?

3135. Функция задана таблицей

x	−2	1	2	4
y	25	−8	−15	−23

Составить интерполирующий многочлен Лагранжа и найти значение y при $x = 0$.

3136. Из опыта найдены удлинения пружины x в зависимости от нагрузки P на эту пружину:

x, мм	5	10	15	20	25	30	35	40
P, Н	49	105	172	253	352	473	619	793

Найти нагрузку, дающую укорочение пружины на 14 мм.

3137. Дана таблица величин x и y

x	0	1	3	4	5
y	1	−3	25	129	381

Вычислить значения y для $x = 0{,}5$ и для $x = 2$: а) с помощью линейного интерполирования; б) по формуле Лагранжа.

§ 3. Вычисление действительных корней уравнений

1°. Установление начальных приближений корней. Приближенное нахождение корней данного уравнения

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

складывается из двух этапов: 1) *отделения корней*, т. е. установления промежутков, по возможности тесных, внутри которых находится один и только один корень уравнения (1); 2) *вычисления корней* с заданной степенью точности.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(x) \cdot f(b) < 0$, то на отрезке $[a, b]$ находится по меньшей мере один корень ξ уравнения (1). Этот корень будет заведомо единственным, если $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$ при $a < x < b$.

Для приближенного нахождения корня ξ рекомендуется на миллиметровой бумаге построить график функции $y = f(x)$. Абсциссы точек пересечения графика с осью OX и являются корнями уравнения $f(x) = 0$. Иногда удобно данное уравнение заменить равносильным ему уравнением $\varphi(x) = \psi(x)$. Тогда корни уравнения находятся как абсциссы точек пересечения графиков $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$.

2°. Правило пропорциональных частей (метод хорд). Если на отрезке $[a, b]$ находится единственный корень ξ уравнения $f(x) = 0$, где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, заменив кривую $y = f(x)$ хордой, проходящей через точки $(a; f(a))$ и $(b; f(b))$, получим первое приближение корня

$$c_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a). \qquad (2)$$

Для получения второго приближения c_2 формулу (2) применяем к тому из отрезков $[a, c_1]$ или $[c_1, b]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет значения противоположных знаков. Так же строятся и следующие приближения. Последовательность чисел c_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится к корню ξ, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} c_n = \xi.$$

Вычисления приближений $c_1, c_2, \ldots$, вообще говоря, следует производить до тех пор, пока не перестанут изменяться сохраняемые нами в ответе десятичные знаки (в соответствии с заданной степенью точности!); для промежуточных выкладок надлежит брать один-два запасных знака. Это замечание имеет общий характер.

Если функция $f(x)$ имеет отличную от нуля непрерывную производную $f'(x)$ на отрезке $[a, b]$, то для оценки абсолютной погрешности приближенного корня c_n можно воспользоваться формулой

$$|\xi - c_n| \leqslant \frac{|f(c_n)|}{\mu},$$

где $\mu = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

3°. Способ Ньютона (метод касательных). Если $f'(x) \neq 0$ и $f''(x) \neq 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$, причем $f(a)f(b) < 0$, $f(a)f''(b) > 0$, то последовательные приближения x_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ корня ξ уравнения $f(x) = 0$ вычисляются по формулам

$$x_0 = a, \quad x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \quad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (3)$$

При данных предположениях последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — монотонная и

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \xi.$$

Для оценки погрешностей можно воспользоваться формулой

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{\mu},$$

где $\mu = \min\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f'(x)|$.

Практически удобнее пользоваться более простыми формулами

$$x_0 = a, \quad x_n = x_{n-1} - \alpha f(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (3')$$

где $\alpha = \dfrac{1}{f'(a)}$, дающими примерно ту же точность, что и формулы (3).

Если $f(b)f''(b) > 0$, то в формулах (3) и (3′) следует положить $x_0 = b$.

4°. Способ итерации. Пусть данное уравнение приведено к виду

$$x = \varphi(x), \qquad (4)$$

где $|\varphi'(x)| \leqslant r < 1$ (r — постоянная) при $a \leqslant x \leqslant b$. Исходя из начального значения x_0, принадлежащего отрезку $[a, b]$, построим последовательность чисел $x_1, x_2, \ldots$ по такому закону:

$$x_1 = \varphi(x_0),\ x_2 = \varphi(x_1),\ \ldots,\ x_n = \varphi(x_{n-1}),\ \ldots . \qquad (5)$$

Если $a \leqslant x_n \leqslant b$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то предел

$$\xi = \lim_{n \to \infty} x_n$$

является единственным корнем уравнения (4) на отрезке $[a, b]$, т. е. x_n суть *последовательные приближения* корня ξ.

Оценка абсолютной погрешности n-го приближения x_n дается формулой

$$|\xi - x_n| \leqslant \frac{|x_{n+1} - x_n|}{1 - r}.$$

Поэтому если x_n и x_{n+1} совпадают с точностью до ε, то предельная абсолютная погрешность для x_n будет $\dfrac{\varepsilon}{1 - r}$.

Для преобразования уравнения $f(x) = 0$ к виду (4) заменяем последнее эквивалентным уравнением

$$x = x - \lambda f(x),$$

где число $\lambda \neq 0$ выбирается так, чтобы функция $\dfrac{d}{dx}[x - \lambda f(x)] = 1 - \lambda f'(x)$ была малой по абсолютной величине в окрестности точки x_0 (например, можно положить $1 - \lambda f'(x_0) = 0$).

Пример 1. Привести уравнение $2x - \ln x - 4 = 0$ при начальном приближении корня $x_0 = 2{,}5$ к виду (4).

Решение. Здесь $f(x) = 2x - \ln x - 4$; $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{x}$. Пишем эквивалентное уравнение $x = x - \lambda(2x - \ln x - 4)$ и в качестве одного из подходящих значений λ берем 0,5 — число, близкое к корню уравнения $1 - \lambda\left(2 - \dfrac{1}{x}\right)\Big|_{x = 2,5} = 0$, т. е. к $\dfrac{1}{1,6} \approx 0{,}6$.

Исходное уравнение приводится к виду

$$x = x - 0{,}5(2x - \ln x - 4)$$

или

$$x = 2 + \frac{1}{2}\ln x.$$

Пример 2. Вычислить с точностью до 0,01 корень ξ предыдущего уравнения, заключенный между 2 и 3.

Вычисление корня по способу итерации. Используем результат примера 1, полагая $x_0 = 2{,}5$. Вычисление ведем по формулам (5) с одним запасным знаком:

$$x_1 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2{,}5 \approx 2{,}458,$$

$$x_2 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2{,}458 \approx 2{,}450,$$

$$x_3 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2{,}450 \approx 2{,}448,$$

$$x_4 = 2 + \frac{1}{2}\ln 2{,}448 \approx 2{,}448.$$

Итак, $\xi \approx 2{,}45$ (процесс дальнейших приближений можно прекратить, так как третий десятичный знак (тысячные) закрепился).

Приведем оценку погрешности. Здесь

$$\varphi(x) = 2 + \frac{1}{2}\ln x \text{ и } \varphi'(x) = \frac{1}{2x}.$$

Считая, что все приближения x_n лежат на отрезке [2,4; 2,5], получим

$$r = \max|\varphi'(x)| = \frac{1}{2\cdot 2{,}4} = 0{,}21.$$

Следовательно, предельная абсолютная погрешность приближения x_3 в силу приведенного выше замечания есть

$$\Delta = \frac{0{,}001}{1 - 0{,}21} = 0{,}0012 \approx 0{,}001.$$

Таким образом, точный корень ξ уравнения содержится в границах

$$2{,}447 < \xi < 2{,}449;$$

можно принять $\xi = 2{,}45$, причем все знаки этого приближенного числа будут верными в узком смысле.

Вычисление корня по способу Ньютона. Здесь

$$f(x) = 2x - \ln x - 4,\ f'(x) = 2 - \frac{1}{x},\ f''(x) = \frac{1}{x^2}.$$

На отрезке $2 \leqslant x \leqslant 3$ имеем: $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$; $f(2)f(3) < 0$; $f(3)f''(3) > 0$. Следовательно, условия пункта 3° при $x_0 = 3$ выполнены.

Принимаем

$$\alpha = \left(2 - \frac{1}{3}\right)^{-1} = 0{,}6.$$

Вычисления ведем по формулам (3′) с двумя запасными знаками:

$$x_1 = 3 - 0{,}6(2\cdot 3 - \ln 3 - 4) = 2{,}4592;$$
$$x_2 = 2{,}4592 - 0{,}6(2\cdot 2{,}4592 - \ln 2{,}4592 - 4) = 2{,}4481;$$
$$x_3 = 2{,}4481 - 0{,}6(2\cdot 2{,}4481 - \ln 2{,}4481 - 4) = 2{,}4477;$$
$$x_4 = 2{,}4477 - 0{,}6(2\cdot 2{,}4477 - \ln 2{,}4477 - 4) = 2{,}4475.$$

На этом этапе вычисления прекращаем, так как число тысячных больше не изменяется. Даем ответ: корень $\xi = 2{,}45$. Оценку погрешности мы опускаем.

5°. Случай системы двух уравнений. Пусть требуется вычислить, с заданной степенью точности, действительные корни системы двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} f(x, y) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

и пусть имеется начальное приближение одного из решений (ξ, η) этой системы $x = x_0$, $y = y_0$.

Это начальное приближение можно получить, например, графически, построив (в одной и той же системе декартовых координат) кривые $f(x, y) = 0$ и $\varphi(x, y) = 0$ и определив координаты точек пересечения этих кривых.

а) Способ Ньютона. Предположим, что функциональный определитель

$$I = \frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(x, y)}$$

не обращается в нуль вблизи начального приближения $x = x_0$, $y = y_0$. Тогда, по способу Ньютона, первое приближение решения системы (6) имеет вид $x_1 = x_0 + \alpha_0$, $y_1 = y_0 + \beta_0$, где α_0, β_0 — решение системы двух линейных уравнений

$$\begin{cases} f(x_0, y_0) + \alpha_0 f'_x(x_0, y_0) + \beta_0 f'_y(x_0, y_0) = 0, \\ \varphi(x_0, y_0) + \alpha_0 \varphi'_x(x_0, y_0) + \beta_0 \varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

Второе приближение получается тем же приемом:

$$x_2 = x_1 + \alpha_1, y_2 = y_1 + \beta_1,$$

где α_1, β_1 — решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} f(x_1, y_1) + \alpha_1 f'_x(x_1, y_1) + \beta_1 f'_y(x_1, y_1) = 0, \\ \varphi(x_1, y_1) + \alpha_1 \varphi'_x(x_1, y_1) + \beta_1 \varphi'_y(x_1, y_1) = 0. \end{cases}$$

Аналогично получаются третье и последующие приближения.

б) Способ итерации. К решению системы уравнений (6) можно применить и способ итерации, преобразовав эту систему к эквивалентному виду

$$\begin{cases} x = F(x, y), \\ y = \Phi(x, y) \end{cases} \tag{7}$$

и предполагая, что

$$|F'_x(x, y)| + |\Phi'_x(x, y)| \leqslant r < 1;\ |F'_y(x, y)| + |\Phi'_y(x, y)| \leqslant r < 1 \tag{8}$$

в некоторой двумерной окрестности U начального приближения (x_0, y_0), содержащей и точное решение (ξ, η) системы.

Последовательность приближений (x_n, y_n) $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящаяся к решению системы (7), или, что то же, к решению системы (6), строится по следующему закону:

$$\begin{aligned} &x_1 = F(x_0, y_0), \quad y_1 = \Phi(x_0, y_0),\\ &x_2 = F(x_1, y_1), \quad y_2 = \Phi(x_1, y_1),\\ &x_3 = F(x_2, y_2), \quad y_3 = \Phi(x_2, y_2),\\ &\ldots\\ &\ldots \end{aligned}$$

Если все (x_n, y_n) принадлежат U, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \eta$.

Для преобразования системы уравнений (6) к виду (7) с соблюдением условия (8) можно рекомендовать такой прием. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha f(x, y) + \beta\varphi(x, y) = 0,\\ \gamma f(x, y) + \delta\varphi(x, y) = 0, \end{cases}$$

эквивалентную системе (6) при условии, что $\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} \ne 0$. Перепишем ее так:

$$\begin{aligned} x &= x + \alpha f(x, y) + \beta\varphi(x, y) \equiv F(x, y),\\ y &= y + \gamma f(x, y) + \delta\varphi(x, y) \equiv \Phi(x, y). \end{aligned}$$

Выберем параметры $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ такими, чтобы частные производные функций $F(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ были равны или близки к нулю при начальном приближении, т. е. находим $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ как приближенные решения системы уравнений

$$\begin{cases} 1 + \alpha f'_x(x_0, y_0) + \beta\varphi'_x(x_0, y_0) = 0,\\ \alpha f'_y(x_0, y_0) + \beta\varphi'_y(x_0, y_0) = 0,\\ \gamma f'_x(x_0, y_0) + \delta\varphi'_x(x_0, y_0) = 0,\\ 1 + \gamma f'_y(x_0, y_0) + \delta\varphi'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases}$$

При таком выборе параметров $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ в предположении, что частные производные функций $f(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ изменяются не очень быстро в окрестности начального приближения (x_0, y_0), условие (8) будет соблюдено.

Пример 3. Привести систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0,\\ x^3 - x = 0 \end{cases}$$

при начальном приближении корня $x_0 = 0{,}8$, $y_0 = 0{,}55$ к виду (7).

Решение. Здесь $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, $\varphi(x, y) = x^3 - y$; $f'_y(x_0, y_0) = 1{,}6$, $f'_y(x_0, y_0) = 1{,}1$; $\varphi'_x(x_0, y_0) = 1{,}92$, $\varphi'_y(x_0, y_0) = -1$.

Записываем систему, эквивалентную исходной:

$$\begin{cases} \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y) = 0,\\ \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y) = 0 \end{cases} \quad \left(\begin{vmatrix} \alpha, & \beta \\ \gamma, & \delta \end{vmatrix} \ne 0\right)$$

в виде

$$\begin{aligned} x &= x + \alpha(x^2 + y^2 - 1) + \beta(x^3 - y),\\ y &= y + \gamma(x^2 + y^2 - 1) + \delta(x^3 - y). \end{aligned}$$

Выбираем в качестве подходящих числовых значений $\alpha, \beta, \gamma, \Delta$ решение системы уравнений

$$\begin{cases} 1 + 1{,}6\alpha + 1{,}92\beta = 0,\\ 1{,}1\alpha - \beta = 0,\\ 1{,}6\gamma + 1{,}92\delta = 0,\\ 1 + 1{,}1\gamma - \delta = 0, \end{cases}$$

т. е. полагаем $\alpha \approx -0{,}3$, $\beta \approx -0{,}3$, $\gamma = -0{,}5$, $\delta \approx 0{,}4$.

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} x = x - 0{,}3(x^2 + y^2 - 1) - 0{,}3(x^3 - y),\\ y = y - 0{,}5(x^2 + y^2 - 1) + 0{,}4(x^3 - y), \end{cases}$$

эквивалентная исходной, имеет вид (7), причем в достаточно малой окрестности точки $(x_0; y_0)$ условие (8) будет выполнено.

Методом проб отделить действительные корни уравнений и с помощью правила пропорциональных частей вычислить их с точностью до 0,01.

3138. $x^3 - x + 1 = 0$.

3139. $x^4 + 0{,}5x - 1{,}55 = 0$.

3140. $x^2 - 4x - 1 = 0$.

Исходя из графически найденных начальных приближений, способом Ньютона вычислить с точностью до 0,01 действительные корни уравнений:

3141. $x^3 - 2x - 5 = 0$.

3142. $2x - \ln x - 4 = 0$.

3143. $2^x = 4x$.

3144. $\lg x = \dfrac{1}{x}$.

Используя найденные графическим путем начальные приближения, способом итерации вычислить с точностью до 0,01 действительные корни уравнений:

3145. $x^3 - 5x + 0{,}1 = 0$.

3146. $4x = \cos x$.

3147. $x^5 - x - 2 = 0$.

Найти графически начальные приближения и вычислить с точностью до 0,01 действительные корни уравнений и систем:

3148. $x^3 - 3x + 1 = 0$.

3149. $x^3 - 2x^2 + 3x - 5 = 0$.

3150. $x^4 + x^2 - 2x - 2 = 0$.

3151. $x \cdot \ln x - 14 = 0$.

3152. $x^3 + 3x - 0{,}5 = 0$.

3153. $4x - 7 \sin x = 0$.

3154. $x^x + 2x - 6 = 0.$

3155. $e^x + e^{-3x} - 4 = 0.$

3156. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ x^3 - y = 0. \end{cases}$

3157. $\begin{cases} x^2 + y - 4 = 0, \\ y - \lg x - 1 = 0. \end{cases}$

3158. Вычислить с точностью до 0,001 наименьший положительный корень уравнения $\operatorname{tg} x = x$.

3159. Вычислить с точностью до 0,0001 корни уравнения $x \cdot \operatorname{th} x = 1$.

§ 4. Численное интегрирование функций

1°. Формула трапеций. Для приближенного вычисления интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

($f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция) делим промежуток интегрирования $[a, b]$ на n равных частей и выбираем *шаг вычислений* $h = \dfrac{b-a}{n}$. Пусть $x_i = x_0 + ih$ ($x_0 = a$, $x_n = b$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$) — абсциссы точек деления, $y_i = f(x_i)$ — соответствующие значения подынтегральной функции $y = f(x)$. Тогда по *формуле трапеций* имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}\right) \qquad (1)$$

с абсолютной погрешностью

$$R_n \leqslant \frac{h^2}{12}(b-a)M_2,$$

где $M_2 = \max |f''(x)|$ при $a \leqslant x \leqslant b$.

Для достижения заданной точности ε при вычислении интеграла шаг вычислений h определяется из неравенства

$$h^2 \leqslant \frac{12\varepsilon}{(b-a)M_2}, \qquad (2)$$

т. е. h должен иметь порядок $\sqrt{\varepsilon}$. Полученное значение h округляется в сторону уменьшения так, чтобы

$$\frac{b-a}{h} = n$$

было целым числом, и это дает нам число делений n. Установив h и n по формуле (1), вычисляем интеграл, беря значения подынтегральной функции с одним или двумя запасными десятичными знаками.

2°. Формула Симпсона (параболическая формула). Если n — четное число, то в обозначениях 1° справедлива *формула Симпсона*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{3}[y_0 + y_n) + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2})] \quad (3)$$

с абсолютной погрешностью

$$R_n \leqslant \frac{h^4}{180}(b-a)M_4, \qquad (4)$$

где $M_4 = \max |f^{\mathrm{IV}}(x)|$ при $a \leqslant x \leqslant b$

Для обеспечения заданной точности ε при вычислении интеграла шаг вычислений h определяется из неравенства

$$\frac{h^4}{180}(b-a)M_4 \leqslant \varepsilon, \qquad (5)$$

т. е. шаг h имеет порядок $\sqrt[4]{\varepsilon}$. Число h округляется в сторону уменьшения так, чтобы $n = \dfrac{b-a}{h}$ было целым четным числом.

Замечание. Так как определение шага вычислений h и связанного с ним числа n из неравенств (2) и (5), вообще говоря, затруднительно, то на практике h определяют грубой прикидкой. Затем, получив результат, удваивают число n, т. е. половинят шаг h. Если новый результат совпадает с прежним в сохраняемых нами десятичных знаках, то вычисление заканчивается. В противном случае этот прием повторяют и т. д.

Для приближенного вычисления абсолютной погрешности R квадратурной формулы Симпсона (3) можно также использовать *принцип Рунге*, согласно которому

$$R = \frac{|\Sigma - \bar{\Sigma}|}{15},$$

где Σ и $\bar{\Sigma}$ — результаты вычислений по формуле (3), соответственно с шагом h и $H = 2h$.

3160. Под действием переменной силы $\overline{F}$, направленной вдоль оси OX, материальная точка переместилась по оси OX из положения $x = 0$ в положение $x = 4$. Вычислить приближенно работу A силы $\overline{F}$, если дана таблица значений ее модуля F:

x	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
F	1,50	0,75	0,50	0,75	1,50	2,75	4,50	6,75	10,00

Вычисление провести по формуле трапеций и по формуле Симпсона.

3161. Вычислить приближенно $\int\limits_0^1 (3x^2 - 4x)\,dx$ по формуле трапеций, полагая $n = 10$. Вычислить этот интеграл точно и найти абсолютную и относительную погрешности результата. Установить верхнюю границу Δ абсолютной погрешности вычисления при $n = 10$, используя формулу погрешности, приведенную в тексте.

3162. Вычислить с точностью до 10^{-4} по формуле Симпсона $\int\limits_0^1 \frac{x\,dx}{x+1}$, принимая $n = 10$. Установить верхнюю границу Δ абсолютной погрешности, используя формулу погрешности, приведенную в тексте.

Вычислить с точностью до 0,01 следующие определенные интегралы:

3163. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x}$. **3166.** $\int\limits_1^2 x \lg x\,dx$. **3169.** $\int\limits_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

3164. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. **3167.** $\int\limits_1^2 \frac{\lg x}{x}\,dx$. **3170.** $\int\limits_1^2 \frac{\cos x}{x}\,dx$.

3165. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^3}$. **3168.** $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x}\,dx$. **3171.** $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+x}\,dx$.

3172. $\int\limits_0^1 e^{-x^2}\,dx$.

3173. Вычислить с точностью до 0,01 несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$, применив подстановку $x = \frac{1}{t}$. Проверить вычисление, применив формулу Симпсона к интегралу $\int\limits_1^{b} \frac{dx}{1+x^2}$, где b выбрано так, чтобы $\int\limits_b^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} < \frac{1}{2} \cdot 10^{-2}$.

3174. Плоская фигура, ограниченная полуволной синусоиды $y = \sin x$ и осью OX, вращается вокруг оси OX. Вычислить по формуле Симпсона с точностью до 0,01 объем тела вращения.

3175*. Вычислить по формуле Симпсона с точностью до 0,01 длину дуги эллипса $\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{(0{,}6222)^2} = 1$, расположенную в первой координатной четверти.

§ 5. Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений

1°. Метод последовательных приближений (метод Пикара). Пусть дано дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

при начальном условии $y = y_0$ при $x = x_0$.

Решение $y(x)$ уравнения (1), удовлетворяющее заданному начальному условию, вообще говоря, может быть представлено в виде

$$y(x) = \lim_{i \to \infty} y_i(x), \tag{2}$$

где *последовательные приближения* $y_i(x)$ определяются по формулам

$$y_0(x) = y_0,$$

$$y_i(x) = y_0 + \int\limits_{x_0}^{x} f(x, y_{i-1}(x))\,dx$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Если правая часть $f(x, y)$ определена и непрерывна в окрестности

$$R\{|x - x_0| \leqslant a, \quad |y - y_0| \leqslant b\}$$

и удовлетворяет в этой окрестности *условию Липшица*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

(L — постоянная), то процесс последовательных приближений (2) заведомо сходится в промежутке

$$|x - x_0| \leqslant h,$$

где $h = \min\limits_R \left(a, \frac{b}{M}\right)$ и $M = \max\limits_R |f(x, y)|$.

При этом погрешность

$$R_n = |y(x) - y_n(x)| \leqslant ML^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!},$$

если только

$$|x - x_0| \leqslant h.$$

Метод последовательных приближений *(метод Пикара)* с незначительными видоизменениями применим также к нормальным системам дифференциальных уравнений. Что касается дифференциальных уравнений высших порядков, то их можно записывать в виде систем дифференциальных уравнений.

2°. Метод Рунге — Кутта. Пусть требуется на данном промежутке $x_0 \leqslant x \leqslant X$ найти решение $y(x)$ задачи (1) с заданной степенью точности ε.

Для этого сначала выбираем $h = \frac{X - x_0}{n}$ *(шаг вычислений)*, деля отрезок

$[x_0, X]$ на n равных частей так, чтобы $h^4 < \varepsilon$. Точки деления x_i определяются по формуле

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Соответствующие значения $y_i = y(x_i)$ искомой функции по *методу Рунге—Кутта* последовательно вычисляются по формулам

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,$$

$$\Delta y_i = \frac{1}{6}\left(k_1^{(i)} + 2k_2^{(i)} + 2k_3^{(i)} + k_4^{(i)}\right),$$

где

$$i = 0, 1, 2, \dots, n$$

и

$$\left.\begin{aligned} k_1^{(i)} &= f(x_i, y_i)h, \\ k_2^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)h, \\ k_3^{(i)} &= f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2^{(i)}}{2}\right)h, \\ k_4^{(i)} &= f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})h. \end{aligned}\right. \qquad (3)$$

Метод Рунге—Кутта имеет порядок точности h^4. Грубую оценку погрешности метода Рунге—Кутта на данном промежутке $[x_0, X]$ можно получить, исходя из принципа Рунге:

$$R = \frac{|y_{2m} - \tilde{y}_m|}{15},$$

где $n = 2m$, y_{2m} и $\tilde{y}_m$ — результаты вычислений по схеме (3) с шагом h и шагом $2h$.

Метод Рунге—Кутта применим также для решения системы дифференциальных уравнений

$$y' = f(x, y, z), \quad z' = \varphi(x, y, z) \qquad (4)$$

с заданными начальными условиями: $y = y_0$, $z = z_0$ при $x = x_0$.

3°. Метод Милна. Для решения задачи (1) по *методу Милна*, исходя из начальных данных $y = y_0$ при $x = x_0$, находим каким-нибудь способом последовательные значения

$$y_1 = y(x_1), \quad y_2 = y(x_2), \quad y_3 = y(x_3)$$

искомой функции $y(x)$ (например, можно воспользоваться разложением решения $y(x)$ в ряд (гл. IX, § 17) или найти эти значения методом последовательных приближений, или применить метод Рунге—Кутта и т. п.). Приближения $\bar{y}_i$ и $\bar{\bar{y}}_i$ для следующих значений y_i $(i = 4, 5, \dots, n)$ последовательно находятся по формулам

$$\left.\begin{aligned} \bar{y}_i &= y_{i-4} + \frac{4h}{3}(2f_{i-3} - f_{i-2} + 2f_{i-1}), \\ \bar{\bar{y}}_i &= y_{i-2} + \frac{h}{3}(\bar{f}_i + 4f_{i-1} + f_{i-2}), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где

$$f_i = f(x_i, y_i) \text{ и } \bar{f}_i = f(x_i, \bar{y}_i).$$

Для контроля вычисляем величину

$$\varepsilon_i = \frac{1}{29}|\bar{y}_i - \bar{\bar{y}}_i|. \qquad (6)$$

Если ε_i не превосходит единицы последнего сохраняемого нами в ответе десятичного разряда 10^{-m} для $y(x)$, то в качестве y_i берем $\bar{\bar{y}}_i$ и переходим к вычислению следующего значения y_{i+1}, повторяя процесс. Если же $\varepsilon_i > 10^{-m}$, то следует начать работу сначала, уменьшив шаг вычислений. Величина начального шага приближенно определяется из неравенства $h^4 < 10^{-m}$.

Для случая решения системы (4) формулы Милна отдельно пишутся для функций $y(x)$ и $z(x)$. Порядок вычислений остается прежним.

Пример 1. Дано дифференциальное уравнение $y' = y - x$ с начальным условием $y(0) = 1{,}5$. Вычислить с точностью до 0,01 значение решения этого уравнения при значении аргумента $x = 1{,}5$. Вычисления провести по комбинированному методу Рунге—Кутта и Милна.

Решение. Выбираем начальный шаг вычислений h из условия $h^4 < 0{,}01$. Избегая сложной записи h, остановимся на $h = 0{,}25$. Тогда весь участок интегрирования от $x = 0$ до $x = 1{,}5$ разобьем на шесть равных частей, длиной 0,25, с помощью точек x_i $(i = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6)$; соответствующие значения решения y и производной y' обозначим через y_i и y'_i.

Первые три значения y (не считая начального) вычислим по методу Рунге—Кутта (по формулам (3)); остальные три значения — y_4, y_5, y_6 — по методу Милна (по формулам (5)).

Значение y_6 будет, очевидно, ответом задачи.

Вычисления проведем с двумя запасными знаками по определенной схеме, состоящей из двух последовательных таблиц 1 и 2. В конце таблицы 2 мы получаем ответ.

Вычисление значения y_1. Здесь

$$f(x, y) = -x + y, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 1{,}5, \quad h = 0{,}25.$$

Имеем

$$\Delta y_0 = \frac{1}{6}(k_1^{(0)} + 2k_2^{(0)} + 2k_3^{(0)} + k_4^{(0)}) =$$

$$= \frac{1}{6}(0{,}3750 + 2 \cdot 0{,}3906 + 2 \cdot 0{,}3926 + 0{,}4106) = 0{,}3920;$$

$$k_1^{(0)} = f(x_0, y_0)h = (-0 + 1{,}5000)0{,}25 = 0{,}3750;$$

$$k_2^{(0)} = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1^{(0)}}{2}\right)h = (-0{,}125 + 1{,}5000 + 0{,}1875)0{,}25 = 0{,}3906;$$

$$k_3^{(0)} = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2^{(0)}}{2}\right)h = (-0{,}125 + 1{,}5000 + 0{,}1953)0{,}25 = 0{,}3926;$$

$$k_4^{(0)} = f(x_0 + h, y_0 + k_3^{(0)})h = (-0{,}25 + 1{,}5000 + 0{,}3926)0{,}25 = 0{,}4106;$$

$y_1 = y_0 + \Delta y_0 = 1{,}5000 + 0{,}3920 = 1{,}8920$ (первые три знака в этом приближенном числе гарантированы).

Аналогично вычисляются значения y_2 и y_3. Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Таблица 1

Вычисление y_1, y_2, y_3 по методу Рунге—Кутта.

$f(x, y) = -x + y$; $h = 0{,}25$

Значение i	x_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$k_1^{(i)}$	$f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$	$k_2^{(i)}$
0	0	1,5000	1,5000	0,3750	1,5625	0,3906
1	0,25	1,8920	1,6420	0,4105	1,7223	0,4306
2	0,50	2,3243	1,8243	0,4561	1,9273	0,4818
3	0,75	2,8084	2,0584	0,5146	2,1907	0,5477

Значение i	$f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1^{(i)}}{2}\right)$	$k_3^{(i)}$	$f(x_i + h, y_i + k_3^{(i)})$	$k_4^{(i)}$	Δy_i	y_{i+1}
0	1,5703	0,3926	1,6426	0,4106	0,3920	1,8920
1	1,7323	0,4331	1,8251	0,4562	0,4323	2,3243
2	1,9402	0,4850	2,0593	0,5148	0,4841	2,8084
3	2,2073	0,5518	2,3602	0,5900	0,5506	3,3590

Вычисление значения y_4. Имеем: $f(x, y) = -x + y$, $h = 0{,}25$, $x_4 = 1$;

$$y_0 = 1{,}5000, \quad y_1 = 1{,}8920, \quad y_2 = 2{,}3243, \quad y_3 = 2{,}8084;$$

$$y'_0 = 1{,}5000, \quad y'_1 = 1{,}6420, \quad y'_2 = 1{,}8243, \quad y'_3 = 2{,}0584.$$

Применяя формулы (5), находим:

$$\bar{y}_4 = y_0 + \frac{4h}{3}(2y'_1 - y'_2 + 2y'_3) =$$

$$= 1{,}5000 + \frac{4 \cdot 0{,}25}{3}(2 \cdot 1{,}6420 - 1{,}8243 + 2 \cdot 2{,}0584) = 3{,}3588;$$

$$\bar{y}'_4 = f(x_4, y_4) = -1 + 3{,}3588 = 2{,}3588;$$

$$\bar{\bar{y}}_4 = y_2 + \frac{h}{3}(\bar{y}'_4 + 4y'_3 + y'_2) =$$

$$= 2{,}3243 + \frac{0{,}25}{3}(2{,}3588 + 4 \cdot 2{,}0584 + 1{,}8243) = 3{,}3590;$$

$$\varepsilon_4 = \frac{|\bar{y}_4 - \bar{\bar{y}}_4|}{29} = \frac{|3{,}3588 - 3{,}3590|}{29} \approx 7 \cdot 10^{-6} < \frac{1}{2} \cdot 0{,}001;$$

следовательно, пересмотр шага вычислений не требуется.

Получаем $y_4 = \bar{\bar{y}}_4 = 3{,}3590$ (первые три знака в этом приближении гарантированы).

Аналогично производим вычисления значений y_5 и y_6. Результаты вычислений даны в таблице 2.

Таким образом, окончательно имеем

$$y(1{,}5) = 4{,}74.$$

4°. Метод Адамса. Для решения задачи (1) по методу Адамса, исходя из начальных данных $y(x_0) = y_0$ мы находим каким-нибудь способом следующие три значения искомой функции $y(x)$:

$$y_1 = y(x_1) = y(x_0 + h),$$
$$y_2 = y(x_2) = y(x_0 + 2h),$$
$$y_3 = y(x_3) = y(x_0 + 3h)$$

(эти три значения можно получить, например, с помощью разложения $y(x)$ в степенной ряд (гл. IX, § 16), или найти их методом последовательных приближений (п. 1°), или применяя метод Рунге—Кутта (п. 2°) и т. п.).

С помощью чисел x_0, x_1, x_2, x_3 и y_0, y_1, y_2, y_3 мы вычисляем величины q_0, q_1, q_2, q_3, где

$$q_0 = hy'_0 = hf(x_0, y_0), \quad q_1 = hy'_1 = hf(x_1, y_1),$$
$$q_2 = hy'_2 = hf(x_2, y_2), \quad q_3 = hy'_3 = hf(x_3, y_3).$$

Таблица 2

Вычисление y_4, y_5, y_6 по методу Милна.

$f(x, y) = -x + y$; $h = 0,25$.

(курсивом обозначены входные данные)

Значение i	x_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$\bar{y}_i$	$\bar{y}'_i = f(x_i, \bar{y}_i)$	$\bar{\bar{y}}_i$	ε_i	y_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	Пересмотр шага вычислений (следуя показаниям формулы (6))
0	*0*	*1,5000*	*1,5000*							
1	*0,25*	*1,8920*	*1,6420*							
2	*0,50*	*2,3243*	*1,8243*							
3	*0,75*	*2,8084*	*2,0584*							
4	*1,00*			3,3588	2,3588	3,3590	$\approx 7x \cdot x10^{-5}$	3,3590	2,3590	не требуется
5	*1,25*			3,9947	2,7447	2,9950	$\approx 10^{-5}$	3,9950	2,7450	не требуется
6	*1,50*			4,7402	3,2402	4,7406	$\approx 1,4x \cdot x10^{-5}$	$\boxed{4 \cdot 7406}$		не требуется
							Ответ:	$y(1,5) = 4,74$		

Составляем, далее, *диагональную таблицу* конечных разностей величины q:

x	y	$\Delta y = y_{n+1} - y_n$	$y' = f(x, y)$	$q = y'h$	$\Delta q = q_{n+1} - q_n$	$\Delta^2 q = \Delta q_{n+1} - \Delta q_n$	$\Delta^3 q = \Delta^2 q_{n+1} - \Delta^2 q_n$
x_0	y_0	Δy_0	$f(x_0, y_0)$	q_0	Δq_0	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
x_1	y_1	Δy_1	$f(x_1, y_1)$	q_1	Δq_1	$\Delta^2 q_1$	$\Delta^3 q_1$
x_2	y_2	Δy_2	$f(x_2, y_2)$	q_2	Δq_2	$\Delta^2 q_2$	$\Delta^3 q_2$
x_3	y_3	Δy_3	$f(x_3, y_3)$	q_3	Δq_3	$\Delta^2 q_3$	
x_4	y_4	Δy_4	$f(x_4, y_4)$	q_4			
x_5	y_5	Δy_5	$f(x_5, y_5)$	q_5			
x_6	y_6						

Метод Адамса заключается в продолжении диагональной таблицы разностей с помощью *формулы Адамса*

$$\Delta y_n = q_n + \frac{1}{2}\Delta q_{n-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{n-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{n-3}. \qquad (7)$$

Так, используя числа q_3, Δq_2, $\Delta^2 q_1$, $\Delta^3 q_0$, расположенные в таблице разностей по диагонали, мы с помощью формулы (7), полагая в ней $n = 3$, вычисляем $\Delta y_3 = q_3 + \frac{1}{2}\Delta q_2 + \frac{5}{12}\Delta^2 q_1 + \frac{3}{8}\Delta^3 q_0$. Найдя значение Δy_3, мы вычисляем $y_4 = y_3 + \Delta y_3$. Зная же x_4 и y_4, мы вычисляем $q_4 = hf(x_4, y_4)$, вносим y_4, Δy_3 и q_4 в таблицу разностей и пополняем затем ее конечными разностями Δq_3, $\Delta^2 q_2$, $\Delta^2 q_1$, расположенными вместе с q_4 по новой диагонали, параллельно прежней.

Затем, используя числа новой диагонали, мы с помощью формулы (8), полагая в ней $n = 4$, вычисляем Δy_4, y_5 и q_5 и получаем следующую диагональ: q_5, Δq_4, $\Delta^2 q_3$, $\Delta^3 q_2$. С помощью этой диагонали мы вычисляем значение y_6 искомого решения $y(x)$ и т. д.

Формула Адамса (7) для вычисления Δy исходит из предположения, что третьи конечные разности $\Delta^3 q$ являются постоянными. В соответствии с этим величина h начального шага вычислений определяется из неравенства $h^4 < 10^{-m}$ (если мы желаем получить значение $y(x)$ с точностью до 10^{-m}).

В этом смысле формула Адамса (7) эквивалентна формулам Милна (5) и формулам Рунге—Кутта (3).

Оценка погрешности для метода Адамса сложна и практически бесполезна, так как в общем случае дает сильно завышенные результаты. На практике следят за ходом третьих конечных разностей, выбирая шаг h столь малым, чтобы соседние разности $\Delta^3 q_i$ и $\Delta^3 q_{i+1}$ отличались между собой не более чем на одну-две единицы заданного разряда (не считая запасных знаков).

Для повышения точности результата формула Адамса может быть пополнена членами, содержащими четвертые и высшие разности величины q. При этом возрастает число первых значений функции y, нужных нам для начального заполнения таблицы. Формулы Адамса повышенной точности мы не будем здесь приводить.

Пример 2. Вычислить при $x = 1{,}5$ с точностью до 0,01 по комбинированному методу Рунге—Кутта и Адамса значение решения дифференциального уравнения $y' = y - x$ с начальным условием $y(0) = 1{,}5$ (см. пример 1).

Решение. Используем значения y_1, y_2, y_3, полученные нами при решении примера 1. Их вычисление приведено в таблице 1.

Последующие значения y_4, y_5, y_6 мы вычисляем по методу Адамса (см. таблицы 3 и 4).

Таблица 3

Основная таблица для вычисления y_4, y_5, y_6 по методу Адамса.

$f(x, y) = -x + y$; $h = 0{,}25$

(курсивом обозначены входные данные)

Значение i	x_i	y_i	Δy_i	$y'_i = f(x_i, y_i)$	$q_i = y'_i h$	Δq_i	$\Delta^2 q_i$	$\Delta^3 q_i$
0	*0*	*1,5000*		*1,5000*	0,3750	0,0355	0,0101	0,0028
1	*0,25*	*1,8920*		*1,6420*	0,4105	0,0456	0,0129	0,0037
2	*0,50*	*2,3243*		*1,8243*	0,4561	0,0585	0,0166	0,0047
3	*0,75*	*2,8084*	0,5504	2,0584	0,5146	0,0751	0,0213	
4	1,00	3,3688	0,6356	2,3588	0,5897	0,0964		
5	1,25	3,9944	0,7450	2,7444	0,6861			
6	1,50	$\boxed{4{,}7394}$						

Ответ: 4,74

Таблица 4

Вспомогательная таблица для вычисления по методу Адамса

$$\Delta y_i = q_i + \frac{1}{2}\Delta q_{i-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2} + \frac{3}{8}\Delta^2 q_{i-3}$$

Значение i	q_i	$\frac{1}{2}\Delta q_{i-1}$	$\frac{5}{12}\Delta^2 q_{i-2}$	$\frac{3}{8}\Delta^3 q_{i-3}$	Δy_i
3	0,5146	0,0293	0,0054	0,0011	0,5504
4	0,5897	0,0376	0,0069	0,0014	0,6356
5	0,6861	0,0482	0,0089	0,0018	0,7450

Значение $y_6 = 4{,}74$ будет ответом задачи.

Для случая решения системы (4) формула Адамса (7) и схема вычислений, показанная в таблице 3, применяются отдельно для обеих функций $y(x)$ и $z(x)$.

Найти три последовательных приближения решений указанных ниже дифференциальных уравнений и систем:

3176. $y' = x^2 + y^2$; $y(0) = 0$.

3177. $y' = x + y + z$, $z' = y - z$; $y(0) = 1$, $z(0) = -2$.

3178. $y'' = -y$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Методом Рунге—Кутта, полагая шаг $h = 0{,}2$, вычислить приближенно для указанных промежутков решения данных дифференциальных уравнений и систем:

3179. $y' = y - x$; $y(0) = 1{,}5$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

3180. $y' = \frac{y}{x} - y^2$; $y(1) = 1$ $(1 \leqslant x \leqslant 2)$.

3181. $y' = z + 1$, $z' = y - x$, $y(0) = 1$, $z(0) = 1$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

Применяя комбинированный метод Рунге—Кутта и Милна или Рунге—Кутта и Адамса, вычислить с точностью до 0,01 значения решений указанных ниже дифференциальных уравнений и систем при указанных значениях аргумента:

3182. $y' = x + y$; $y = 1$ при $x = 0$. Вычислить y при $x = 0{,}5$.

3183. $y' = x^2 + y$; $y = 1$ при $x = 0$. Вычислить y при $x = 1$.

3184. $y' = 2y - 3$; $y = 1$ при $x = 0$. Вычислить y при $x = 0{,}5$.

3185. $\begin{cases} y' = -x + 2y + z, \\ z' = x + 2y + 3z; \end{cases}$ $y = 2$, $z = -2$ при $x = 0$.

Вычислить y и z при $x = 0{,}5$.

3186. $\begin{cases} y' = -3y - z, \\ z' = y - z; \end{cases}$ $y = 2$, $z = -1$ при $x = 0$.

Вычислить y и z при $x = 0{,}5$.

3187. $y'' = 2 - y$; $y = 2$, $y' = -1$ при $x = 0$.
Вычислить y при $x = 1$.

3188. $y^3 y'' + 1 = 0$; $y = 1$, $y' = 0$ при $x = 1$.
Вычислить y при $x = 1{,}5$.

3189. $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{x}{2}\cos 2t = 0$; $x = 0$, $x' = 1$ при $t = 0$.
Найти $x(\pi)$ и $x'(\pi)$.

§ 6. Приближенное вычисление коэффициентов Фурье

Схема 12 ординат. Пусть $y_n = f(x_n)$ ($n = 0, 1, \ldots, 12$) — значения функции $y = f(x)$ в равноотстоящих точках $x_n = \frac{\pi n}{6}$ отрезка $[0, 2\pi]$, причем $y_0 = y_{12}$. Составим таблицы:

	y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6
		y_{11}	y_{10}	y_9	y_8	y_7	
Суммы (Σ)	u_0	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6
Разности (Δ)		v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	

	u_0	u_1	u_2	u_3
	u_6	u_7	u_8	
Суммы	s_0	s_1	s_2	s_3
Разности	t_0	t_1	t_2	

	v_1	v_2	v_3
	v_5	v_4	
Суммы	σ_1	σ_2	σ_3
Разности	τ_1	τ_2	

Коэффициенты Фурье a_n, b_n ($n = 0, 1, 2, 3$) функции $y = f(x)$ приближенно могут быть определены по формулам:

$$\begin{aligned} 6a_0 &= s_0 + s_1 + s_2 + s_3, & 6b_1 &= 0{,}5\sigma_1 + 0{,}866\sigma_2 + \sigma_3, \\ 6a_1 &= t_0 + 0{,}866t_1 + 0{,}5t_2, & 6b_2 &= 0{,}866(\tau_1 + \tau_2), \\ 6a_2 &= s_0 - s_3 + 0{,}5(s_1 - s_2), & 6b_3 &= \sigma_1 - \sigma_3, \\ 6a_3 &= t_0 - t_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где $0{,}866 = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{30}$.

Имеем:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{3} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Употребительны также другие схемы. Для облегчения вычислений используются *шаблоны* (см., например: В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. II, 1962, гл. VI, 424—430).

Пример. Найти полином Фурье для функции $y = f(x)$ ($0 \leqslant x \leqslant 2\pi$), заданной таблицей:

y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	y_{10}	y_{11}
38	38	12	4	14	4	−18	−23	−27	−24	8	32

Решение. Составляем таблицы:

y	38	38	12	4	14	4	−18
		32	8	−24	−27	−23	
u	38	70	20	−20	−13	−19	−18
v		6	4	28	41	27	

u	38	70	20	−20
	−18	−19	−13	
s	20	51	7	−20
t	56	89	33	

v	6	4	28
	27	41	
σ	33	45	28
τ	−21	37	

По формулам (1) имеем:

$$a_0 = 9{,}7; \quad a_1 = 24{,}9; \quad a_2 = 10{,}3; \quad a_3 = 3{,}8;$$
$$b_1 = 13{,}9; \quad b_2 = -8{,}4; \quad b_3 = 0{,}8.$$

Следовательно,

$$f(x) \approx 4{,}8 + (24{,}9\cos x + 13{,}9\sin x) + (10{,}3\cos 2x - 8{,}4\sin 2x) + \\ + (3{,}8\cos 3x + 0{,}8\sin 3x).$$

Пользуясь схемой 12 ординат, найти полиномы Фурье для следующих функций, заданных на отрезке $[0, 2\pi]$ таблицами своих значений, соответствующих равноотстоящим значениям аргумента ($y_0 = y_{12}$):

3190.

$y_0 = -7200$ $\quad y_3 = 4300$ $\quad y_6 = 7400$ $\quad y_9 = 7600$

$y_1 = 300$ $\quad y_4 = 0$ $\quad y_7 = -2250$ $\quad y_{10} = 4500$

$y_2 = 700$ $\quad y_5 = -5200$ $\quad y_8 = 3850$ $\quad y_{11} = 250$

3191.

$y_0 = 0$ $\quad y_3 = 9{,}72$ $\quad y_6 = 7{,}42$ $\quad y_9 = 5{,}60$

$y_1 = 6{,}68$ $\quad y_4 = 8{,}97$ $\quad y_7 = 6{,}81$ $\quad y_{10} = 4{,}88$

$y_2 = 9{,}68$ $\quad y_5 = 8{,}18$ $\quad y_8 = 6{,}22$ $\quad y_{11} = 3{,}67$

3192.

$y_0 = 2{,}714$ $\quad y_3 = 1{,}273$ $\quad y_6 = 0{,}370$ $\quad y_9 = -0{,}357$

$y_1 = 3{,}042$ $\quad y_4 = 0{,}788$ $\quad y_7 = 0{,}540$ $\quad y_{10} = -0{,}437$

$y_2 = 2{,}134$ $\quad y_5 = 0{,}495$ $\quad y_8 = 0{,}191$ $\quad y_{11} = 0{,}767$

3193. Вычислить несколько первых коэффициентов Фурье по схеме 12 ординат для следующих функций:

а) $f(x) = \frac{1}{2\pi^2}(x^3 - 3\pi x^2 + 2\pi^2 x)$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$,

б) $f(x) = \frac{1}{\pi^2}(x - \pi)^2$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

ОТВЕТЫ, РЕШЕНИЯ, УКАЗАНИЯ

Глава I

1. Так как $a = (a - b) + b$, то $|a| \leqslant |a - b| + |b|$. Отсюда $|a - b| \geqslant |a| - |b|$ и $|a - b| = |b - a| \geqslant |b| - |a|$. Следовательно, $|a - b| \geqslant ||a| - |b||$. Кроме того, $|a - b| = |a + (-b)| \leqslant |a| + |-b| = |a| + |b|$. **3.** а) $-2 < x < 4$; б) $x < -3$, $x > 1$; в) $-1 < x < 0$; г) $x > 0$. **4.** -24; -6; 0; 0; 0; 6. **5.** 1; $1\frac{1}{4}$; $\sqrt{1+x^2}$; $|x|^{-1}\sqrt{1+x^2}$; $1\Big/\sqrt{1+x^2}$. **6.** π; $\frac{\pi}{2}$; 0. **7.** $f(x) = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$. **8.** $f(x) = \frac{7}{6}x^2 - \frac{13}{6}x + 1$. **9.** 0,4. **10.** $\frac{1}{2}(x + |x|)$. **11.** а) $-1 \leqslant x < +\infty$; б) $-\infty < x < +\infty$. **12.** $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$, $(2, +\infty)$. **13.** а) $-\infty < x \leqslant -\sqrt{2}$, $\sqrt{2} \leqslant x < +\infty$; б) $x = 0$, $|x| \geqslant \sqrt{2}$. **14.** $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Должно быть $2 + x - x^2 \geqslant 0$, или $x^2 - x - 2 \leqslant 0$, т. е. $(x + 1)(x - 2) \leqslant 0$. Отсюда или $x + 1 \geqslant 0$, $x - 2 \leqslant 0$, т. е. $-1 \leqslant x \leqslant 2$; или же $x + 1 \leqslant 0$, $x - 2 \geqslant 0$, т. е. $x \leqslant -1$, $x \geqslant 2$, что невозможно. Таким образом, $-1 \leqslant x \leqslant 2$. **15.** $-2 < x \leqslant 0$. **16.** $-\infty < x \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$. **17.** $-2 < x < 2$. **18.** $-1 < x < 1$, $2 < x < +\infty$. **19.** $-\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant 1$. **20.** $1 \leqslant x \leqslant 100$. **21.** $k\pi \leqslant x \leqslant k\pi + \frac{\pi}{2}$ $(k = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$. **22.** $\varphi(x) = 2x^4 - 5x^2 - 10$, $\psi(x) = -3x^3 + 6x$. **23.** а) Четная; б) нечетная; в) четная; г) нечетная; д) нечетная. **24.** Использовать тождество $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$. **26.** а) Периодическая, $T = \frac{2}{3}\pi$; б) периодическая, $T = \frac{2\pi}{\lambda}$; в) периодическая, $T = \pi$; г) периодическая, $T = \pi$; д) непериодическая. **27.** $y = \frac{b}{c}x$, если $0 \leqslant x \leqslant c$; $y = b$, если $c < x \leqslant a$; $S = \frac{b}{2c}x^2$, если $0 \leqslant x \leqslant c$; $S = bx - \frac{bc}{2}$, если $c < x \leqslant a$. **28.** $m = q_1x$ при $0 \leqslant x \leqslant l_1$; $m = q_1l_1 + q_2(x - l_1)$ при $l_1 < x \leqslant l_1 + l_2$; $m = q_1l_1 + q_2l_2 + q_3(x - l_1 - l_2)$ при $l_1 + l_2 < x \leqslant l_1 + l_2 + l_3 = l$. **29.** $\varphi(\psi(x)) = 2^{2x}$; $\psi(\varphi(x)) = 2^{x^2}$. **30.** x. **31.** $(x + 2)^2$. **37.** $-\frac{\pi}{2}$; 0; $-\frac{\pi}{4}$. **38.** а) $y = 0$ при $x = -1$, $y > 0$ при $x > -1$,

$y < 0$ при $x < -1$; б) $y = 0$ при $x = -1$ и $x = 2$, $y > 0$ при $-1 < x < 2$, $y < 0$ при $-\infty < x < -1$ и $2 < x < +\infty$; в) $y > 0$ при $-\infty < x < +\infty$; г) $y = 0$ при $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$, $y > 0$ при $-\sqrt{3} < x < 0$ и $\sqrt{3} < x < +\infty$, $y < 0$ при $-\infty < x < -\sqrt{3}$ и $0 < x < \sqrt{3}$; д) $y = 0$ при $x = 1$, $y > 0$ при $-\infty < x < -1$ и $1 < x < +\infty$, $y < 0$ при $0 < x < 1$. **39.** а) $x = \frac{1}{2}(y - 3)$ $(-\infty < y < +\infty)$; б) $x = \sqrt{y+1}$ и $x = -\sqrt{y+1}$ $(-1 \leqslant y < +\infty)$; в) $x = \sqrt[3]{1 - y^3}$ $(-\infty < y < +\infty)$; г) $x = 2 \cdot 10^y$ $(-\infty < y < +\infty)$; д) $x = \frac{1}{3}\operatorname{tg} y$ $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$. **40.** $x = y$ при $-\infty < y \leqslant 0$; $x = \sqrt{y}$ при $0 < y < +\infty$. **41.** а) $y = u^{10}$, $u = 2x - 5$; б) $y = 2^u$, $u = \cos x$; в) $y = \lg u$, $u = \operatorname{tg} v$, $v = x/2$; г) $y = \arcsin u$, $u = 3^v$, $v = -x^2$. **42.** а) $y = \sin^2 x$; б) $y = \operatorname{arctg}\sqrt{\lg x}$; в) $y = 2(x^2 - 1)$, если $|x| \leqslant 1$, и $y = 0$, если $|x| > 1$. **43.** а) $y = -\cos x^2$, $\sqrt{\pi} \leqslant |x| \leqslant \sqrt{2\pi}$; б) $y = \lg(10 - 10^x)$, $-\infty < x < 1$; в) $y = \frac{x}{3}$ при $-\infty < x < 0$ и $y = x$ при $0 \leqslant x < +\infty$. **46.** См. приложение VI, рис. 1. **51.** Дополнив квадратный трехчлен до полного квадрата, будем иметь $y = y_0 + a(x - x_0)^2$, где $x_0 = -b/2a$ и $y_0 = (4ac - b^2)/4a$. Отсюда искомый график есть парабола $y = ax^2$, сдвинутая вдоль оси OX на величину x_0 и вдоль оси OY на величину y_0. **53.** См. приложение VI, рис. 2. **58.** См. приложение VI, рис. 3. **61.** График представляет собой гиперболу $y = \frac{m}{x}$, сдвинутую вдоль оси OX на величину x_0 и вдоль оси OY на величину y_0. **62.** Выделив целую часть, будем иметь $y = \frac{2}{3} - \frac{13}{9}\Big/\left(x + \frac{2}{3}\right)$ (см. № 61). **65.** См. приложение VI, рис. 4. **67.** См. приложение VI, рис. 5. **71.** См. приложение VI, рис. 6. **72.** См. приложение VI, рис. 7. **73.** См. приложение VI, рис. 8. **75.** См. приложение VI, рис. 19. **78.** См. приложение VI, рис. 23. **80.** См. приложение VI, рис. 9. **81.** См. приложение VI, рис. 9. **82.** См. приложение VI, рис. 10. **83.** См. приложение VI, рис. 10. **84.** См. приложение VI, рис. 11. **85.** См. приложение VI, рис. 11. **87.** Период функции $T = 2\pi/n$. **89.** Искомый график есть синусоида $y = 5\sin 2x$ с амплитудой 5 и периодом π, сдвинутая вправо вдоль оси OX на величину $1\frac{1}{2}$. **90.** Полагая $a = A\cos\varphi$ и $b = -A\sin\varphi$, будем иметь $y = A\sin(x - \varphi)$, где $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ и $\varphi = \operatorname{Arctg}\left(-\frac{b}{a}\right)$. В нашем случае $A = 10$, $\varphi = 0{,}927$. **92.** $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$. **93.** Искомый график есть сумма графиков $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$. **94.** Искомый график есть произведение графиков $y_1 = x$ и $y_2 = \sin x$. **99.** Функция — четная. Для $x > 0$ определяем точки, в которых 1) $y = 0$; 2) $y = 1$ и 3) $y = -1$. При $x \to +\infty$ $y \to 1$. **101.** См. приложение VI, рис. 14. **102.** См. приложение VI, рис. 15. **103.** См. приложение VI, рис. 17. **104.** См. приложение VI, рис. 17. **105.** См. приложение VI, рис. 18. **107.** См. приложение VI, рис. 18. **118.** См. приложение VI, рис. 12. **119.** См. приложение VI. рис. 12. **120.** См. приложение VI, рис. 13. **121.** См. приложение VI, рис. 13. **132.** См. приложение VI, рис. 30. **133.** См. приложение VI, рис. 32. **134.** См. приложение VI, рис. 31. **138.** См. приложение VI, рис. 33. **139.** См. приложение VI, рис. 28. **140.** См. приложение VI, рис. 25. **141.** Составим таблицу значений:

t	0	1	2	3	...	−1	−2	−3
x	0	1	8	27	...	−1	−8	−27
y	0	1	4	9	...	1	4	9

Построив найденные точки (x, y), получим искомую кривую (см. приложение VI, рис. 7). (Параметр t при этом геометрически не откладывается!) **142.** См. приложение VI, рис. 19. **143.** См. приложение VI, рис. 27. **144.** См. приложение VI, рис. 29. **145.** См. приложение VI, рис. 22. **150.** См. приложение VI, рис. 28. **151.** Разрешив уравнение относительно y, получим $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. Теперь искомую кривую легко построить по точкам. **153.** См. приложение VI, рис. 21. **156.** См. приложение VI, рис. 27. Достаточно построить точки (x, y), соответствующие абсциссам $x = 0, \pm\dfrac{a}{2}, \pm a$. **157.** Разрешая уравнение относительно x, будем иметь $x = 10\lg y - y^{(*)}$. Отсюда получаем точки (x, y) искомой кривой, давая ординате y произвольные значения $(y > 0)$ и вычисляя по формуле (*) абсциссу x. Следует иметь в виду, что $\lg y \to -\infty$ при $y \to 0$. **159.** Переходя к полярным координатам $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x}$, будем иметь $r = e^{\varphi}$ (см. приложение VI, рис. 32). **160.** Переходя к полярным координатам $x = r\cos\varphi$ и $y = r\sin\varphi$, будем иметь $r = \dfrac{3\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^3\varphi + \sin^3\varphi}$ (см. приложение VI, рис. 32). **161.** $F = 32 + 1{,}8C$. **162.** $y = 0{,}6\,x(10 - x)$; $y_{\max} = 15$ при $x = 5$. **163.** $y = \dfrac{ab}{2}\sin x$; $y_{\max} = \dfrac{ab}{2}$ при $x = \dfrac{\pi}{2}$. **164.** а) $x_1 = 1/2$, $x_2 = 2$; б) $x = 0{,}68$; в) $x_1 = 1{,}37$, $x_2 = 10$; г) $x = 0{,}40$; д) $x = 1{,}50$; е) $x = 0{,}86$. **165.** а) $x_1 = 2$, $y_1 = 5$; $x_2 = 5$; $y_2 = 2$; б) $x_1 = -3$, $y_1 = -2$; $x_2 = -2$, $y_2 = -3$; $x_3 = 2$, $y_3 = 3$; $x_4 = 3$, $y_4 = 2$; в) $x_1 = 2$, $y_1 = 2$; $x_2 \approx 3{,}1$, $y_2 \approx -2{,}5$; г) $x_1 \approx -3{,}6$, $y_1 \approx -3{,}1$; $x_2 \approx -2{,}7$, $y_2 \approx 2{,}9$; $x_3 = 2{,}9$, $y_3 \approx 1{,}8$; $x_4 \approx 3{,}4$, $y_4 \approx -1{,}6$; д) $x_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $y_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $x_2 = \dfrac{5\pi}{4}$, $y_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **166.** $n > \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. а) $n \geqslant 4$; б) $n > 10$; в) $n \geqslant 32$. **167.** $n > \dfrac{1}{\varepsilon} - 1 = N$. а) $N = 9$; б) $N = 99$; в) $N = 999$. **168.** $\delta = \dfrac{\varepsilon}{5}$ $(\varepsilon < 1)$. а) 0,02; б) 0,002; в) 0,0002.

169. а) $\lg x < -N$ при $0 < x < \delta(N)$; б) $2^x > N$ при $x > X(N)$; в) $|f(x)| > N$ при $|x| > X(N)$. **170.** а) 0; б) 1; в) 2; г) 7/30. **171.** 1/2. **172.** 1. **173.** −3/2. **174.** 1. **175.** 3. **176.** 1. **177.** 3/4. **178.** 1/3. Указание: использовать формулу $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. **179.** 0. **180.** 0. **181.** 1. **182.** 0. **183.** ∞. **184.** 0. **185.** 72. **186.** 2. **187.** 2. **188.** ∞. **189.** 0. **190.** 1. **191.** 0. **192.** ∞. **193.** −2. **194.** ∞. **195.** 1/2. **196.** $\dfrac{a-1}{3a^2}$. **197.** $3x^2$. **198.** −1. **199.** 1/2. **200.** 3. **201.** 4/3. **202.** 1/9. **203.** −1/56. **204.** 12. **205.** 3/2. **206.** −1/3. **207.** 1. **208.** $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. **209.** $\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **210.** −1/3. **211.** 0. **212.** $a/2$. **213.** −5/2. **214.** 1/2. **215.** 0. **216.** а) $\dfrac{1}{2}\sin 2$; б) 0. **217.** 3. **218.** 5/2. **219.** 1/3. **220.** π. **221.** 1/2. **222.** $\cos a$. **223.** $-\sin a$. **224.** π. **225.** $\cos x$. **226.** $-1/\sqrt{2}$. **227.** а) 0; б) 1. **228.** $2/\pi$. **229.** 1/2. **230.** 0. **231.** $-1/\sqrt{3}$. **232.** $\dfrac{1}{2}(n^2 - m^2)$. **233.** 1/2. **234.** 1. **235.** 2/3. **236.** $2/\pi$. **237.** −1/4. **238.** π. **239.** 1/4. **240.** 1. **241.** 1. **242.** $\dfrac{1}{4}$. **243.** 0. **244.** 3/2. **245.** 0. **246.** e^{-1}. **247.** e^2. **248.** e^{-1}. **249.** e^{-4}. **250.** e^x. **251.** e. **252.** а) 1. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to 0}[1 - (1 - \cos x)]^{1/x} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0}\left[\left(1 - 2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2\sin^2\frac{x}{2}}}\right]^{-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right) = -2\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\dfrac{x^2}{4x}\right] = -2\cdot 1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{4} = 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x} = e^0 = 1$. б) $1/\sqrt{e}$. Аналогично предыдущему, $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(-\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right)}$.

Так как $\lim\limits_{x\to 0}\left(-\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}\right) = 2\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\dfrac{x^2}{4x}\right] = -\dfrac{1}{2}$, то $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x^2} = e^{-1/2} = 1/\sqrt{e}$. **253.** ln 2. **254.** 10lg 2. **255.** 1. **256.** 1. **257.** −1/2. **258.** 1. Положить $e^x - 1 = \alpha$, где $\alpha \to 0$. **259.** $\ln a$. Использовать тождество $a = e^{\ln a}$. **260.** $\ln a$. Положить $\dfrac{1}{n} = \alpha$, где $\alpha \to 0$ (см. № 259). **261.** $a - b$. **262.** 1. **263.** а) 1; б) 1/2.

264. а) -1; б) 1. **265.** а) -1; б) 1. **266.** а) 1; б) 0. **267.** а) 0; б) 1. **268.** а) -1; б) 1. **269.** а) -1; б) 1. **270.** а) $-\infty$; б) $+\infty$. **271.** Если $x \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$), то $\cos^2 x < 1$ и $y = 0$; если же $x = k\pi$, то $\cos^2 x = 1$ и $y = 1$. **272.** $y = x$ при $0 \leqslant x < 1$; $y = \frac{1}{2}$ при $x = 1$; $y = 0$ при $x > 1$. **273.** $y = |x|$. **274.** $y = -\frac{\pi}{2}$ при $x < 0$; $y = 0$ при $x = 0$; $y = \frac{\pi}{2}$ при $x > 0$. **275.** $y = 1$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$; $y = x$ при $1 < x < +\infty$. **276.** 61/450. **277.** $x_1 \to -\frac{c}{b}$; $x_2 \to \infty$. **278.** π. **279.** $2\pi R$. **280.** $\frac{e}{e-1}$. **281.** $1\frac{1}{3}$. **282.** $\frac{\sqrt{e^{\pi}+1}}{e^{\pi/2}-1}$. **284.** $\lim\limits_{n\to\infty} AC_n = \frac{l}{3}$. **285.** $\frac{ab}{2}$. **286.** $k = 1$, $b = 0$; прямая $y = x$ является асимптотой кривой $y = \frac{x^3+1}{x^2+1}$. **287.** $Q_t^{(n)} = Q_0\left(1 + \frac{kt}{n}\right)^n$, где k — коэффициент пропорциональности («закон сложных процентов»); $Q_t = Q_0 e^{kt}$. **288.** $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$; а) $|x| > 10$; б) $|x| > 100$; в) $|x| > 1000$. **289.** $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$ при $0 < \varepsilon < 1$; а) $|x - 1| < 0{,}05$; б) $|x - 1| < 0{,}005$; в) $|x - 1| < 0{,}0005$. **290.** $|x - 2| < \frac{1}{N} = \delta$; а) $\delta = 0{,}1$; б) $\delta = 0{,}01$; в) $\delta = 0{,}001$. **291.** а) Второй; б) третий. 1/2, 3/2. **292.** а) 1; б) 2; в) 3. **293.** а) 1; б) 1/4; в) 2/3; г) 2; д) 3. **295.** Нет. **296.** 15. **297.** -1. **298.** -1. **299.** 3. **300.** а) 1,03 (1,0296); б) 0,985 (0,9849); в) 3,167 (3,1623). $\sqrt{10} = \sqrt{9+1} = 3\sqrt{1+\frac{1}{9}}$; г) 10,954 (10,954). **301.** 1) 0,98 (0,9804); 2) 1,03 (1,0309); 3) 0,0095 (0,00952); 4) 3,875 (3,8730); 5) 1,12 (1,125); 6) 0,72 (0,7480); 7) 0,043 (0,04139). **303.** а) 2; б) 4; в) 1/2; г) 2/3. **307.** Если $x > 0$, то при $|\Delta x| < x$ имеем $|\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}| = |\Delta x|/(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}) \leqslant |\Delta x|/\sqrt{x}$. **309.** Воспользоваться неравенством $|\cos(x + \Delta x) - \cos x| \leqslant |\Delta x|$. **310.** а) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, где k — целое число; б) $x \neq k\pi$, где k — целое число. **311.** Воспользоваться неравенством $||x + \Delta x| - |x|| \leqslant |\Delta x|$. **313.** $A = 4$. **314.** $f(0) = 1$. **315.** Нет. **316.** а) $f(0) = n$; б) $f(0) = \frac{1}{2}$; в) $f(0) = 2$; г) $f(0) = 2$; д) $f(0) = 0$; е) $f(0) = 1$. **317.** $x = 2$ — точка разрыва 2-го рода. **318.** $x = -1$ — устранимая точка разрыва. **319.** $x = -2$ — точка разрыва 2-го рода; $x = 2$ — устранимая точка разрыва. **320.** $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода. **321.** а) $x = 0$ — точка разрыва 2-го рода; б) $x = 0$ — устранимая точка разрыва. **322.** $x = 0$ — устранимая точка разрыва, $x = k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки бесконечного разрыва. **323.** $x = 2\pi k \pm \frac{\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки бесконечного разрыва. **324.** $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) — точки бесконечного разрыва. **325.** $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода. **326.** $x = -1$ — устранимая точка разрыва; $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода. **327.** $x = -1$ — точка разрыва 2-го рода. **328.** $x = 0$ — устранимая точка разрыва. **329.** $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода.

330. $x = 3$ — точка разрыва 1-го рода. **332.** $x = 1$ — точка разрыва 1-го рода. **333.** Функция непрерывна. **334.** а) $x = 0$ — точка разрыва 1-го рода; б) функция непрерывна; в) $x = k\pi$ (k — целое) — точки разрыва 1-го рода. **335.** а) $x = k$ (k — целое) — точки разрыва 1-го рода; б) $x = k$ ($k \neq 0$ — целое) — точки разрыва 1-го рода. **337.** Нет, так как функция $y = E(x)$ разрывна при $x = 1$. **338.** 1,53. **339.** Показать, что при x_0 достаточно большом имеем $P(-x_0)\,P(x_0) < 0$.

Глава II

341. а) 3; б) 0,21; в) $2h + h^2$. **342.** а) 0,1; б) -3; в) $\sqrt[3]{a+h} - \sqrt[3]{a}$. **344.** а) 624; 1560; б) 0,01; 100; в) -1; 0,000011. **345.** а) $a\Delta x$; a; б) $3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3$; $3x^2 + 3x\Delta x + (\Delta x)^2$; в) $-\frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{x^2(x+\Delta x)^2}$; $-\frac{2x+\Delta x}{x^2(x+\Delta x)^2}$; г) $\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}$; $\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$; д) $2^x(2^{\Delta x} - 1)$; $\frac{2^x(2^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$; е) $\ln\frac{x+\Delta x}{x}$; $\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$. **346.** а) -1; б) 0,1; в) $-h$; 0. **347.** 21. **348.** 15 см/с. **349.** 7. **350.** $\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. **351.** $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. **352.** а) $\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$; б) $\frac{d\varphi}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, где φ — угол поворота в момент t. **353.** а) $\frac{\Delta T}{\Delta t}$; б) $\frac{dT}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta T}{\Delta t}$, T — температура в момент t. **354.** $\frac{dQ}{dt} = \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}$, Q — количество вещества в момент t. **355.** а) $\frac{\Delta m}{\Delta x}$; б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{6\Delta x}$. **356.** а) $-\frac{1}{6} \approx -0{,}16$; б) $-\frac{5}{21} \approx -0{,}238$; в) $-\frac{50}{201} \approx -0{,}249$; $y'_{x=2} = -0{,}25$. **357.** $\sec^2 x$. $y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\operatorname{tg}(x+\Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x\cos x\cos(x+\Delta x)} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\cos x\cos(x+\Delta x)} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$. **358.** а) $3x^2$; б) $-\frac{2}{x^3}$; в) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$; г) $\frac{-1}{\sin^2 x}$. **359.** $\frac{1}{12}$. $f'(8) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(8+\Delta x) - f(8)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+\Delta x} - \sqrt[3]{8}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{8+\Delta x-8}{\Delta x[\sqrt[3]{8+\Delta x^2} + \sqrt[3]{8+\Delta x 8} + \sqrt[3]{8^2}]} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(8+\Delta x)^2} + 2\sqrt[3]{(8+\Delta x)} + 4} = \frac{1}{12}$. **360.** $f'(0) = -8$, $f'(1) = 0$, $f'(2) = 0$. **361.** $x_1 = 0$; $x_2 = 3$. Уравнение $f'(x) = f(x)$ для данной функции имеет вид $3x^2 = x^3$. **362.** 30 м/с. **363.** 1, 2. **364.** -1. **365.** $f'(x_0) = \frac{-1}{x_0^2}$. **366.** -1; 2; $\operatorname{tg}\varphi = 3$. Использовать результаты примера 3 и задачи 365. **367.** а) $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \frac{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}} = \infty$; б) $f'(1) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+\Delta x-1}}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[5]{(\Delta x)^4}} = +\infty$; в) $f'_-\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = \lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\left|\cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi+\Delta x\right)\right|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to-0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x} = -1$; $f'_+\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = \lim\limits_{\Delta x\to+0}\frac{|\sin\Delta x|}{\Delta x}=1$. **368.** $5x^4-12x^2+2$. **369.** $-\frac{1}{3}+2x-2x^3$. **370.** $2ax+b$.

371. $-\frac{15x^2}{a}$. **372.** $mat^{m-1}+b(m+n)t^{m+n-1}$. **373.** $\frac{6ax^5}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **374.** $-\frac{\pi}{x^2}$.

375. $2x^{-1/3}-5x^{3/2}-3x^{-4}$. **376.** $\frac{8}{3}x^{5/3}$. Указание: $y = x^2x^{2/3} = x^{8/3}$.

377. $\frac{4b}{3x^2\sqrt[3]{x}} - \frac{2a}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. **378.** $\frac{bc-ad}{(c+dx)^2}$. **379.** $\frac{-2x^2-6x+25}{(x^2-5x+5)^2}$. **380.** $\frac{1-4x}{x^2(2x-1)^2}$.

381. $\frac{1}{\sqrt z(1-\sqrt z)^2}$. **382.** $5\cos x - 3\sin x$. **383.** $-\frac{4}{\sin^2 2x}$. **384.** $\frac{-2}{(\sin x-\cos x)^2}$.

385. $t^2\sin t$. **386.** $y'=0$. **387.** $\operatorname{ctg} x - \frac{x}{\sin^2 x}$. **388.** $\arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. **389.** $x\operatorname{arctg} x$.

390. $x^6e^x(x+7)$. **391.** xe^x. **392.** $e^x\frac{x-2}{x^3}$. **393.** $\frac{5x^4-x^5}{e^x}$. **394.** $e^x(\cos x-\sin x)$.

395. x^2e^x. **396.** $e^x\left(\arcsin x+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. **397.** $\frac{x(2\ln x-1)}{\ln^2 x}$. **398.** $3x^2\ln x$.

399. $\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x^2}-\frac{2}{x^2}$. **400.** $\frac{2\ln x}{x\ln 10}-\frac{1}{x}$. **401.** $\operatorname{sh} x + x\operatorname{ch} x$. **402.** $\frac{2x\operatorname{ch}x - x^2\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}^2 x}$.

403. $-\operatorname{th}^2 x$. **404.** $\frac{-3(x\ln x+\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x)}{x\ln^2 x\cdot\operatorname{sh}^2 x}$. **405.** $\frac{-2x^2}{1-x^4}$. **406.** $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\operatorname{Arsh} x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\arcsin x$. **407.** $\frac{x-\sqrt{x^2-1}\operatorname{Arch}x}{x^2\sqrt{x^2-1}}$. **408.** $\frac{1+2x\operatorname{Arcth}x}{(1-x^2)^2}$. **410.** $\frac{3a}{c}\left(\frac{ax+b}{c}\right)^2$.

411. $12b+18b^2y$. **412.** $16x(3+2x^2)^3$. **413.** $\frac{x^2-1}{(2x-1)^8}$. **414.** $\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

415. $\frac{bx^2}{\sqrt[3]{(a+bx^3)^2}}$. **416.** $-\sqrt{\sqrt[3]{\frac{a^2}{x^2}}-1}$. **418.** $\frac{1-\operatorname{tg}^2x+\operatorname{tg}^4x}{\cos^2 x}$. **419.** $\frac{-1}{2\sin^2 x\sqrt{\operatorname{ctg}x}}$.

420. $2-15\cos^2 x\sin x$. **421.** $\frac{-16\cos 2t}{\sin^3 2t}$. Указание: $x=\sin^{-2}t+\cos^{-2}t$.

422. $\frac{\sin x}{(1-3\cos x)^3}$. **423.** $\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}$. **424.** $\frac{3\cos x+2\sin x}{2\sqrt{15\sin x-10\cos x}}$. **425.** $\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}+\frac{3\sin x}{\cos^4 x}$. **426.** $\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{1+\arcsin x}}$. **427.** $\frac{1}{2(1+x^2)\sqrt{\operatorname{arctg}x}} - \frac{3(\arcsin)^2}{\sqrt{1-x^2}}$.

428. $\frac{-1}{(1+x^2)(\operatorname{arctg}x)^2}$. **429.** $\frac{e^x+xe^x+1}{2\sqrt{xe^x+x}}$. **430.** $\frac{(2e^x-2^x)\ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x-2^x+1)^2}}+\frac{5\ln^4 x}{x}$.

432. $(2x-5)\cos(x^2-5x+1) - \frac{a}{x^2\cos^2\frac{a}{x}}$. **433.** $\alpha\sin(\alpha x+\beta)$. **434.** $\sin(2t+\varphi)$.

435. $-2\frac{\cos x}{\sin^2\frac{x}{a}}$. **436.** $\frac{-1}{\sin^2\frac{x}{a}}$. **437.** $x\cos 2x^2\sin 3x^2$. **439.** $\frac{-2}{x\sqrt{x^4-1}}$. **440.** $\frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$.

441. $\frac{-1}{1+x^2}$. **442.** $\frac{-1}{1+x^2}$. **443.** $-10xe^{-x^2}$. **444.** $-2x\cdot 5^{-x^2}\ln 5$. **445.** $2x\cdot 10^{2x}\times(1+x\ln 10)$. **446.** $\sin 2^t + 2^t t\cos 2^t\ln 2$. **447.** $\frac{-e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$. **448.** $\frac{2}{2x+7}$. **449.** $\operatorname{ctg}x\lg e$.

450. $\frac{-2x}{1-x^2}$. **451.** $\frac{2\ln x}{x}-\frac{1}{x\ln x}$. **452.** $\frac{(e^x+5\cos x)\sqrt{1-x^2}-4}{(e^x+5\sin x-4\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$.

453. $\frac{1}{(1+\ln^2 x)x}+\frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg}x}$. **454.** $\frac{1}{2x\sqrt{\ln x+1}}+\frac{1}{2(\sqrt x+x)}$.

455. Решение: $y'=(\sin^3 5x)\frac{x}{3}+\sin^2 5x\cos^2\left(\cos^2\frac{x}{3}\right)' = 3\sin^2 5x\cos 5x\, 5\cos^2\frac{x}{3} + \sin^3 5x\cdot 2\cos\frac{x}{3}\left(-\sin\frac{x}{3}\right)\frac{1}{3} = 15\sin^2 5x\cos 5x\cos^2\frac{x}{3} - \frac{2}{3}\sin^3 5x\cos\frac{x}{3}\sin\frac{x}{3}$.

456. $\frac{4x+3}{(x-2)^3}$. **457.** $\frac{x^2+4-6}{(x-3)^5}$. **458.** $\frac{x^7}{(1-x^2)^5}$. **459.** $\frac{x-1}{x^2\sqrt{2x^2-2x+1}}$.

460. $\frac{1}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}}$. **461.** $\frac{x^2}{\sqrt{(1+x^2)^5}}$. **462.** $\frac{(1+\sqrt x)^3}{\sqrt[3]{x}}$. **463.** $x^5\sqrt[3]{(1+x^3)^2}$.

464. $\frac{1}{\sqrt[4]{(x-1)^3(x+2)^5}}$. **465.** $4x^3(a-2x^3)(a-5x^3)$. **466.** $\frac{2abmnx^{n-1}(a+bx^n)^{m-1}}{(a-bx^n)^{m+1}}$.

467. $\frac{x^3-1}{(x+2)^6}$. **468.** $\frac{a-3x}{2\sqrt{a-x}}$. **469.** $\frac{3x^2+2(a+b+c)x+ab+bc+ac}{2\sqrt{(x+a)(x+b)(x+c)}}$.

470. $\dfrac{1+2\sqrt{y}}{6\sqrt{y}\sqrt[3]{(y+\sqrt{y})^2}}$. **471.** $2(7t+4)\sqrt[3]{3t+2}$. **472.** $\dfrac{y-a}{\sqrt{(2ay-y^2)^3}}$. **473.** $\dfrac{1}{\sqrt{e^x+1}}$.

474. $\sin^3 x\cos^2 x$. **475.** $\dfrac{1}{\sin^4 x\cos^4 x}$. **476.** $10\,\mathrm{tg}\,5x\sec^2 5x$. **477.** $x\cos x^2$.

478. $3t^2\sin 2t^3$. **479.** $3\cos x\cos 2x$. **480.** $\mathrm{tg}^4\,x$. **481.** $\dfrac{\cos 2x}{\sin^4 x}$.

482. $\dfrac{(\alpha-\beta)\sin 2x}{2\sqrt{\alpha\sin^2 x+\beta\cos^2 x}}$. **483.** 0. **484.** $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\arcsin x(2\arccos x-\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

485. $\dfrac{2}{x\sqrt{2x^2-1}}$. **486.** $\dfrac{1}{1+x^2}$. **487.** $\dfrac{x\arccos x-\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^{3/2}}$. **488.** $\dfrac{1}{\sqrt{a-bx^2}}$.

489. $\sqrt{\dfrac{a-x}{a+x}}$ $(a>0)$. **490.** $2\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$. **491.** $\dfrac{-x}{\sqrt{2x-x^2}}$. **492.** $\arcsin\sqrt{x}$.

493. $\dfrac{5}{\sqrt{1-25x^2}\arcsin 5x}$. **494.** $\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **495.** $\dfrac{\sin\alpha}{1-2x\cos\alpha+x^2}$.

496. $\dfrac{1}{5+4\sin x}$. **497.** $4x\sqrt{\dfrac{x}{b-x}}$. **498.** $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^2 x}$. **499.** $\dfrac{a}{2}e^{\frac{ax}{2}}$. **500.** $(\sin 2x)e^{\sin^2 x}$.

501. $2m^2p(2ma^{mx}+b)^{p-1}a^{mx}\ln a$. **502.** $e^{\alpha t}(\alpha\cos\beta t-\beta\sin\beta t)$. **503.** $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

504. $e^{-x}\cos 3x$. **505.** $x^{n-1}a^{-x^2}(n-2x^2\ln a)$. **506.** $-\dfrac{1}{2}y\,\mathrm{tg}\,x(1+\sqrt{\cos x}\ln a)$.

507. $\dfrac{3^{\mathrm{ctg}(1/x)}\ln 3}{(x\sin(1/x))^2}$. **508.** $\dfrac{2ax+b}{ax^2+bx+c}$. **509.** $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$. **510.** $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$.

511. $\dfrac{1}{\sqrt{2ax+x^2}}$. **512.** $\dfrac{-2}{x\ln^3 x}$. **513.** $-\dfrac{1}{x^2}\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x-1}{x}$. **514.** $\dfrac{2x+11}{x^2-x-2}$. Указание: $y=5\ln(x-2)-3\ln(x+1)$. **515.** $\dfrac{3x^2-16x+19}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. **516.** $\dfrac{1}{\sin^3 x\cos x}$.

517. $\sqrt{x^2-a^2}$. **518.** $\dfrac{-6x^2}{(3-2x^3)\ln(3-2x^3)}$. **519.** $\dfrac{15a\ln^2(ax+b)}{ax+b}$. **520.** $\dfrac{2}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

521. $\dfrac{mx+n}{x^2-a^2}$. **522.** $\sqrt{2}\sin\ln x$. **523.** $\dfrac{1}{\sin^3 x}$. **524.** $\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$. **525.** $\dfrac{x+1}{x^3-1}$.

526. $\dfrac{3}{\sqrt{1-9x^2}}[2^{\arcsin 3x}\ln 2+2(1-\arccos 3x)]$. **527.** $\left(3^{\sin ax/\cos bx}\ln 3+\dfrac{\sin^2 ax}{\cos^2 bx}\right)\times$ $\times\dfrac{a\cos ax\cos bx+b\sin ax\sin bx}{\cos^2 bx}$. **528.** $\dfrac{1}{1+2\sin x}$. **529.** $\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$.

530. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}+\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **531.** $-\dfrac{1}{x(1+\ln^2 x)}$. **532.** $\dfrac{x^2}{x^4+x^2-2}$.

533. $\dfrac{2}{\cos x\sqrt{\sin x}}$. **534.** $\dfrac{x^2-3x}{x^4-1}$. **535.** $\dfrac{1}{1+x^3}$. **536.** $\dfrac{\arcsin x}{(1-x^2)^{2/3}}$. **537.** $6\,\mathrm{sh}^2\,2x\cdot\mathrm{ch}\,2x$.

538. $e^{\alpha x}(\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta x+\beta\,\mathrm{sh}\,\beta x)$. **539.** $6\,\mathrm{th}^2\,2x(1-\mathrm{th}^2\,2x)$. **540.** $2\,\mathrm{cth}\,2x$. **541.** $\dfrac{2x}{\sqrt{a^4+x^4}}$.

542. $\dfrac{1}{x\sqrt{\ln^2 x-1}}$. **543.** $\dfrac{1}{\cos 2x}$. **544.** $\dfrac{-1}{\sin x}$. **545.** $\dfrac{2}{1-x^2}$. **546.** $x\,\mathrm{Arth}\,x$.

547. $x\,\mathrm{Arsh}\,x$. **548.** а) $y'=1$ при $x>0$; $y'=-1$ при $x<0$; $y'(0)$ не существует; б) $y'=|2x|$. **549.** $y'=\dfrac{1}{x}$. **550.** $f'(x)=\begin{cases}-1 & \text{при } x\leqslant 0,\\ -e^{-x} & \text{при } x>0.\end{cases}$ **552.** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **553.** 6π.

554. а) $f'_-(0)=-1$, $f'_+(0)=1$; б) $f'_-(0)=\dfrac{2}{a}$, $f'_+(0)=\dfrac{-2}{a}$; в) $f'_-(0)=1$, $f'_+(0)=0$; г) $f'_-(0)=f'_-(0)=0$; д) $f'_-(0)$ и $f'_+(0)$ не существуют. **555.** $1-x$. **556.** $2+\dfrac{x-3}{4}$.

557. -1. **558.** 0. **561.** Имеем $y'=e^{-x}(1-x)$. Так как $e^{-x}=\dfrac{y}{x}$, то $y'=\dfrac{y}{x}(1-x)$ или $xy'=y(1-x)$. **566.** $(1+2x)(1+3x)+2(1+x)(1+3x)+3(x+1)(1+2x)$.

567. $-\dfrac{(x+2)(5x^2+19x+20)}{(x+1)^4(x+3)^5}$. **568.** $\dfrac{x^2-4x+2}{2\sqrt{x(x-1)(x-2)^3}}$. **569.** $\dfrac{3x^2+5}{3(x^2+1)}\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$.

570. $\dfrac{(x-2)^8(x^2-7x+1)}{(x-1)(x-3)\sqrt{(x-1)^5(x-3)^{11}}}$. **571.** $-\dfrac{5x^2+x-24}{3(x-1)^{1/2}(x+2)^{5/3}(x+3)^{5/2}}$.

572. $x^x(1+\ln x)$. **573.** $x^{x^2+1}(1+2\ln x)$. **574.** $\sqrt[x]{x}\,\dfrac{1-\ln x}{x^2}$. **575.** $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{2}\ln x\right)$.

576. $x^{x^x}x^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln x+\ln^2 x\right)$. **577.** $x^{\sin x}\left(\dfrac{\sin x}{x}+\cos x\ln x\right)$. **578.** $(\cos x)^{\sin x}\times$ $\times(\cos x\ln\cos x-\sin x\,\mathrm{tg}\,x)$. **579.** $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{1+x}\right]$. **580.** $(\mathrm{arctg}\,x)^x\times$ $\times\left[\ln\mathrm{arctg}\,x+\dfrac{x}{(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x}\right]$. **581.** а) $x'_y=\dfrac{1}{3(1+x^2)}$; б) $x'_y=\dfrac{2}{2-\cos x}$; в) $x'_y=\dfrac{10}{1+5e^{x/2}}$. **582.** $\dfrac{3}{2}t^2$. **583.** $\dfrac{-2t}{t+1}$. **584.** $\dfrac{-2t}{1-t^2}$. **585.** $\dfrac{t(2-t^3)}{1-2t^3}$.

586. $\dfrac{2}{3\sqrt[6]{t}}$. **587.** $\dfrac{t+1}{t(t^2+1)}$. **588.** $\mathrm{tg}\,t$. **589.** $-\dfrac{b}{a}$. **590.** $-\dfrac{b}{a}\,\mathrm{tg}\,t$. **591.** $-\mathrm{tg}\,3t$.

592. $y'_x = \begin{cases} -1 \text{ при } t < 0, \\ 1 \text{ при } t > 0. \end{cases}$ **593.** $-2e^{3t}$. **594.** $\operatorname{tg} t$. **596.** 1. **597.** ∞. **599.** Нет.

600. Да, так как равенство является тождеством. **601.** $\frac{2}{5}$. **602.** $-\frac{b^2x}{a^2y}$.

603. $-\frac{x^2}{y^2}$. **604.** $-\frac{x(3x+2y)}{x^2+2y}$. **605.** $-\sqrt{y/x}$. **606.** $-\sqrt[3]{y/x}$. **607.** $\frac{2y^2}{3(x^2-y^2)+2xy} = \frac{1-y^3}{1+3xy^2+4y^3}$. **608.** $\frac{10}{10-3\cos y}$. **609.** -1. **610.** $\frac{y\cos^2 y}{1-x\cos^2 y}$. **611.** $\frac{y}{x}\,\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}$.

612. $(x+y)^2$. **613.** $y' = \frac{1}{e^y-1} = \frac{1}{x+y-1}$. **614.** $\frac{y}{x} + e^{y/x}$. **615.** $\frac{y}{x-y}$. **616.** $\frac{x+y}{x-y}$.

617. $\frac{cy+x\sqrt{x^2+y^2}}{cx-y\sqrt{x^2+y^2}}$. **618.** $\frac{x\ln y-y}{y\ln x-x}\cdot\frac{y}{x}$. **620.** а) 0; б) $\frac{1}{2}$; в) 0. **622.** 45°; $\operatorname{arctg} 2 \approx 63°26'$. **623.** 45°. **624.** $\operatorname{arctg}\frac{2}{e} \approx 36°21'$. **625.** (0; 20); (1; 15); (−2; −12).

626. (1; −3). **627.** $y = x^2 - x + 1$. **628.** $k = \frac{-1}{11}$. **629.** $\left(\frac{1}{8}; -\frac{1}{16}\right)$. **631.** $y - 5 = 0$; $x + 2 = 0$. **632.** $x - 1 = 0$; $y = 0$. **633.** а) $y = 2x$; $y = -\frac{1}{2}x$; б) $x - 2y - 1 = 0$; $2x + y - 2 = 0$; в) $6x + 2y - \pi = 0$; $2x - 6y + 3\pi = 0$; г) $y = x - 1$; $y = 1 - x$; д) $2x + y - 3 = 0$; $x - 2y + 1 = 0$ для точки (1; 1); $2x - y + 3 = 0$; $x + 2y - 1 = 0$ для точки (−1; 1). **634.** $7x - 10y + 6 = 0$; $10x + 7y - 34 = 0$. **635.** $y = 0$; $(\pi + 4)x + (\pi - 4)y - \frac{\pi^2\sqrt{2}}{4} = 0$. **636.** $5x + 6y - 13 = 0$, $6x - 5y + 21 = 0$.

637. $x + y - 2 = 0$. **638.** В точке (1; 0): $y = 2x - 2$; $y = \frac{1-x}{2}$; в точке (2; 0): $y = -x + 2$; $y = x - 2$; в точке (3; 0): $y = 2x - 6$; $y = \frac{3-x}{2}$. **639.** $14x - 13y + 12 = 0$, $13x + 14y - 41 = 0$. **640.** Уравнение касательной $\frac{x}{2x_0} + \frac{y}{2y_0} = 1$. Следовательно, касательная пересекает ось OX в точке $A(2x_0, 0)$ и ось OY в точке $B(0, 2y_0)$. Находя середину отрезка AB, получим точку (x_0, y_0). **643.** 40°36′. **644.** В точке (0, 0) параболы касаются; в точке (1, 1) — пересекаются под углом $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} \approx 8°8'$. **647.** $S_t = S_n = 2$; $t = n = 2\sqrt{2}$. **648.** $\frac{1}{\ln 2}$.

652. $T = 2a\sin\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $N = 2a\sin\frac{t}{2}$; $S_t = 2a\sin^2\frac{t}{2}\operatorname{tg}\frac{t}{2}$; $S_n = a\sin t$.

653. $\operatorname{arctg}\frac{1}{K}$. **654.** $\frac{\pi}{2} + 2\varphi$. **655.** $S_t = 4\pi^2 a$; $S_n = a$; $t = 2\pi a\sqrt{1+4\pi^2}$;

$n = a\sqrt{1+4\pi^2}$; $\operatorname{tg}\mu = -\varphi_0$. **656.** $S_t = a$; $S_n = \frac{a}{\varphi_0^2}$; $t = \sqrt{a^2+\rho_0^2}$; $n = \frac{\rho_0}{a}\sqrt{a^2+\rho_0^2}$; $\operatorname{tg}\mu = -\varphi_0$. **657.** 3 см/с; −9 см/с. **658.** 15 см/с. **659.** −3/2 м/с. **660.** Уравнение траектории $y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$. Дальность полета равна $\frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}$.

Модуль скорости $\sqrt{v_0^2 - 2v_0 gt\sin\alpha + g^2t^2}$; угловой коэффициент вектора скорости $\frac{v_0\sin\alpha - gt}{v_0\cos\alpha}$. Для определения траектории нужно исключить параметр t из данной системы. Дальность полета — абсцисса точки A (рис. 17). Проекции скорости на оси: $\frac{dx}{dt}$ и $\frac{dy}{dt}$. Модуль скорости $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$; вектор скорости направлен по касательной к траектории. **661.** Убывает со скоростью 0,4. **662.** (9/8, 9/2). **663.** Диагональ растет со скоростью − 3,8 см/с, площадь — со скоростью 40 см^2/с. **664.** Площадь поверхности растет со скоростью 0,2π см^2/с, объем — со скоростью 0,05π м^3/с. **665.** π/3 см/с. **666.** Масса всего стержня составляет 360 г, линейная плотность в точке M равна $5x$ г/см, в точке A равна 0, в точке B есть 60 г/см. **667.** $56x^2 + 210x^4$. **668.** $e^{x^2}(4x^2 + 2)$.

669. $2\cos 2x$. **670.** $2(1 - x^2)/3(1 + x^2)^2$. **671.** $-x/\sqrt{(a^2+x^2)^3}$. **672.** $2\operatorname{arctg} x + \frac{2x}{1+x^2}$. **673.** $\frac{2}{1-x^2} + \frac{2x\arcsin x}{(1-x^2)^{3/2}}$. **674.** $\frac{1}{a}\operatorname{ch}\frac{x}{a}$. **679.** $y''' = 6$. **680.** $f'''(3) = 4320$.

681. $y^{\text{V}} = \frac{24}{(x+1)^5}$. **682.** $y^{\text{VI}} = -64\sin 2x$. **684.** 0; 1; 2; 2. **685.** Скорость $v = 5$; 4,997; 4,7. Ускорение $a = 0$; −0,006; − 0,06. **686.** Закон движения точки M_1 есть $x = a\cos\omega r$; скорость в момент t равна $-a\omega\sin\omega t$; ускорение в момент t: $-a\omega^2\cos\omega t$. Начальная скорость 0; начальное ускорение равно $-a\omega^2$; скорость при $x = 0$ равна $\mp a\omega$; ускорение при $x = 0$ равно 0. Максимальное значение скорости $a\omega$; максимальное значение ускорения $a\omega^2$. **687.** $y^{(n)} = n!a^n$.

688. а) $n!(1 - x)^{(n+1)}$; б) $(-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n\cdot x^{n-1/2}}$. **689.** а) $\sin(x + n(\pi/2))$;

б) $2^n\cos(2x + n(\pi/2))$; в) $(-3)^n e^{3x}$; г) $(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$; д) $\frac{(-1)^{n+1}n!}{(1+x)^{n+1}}$;

е) $\frac{2n!}{(1-x)^{n+1}}$; ж) $2^{n-1}\sin\left[2x + (n-1)\frac{\pi}{2}\right]$; з) $\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!\,a^n}{(ax+b)^n}$.

690. а) $x\cdot e^x + ne^x$; б) $2^{n-1}e^{-2x}\left[2(-1)^n x^2 + 2n(-1)^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}(-1)^{n-2}\right]$;

в) $(1-x^2)\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right) - 2nx\cos\left(x+\frac{(n-1)\pi}{2}\right) - n(n-1)\cos\left(x+\frac{(n-2)\pi}{2}\right)$;

г) $\frac{(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 3\ldots(2n-3)}{2^n x^{(2n+1)/2}}\,[x-(2n-1)]$; д) $\frac{(-1)^n 6(n-4)!}{x^{n-3}}$ при $n \geqslant 4$.

691. $y^{(n)}(0) = (n-1)!$ **692.** а) $9t^3$; б) $2t^2+2$; в) $-\sqrt{1-t^2}$. **693.** а) $\frac{-1}{a\sin^3 t}$;

б) $\frac{1}{3a\cos^4 t\,\sin t}$; в) $\frac{-1}{4a\sin^4(t/2)}$; г) $\frac{-1}{at\sin^3 t}$. **694.** а) 0; б) $2e^{3at}$.

695. а) $(1+t^2)(1+3t^2)$; б) $\frac{t(1+t)}{(1-t)^3}$. **696.** $\frac{-2e^{-t}}{(\cos t+\sin t)^3}$. **697.** Имеем $y = e^x - 1$ и $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0} = 1$. Обычное правило дифференцирования тут неприменимо.

699. $(3\operatorname{ctg}^4 t)/\sin t$. **700.** $\frac{4e^{2t}(2\sin t-\cos t)}{(\sin t+\cos t)^5}$. **701.** $-6e^{3t}(1+3t+t^2)$. **702.** $m^n t^m$.

703. $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{-f''(x)}{[f'(x)]^3}$; $\frac{d^3x}{dy^3} = \frac{3[f''(x)]^2 - f'(x)f'''(x)]}{[f'(x)]^5}$. **705.** $-\frac{p^2}{y^3}$. **706.** $-\frac{b^4}{a^2y^3}$.

707. $-\frac{2y^2+2}{y^5}$. **708.** $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y}{(1-y)^3}$; $\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{1}{y^2}$. **709.** 111/256. **710.** $-1/16$.

711. а) 1/3; б) $-3a^2x/y^5$. **712.** $\Delta y = 0{,}009001$; $dy = 0{,}009$. **713.** $d(1-x^3) = 1$ при $x = 1$ и $\Delta x = -1/3$. **714.** $\Delta S = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$; $dS = 2x\Delta x$. **717.** При $x = 0$. **718.** Нет. **719.** $dy = -\pi/12 \approx -0{,}0436$. **720.** $dy = 1/2700 \approx 0{,}00037$. **721.** $dy = \pi/45 \approx 0{,}0698$. **722.** $\frac{-m\,dx}{x^{m+1}}$. **723.** $\frac{dx}{(1-x)^2}$. **724.** $\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. **725.** $\frac{a\,dx}{x^2+a^2}$.

726. $-2xe^{-x^2}\,dx$. **727.** $\ln x\,dx$. **728.** $\frac{-2dx}{1-x^2}$. **729.** $-\frac{1+\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,d\varphi$. **730.** $-\frac{e^t\,dx}{1+e^{2t}}$.

732. $-\frac{10x+8y}{7x+5y}\,dx$. **733.** $\frac{-ye^{-x/y}dx}{y^2-xe^{-x/y}} = \frac{y}{x-y}\,dx$. **734.** $\frac{x+y}{x-y}\,dx$. **735.** $\frac{12}{11}\,dx$.

737. а) 0,485; б) 0,965; в) 1,2; г) $-0{,}045$; д) $\pi/4 + 0{,}025 \approx 0{,}81$. **738.** 565 см^3. **739.** $\sqrt{5} \approx 2{,}25$; $\sqrt{17} \approx 4{,}13$; $\sqrt{70} \approx 8{,}38$; $\sqrt{640} \approx 25{,}3$. **740.** $\sqrt[3]{10} \approx 2{,}16$; $\sqrt[3]{70} \approx 4{,}13$; $\sqrt[3]{200} \approx 5{,}85$. **741.** а) 5; б) 1,1; в) 0,93; г) 0,9. **742.** 1,0019.

743. 0,57. **744.** 2,03. **748.** $\frac{-(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$. **749.** $\frac{-x(dx)^2}{(1-x^2)^{3/2}}$. **750.** $\left(-\sin x\ln x + \frac{2\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}\right)\cdot(dx)^2$. **751.** $\frac{2\ln x-3}{x^3}\,(dx)^2$. **752.** $-e^{-x}(x^2-6x+6)(dx)^3$.

753. $\frac{384(dx)^4}{(2-x)^5}$. **754.** $3\cdot 2^n\sin\left(2x+5+\frac{n\pi}{2}\right)(dx)^n$. **755.** $e^{x\cos\alpha}\sin(x\sin\alpha + n\alpha)(dx)^n$. **757.** Нет, так как $f'(2)$ не существует. **758.** Нет. Точка $x = \pi/2$ — точка разрыва функции. **762.** $\chi = 0$. **763.** (2, 4). **765.** а) $\xi = 14/9$; б) $\xi = \pi/4$.

768. $\ln x = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{(x-1)^3}{3\xi^3}$, где $\xi = 1 + \theta(x-1)$, $0 < \theta < 1$.

769. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\cos\xi_1$, где $\xi_1 = \theta_1 x$, $0 < \theta_1 < 1$; $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\cos\xi_2$, где $\xi_2 = \theta_2 x$, $0 < \theta_2 < 1$. **770.** $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!}e^{\xi}$, где $\xi = \theta x$, $0 < \theta < 1$. **772.** Погрешность: а) $\frac{1}{16}\,\frac{x^3}{(1+\xi)^{5/2}}$; б) $\frac{5}{81}\,\frac{x^3}{(1+\xi)^{8/3}}$; в обоих случаях $\xi = \theta x$; $0 < \theta < 1$. **773.** Погрешность меньше $\frac{3}{5!} = \frac{1}{40}$.

775. Решение. Имеем $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} = (1+(x/a))^{1/2}(1-(x/a))^{-1/2}$. Разлагая оба множителя по степеням x, получим: $(1+(x/a))^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} - \frac{1}{8}\frac{x^2}{a^2}$; $\left(1-\frac{x}{a}\right)^{-1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{x}{a} + \frac{3}{8}\frac{x^2}{a^2}$. Перемножая, будем иметь: $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} \approx 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2}$. Далее, разлагая $e^{x/a}$ по степеням x/a, получаем тот же многочлен $e^{x/a} \approx 1 + \frac{x}{a} + \frac{x^2}{2a^2}$.

777. $-1/3$. **778.** ∞. **779.** 1. **780.** 3. **781.** 1/2. **782.** 5. **783.** ∞. **784.** 0. **785.** $\pi^2/2$. **786.** 1. **788.** $2/\pi$. **789.** 1. **790.** 0. **791.** a. **792.** ∞ для $n > 1$; a для $n = 1$; 0 для $n < 1$. **793.** 0. **795.** 1/5. **796.** 1/12. **797.** -1. **799.** 1. **800.** e^3. **801.** 1. **802.** 1. **803.** 1. **804.** 1/e. **805.** 1/e. **806.** 1/e. **807.** 1. **808.** 1. **810.** Надо найти $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{S}{2/3\,bh}$, где $S = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha)$ — точное выражение площади сегмента (R — радиус соответствующей окружности).

Глава III

811. $(-\infty, -2)$ — возрастает; $(-2, \infty)$ — убывает. **812.** $(-\infty, 2)$ — убывает; $(2, \infty)$ — возрастает. **813.** $(-\infty; \infty)$ — возрастает. **814.** $(-\infty, 0)$ и $(2, \infty)$ — возрастает; (0, 2) — убывает. **815.** $(-\infty, 2)$ и $(2, \infty)$ — убывает. **816.** $(-\infty, 1)$ — возрастает; $(1, \infty)$ — убывает. **817.** $(-\infty, -2)$, $(-2, 8)$ и $(8, \infty)$ — убывает.

818. (0, 1) — убывает; (1; ∞) — возрастает. **819.** ($-\infty$, -1) и (1, ∞) — возрастает; (-1, 1) — убывает. **820.** ($-\infty$; ∞) — возрастает. **821.** (0, 1/e) — убывает; (1/e, ∞) — возрастает. **822.** (-2, 0) — возрастает. **823.** ($-\infty$, 2) — убывает. **824.** ($-\infty$, a) и (a, ∞) — убывает. **825.** ($-\infty$, 0) и (0, 1) — убывает; (1, ∞) — возрастает. **827.** $y_{\max} = \dfrac{9}{4}$ при $x = \dfrac{1}{2}$. **828.** Экстремума нет. **830.** $y_{\min} = 0$ при $x = 0$; $y_{\min} = 0$ при $x = 12$; $y_{\max} = 1296$ при $x = 6$. **831.** $y_{\min} \approx -0{,}76$ при $x \approx 0{,}23$; $y_{\max} \approx 0$ при $x = 1$; $y_{\min} \approx -0{,}05$ при $x = 1{,}43$. При $x = 2$ экстремума нет. **832.** Экстремума нет. **833.** $y_{\max} = -2$ при $x = 0$; $y_{\min} = 2$ при $x = 2$. **834.** $y_{\max} = \dfrac{9}{16}$ при $x = 3{,}2$. **835.** $y_{\max} = -3\sqrt{3}$ при $x = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; $y_{\min} = 3\sqrt{3}$ при $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. **836.** $y_{\max} = \sqrt{2}$ при $x = 0$. **837.** $y_{\max} = -\sqrt{3}$ при $x = -2\sqrt{3}$; $y_{\min} = \sqrt{3}$ при $x = 2\sqrt{3}$. **838.** $y_{\min} = 0$ при $x = \pm 1$; $y_{\max} = 1$ при $x = 0$. **839.** $y_{\min} = -\dfrac{3}{2\sqrt{3}}$ при $x = (k - \dfrac{1}{6})^{\pi}$; $y_{\max} = 32\sqrt{3}$ при $x = \left(k + \dfrac{1}{6}\right)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **840.** $y_{\max} = 5$ при $x = 12k\pi$; $y_{\max} = 5\cos\dfrac{2\pi}{5}$ при $x = 12\left(k \pm \dfrac{2}{5}\right)\pi$; $y_{\min} = -5\cos\dfrac{2\pi}{5}$ при $x = 12\left(k \pm \dfrac{1}{5}\right)\pi$; $y_{\min} = 1$ при $x = 6(2k + 1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **841.** $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. **842.** $y_{\min} = -1/e$ при $x = 1/e$. **843.** $y_{\max} = 4/e^2$ при $x = 1/e^2$; $y_{\min} = 0$ при $x = 1$. **844.** $y_{\min} = 1$ при $x = 0$. **845.** $y_{\min} = -1/e$ при $x = -1$. **846.** $y_{\min} = 0$ при $x = 0$; $y_{\max} = 4/e^2$ при $x = 2$. **847.** $y_{\min} = e$ при $x = 1$. **848.** Экстремума нет. **849.** Наименьшее значение $m = -1/2$ при $x = -1$; наибольшее значение $M = 1/2$ при $x = 1$. **850.** $m = 0$ при $x = 0$ и $x = 10$; $M = 5$ при $x = 5$. **851.** $m = 1/2$ при $x = (2k + 1)\dfrac{\pi}{4}$; $M = 1$ при $x = \dfrac{k\pi}{2}$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **852.** $m = 0$ при $x = 1$; $M = \pi$ при $x = -1$. **853.** $m = -1$ при $x = -1$; $M = 27$ при $x = 3$. **854.** а) $m = -6$ при $x = 1$; $M = 266$ при $x = 5$; б) $m = -1579$ при $x = -10$; $M = 3745$ при $x = 12$. **856.** $p = -2$, $q = 4$. **861.** Каждое из слагаемых должно быть равно $\dfrac{a}{2}$. **862.** Прямоугольник должен быть квадратом со стороной $l/4$. **863.** Равнобедренный. **864.** Сторона площадки, примыкающая к стене, должна быть вдвое больше другой стороны. **865.** Сторона вырезаемого квадрата должна быть равна $a/6$. **866.** Высота должна быть вдвое меньше стороны основания. **867.** Тот, высота которого равна диаметру основания. **868.** Высота цилиндра $2R/\sqrt{3}$, радиус его основания $R\sqrt{2/3}$, где R — радиус данного шара. **869.** Высота цилиндра $R\sqrt{2}$, где R — радиус данного шара. **870.** Высота конуса $\dfrac{4}{3}R$, где R — радиус

данного шара. **871.** Высота конуса $\dfrac{4}{3}R$, где R — радиус данного шара. **872.** Радиус основания конуса $\dfrac{3}{2}r$, где r — радиус основания данного цилиндра. **873.** Тот, высота которого вдвое больше диаметра шара. **874.** $\varphi = \pi$, т. е. сечение желоба — полукруг. **875.** Центральный угол сектора $2\pi\sqrt{2/3}$. **876.** Высота цилиндрической части должна быть равна нулю, т. е. сосуд должен иметь форму полусферы. **877.** $n = (l^{2/3} - d^{2/3})^{3/2}$. **878.** $\dfrac{x}{2x_0} + \dfrac{y}{2y_0} = 1$. **879.** Стороны прямоугольника $a\sqrt{2}$ и $b\sqrt{2}$, где a и b — соответствующие полуоси эллипса. **880.** Координаты вершин прямоугольника, лежащих на параболе $\left(\dfrac{2}{3}a, \pm 2\sqrt{\dfrac{pa}{3}}\right)$. **881.** $\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4}\right)$. **882.** Угол равен наибольшей из величин $\arccos\dfrac{1}{k}$ и $\operatorname{arctg}\dfrac{h}{d}$. **883.** $AM = a\dfrac{\sqrt[3]{I_1}}{\sqrt[3]{I_1} + \sqrt[3]{I_2}}$. **884.** $\dfrac{r}{\sqrt{2}}$. **885.** а) $x = y = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$; б) $x = \dfrac{d}{\sqrt{3}}$; $y = d\sqrt{2/3}$. **886.** $x = \sqrt{2aM/q}$; $P_{\min} = g\sqrt{2aqM}$ (g — ускорение свободного падения). **887.** $\sqrt{Mm}$. При вполне упругом ударе двух шаров скорость, которую приобретает неподвижный шар массы m_1 после удара о него шара массы m_2, двигавшегося со скоростью v, равна $\dfrac{2m_2 v}{m_1 + m_2}$. **888.** $n = \sqrt{NR/r}$ (если это число не целое или не является делителем числа N, берут ближайшее к найденному значению целое число, являющееся делителем числа N). Так как внутреннее сопротивление батареи равно $\dfrac{n^2 r}{N}$, то физический смысл найденного решения таков: внутреннее сопротивление батареи должно быть возможно ближе к внешнему сопротивлению. **889.** $y = \dfrac{2}{3}h$. **891.** ($-\infty$, 2) — вогнут вниз, (2, ∞) — вогнут вверх; $M(2; 12)$ — точка перегиба. **892.** ($-\infty$, ∞) — вогнут вверх. **893.** ($-\infty$; -3) — вогнут вниз, (-3, ∞) — вогнут вверх; точек перегиба нет. **894.** ($-\infty$, -6) и (0, 6) — вогнут вверх, (-6, 0) и (6, ∞) — вогнут вниз; точки перегиба $M_1(-6; -9/2)$, $O(0; 0)$, $M_2(6; 9/2)$. **895.** ($-\infty$, $-\sqrt{3}$) и (0, $\sqrt{3}$) — вогнут вверх; ($-\sqrt{3}$; 0) и ($\sqrt{3}$; ∞) — вогнут вниз; точки перегиба $M_{1,2}(\pm\sqrt{3}; 0)$ и $O(0; 0)$. **896.** $\left((4k + 1)\dfrac{\pi}{2}, (4k + 3)\dfrac{\pi}{2}\right)$ — вогнут вверх, $\left((4k + 3)\dfrac{\pi}{2}, (4k + 5)\dfrac{\pi}{2}\right)$ — вогнут вниз ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); точки перегиба — $\left((2k + 1)\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$. **897.** ($2k\pi$, $(2k + 1)\pi$) — вогнут вверх, ($(2k - 1)\pi$, $2k\pi$) — вогнут вниз ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); абсциссы точек перегиба равны $x = k\pi$. **898.** (0, $1/\sqrt{e^3}$) — вогнут вниз, ($1/\sqrt{e^3}$, ∞) —

вогнут вверх, $M(1/\sqrt{e^3};\ -3/2e^3)$ — точка перегиба. **899.** $(-\infty,\ 0)$ — вогнут вверх, $(0,\ x)$ — вогнут вниз; $O(0,\ 0)$ — точка перегиба. **900.** $(\infty,\ \ 3)$ и $(-1,\ \infty)$ — вогнут вверх, $(-3,\ -1)$ — вонут вниз; точка перегиба $M_1(-3;\ 10/e^3)$ и $M_2(-1;\ 2/e)$. **901.** $x = 2$; $y = 0$. **902.** $x = 1$, $x = 3$; $y = 0$. **903.** $x = \pm 2$; $y = 1$. **904.** $y = x$. **905.** $y = -x$ (левая), $y = x$ (правая). **906.** $y = -1$ (левая), $y = 1$ (правая). **907.** $x = \pm 1$, $y = -x$ (левая), $y = x$ (правая). **908.** $y = -2$ (левая), $y = 2x - 2$ (правая). **909.** $y = 2$. **910.** $x = 0$, $y = 1$(левая), $y = 0$ (правая). **911.** $x = 0$, $y = 1$. **912.** $y = 0$. **913.** $x = -1$. **914.** $y = x - \pi$ (левая); $y = x + \pi$ (правая). **915.** $y = a$. **916.** $y_{max} = 0$ при $x = 0$, $y_{min} = -4$ при $x = 2$; точка перегиба $M_1(1;\ -2)$. **917.** $y_{max} = 1$ при $x = \pm\sqrt{3}$; $y_{min} = 0$ при $x = 0$; точки перегиба $M_{1,\,2}\left(\pm 1;\ \frac{5}{9}\right)$. **918.** $y_{max} = 4$ при $x = -1$; $y_{min} = 0$ при $x = 1$; точка перегиба $M_1(0;\ 2)$. **919.** $y_{max} = 8$ при $x = -2$; $y_{min} = 0$ при $x = 2$; точка перегиба $M(0;\ 4)$. **920.** $y_{min} = -1$ при $x = 0$; точки перегиба $M_{1,\,2}(\pm\sqrt{5};\ 0)$ и $M_{3,\,4}\left(\pm 1;\ \frac{64}{125}\right)$. **921.** $y_{max} = -2$ при $x = 0$; $y_{min} = 2$ при $x = 2$; асимптоты $x = 1$, $y = x - 1$. **922.** Точки перегиба $M_{1,\,2}(\pm 1;\ \pm 2)$; асимптота $x = 0$. **923.** $y_{max} = -4$ при $x = -1$; $y_{min} = 4$ при $x = 1$; асимптота $x = 0$. **924.** $y_{min} = 3$ при $x = 1$; точка перегиба — $M(-\sqrt[3]{2};\ 0)$; асимптота $x = 0$. **925.** $y_{max} = 1/3$ при $x = 0$; точки перегиба $M_{1,2}\left(\pm 1;\ \frac{1}{4}\right)$; асимптота $y = 0$. **926.** $y_{max} = -2$ при $x = 0$; асимптоты $x = \pm 2$ и $y = 0$. **927.** $y_{min} = -1$ при $x = -2$; $y_{max} = 1$ при $x = 2$; точки перегиба — $O(0;\ 0)$ и $M_{1,\,2}\left(\pm 2\sqrt{3};\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; асимптота $y = 0$. **928.** $y_{max} = 1$ при $x = 4$; точка перегиба — $M\left(5;\ \frac{8}{9}\right)$; асимптоты $x = 2$ и $y = 0$. **929.** Точка перегиба — $O(0;\ 0)$; асимптоты $x = \pm 2$ и $y = 0$. **930.** $y_{max} = -27/16$ при $x = 8/3$; асимптоты $x = 0$, $x = 4$ и $y = 0$. **931.** $y_{max} = -4$ при $x = -1$; $y_{min} = 4$ при $x = 1$; асимптоты $x = 0$ и $y = 3x$. **932.** $A(0;\ 2)$ и $B(4;\ 2)$ — концевые точки $y_{max} = 2\sqrt{2}$ при $x = 2$. **933.** $A(-8;\ -4)$ и $B(8;\ 4)$ — концевые точки. Точки перегиба $O(0;\ 0)$. **934.** Концевая точка $A(-3;\ 0)$; $y_{min} = -2$ при $x = -2$. **935.** Концевые точки $A(-\sqrt{3};\ 0)$, $O(0;\ 0)$ и $B(\sqrt{3};\ 0)$; $y_{max} = \sqrt{2}$ при $x = -1$; точка перегиба — $M\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{3}};\ \sqrt{6\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}}}}\right)$. **936.** $y_{max} = 1$ при $x = 0$; точки перегиба — $M_{1,2}(\pm 1;\ 0)$. **937.** Точки перегиба — $M_1(0;\ 1)$ и $M_2(1;\ 0)$; асимптота $y = -x$. **938.** $y_{max} = 0$ при $x = -1$; $y_{min} = -1$ (при $x = 0$). **939.** $y_{max} = 2$ при $x = 0$; точки перегиба $M_{1,\,2}(\pm 1;\ \sqrt[3]{2})$; асимптота $y = 0$. **940.** $y_{min} = -4$ при $x = -4$; $y_{max} = 4$ при $x = 4$; точка перегиба — $O(0;\ 0)$;

асимптота $y = 0$. **941.** $y_{min} = \sqrt[3]{4}$ при $x = 2$, $y_{min} = \sqrt[3]{4}$ при $x = 4$; $y_{max} = 2$ при $x = 3$. **942.** $y_{min} = 2$ при $x = 0$; асимптоты $x = \pm 2$. **943.** Асимптоты $x = \pm 2$ и $y = 0$. **944.** $y_{min} = \sqrt{3}\,/\sqrt[3]{2}$ при $x = \sqrt{3}$; $y_{max} = -\sqrt{3}\,/\sqrt[3]{2}$ при $x = -\sqrt{3}$; точки перегиба — $M_1\left(-3;\ -\frac{3}{2}\right)$, $O(0;\ 0)$ и $M_2(3;\ 3/2)$; асимптота $x = \pm 1$. **945.** $y_{min} = 3/\sqrt[3]{2}$ при $x = 6$; точка перегиба — $M(12;\ 12/\sqrt[3]{100})$; асимптота $x = 2$. **946.** $y_{max} = 1/e$ при $x = 1$; точка перегиба — $M(2;\ 2/e^2)$; асимптота $y = 0$. **947.** Точки перегиба — $M_1\left(-3a;\ \frac{10a}{e^3}\right)$ и $M_2\left(-a;\ \frac{2a}{e}\right)$; асимптота $y = 0$. **948.** $y_{max} = e^2$ при $x = 4$; точки перегиба — $M_{1,\,2}\left(\frac{8 \pm 2\sqrt{2}}{2};\ e^{3/2}\right)$; асимптота $y = 0$. **949.** $y_{max} = 2$ при $x = 0$; точки перегиба — $M_{1,\,2}(\pm 1;\ 3/e)$. **950.** $y_{max} = 1$ при $x = \pm 1$; $y_{min} = 0$ при $x = 0$. **951.** $y_{max} = 0{,}74$ при $x = e^2 \approx 7{,}39$; точка перегиба — $M(e^{8/3} \approx 14{,}39;\ 0{,}70)$; асимптоты $x = 0$ и $y = 0$. **952.** $y_{min} = -\frac{a^2}{4e}$ при $x = \frac{a}{\sqrt{2}}$; точка перегиба — $M\left(\frac{a}{\sqrt{e^3}};\ -\frac{3a^2}{4e^3}\right)$. **953.** $y_{min} = c$ при $x = e$; точка перегиба — $M(e^2;\ e^2/2)$; асимптота $x = 1$; $y \to 0$ при $x \to 0$. **954.** $y_{max} = 4/e^2 \approx 0{,}54$ при $x = (1/e^2) - 1 \approx -0{,}86$; $y_{min} = 0$ при $x = 0$; точка перегиба — $M((1/e) - 1 \approx -0{,}63;\ 1/e \approx 0{,}37)$; $y \to 0$ при $x \to 1 + 0$ (предельная концевая точка). **955.** $y_{min} = 1$ при $x = \pm\sqrt{2}$; точки перегиба $M_{1,\,2}(\pm 1{,}89;\ 1{,}33)$; асимптоты $x = \pm 1$. **956.** Асимптоты $xy = 0$. **957.** Асимптоты $y = 0$ (при $x \to +\infty$) и $y = -x$ (при $x \to -\infty$). **958.** Асимптоты $x = -1/e$; $x = 0$; $y = 1$; функция не определена на отрезке $[-1/c,\ 0]$. **959.** Периодическая функция с периодом 2π. $y_{min} = -\sqrt{2}$ при $x = 5\pi/4 + 2k\pi$; $y_{max} = \sqrt{2}$ при $x = \pi/4 + 2k\pi$ ($k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$); точки перегиба — $M_k(3\pi/4 + 2k\pi;\ 0)$. **960.** Периодическая функция с периодом 2π. $y_{min} = -3\sqrt{3}\,/4$ при $x = 5\pi/3 + 2k\pi$; $y_{max} = 3\sqrt{3}\,/4$ при $x = \pi/3 + 2k\pi$ ($k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$); точки перегиба — $M_k(k\pi;\ 0)$ и $N_k(\arccos(-1/4) + 2k\pi;\ 3\sqrt{15}\,/16)$. **961.** Периодическая функция с периодом 2π. На отрезке $[-\pi,\ \pi]$ $y_{max} = 1/4$ при $x = \pm\frac{\pi}{3}$; $y_{min} = -2$ при $x = \pm\pi$; $y_{min} = 0$ при $x = 0$; точки перегиба — $M_{1,\,2}(\pm 0{,}57;\ 0{,}13)$ и $M_{3,\,4}(\pm 2{,}20;\ -0{,}95)$. **962.** Нечетная периодическая функция с периодом 2π. На отрезке $[0;\ 2\pi]$: $y_{max} = 1$ при $x = 0$; $y_{min} = 0{,}71$ при $x = \pi/4$; $y_{max} = 1$ при $x = \pi/2$; $y_{min} = -1$ при $x = \pi$; $y_{max} = -0{,}71$ при $x = \frac{5}{4}\pi$;

$y_{\min} = -1$ при $x = \frac{3}{2}\pi$; $y_{\max} = 1$ при $x = 2\pi$; точки перегиба — $M_1(0,36; 0,86)$; $M_2(1,21; 0,86)$; $M_3(2,36; 0)$; $M_4(3,51; -0,86)$; $M_5(4,35; -0,86)$; $M_6(5,50; 0)$. **963.** Периодическая функция с периодом 2π. $y_{\min} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$; $y_{\max} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ при $x = -\frac{3}{4}\pi + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); асимптоты $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$. **964.** Периодическая функция с периодом π; точки перегиба — $M_k\left(\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); асимптоты $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$. **965.** Четная периодическая функция с периодом 2π. На отрезке $[0, \pi]$: $y_{\max} = \frac{4}{3\sqrt{3}}$ при $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$; $y_{\max} = 0$ при $x = \pi$; $y_{\min} = -\frac{4}{3\sqrt{3}}$ при $x = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $y_{\min} = 0$ при $x = 0$; точки перегиба — $M_1(\pi/2; 0)$; $M_2\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3};\ \frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$; $M_3\left(\pi - \arcsin\frac{\sqrt{2}}{3};\ -\frac{4\sqrt{7}}{27}\right)$. **966.** Четная периодическая функция с периодом 2π. На отрезке $[0; \pi]$: $y_{\max} = 1$ при $x = 0$; $y_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{6}}$ при $x = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$; $y_{\min} = -\frac{2}{3\sqrt{6}}$ при $x = \arccos\frac{1}{\sqrt{6}}$; $y_{\min} = -1$ при $x = \pi$; точки перегиба — $M_1\left(\frac{\pi}{2};\ 0\right)$; $M_2\left(\arccos\sqrt{13/18};\ \frac{4}{9}\sqrt{13/18}\right)$; $M_3\left(\arccos\left(-\sqrt{13/18}\right);\ -\frac{4}{9}\sqrt{13/18}\right)$. **967.** Функция нечетная. Точки перегиба — $M_k(k\pi; k\pi)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **968.** Функция четная. Концевые точки — $A_{1,2}(\pm 2,83; -1,57)$; $y_{\max} = 1,57$ при $x = 0$ (точка возврата); точки перегиба — $M_{1,2}(\pm 1,54; -0,34)$. **969.** Функция нечетная. Область существования $-1 < x < 1$. Точка перегиба $O(0; 0)$; асимптоты $x = \pm 1$. **970.** Функция нечетная. $y_{\max} = \pi/2 - 1 + 2k\pi$ при $x = \pi/4 + k\pi$; $y_{\min} = 3\pi/2 + 1 + 2k\pi$ при $x = 3\pi/4 + k\pi$; точки перегиба — $M_k(k\pi, 2k\pi)$; асимптоты $x = (2k+1)/2\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). **971.** Функция четная; $y_{\min} = 0$ при $x = 0$; асимптоты $y = -(\pi/2x) - 1$ (при $x \to -\infty$) и $y = (\pi/2x) - 1$ (при $x \to +\infty$). **972.** $y_{\min} = 0$ при $x = 0$ (угловая точка); асимптота $y = 1$. **973.** $y_{\min} = 1 + \pi/2$ при $x = 1$; $y_{\max} = 3\pi/2 - 1$ при $x = -1$; точка перегиба (центр симметрии) $(0; \pi)$; асимптоты $y = x + 2\pi$ (левая) и $y = x$ (правая). **974.** $y_{\min} \approx 1,285$ при $x = 1$; $y_{\max} \approx 1,856$ при $x = -1$; точка перегиба — $M(0, \pi/2)$; асимптоты $y = x/2 + \pi$ (при $x \to -\infty$) и $y = x/2$ (при $x \to +\infty$). **975.** Асимптоты $x = 0$ и $y = x - \ln 2$. **976.** $y_{\min} \approx 1,32$ при $x = 1$; асимптота $x = 0$. **977.** Периодическая функция с периодом 2π. $y_{\min} = 1/e$ при $x = 3\pi/2 + 2k\pi$; $y_{\max} = e$ при $x = \pi/2 + 2k\pi$

($k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$); точки перегиба — $M_k\left(\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + 2k\pi;\ e^{(\sqrt{5}-1)/2}\right)$ и $N_k\left(-\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2} + (2k+1)\pi;\ e^{(\sqrt{5}-1)/2}\right)$. **978.** Концевые точки $A(0; 1)$ и $B(1; 4,81)$. Точка перегиба — $M(0,28; 1,74)$. **979.** Точка перегиба — $M(0,5; 1,59)$; асимптоты $y \approx 0,21$ (при $x \to \infty$) и $y \approx 4,81$ (при $x \to +\infty$). **980.** Область определения функции — совокупность интервалов $(2k\pi, 2k\pi + \pi)$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Функция периодическая с периодом 2π; $y_{\max} = 0$ при $x = \pi/2 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); асимптоты $x = k\pi$. **981.** Область определения — совокупность интервалов $((2k - 1/2)\pi, (2k + 1/2)\pi)$, где k — целое число. Функция периодическая с периодом 2π. Точки перегиба — $M_k(2k\pi; 0)$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); асимптоты $x = \pm\pi/2 + 2k\pi$. **982.** Область определения $x > 0$; функция монотонно возрастающая; асимптота $x = 0$. **983.** Область определения $|x - 2k\pi| < \pi/2$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Функция периодическая с периодом 2π; $y_{\min} = 1$ при $x = 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); асимптоты $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. **984.** Асимптота $y \approx 1,57$; $y \to -\pi/2$ при $x \to 0$ (предельная концевая точка). **985.** Концевые точки — $A_{1,2}(\pm 1,31; 1,57)$; $y_{\min} = 0$ при $x = 0$. **986.** $y_{\min} = (1/e)^{1/e} \approx 0,69$ при $x = 1/e \approx 0,37$; $y \to 1$ при $x \to +0$. **987.** Предельная концевая точка — $A(+0; 0)$; $y_{\max} = e^{1/e} \approx 1,44$ при $x = e \approx 2,72$; асимптота $y = 1$; точки перегиба — $M_1(0,58; 0,12)$ и $M_2(4,35; 1,40)$. **988.** $x_{\min} = -1$ при $t = 1$ ($y = 3$); $y_{\min} = -1$ при $t = -1$ ($x = 3$). **989.** Для получения графика достаточно изменять t в пределах от 0 до 2π; $x_{\min} = -a$ при $t = \pi$ ($y = 0$); $x_{\max} = a$ при $t = 0$ ($y = 0$); $y_{\min} = -a$ (точка возврата) при $t = +3\pi/2$ ($x = 0$); $y_{\max} = +a$ (точка возврата) при $t = \pi/2$ ($x = 0$); точка перегиба при $t = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$ ($x = \pm a/2\sqrt{2}$, $y = \pm a/\sqrt{2}$). **990.** $x_{\min} = -1/e$ при $t = -1$ ($y = e$); $y_{\max} = 1/e$ при $t = 1$ ($x = e$); точки перегиба $(-\sqrt{2}/e^{\sqrt{2}}; -\sqrt{2}e^{\sqrt{2}})$ при $t = -\sqrt{2}$ и $(\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}; \sqrt{2}/e^{\sqrt{2}})$ при $t = \sqrt{2}$; асимптоты $x = 0$ и $y = 0$. **991.** $x_{\min} = 1$ и $y_{\min} = 1$ при $t = 0$ (точка возврата); асимптота $y = 2x$ при $t \to +\infty$. **992.** $y_{\min} = 0$ при $t = 0$. **993.** $ds = \frac{a}{y}\,dx$; $\cos\alpha = y/a$; $\sin\alpha = -x/a$. **994.** $ds = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{a^4 - c^2x^2}{a^2 - x^2}}\,dx$; $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{a^2 - x^2}}{\sqrt{a^4 - c^2x^2}}$; $\sin\alpha = -\frac{bx}{\sqrt{a^2 - c^2x^2}}$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. **995.** $ds = (1/y)\sqrt{p^2 + y^2}\,dx$; $\cos\alpha = y\big/\sqrt{p^2 + y^2}$; $\sin\alpha = p\big/\sqrt{p^2 + y^2}$. **996.** $ds = \sqrt[3]{x/a}\,dx$; $\cos\alpha = \sqrt[3]{x/a}$; $\sin\alpha = -\sqrt[3]{y/a}$. **997.** $ds = \mathrm{ch}\left(\mathrm{ch}\frac{x}{a}\right)dx$; $\cos\alpha = 1\Big/\left(\mathrm{ch}\frac{x}{a}\right)$; $\sin\alpha = \mathrm{th}\frac{x}{a}$. **998.** $ds = 2a\sin\frac{t}{2}\,dt$; $\cos\alpha = \sin\frac{t}{2}$; $\sin\alpha = \cos\frac{t}{2}$. **999.** $ds = 3a\sin t\cos t\,dt$; $\cos\alpha = -\cos t$; $\sin\alpha = \sin t$. **1000.** $ds = a\sqrt{1 + \varphi^2}\,d\varphi$;

$\cos\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$. **1001.** $ds = \dfrac{a}{\varphi^2}\sqrt{1+\varphi^2}\,d\varphi$; $\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{1+\varphi^2}}$. **1002.** $ds = \dfrac{a}{\cos^3\varphi/2}\,d\varphi$; $\sin\beta = \cos\dfrac{\varphi}{2}$. **1003.** $ds = a\cos\dfrac{\varphi}{2}\,d\varphi$; $\sin\beta = \cos\dfrac{\varphi}{2}$. **1004.** $ds = r\sqrt{1+(\ln a)^2}\,d\varphi$; $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\ln a)^2}}$. **1005.** $ds = \dfrac{a^2}{r d\varphi}$; $\sin\beta = \cos 2\varphi$.

1006. $K = 36$. **1007.** $K = \dfrac{1}{3\sqrt{2}}$. **1008.** $K_A = a/b^2$; $K_B = b/a^2$. **1009.** $K = 6/(13\sqrt{13})$.

1010. $K = 3(a\sqrt{2})$ в обеих вершинах. **1011.** $(9/8;\ 3)$ и $(9/8;\ -3)$. **1012.** $(-\ln 2/2;\ \sqrt{2}/2)$. **1013.** $R = \left|\dfrac{(1+9x^4)^{3/2}}{6x}\right|$. **1014.** $R = \dfrac{(b^4x^2+a^4y^2)^{3/2}}{a^4b^4}$. **1015.** $R = \dfrac{(y^2+1)^2}{4y}$.

1016. $R = \left|\dfrac{3}{2}a\sin 2t\right|$. **1017.** $R = |at|$. **1018.** $R = |r\sqrt{1+k^2}|$. **1019.** $R = \left|\dfrac{4}{3}a\cos\dfrac{\varphi}{2}\right|$.

1020. $R_{\text{наим}} = |p|$. **1022.** $(2;\ 2)$. **1023.** $\left(-\dfrac{11}{2}a;\ \dfrac{16}{3}a\right)$. **1024.** $(x-3)^2 + \left(y - \dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

1025. $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$. **1026.** $pY^2 = \dfrac{8}{27}(X-p)^3$ (полукубическая парабола).

1027. $(aX)^{2/3} + (bY)^{2/3} = c^{4/3}$, где $c^2 = a^2 - b^2$.

Глава IV

В ответах этого отдела ради краткости произвольная аддитивная постоянная C опущена.

1031. $\dfrac{5}{7}a^2x^7$. **1032.** $2x^3 + 4x^2 + 3x$. **1033.** $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{(a+b)x^3}{3} + \dfrac{abx^2}{2}$. **1034.** $a^2x + \dfrac{abx^4}{2} + \dfrac{b^2x^7}{7}$. **1035.** $\dfrac{2x}{3}\sqrt{2px}$. **1036.** $\dfrac{nx^{(n-1)/n}}{n-1}$. **1037.** $\sqrt[n]{nx}$. **1038.** $a^2x - \dfrac{9}{5}a^{4/3}x^{5/3} + \dfrac{9}{7}a^{2/3}x^{7/3} - \dfrac{x^3}{3}$. **1039.** $\dfrac{2x^2\sqrt{x}}{5} + x$. **1040.** $\dfrac{3x^4\sqrt[3]{x}}{13} - \dfrac{3x^2\sqrt[3]{x}}{7} - 6\sqrt[3]{x}$.

1041. $\dfrac{2x^{2m}\sqrt{x}}{4m+1} - \dfrac{4x^{m+n}\sqrt{x}}{2m+2n+1} + \dfrac{2x^{2n}\sqrt{x}}{4n+1}$. **1042.** $2a\sqrt{ax} - 4ax + 4x\sqrt{ax} - 2x^2 + \dfrac{2x^3}{5\sqrt{ax}}$. **1043.** $\dfrac{1}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{7}}$. **1044.** $\dfrac{1}{2\sqrt{10}}\ln\left|\dfrac{x-\sqrt{10}}{x+\sqrt{10}}\right|$. **1045.** $\ln(x + \sqrt{4+x^2})$.

1046. $\arcsin\dfrac{x}{2\sqrt{2}}$. **1047.** $\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{2}} - \ln(x + \sqrt{x^2+2})$. **1048*.** а) $\operatorname{tg}x - x$.

Положить $\operatorname{tg}^2x = \sec^2x - 1$; б) $x - \operatorname{th}x$. Положить $\operatorname{th}^2x = 1 - \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2x}$.

1049. а) $-\operatorname{cth}x - x$; б) $x - \operatorname{cth}x$. **1050.** $\dfrac{(3e)^x}{\ln 3 + 1}$. **1051.** $a\ln\left|\dfrac{C}{a-x}\right|$. $\displaystyle\int\frac{a}{a-x}dx = -a\int\frac{d(a-x)}{a-x} = -a\ln|a-x| + a\ln x = a\ln\left|\frac{C}{a-x}\right|$. **1052.** $x + \ln|2x+1|$.

Решение. Разделив числитель на знаменатель, получим $\dfrac{2x+3}{2x+1} = 1 + \dfrac{2}{2x+1}$.

Отсюда $\displaystyle\int\frac{2x+3}{2x+1}dx = \int dx + \int\frac{2dx}{2x+1} = x + \int\frac{d(2x+1)}{2x+1} = x + \ln|2x+1|$.

1053. $-\dfrac{3}{2}x + \dfrac{11}{4}\ln|3+2x|$. **1054.** $\dfrac{x}{b} - \dfrac{a}{b^2}\ln|a+bx|$. **1055.** $\dfrac{a}{\alpha}x + \dfrac{b\alpha - a\beta}{\alpha^2}\ln|\alpha x + \beta|$.

1056. $\dfrac{x^2}{2} + x + 2\ln|x-1|$. **1057.** $\dfrac{x^2}{2} + 2x + \ln|x+3|$. **1058.** $\dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^3}{3} + x^2 + 2x + 3\ln|x-1|$. **1059.** $a^2x + 2ab\ln|x-a| - \dfrac{b^2}{x-a}$. **1060.** $\ln|x+1| + \dfrac{1}{x+1}$.

Указание: $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)^2} = \int\frac{(x+1)-1}{(x+1)^2}dx = \int\frac{dx}{x+1} - \int\frac{dx}{(x+1)^2}$. **1061.** $-2b\sqrt{1-y}$.

1062. $-\dfrac{2}{3b}\sqrt{(a-bx)^3}$. **1063.** $\sqrt{x^2+1}$. Решение: $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1}$. **1064.** $2\sqrt{x} + \dfrac{\ln^2x}{2}$. **1065.** $\dfrac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}(x\sqrt{3/5})$. **1066.** $\dfrac{1}{4\sqrt{14}} \times \ln\left|\dfrac{x\sqrt{7}-2\sqrt{2}}{x\sqrt{7}+2\sqrt{2}}\right|$. **1067.** $\dfrac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\ln\left|\dfrac{\sqrt{a+b}+x\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}-x\sqrt{a-b}}\right|$. **1068.** $x - \sqrt{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{2}}$.

1069. $-\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{a^2}{2}\ln|a^2-x^2|\right)$. **1070.** $x - \dfrac{5}{2}\ln(x^2+4) + \operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}$. **1071.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \times \ln(2\sqrt{2x} + \sqrt{7+8x^2})$. **1072.** $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\arcsin(x\sqrt{5/7})$. **1073.** $\dfrac{1}{3}\ln|3x^2-2| - \dfrac{5}{2\sqrt{6}}\ln\left|\dfrac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right|$. **1074.** $\dfrac{3}{\sqrt{35}}\operatorname{arctg}(\sqrt{5/7}\,x) - \dfrac{1}{5}\ln(5x^2+7)$. **1075.** $\dfrac{3}{5}\sqrt{5x^2+1} + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\ln(x\sqrt{5} + \sqrt{5x^2+1})$. **1076.** $\sqrt{x^2-4} + 3\ln|x + \sqrt{x^2-4}|$. **1077.** $\dfrac{1}{2}\ln|x^2-5|$.

1078. $\dfrac{1}{4}\ln(2x^2+3)$. **1079.** $\dfrac{1}{2a}\ln(a^2x^2+b^2) + \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{ax}{b}$. **1080.** $\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{x^2}{a^2}$.

1081. $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg}x^3$. **1082.** $\dfrac{1}{2}\ln|x^3 + \sqrt{x^6-1}|$. **1083.** $\dfrac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$. **1084.** $\dfrac{\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{2}\right)^2}{4}$.

1085. $\frac{1}{8}\ln(1+4x^2) - \frac{\sqrt{(\operatorname{arctg}2x)^3}}{3}$. **1086.** $2\sqrt{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}$. **1087.** $-\frac{a}{m}e^{-mx}$. **1088.** $-\frac{1}{3\ln 4}4^{2-3x}$. **1089.** e^t+e^{-t}. **1090.** $\frac{a}{2}e^{2x/a}+2x-\frac{a}{2}e^{-2x/a}$. **1091.** $\frac{1}{\ln a-\ln b}\times\left(\frac{a^x}{b^x}-\frac{b^x}{a^x}\right)-2x$. **1092.** $\frac{2}{\ln a}(\frac{1}{3}a^{3/2x+2x}+a^{-1/2x})$. **1093.** $-\frac{1}{2e^{x^2+1}}$. **1094.** $\frac{1}{2\ln 7}7^{x^2}$. **1095.** $-e^{1/x}$. **1096.** $\frac{2}{\ln 5}5^{\sqrt{x}}$. **1097.** $\ln|e^x-1|$. **1098.** $-\frac{2}{3b}\sqrt{(a-be^x)^3}$. **1099.** $\frac{3a}{4}\times(e^{x/a}+1)^{4/3}$. **1100.** $\frac{x}{3}-\frac{1}{3\ln 2}\ln(2^x+3)$. Указание: $\frac{1}{2^x+3}\equiv\frac{1}{3}\left(1-\frac{2^x}{2^x+3}\right)$.

1101. $\frac{1}{\ln a}\operatorname{arctg}(a^x)$. **1102.** $-\frac{1}{2b}\ln\left|\frac{1+e^{-bx}}{1-e^{-bx}}\right|$. **1103.** $\arcsin e^t$. **1104.** $-\frac{1}{b}\cos(a+bx)$.

1105. $\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1106.** $x-\frac{1}{2a}\cos 2ax$. **1107.** $2\sin\sqrt{x}$. **1108.** $-\ln 10\cdot\cos(\lg x)$.

1109. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}$. Положить $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. **1110.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}$. См. указание к задаче 1109. **1111.** $\frac{1}{a}\operatorname{tg}(ax+b)$. **1112.** $-\frac{\operatorname{ctg}ax}{a}-x$. **1113.** $a\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2a}\right|$.

1114. $\frac{1}{15}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right|$. **1115.** $\frac{1}{a}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax+b}{2}\right|$. **1116.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x^2)$.

1117. $\frac{1}{2}\cos(1-x^2)$. 1118. $x-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{ctg}x\sqrt{2}-\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x\sqrt{2}}{2}\right|$. **1119.** $-\ln|\cos x|$.

1120. $\ln|\sin x|$. **1121.** $(a-b)\ln\left|\sin\frac{x}{a-b}\right|$. **1122.** $5\ln\left|\sin\frac{x}{5}\right|$. **1123.** $-2\ln|\cos\sqrt{x}|$.

1124. $\frac{1}{2}\ln|\sin(x^2+1)|$. **1125.** $\ln|\operatorname{tg}x|$. **1126.** $\frac{a}{2}\sin^2\frac{x}{a}$. **1127.** $\frac{\sin^4 6x}{24}$.

1128. $-\frac{1}{4a\sin^4 ax}$. **1129.** $-\frac{1}{3}\ln(3+\cos 3x)$. **1130.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\cos 2x}$.

1131. $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}$. **1132.** $\frac{3}{4}\operatorname{tg}^4\frac{x}{3}$. **1133.** $\frac{2}{3}\sqrt{\operatorname{tg}^3 x}$. **1134.** $-\frac{3\operatorname{ctg}^{5/3}x}{5}$.

1135. $\frac{1}{3}\left(\operatorname{tg}3x+\frac{1}{\cos 3x}\right)$. **1136.** $\frac{1}{a}\left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{ax}{2}\right|+2\sin ax\right)$. **1137.** $\frac{1}{3a}\ln|b-a\operatorname{ctg}3x|$.

1138. $\frac{2}{5}\operatorname{ch}5x-\frac{3}{5}\operatorname{sh}5x$. **1139.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sh}2x$. **1140.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right|$. **1141.** $2\operatorname{arctg}e^x$.

1142. $\ln|\operatorname{th}x|$. **1143.** $\ln\operatorname{ch}x$. **1144.** $\ln|\operatorname{sh}x|$. **1145.** $-\frac{5}{12}\sqrt[5]{(5-x^2)^6}$.

1146. $\frac{1}{4}\ln|x^4-4x+1|$. **1147.** $\frac{1}{4\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x^4}{\sqrt{5}}$. **1148.** $-\frac{1}{2}e^{-x^2}$. **1149.** $\sqrt{3/2}\times\operatorname{arctg}(x\sqrt{3/2})-\frac{1}{\sqrt{3}}\ln(x\sqrt{3}+\sqrt{2+3x^2})$. **1150.** $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-2\ln|x+1|$.

1151. $-2/\sqrt{e^x}$. **1152.** $\ln|x+\cos x|$. **1153.** $\frac{1}{3}\left(\ln|\sec 3x+\operatorname{tg}3x|+\frac{1}{\sin 3x}\right)$.

1154. $-\frac{1}{\ln x}$. **1155.** $\ln\left|\operatorname{tg}x+\sqrt{\operatorname{tg}^2 x-2}\right|$. **1156.** $\sqrt{2}\operatorname{arctg}(x\sqrt{2})-\frac{1}{4(2x^2+1)}$.

1157. $\frac{a^{\sin x}}{\ln a}$. **1158.** $\frac{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}{2}$. **1159.** $\frac{1}{2}\arcsin(x^2)$. **1160.** $\frac{1}{a}\operatorname{tg}ax-x$.

1161. $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}$. **1162.** $\arcsin\frac{\operatorname{tg}x}{2}$. **1163.** $a\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2a}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1164.** $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\ln x)^4}$.

1165. $-2\ln|\cos\sqrt{x-1}|$. **1166.** $\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}\right|$. **1167.** $e^{\operatorname{arctg}x}+\frac{\ln^2(1+x^2)}{4}+\operatorname{arctg}x$.

1168. $-\ln|\sin x+\cos x|$. **1169.** $\sqrt{2}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2\sqrt{2}}\right|-2x-\sqrt{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}}$. **1170.** $x+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\ln\left|\frac{x-\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}}\right|$. **1171.** $\ln|x|+2\operatorname{arctg}x$. **1172.** $e^{\sin 2x}$. **1173.** $\frac{5}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{2}+\sqrt{4-3x^2}$. **1174.** $x-\ln(1+e^x)$. **1175.** $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(x\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)$.

1176. $\ln(e^x+\sqrt{e^{2x}-2})$. **1177.** $\frac{1}{a}\ln|\operatorname{tg}ax|$. **1178.** $-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi t}{T}+\varphi_0\right)$.

1179. $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\ln x}{2-\ln x}\right|$. **1180.** $-\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{x}{2}\right)^2$. **1181.** $-e^{-\operatorname{tg}x}$. **1182.** $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)$.

1183. $-2\operatorname{ctg}2x$. **1184.** $\frac{(\arcsin x)^2}{2}-\sqrt{1-x^2}$. **1185.** $\ln(\sec x+\sqrt{\sec^2 x+1})$.

1186. $\frac{1}{4\sqrt{5}}\ln\frac{\sqrt{5}+\sin 2x}{\sqrt{5}-\sin 2x}$. **1187.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{\sqrt{2}}\right)$. Указание: $\int\frac{dx}{1+\cos^2 x}=\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\operatorname{tg}^2 x+2}$. **1188.** $\frac{2}{3}\sqrt{[\ln(x+\sqrt{1+x^2})]^3}$. **1189.** $\frac{1}{3}\times\operatorname{sh}(x^3+3)$. **1190.** $\frac{1}{\ln 3}3^{\operatorname{th}x}$. **1191.** а) $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$ при $x>\sqrt{2}$; б) $-\ln(1+e^{-x})$; в) $\frac{1}{80}(5x^2-3)^8$; г) $\frac{2}{3}\cdot(x+1)^3-2\sqrt{x+1}$; д) $\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$.

1192. $\frac{1}{4}\left[\frac{(2x+5)^{12}}{12}-\frac{5(2x+5)^{11}}{11}\right]$. **1193.** $2\left[\frac{\sqrt{x^3}}{3}-\frac{x}{2}+2\sqrt{x}-2\ln(1+\sqrt{x})\right]$.

1194. $\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|$. **1195.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x-1}$. **1196.** $\ln x-\ln 2\ln|\ln x+2\ln 2|$.

1197. $(\arcsin x)^3/3$. **1198.** $\frac{2}{3}(e^x-2)\sqrt{e^x+1}$. **1199.** $\frac{2}{5}(\cos^2 x-5)\sqrt{\cos x}$.

1200. $\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|$. Положить $x=\frac{1}{t}$. **1201.** $-\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$.

1202. $-\frac{x^2}{3}\sqrt{2-x^2}-\frac{4}{3}\sqrt{2-x^2}$. **1203.** $\sqrt{x^2-a^2}-|a|\arccos\frac{|a|}{x}$. **1204.** $\arccos\frac{1}{x}$, если $x>0$, и $\arccos\left(-\frac{1}{x}\right)$, если $x<0$*). Положить $x=\frac{1}{t}$. **1205.** $\sqrt{x^2+1}-\ln\left|\frac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}\right|$. **1206.** $-\frac{\sqrt{4-x^2}}{4x}$. Примечание. Вместо тригонометрической можно применить подстановку $x=\frac{1}{z}$. **1207.** $\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{2}\arcsin x$.

1208. $2\arcsin\sqrt{x}$. **1210.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}+\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$. **1211.** $x\ln x-x$.

1212. $x\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. **1213.** $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$. **1214.** $\sin x-x\cos x$.

1215. $\frac{x\sin 3x}{3}+\frac{\cos 3x}{9}$. **1216.** $-\frac{x+1}{e^x}$. **1217.** $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}$. **1218.** $\frac{e^{3x}}{27}(9x^2-6x+2)$.

Вместо многократного интегрирования по частям можно применять следующий способ неопределенных коэффициентов:

$$\int x^2e^{3x}\,dx=(Ax^2+Bx+C)e^{3x}$$

или, после дифференцирования,

$$x^2e^{3x}=(Ax^2+Bx+C)3e^{3x}+(2Ax+B)e^{3x}.$$

Сокращая на e^{3x} и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получим:

$$1=3A;\ 0=3B+2A;\ 0=3C+B,$$

откуда $A=1/3$; $B=-2/9$; $C=2/27$. В общем виде $\int P_n(x)e^{ax}\,dx=Q_n(x)e^{ax}$, где $P_n(x)$ — данный многочлен степени n; $Q_n(x)$ — многочлен степени n

*) В дальнейшем, в аналогичных случаях, иногда будет указываться ответ, годный лишь для какой-нибудь части области существования подынтегральной функции.

с неопределенными коэффициентами. **1219.** $-e^{-x}(x^2+5)$. См. задачу 1218**. **1220.** $-3e^{-x/3}(x^3+9x^2+54x+162)$. См. задачу 1218**. **1221.** $-\frac{x\cos 2x}{4}+\frac{\sin 2x}{8}$. **1222.** $\frac{2x^2+10+11}{4}\sin 2x+\frac{2x+5}{4}\cos 2x$. Рекомендуется также применить способ неопределенных коэффициентов в виде

$$\int P_n(x)\cos\beta x\,dx=Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x,$$

где $P_n(x)$ — данный многочлен степени n, $Q_n(x)$ и $R_n(x)$ — многочлены степени n с неопределенными коэффициентами (см. задачу № 1218**).

1223. $\frac{x^3}{3}\ln x-\frac{x^3}{9}$. **1224.** $x\ln_2 x-2x\ln x+2x$. **1225.** $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}$.

1226. $2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}$. **1227.** $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{x}{2}$. **1228.** $\frac{x^2}{2}\arcsin x-\frac{1}{4}\arcsin x+\frac{x}{4}\sqrt{1-x^2}$. **1229.** $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$. **1230.** $-x\operatorname{ctg}x+\ln|\sin x|$.

1231. $-\frac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **1232.** $\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}$. **1233.** $\frac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+(\ln 3)^2}$.

1234. $\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}$. **1235.** $\frac{x}{2}[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$. **1236.** $-\frac{e^{-x^2}}{2}(x^2+1)$.

1237. $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)$. **1238.** $\left(\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{2}-3x$. **1239.** $\frac{x^2-1}{2}\times\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-x$. **1240.** $-\frac{\ln^2 x}{x}-\frac{2\ln x}{x}-\frac{2}{x}$. **1241.** $[\ln(\ln x)-1]\cdot\ln x$. **1242.** $\frac{x^3}{3}\times\operatorname{arctg}3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(9x^2+1)$. **1243.** $\frac{1+x^2}{2}(\operatorname{arctg}x)^2-x\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1244. $x(\arcsin x)^2+2\sqrt{1-x^2}\arcsin x-2x$. **1245.** $-\frac{\arcsin x}{x}+\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\right|$.

1246. $-2\sqrt{1-x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{x}$. **1247.** $\frac{x\operatorname{tg}2x}{2}+\frac{\ln|\cos 2x|}{4}-\frac{x^2}{2}$.

1248. $\frac{e^{-x}}{2}\left(\frac{\cos 2x-2\sin 2x}{5}-1\right)$. **1249.** $\frac{x}{2}+\frac{x\cos(2\ln x)+2x\sin(2\ln x)}{10}$.

1250. $-\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x$. Полагая $u=x$ и $dv=\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$, получим $du=dx$ и $v=-\frac{1}{2(x^2+1)}$. Отсюда $\int\frac{x^2dx}{(x^2+1)^2}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+\int\frac{dx}{2(x^2+1)}=-\frac{x}{2(x^2+1)}+$

$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C$. **1251.** $\frac{1}{2a^2}\left(\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + \frac{x}{x^2+a^2}\right)$. Использовать тождество $1 \equiv \frac{1}{a^2}[(x^2+a^2)-x^2]$. **1252.** $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ ($a > 0$). Положим $u = \sqrt{a^2-x^2}$ и $dv = dx$; отсюда $du = -\frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ и $v = x$; имеем $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{-x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\frac{(a^2-x^2)-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} - \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx + a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Следовательно, $2\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\arcsin\frac{x}{a}$. **1253.** $\frac{x}{2}\sqrt{A+x^2} + \frac{A}{2}\ln|x+\sqrt{A+x^2}|$. См. задачу 1252*. **1254.** $-\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}$. См. задачу 1252*. **1255.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$. **1256.** $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x}{x+2}\right|$. **1257.** $\frac{2}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{6x-1}{\sqrt{11}}$. **1258.** $\frac{1}{2}\ln(x^2 - 7 + 13) + \frac{7}{\sqrt{3}}\times\operatorname{arctg}\frac{2x-7}{\sqrt{3}}$. **1259.** $\frac{3}{2}\ln(x^2-4x+5) + 4\operatorname{arctg}(x-2)$. **1260.** $x - \frac{5}{2}\ln(x^2+3x+4) + \frac{9}{\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{7}}$. **1261.** $x + 3\ln(x^2-6x+10) + 8\operatorname{arctg}(x-3)$. **1262.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\frac{4x-3}{5}$. **1263.** $\arcsin(ax-1)$. **1264.** $\ln\left|x + \frac{p}{2} + \sqrt{x^2+px+q}\right|$. **1265.** $3\sqrt{x^2-4x+5}$. **1266.** $-2\sqrt{1-x-x^2} - 9\arcsin\frac{2x+1}{\sqrt{5}}$. **1267.** $\frac{1}{5}\times\sqrt{5x^2-2x+1} + \frac{1}{5\sqrt{5}}\ln\left(x\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{5x^2-2x+1}\right)$. **1268.** $\ln\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$. **1269.** $-\arcsin\frac{2-x}{x\sqrt{5}}$. **1270.** $\arcsin\frac{2-x}{(1-x)\sqrt{2}}$ ($x > \sqrt{2}$). **1271.** $-\arcsin\frac{1}{x+1}$. **1272.** $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+5} + 2\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+5})$. **1273.** $\frac{2x-1}{4}\sqrt{x-x^2} + \frac{1}{8}\arcsin(2x-1)$. **1274.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{2-x-x^2} + \frac{9}{8}\arcsin\frac{2x+1}{3}$. **1275.** $\frac{1}{4}\times\ln\left|\frac{x^2-3}{x^2-1}\right|$. **1276.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{3-\sin x}{\sqrt{3}}$. **1277.** $\ln\left(e^x + \frac{1}{2} + \sqrt{1+e^x+e^{2x}}\right)$. **1278.** $-\ln\left|\cos x + 2 + \sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}\right|$. **1279.** $-\sqrt{1-4\ln x-\ln^2 x} - 2\arcsin\frac{2+\ln x}{\sqrt{5}}$.

1280. $\frac{1}{a-b}\cdot\ln\left|\frac{x+b}{x+a}\right|$ ($a \ne b$). **1281.** $x + 3\ln|x-3| - 3\ln|x-2|$. **1282.** $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{(x-1)(x+3)^3}{(x+2)^4}\right|$. **1283.** $\ln\frac{(x-1)^4(x-4)^5}{(x+3)^7}$. **1284.** $5x + \ln\left|\frac{x^{1/2}(x-4)^{161/6}}{(x-1)^{7/3}}\right|$. **1285.** $\frac{1}{1+x} + \ln\left|\frac{x}{x+1}\right|$. **1286.** $\frac{1}{4}x + \frac{1}{16}\times\ln\left|\frac{x^{16}}{(2x-1)^7(2x+1)^9}\right|$. **1287.** $\frac{x^2}{2} - \frac{11}{(x-2)^2} - \frac{8}{x-2}$. **1288.** $-\frac{9}{2(x-3)} - \frac{1}{2(x+1)}$. **1289.** $\frac{8}{49(x-5)} - \frac{27}{49(x+2)} + \frac{30}{343}\ln\left|\frac{x-5}{x+2}\right|$. **1290.** $-\frac{1}{2(x^2-3x+2)^2}$. **1291.** $x + \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|$. **1292.** $x + \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x$. **1293.** $\frac{1}{52}\ln|x-3| - \frac{1}{20}\ln|x-1| + \frac{1}{65}\ln(x^2+4x+5) + \frac{7}{130}\operatorname{arctg}(x+2)$. **1294.** $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1295.** $\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1} + \frac{\sqrt{2}}{4}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$. **1296.** $\frac{1}{4}\ln\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x^2-1}{x\sqrt{3}}$. **1297.** $\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}$. **1298.** $\frac{2x-1}{2(x^2+2x+2)} + \operatorname{arctg}(x+1)$. **1299.** $\ln|x+1| + \frac{x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{5}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)$. **1300.** $\frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)} + \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5) + \frac{15}{2}\operatorname{arctg}(x-2)$. **1301.** $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)} - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\operatorname{arctg} x$. **1302.** $\frac{3}{8}\operatorname{arctg} x - \frac{x}{4(x^4-1)} - \frac{3}{16}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$. **1303.** $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3} + \frac{15}{48}\operatorname{arctg} x$. **1304.** $x - \frac{x-3}{x^2-2x+2} + 2\ln(x^2-2x+2) + \operatorname{arctg}(x-1)$. **1305.** $\frac{1}{21}(8\ln|x^3+8| - \ln|x^3+1|)$. **1306.** $\frac{1}{2}\ln|x^4-1| - \frac{1}{4}\ln|x^8+x^4-1| - \frac{1}{2\sqrt{5}}\ln\frac{2x^4+1-\sqrt{5}}{2x^4+1+\sqrt{5}}$. **1307.** $-\frac{13}{2(x-4)^2} + \frac{3}{x-4} + 2\ln\left|\frac{x-4}{x-2}\right|$. **1308.** $\frac{1}{3}\left(2\ln\left|\frac{x^3+1}{x^3}\right| - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^3+1}\right)$. **1309.** $\frac{1}{x-1} + \ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|$. **1310.** $\ln|x| - \frac{1}{7}\ln|x^7+1|$. Положить $1 = (x^7+1) - x^7$.

1311. $\ln|x| - \frac{1}{5}\ln|x^5+1| + \frac{1}{5(x^5+1)}$. **1312.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x+1) - \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2}$.
1313. $-\frac{1}{9(x-1)^9} - \frac{1}{4(x-1)^8} - \frac{1}{7(x-1)^7}$. **1314.** $-\frac{1}{5x^5} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x$.
1315. $2\sqrt{x-1}\left[\frac{(x-1)^3}{7} + \frac{3(x-1)^2}{5} + x\right]$. **1316.** $\frac{3}{10a^2}\left[2\sqrt[3]{(ax+b)^5} - 5b \times \sqrt[3]{(ax+b)^2}\right]$. **1317.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{x+1}$. **1318.** $6\sqrt[6]{x} + 3\sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} - 6\ln(1+\sqrt[6]{x})$.
1319. $\frac{6}{7}x\sqrt[6]{x} - \frac{6}{5}\sqrt[6]{x^5} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} - 6\sqrt[6]{x} - 3\ln|1+\sqrt[3]{x}| + 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}$. **1320.** $\ln\left|\frac{(\sqrt{x+1}-1)^2}{x+2+\sqrt{x+1}}\right| - \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2(\sqrt{x+1}+1)}{\sqrt{3}}$.
1321. $2\sqrt{x} - 2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{x/2}$. **1322.** $-2\operatorname{arctg}\sqrt{1-x}$. **1323.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{2}(x-2) + \frac{1}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-1}|$. **1324.** $\frac{1}{3}\ln\frac{z^2+z+1}{(z-1)^2} + \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}} + \frac{2z}{z^3-1}$, где $z = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$. **1325.** $-\frac{\sqrt{2x+3}}{x}$. **1326.** $\frac{2x+3}{4}\sqrt{x^2-x+1} - \frac{1}{8}\ln(2x-1+2\sqrt{x^2-x+1})$. **1327.** $-\frac{8+4x^2+3x^4}{15}\sqrt{1-x^2}$. **1328.** $\left(\frac{5}{16}x - \frac{5}{24}x^3 + \frac{1}{6}x^5\right)\sqrt{1+x^2} - \frac{5}{16}\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **1329.** $\left(\frac{1}{4x^4} + \frac{3}{8x^2}\right)\sqrt{x^2-1} - \frac{3}{8}\arcsin\frac{1}{x}$. **1330.** $\frac{1}{2(x+1)^2}\sqrt{x^2+2x} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}$. **1331.** $R + \ln|x| + \frac{3}{2}\ln\left(x - \frac{1}{2} + R\right) - \ln\left(1 - \frac{x}{2} + R\right)$, где $R = \sqrt{x^2-x+1}$. **1332.** $\frac{1}{2}\frac{1+x^2}{\sqrt{1+2x^2}}$.
1333. $\frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{x^{-4}+1}+1}{\sqrt[4]{x^{-4}+1}-1} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x^{-4}+1}$. **1334.** $\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.
1335. $\frac{1}{10}\ln\frac{(z-1)^2}{z^2+z+1} + \frac{\sqrt{3}}{5}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, где $z = \sqrt[3]{1+x^5}$. **1336.** $-\frac{1}{8}\frac{4+3x^2}{x(2+x^3)^{2/3}}$.
1337. $-2\sqrt[3]{(x^{-3/4}+1)^2}$. **1338.** $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x$. **1339.** $-\cos x + \frac{2}{3}\cos^3 x - \frac{1}{5}\cos^5 x$.
1340. $\frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5}$. **1341.** $\frac{1}{4}\cos^8\frac{x}{2} - \frac{1}{3}\cos^6\frac{x}{2}$. **1342.** $\frac{\sin^2 x}{2} - \frac{1}{2\sin^2 x} - 2\ln|\sin x|$.

1343. $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32}$. **1344.** $\frac{x}{8} - \frac{\sin 4x}{32}$. **1345.** $\frac{x}{16} - \frac{\sin 4x}{64} + \frac{\sin^3 2x}{48}$. **1346.** $\frac{5}{16}x + \frac{1}{12}\sin 6x + \frac{1}{64}\sin 12x - \frac{1}{144}\sin^3 6x$. **1347.** $-\operatorname{ctg} x - \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}$. **1348.** $\operatorname{tg} x + \frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$. **1349.** $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} - \frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5}$. **1350.** $\operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - 2\operatorname{ctg} 2x$. **1351.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + 3\ln|\operatorname{tg} x| - \frac{3}{2\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x}$. **1352.** $\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} + 2\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.
1353. $\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$. **1354.** $\frac{-\cos x}{4\sin^4 x} - \frac{3\cos x}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$.
1355. $\frac{\sin 4x}{16\cos^4 4x} + \frac{3\sin 4x}{32\cos^2 4x} + \frac{3}{32}\ln\left|\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1356.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x - x$.
1357. $-\frac{\operatorname{ctg}^2 x}{2} - \ln|\sin x|$. **1358.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x + \operatorname{ctg} x + x$. **1359.** $\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\frac{x}{3} + \operatorname{tg}^3\frac{x}{3} - 3\operatorname{tg}\frac{x}{3} + 3\ln\left|\cos\frac{x}{3}\right| + x$. **1360.** $\frac{x^2}{4} - \frac{\sin 2x^2}{8}$. **1361.** $-\frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3}$. **1362.** $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{\cos^4 x} + \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^{10} x} - \frac{3}{16}\sqrt[3]{\cos^{16} x}$. **1363.** $2\sqrt{\operatorname{tg} x}$. **1364.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{z^2+z\sqrt{2}+1}{z^2-z\sqrt{2}+1} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{z\sqrt{2}}{z^2-1}$, где $z = \sqrt{\operatorname{tg} x}$. **1365.** $-\frac{\cos 8x}{16} + \frac{\cos 2x}{4}$. **1366.** $-\frac{\sin 25x}{50} + \frac{\sin 5x}{10}$. **1367.** $\frac{3}{5}\sin\frac{5x}{6} + 3\sin\frac{x}{6}$. **1368.** $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3} - \frac{1}{2}\cos x$. **1369.** $\frac{\sin 2ax}{4a} + \frac{x\cos 2b}{2}$. **1370.** $\frac{t\cos\varphi}{2} - \frac{\sin(2\omega t+\varphi)}{4\omega}$. **1371.** $\frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 5x}{20} + \frac{\sin 7x}{28}$.
1372. $\frac{1}{24}\cos 6x - \frac{1}{16}\cos 4x - \frac{1}{8}\cos 2x$. **1373.** $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right|$. **1374.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)+\frac{\pi}{8}\right|$.
1375. $x - \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. **1376.** $-x + \operatorname{tg} x + \sec x$. **1377.** $\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-5}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3}\right|$. **1378.** $\operatorname{arctg}\left(1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$.
1379. $\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x|$. Положим $3\sin x + 2\cos x = \alpha(2\sin x + 3\cos x) + \beta(2\sin x + 3\cos x)'$. Отсюда $2\alpha - 3\beta = 3$, $3\alpha + 2\beta = 2$ и, следовательно, $\alpha = \frac{12}{13}$, $\beta = -\frac{5}{13}$. Имеем $\int\frac{3\sin x + 2\cos x}{2\sin x + 3\cos x}\,dx = \frac{12}{13}\int dx - \frac{5}{13}\int\frac{(2\sin x + 3\cos x)'}{2\sin x + 3\cos x}\,dx =$

$= \frac{12}{13}x - \frac{5}{13}\ln|2\sin x + 3\cos x|$. **1380.** $-\ln|\cos x - \sin x|$. **1381.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}x}{2}\right)$. Числитель и знаменатель дроби разделить на $\cos^2 x$. **1382.** $\frac{1}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{\sqrt{5}}\right)$. См. задачу 1381. **1383.** $\frac{1}{\sqrt{13}}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg}x+3-\sqrt{13}}{2\operatorname{tg}x+3+\sqrt{13}}\right|$. См. задачу 1381. **1384.** $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}x-5}{\operatorname{tg}x}\right|$. См. задачу 1381. **1385.** $-\frac{1}{2(1-\cos x)^2}$. **1386.** $\ln(1+\sin^2 x)$. **1387.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+\sin 2x}{\sqrt{2}-\sin 2x}$. **1388.** $\frac{1}{4}\ln\frac{5-\sin x}{1-\sin x}$. **1389.** $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{2\sqrt{2}}$. Использовать тождество $\frac{1}{(2-\sin x)(3-\sin x)} \equiv \frac{1}{2-\sin x} - \frac{1}{3-\sin x}$. **1390.** $-x+2\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1}\right|$. Использовать тождество $\frac{1+\sin x+\cos x}{1+\sin x-\cos x} \equiv -1 + \frac{2}{1+\sin x-\cos x}$. **1391.** $\frac{\operatorname{ch}^3 x}{3} - \operatorname{ch}x$. **1392.** $\frac{3x}{8}+\frac{\operatorname{sh}2x}{4}+\frac{\operatorname{sh}4x}{32}$. **1393.** $\frac{\operatorname{sh}^4 x}{4}$. **1394.** $-\frac{x}{8}+\frac{\operatorname{sh}4x}{32}$. **1395.** $\ln\left|\operatorname{th}\frac{x}{2}\right| + \frac{1}{\operatorname{ch}x}$. **1396.** $-2\operatorname{cth}2x$. **1397.** $\ln(\operatorname{ch}x) - \frac{\operatorname{th}^4 x}{4}$. **1398.** $x - \operatorname{cth}x - \frac{\operatorname{cth}^3 x}{3}$. **1399.** $\operatorname{arctg}(\operatorname{th}x)$. **1400.** $\frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{3\operatorname{th}\frac{x}{2}+2}{\sqrt{5}}\right)$ $\left(\text{или } \frac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg} e^x\sqrt{5}\right)$. **1401.** $-\frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}-\frac{\operatorname{sh}2x}{4}-\frac{x}{2}$. Использовать тождество $\frac{-1}{\operatorname{sh}x-\operatorname{ch}x}\equiv\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x$. **1402.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(\sqrt{2}\operatorname{ch}x+\sqrt{\operatorname{ch}2x})$. **1403.** $\frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2}+2\arcsin\frac{x+1}{2}$. **1404.** $\frac{x}{2}\sqrt{2+x^2}+\ln(x+\sqrt{2+x^2})$. **1405.** $\frac{x}{2}\sqrt{9+x^2}-\frac{9}{2}\ln(x+\sqrt{9+x^2})$. **1406.** $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x+2}+\frac{1}{2}\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+2})$. **1407.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln|x+\sqrt{x^2-4}|$. **1408.** $\frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x}-\frac{1}{8}\ln|2x+1+2\sqrt{x^2+x}|$. **1409.** $\frac{x-3}{2}\sqrt{x^2-6x-7}-8\ln|x-3+\sqrt{x^2-6x-7}|$. **1410.** $\frac{1}{64}(2x+1)(8x^2+8x+17)\sqrt{x^2+x+1}+\frac{27}{128}\ln(2x+1+2\sqrt{x^2+x+1})$.

1411. $2\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}$. **1412.** $\frac{x-1}{4\sqrt{x^2-2x+5}}$. **1413.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$. **1414.** $\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^2}-x\sqrt{2}}\right|$. **1415.** $\frac{e^{2x}}{2}\left(x^4-2x^3+5x^2-5x+\frac{7}{2}\right)$. **1416.** $\frac{1}{6}\left(x^3+\frac{x^2}{2}\sin 6x+\frac{x}{6}\cos 6x-\frac{1}{36}\sin 6x\right)$. **1417.** $-\frac{x\cos 3x}{6}+\frac{\sin 3x}{18}+\frac{x\cos x}{2}-\frac{\sin x}{2}$. **1418.** $\frac{e^{2x}}{8}(2-\sin 2x-\cos 2x)$. **1419.** $\frac{e^{2x}}{2}\left(\frac{2\sin 2x+\cos 2x}{5}-\frac{4\sin 4x+\cos 4x}{17}\right)$. **1420.** $\frac{e^{2x}}{2}[x(\sin x+\cos x)-\sin x]$. **1421.** $-\frac{x}{2}+\frac{1}{3}\ln|e^x-1|+\frac{1}{6}\ln(e^x+2)$. **1422.** $x-\ln(2+e^x+2\sqrt{e^{2x}+x+1})$. **1423.** $\frac{1}{3}\left[x^3\ln\frac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^2)+x^2\right]$. **1424.** $x\ln^2(x+\sqrt{1+x^2})-2\sqrt{1+x^2}\times\ln(x+\sqrt{1+x^2})+2x$. **1425.** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{9}{100}\right)\arccos(5x-2)-\frac{5x+6}{100}\times\sqrt{20x-25x^2-3}$. **1426.** $\frac{\sin x\operatorname{ch}x-\cos x\operatorname{sh}x}{2}$. **1427.** $I_n=\frac{1}{2(n-1)a^2}\times\left[\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}+(2n-3)I_{n-1}\right]$; $I_2=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)$; $I_3=\frac{1}{4a^2}\times\left[\frac{x(3x^2+5a^2)}{2a^2(x^2+a^2)^2}+\frac{3}{2a^3}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right]$. **1428.** $I_n=-\frac{\cos x\sin^{n-1}x}{n}+\frac{n-1}{n}I_{n-2}$; $I_4=\frac{3x}{8}-\frac{\cos x\sin^3 x}{4}-\frac{3\sin 2x}{16}$; $I_5=-\frac{\cos x\sin^4 x}{5}-\frac{4}{15}\cos x\sin^2 x-\frac{8}{15}\cos x$. **1429.** $I_n=\frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{n-2}{n-1}I_{n-2}$; $I_3=\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$; $I_4=\frac{\sin x}{3\cos^3 x}+\frac{2}{3}\operatorname{tg}x$. **1430.** $I_n=-x^n e^{-x}+nI_{n-1}$; $I_{10}=e^{-x}(x^{10}+10x^9+10\cdot 9x^8+\ldots+10\cdot 9\cdot 8\cdot\ldots\cdot 2x+10\cdot 9\cdot\ldots\cdot 1)$. **1431.** $\frac{1}{\sqrt{14}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}(x-1)}{\sqrt{7}}$. **1432.** $\ln\sqrt{x^2-2x+2}-4\operatorname{arctg}(x-1)$. **1433.** $\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{1}{4}\ln\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}(2x+1)$. **1434.** $\frac{1}{5}\ln\sqrt{\frac{x^2}{x^2+5}}$. **1435.** $2\ln\left|\frac{x+3}{x+2}\right|-\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}$.

1436. $\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}\right|-\frac{1}{x+1}\right)$. **1437.** $\frac{1}{4}\left(\frac{x}{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$. **1438.** $\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{1-x^2}+\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|\right)$. **1439.** $\frac{1}{6}\,\frac{x-2}{(x^2-x+1)^2}+\frac{1}{6}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$. **1440.** $\frac{x(3+2\sqrt{x})}{1-2\sqrt{x}}$. **1441.** $-\frac{1}{x}-\frac{4}{3x\sqrt{x}}-\frac{1}{2x^2}$. **1442.** $\ln\left(x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right)$. **1443.** $\sqrt{2x}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{(2x)^5}$. **1444.** $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}+1}$. **1445.** $\frac{2x-1}{\sqrt{4x^2-2x+1}}$. **1446.** $-2(\sqrt[4]{5-x}-1)^2-4\ln(1+\sqrt[4]{5-x})$. **1447.** $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. **1448.** $-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$. **1449.** $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2+1}{\sqrt{2}}$. **1450.** $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$. **1451.** $\frac{1}{8}\ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{x}\right|-\frac{1}{8\sqrt{3}}\times\arcsin\frac{2(x+1)}{x+4}$. Указание: $\frac{1}{x^2+4x}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+4}\right)$. **1452.** $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-9}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2-9}\right|$. **1453.** $\frac{1}{16}(8x-1)\sqrt{x-4x^2}+\frac{1}{64}\arcsin(8x-1)$. **1454.** $\ln\left|\frac{x}{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}\right|$. **1455.** $\frac{(x^2+2x+2)\sqrt{x^2+2x+2}}{3}-\frac{(x+1)}{2}\times\sqrt{x^2+2x+2}-\frac{1}{2}\ln(x+1+\sqrt{x^2+2x+2})$. **1456.** $\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3x^3}$. **1457.** $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{\sqrt{1-x^3}-1}{\sqrt{1-x^3}+1}\right|$. **1458.** $-\frac{1}{3}\ln|z-1|+\frac{1}{6}\ln(z^2+z+1)-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2z+1}{\sqrt{3}}$, где $z=\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x}$. **1459.** $\frac{5}{2}\ln(x^2+\sqrt{1+x^4})$. **1460.** $\frac{3x}{8}+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}$. **1461.** $\ln|\operatorname{tg}x|-\operatorname{ctg}^2x-\frac{1}{4}\operatorname{ctg}^4x$. **1462.** $-\operatorname{ctg}x-\frac{2\sqrt{(\operatorname{ctg}x)^3}}{3}$. **1463.** $\frac{5}{12}(\cos^2x-6)\sqrt[5]{\cos^2x}$. **1464.** $\frac{\cos 5x}{20\sin^4 5x}-\frac{3\cos 5x}{40\sin^2 5x}+\frac{3}{40}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{5x}{2}\right|$. **1465.** $\frac{\operatorname{tg}^3x}{3}+\frac{\operatorname{tg}^5x}{5}$. **1466.** $\frac{1}{4}\sin 2x$. **1467.** $\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+2\ln\left|\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. **1468.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{4\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1}{\sqrt{3}}$. **1469.** $\frac{1}{\sqrt{10}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\operatorname{tg}x}{\sqrt{10}}\right)$. **1470.** $\operatorname{arctg}(2\operatorname{tg}x+1)$. **1471.** $\frac{1}{2}\ln|\operatorname{tg}x+\sec x|-\frac{1}{2}\operatorname{cosec}x$.

1472. $\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\sqrt{2}}\right)$. **1473.** $\ln|\operatorname{tg}x+2+t|$, где $t=\sqrt{\operatorname{tg}^2x+4\operatorname{tg}x+1}$. **1474.** $\frac{1}{a}\ln(\sin ax+\sqrt{a^2+\sin^2 ax})$. **1475.** $\frac{1}{3}x\operatorname{tg}3x+\frac{1}{9}\ln|\cos 3x|$. **1476.** $\frac{x^2}{4}-\frac{x\sin 2x}{4}-\frac{\cos 2x}{8}$. **1477.** $\frac{1}{3}e^{x^3}$. **1478.** $\frac{e^{2x}}{4}(2x-1)$. **1479.** $\frac{x^3}{3}\ln\sqrt{1-x}-\frac{1}{6}\ln|x-1|-\frac{x^3}{18}-\frac{x^2}{12}-\frac{x}{6}$. **1480.** $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln(x+\sqrt{1+x^2})$. **1481.** $\frac{1}{3}\sin\frac{3x}{2}-\frac{1}{10}\sin\frac{5x}{2}-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{2}$. **1482.** $-\frac{1}{1+\operatorname{tg}x}$. **1483.** $\ln|1+\operatorname{ctg}x|-\operatorname{ctg}x$. **1484.** $\frac{\operatorname{sh}^2x}{2}$. **1485.** $-2\operatorname{ch}\sqrt{1-x}$. **1486.** $\frac{1}{4}\ln\operatorname{ch}2x$. **1487.** $-x\operatorname{cth}x+\ln|\operatorname{sh}x|$. **1488.** $\frac{1}{2e^x}-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\ln|e^x-2|$. **1489.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{e^x-3}{2}$. **1490.** $\frac{4}{7}\sqrt[4]{(e^x+1)^7}-\frac{4}{3}\sqrt[4]{(e^x+1)^3}$. **1491.** $\frac{1}{\ln 4}\ln\left|\frac{1+2^x}{1-2^x}\right|$. **1492.** $-\frac{10^{-2x}}{2\ln 10}\times\left(x^2-1+\frac{x}{\ln 10}+\frac{1}{2\ln^2 10}\right)$. **1493.** $2\sqrt{e^x+1}+\ln\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}$. **1494.** $\ln\left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right|-\frac{\operatorname{arctg}x}{x}$. **1495.** $\frac{1}{4}\left(x^4\arcsin\frac{1}{x}+\frac{x^2+2}{3}\sqrt{x^2-1}\right)$. **1496.** $\frac{x}{2}(\cos\ln x+\sin\ln x)$. **1497.** $\frac{1}{5}\left(-x^2\cos 5x+\frac{2}{5}x\sin 5x+3x\cos 5x+\frac{2}{25}\cos 5x-\frac{3}{5}\sin 5x\right)$. **1498.** $\frac{1}{2}\left[(x^2-2)\operatorname{arctg}(2x+3)+\frac{3}{4}\ln(2x^2+6x+5)-\frac{x}{2}\right]$. **1499.** $\frac{1}{2}\sqrt{x-x^2}+\left(x-\frac{1}{2}\right)\arcsin\sqrt{x}$. **1500.** $\frac{x|x|}{2}$.

Глава V

1501. $b-a$. **1502.** $v_0T-g\frac{T^2}{2}$. **1503.** 3. **1504.** $\frac{2^{10}-1}{\ln 2}$. **1505.** 156. Отрезок оси OX от $x=1$ до $x=5$ разбить на части так, чтобы абсциссы точек деления образовали геометрическую прогрессию: $x_0=1$, $x_1=x_0q$, $x_2=x_0q^2$, ...,

$x_n = x_0 q^n$. **1506.** $\frac{b}{a}$. См. задачу 1505. **1507.** $1 - \cos x$. Использовать формулу $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \ldots + \sin n\alpha = \frac{1}{2\sin(\alpha/2)}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right]$. **1508.** 1) $\frac{dI}{da} = -\frac{1}{\ln a}$; 2) $\frac{dI}{db} = \frac{1}{\ln b}$. **1509.** $\ln x$. **1510.** $-\sqrt{1+x^4}$. **1511.** $2xe^{-x^4} - e^{-x^2}$. **1512.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x^2}$. **1513.** $x = n\pi$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. **1514.** $\ln 2$. **1515.** $-\frac{3}{8}$. **1516.** $e^x - e^{-x} = 2\operatorname{sh} x$. **1517.** $\sin x$. **1518.** $\frac{1}{2}$. Сумму $s_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} = \frac{1}{n}\left(+ \frac{1}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right)$ можно рассматривать как интегральную для функции $f(x) = x$ на отрезке $[0, 1]$. Поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} s_n = \int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}$. **1519.** $\ln 2$. Сумму $s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right)$ можно рассматривать как интегральную для функции $f(x) = \frac{1}{1+x}$ на отрезке $[0, 1]$, где точки деления имеют вид $x_k = 1 + \frac{k}{n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому $\lim\limits_{\Delta x \to 0} s_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2$. **1520.** $\frac{1}{p+1}$. **1521.** $\frac{7}{3}$. **1522.** $\frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$. **1523.** $\frac{7}{4}$. **1524.** $\frac{16}{3}$. **1525.** $-\frac{2}{3}$. **1526.** $\frac{1}{2}\ln\frac{2}{3}$. **1527.** $\ln\frac{9}{8}$. **1528.** $35\frac{1}{45} - 32\ln 3$. **1529.** $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$. **1530.** $\ln\frac{4}{3}$. **1531.** $\frac{\pi}{16}$. **1532.** $1 - \frac{1}{\sqrt{3}}$. **1533.** $\frac{\pi}{4}$. **1534.** $\frac{\pi}{6}$. **1535.** $\frac{1}{3}\ln\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. **1536.** $\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$. **1537.** $\frac{2}{3}$. **1538.** $\ln 2$. **1539.** $1 - \cos 1$. **1540.** 0. **1541.** $\frac{8}{9\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}$. **1542.** $\operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}$. **1543.** $\operatorname{sh} 1 = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$. **1544.** $\operatorname{th}(\ln 3) - \operatorname{th}(\ln 2) = \frac{1}{5}$. **1545.** $-\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2\pi$. **1546.** 2. **1547.** Расходится. **1548.** $\frac{1}{1-p}$, если $p < 1$; расходится, если $p \geqslant 1$. **1549.** Расходится. **1550.** $\frac{\pi}{2}$. **1551.** Расходится. **1552.** 1. **1553.** $\frac{1}{p-1}$, если $p > 1$; расходится, если $p \leqslant 1$.

1554. π. **1555.** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. **1556.** Расходится. **1557.** Расходится. **1558.** $\frac{1}{\ln 2}$. **1559.** Расходится. **1560.** $\frac{1}{\ln a}$. **1561.** Расходится. **1562.** $\frac{1}{k}$. **1563.** $\frac{\pi^2}{8}$. **1564.** $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\ln 3$. **1565.** $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. **1566.** Расходится. **1567.** Сходится. **1568.** Расходится. **1569—1571.** Сходится. **1572.** Расходится. **1573.** Сходится. **1574.** Указание: $B(p, q) = \int_0^{1/2} f(x)\,dx + \int_{1/2}^1 f(x)\,dx$, где $f(x) = x^{p-1}(1-x)^{q-1}$; так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x)x^{1-p} = 1$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(1-x)^{1-q}f(x) = 1$, то оба интеграла сходятся при $1 - p < 1$ и $1 - q < 1$, т. е. при $p > 0$ и $q > 0$. **1575.** Указание: $\Gamma(p) = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^\infty f(x)\,dx$, где $f(x) = x^{p-1}e^{-x}$. Первый интеграл сходится при $p > 0$, второй — при p произвольном. **1576.** Нет. **1577.** $2\sqrt{2}\int_1^2 \sqrt{t}\,dt$ dt. **1578.** $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$. **1579.** $\int_{\ln 2}^{\ln 3} dt$. **1580.** $\int_0^\infty \frac{f(\operatorname{arctg} t)}{1+t^2}\,dt$. **1581.** $x = (b - a)t + a$. **1582.** $4 - 2\ln 3$. **1583.** $8 - \frac{9}{2\sqrt{3}}\pi$. **1584.** $2 - \frac{\pi}{2}$. **1585.** $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. **1586.** $\frac{\pi}{2\sqrt{1+a^2}}$. **1587.** $1 - \frac{\pi}{4}$. **1588.** $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$. **1589.** $4 - \pi$. **1590.** $\frac{1}{5}\ln 112$. **1591.** $\ln\frac{7+2\sqrt{7}}{9}$. **1592.** $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$. **1593.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **1594.** $\frac{\pi}{2}$. **1599.** $\frac{\pi}{2} - 1$. **1600.** 1. **1601.** $\frac{e^2+3}{8}$. **1602.** $\frac{1}{2}(e\pi + 1)$. **1603.** 1. **1604.** $\frac{a}{a^2+b^2}$. **1605.** $\frac{b}{a^2+b^2}$. **1606.** Решение: $\Gamma(p + 1) = \int_0^\infty x^p e^{-x}\,dx$.

Применяя формулу интегрирования по частям, полагаем $x^p = u$, $e^{-x}dx = dv$. Отсюда

$$du = px^{p-1}\,dx,\quad v = -e^{-x}$$

и

$$\Gamma(p + 1) = [-x^p e^{-x}]_0^\infty + p\int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,dx = p\Gamma(p). \qquad (*)$$

Если p является натуральным числом, то, применяя формулу (*) p раз и учитывая, что

$$\Gamma(1)=\int_0^\infty e^{-x}\,dx=1,$$

получим

$$\Gamma(p+1)=p!$$

1607. $I_{2k}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2k-1)}{2\cdot4\cdot6\ldots2k}\frac{\pi}{2}$, если $n=2k$ — число четное; $I_{2k-1}=\frac{2\cdot4\cdot6\ldots2k}{1\cdot3\cdot5\ldots(2k+1)}\frac{\pi}{2}$, если $n=2k+1$ — число нечетное. $I_9=\frac{128}{315}$; $I_{10}=\frac{63\pi}{512}$.

1608. $\frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$. **1609.** $\frac12 B\left(\frac{m+1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right)$. Положить $\sin^2 x=t$.

1610. а) Плюс; б) минус; в) плюс. (Надо начертить график подынтегральной функции для значений аргумента на отрезке интегрирования.)

1611. а) Первый; б) второй; в) первый. **1612.** $\frac13$. **1613.** a. **1614.** $\frac12$. **1615.** $\frac38$. **1616.** $2\arcsin\frac13$. **1617.** $2<I<\sqrt5$. **1618.** $\frac29<I<\frac27$. **1619.** $\frac{2}{13}\pi<I<\frac27\pi$. **1620.** $0<I<\frac{\pi^2}{32}$. (Подынтегральная функция монотонно растет.) **1621.** $\frac12<I<\frac{\sqrt2}{2}$. **1623.** $s=\frac{32}{3}$. **1624.** 1. **1625.** $\frac12$. Учесть знак функции. **1626.** $4\frac14$. **1627.** 2. **1628.** $\ln 2$. **1629.** $m^2\ln 3$. **1630.** πa^2. **1631.** 12. **1632.** $\frac43 p^2$. **1633.** $4\frac12$. **1634.** $10\frac23$. **1635.** 4. **1636.** $\frac{32}{3}$. **1637.** $\frac\pi2-\frac13$. **1638.** $e+\frac1e-2=2(\mathrm{ch}\,1-1)$. **1639.** $ab[2\sqrt3-\ln(2+\sqrt3)]$. **1640.** $\frac38\pi a^2$. См. приложение VI, рис. 27. **1641.** $2a^2e^{-1}$. **1642.** $\frac43a^2$. **1643.** 15π. **1644.** $\frac92\ln 3$. **1645.** 1. **1646.** $3\pi a^2$. См. приложение VI, рис. 23. **1647.** $a^2\left(2+\frac\pi2\right)$. См. приложение VI, рис. 24. **1648.** $2\pi+\frac43$ и $6\pi-\frac43$. **1649.** $\frac{16}{3}\pi-\frac{4\sqrt3}{3}$ и $\frac{32}{3}\pi+\frac{4\sqrt3}{3}$. **1650.** $\frac38\pi ab$. **1651.** $3\pi a^2$. **1652.** $\pi(b^2+2ab)$. **1653.** $6\pi a^2$. **1654.** $\frac32a^2$. Для петли параметр t меняется в пределах $0\leqslant t\leqslant+\infty$. См. приложение VI, рис. 22. **1655.** $\frac32\pi a^2$. См. приложение VI, рис. 28. **1656.** $8\pi^3a^2$. См. приложение VI, рис. 30. **1657.** $\frac{\pi a^2}{8}$. **1658.** a^2.

1659. $\frac{\pi a^2}{4}$. См. приложение VI, рис. 33. **1660.** $\frac92\pi$. **1661.** $\frac{14-8\sqrt2}{3}a^2$. **1662.** $\frac{\pi p^2}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}$. **1663.** $a^2\left(\frac\pi3+\frac{\sqrt3}{2}\right)$. **1664.** $\pi/\sqrt2$. Перейти к полярным координатам. **1665.** $\frac{8}{27}(10\sqrt{10}-1)$. **1666.** $\sqrt{h^2-a^2}$. Использовать формулу $\mathrm{ch}^2\alpha-\mathrm{sh}^2\alpha=1$. **1667.** $\sqrt2+\ln(1+\sqrt2)$. **1668.** $\sqrt{1+e^2}-\sqrt2+\ln\frac{(\sqrt{1+e^2}-1)(\sqrt2+1)}{e}$. **1669.** $1+\frac12\ln\frac32$. **1670.** $\ln(e+\sqrt{e^2-1})$. **1671.** $\ln(2+\sqrt3)$. **1672.** $\frac14(e^2+1)$. **1673.** $a\ln\frac ab$. **1674.** $2a\sqrt3$. **1675.** $\ln\frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1}+a-b=\ln\frac{\mathrm{sh}\,b}{\mathrm{sh}\,a}$. **1676.** $\frac12aT^2$. См. приложение VI, рис. 29. **1677.** $\frac{4(a^3-b^3)}{ab}$. **1678.** $16a$. **1679.** $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac a2\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2})$. **1680.** $8a$. **1681.** $2a[\sqrt2+\ln(\sqrt2+1)]$. **1682.** $\frac{\sqrt5}{2}+\ln\frac{3+\sqrt5}{2}$. **1683.** $\frac{a\sqrt{1+m^2}}{m}$. **1684.** $\frac12[4+\ln 3]$. **1685.** $\frac{\pi a^5}{30}$. **1686.** $\frac43\pi ab^2$. **1687.** $\frac{a^3\pi}{2}(e^2+4-e^{-2})$. **1688.** $\frac38\pi^2$. **1689.** $v_x=\frac\pi4$. **1690.** $v_y=\frac47\pi$. **1691.** $v_x=\frac\pi2$; $v_y=2\pi$. **1692.** $\frac{16\pi a^3}{5}$. **1693.** $\frac{32}{15}\pi a^3$. **1694.** $\frac43\pi p^3$. **1695.** $\frac{3}{10}\pi$. **1696.** $\frac{\pi a^3}{2}(15-16\ln 2)$. **1697.** $2\pi^2a^3$. **1698.** $\frac{\pi R^2H}{2}$. **1699.** $\frac{16}{15}\pi h^2a$.

1701. а) $5\pi^2a^3$; б) $6\pi^3a^3$; в) $\frac{\pi a^3}{6}(9\pi^2-16)$. **1702.** $\frac{32}{105}\pi a^3$. **1703.** $\frac83\pi a^3$. **1704.** $\frac{4}{21}\pi a^3$. **1705.** $\frac h3\left(AB+\frac{Ab+aB}{2}+ab\right)$. **1706.** $\frac{\pi abh}{3}$. **1707.** $\frac{128}{105}a^3$. **1708.** $\frac83\pi a^2b$. **1709.** $\frac12\pi a^2h$. **1710.** $\frac{16}{3}a^3$. **1711.** $\pi a^2\sqrt{pq}$. **1712.** $\pi abh\left(1+\frac{h^2}{3c^2}\right)$. **1713.** $\frac43\pi abc$. **1714.** $\frac{8\pi}{3}(\sqrt{13^3}-1)$; $\frac{16}{3}\pi a^2(5\sqrt5-8)$. **1715.** $2\pi[\sqrt2+\ln(\sqrt2+1)]$. **1716.** $\pi(\sqrt5-\sqrt2)+\pi\ln\frac{2(\sqrt2+1)}{\sqrt5+1}$. **1717.** $\pi[\sqrt2+\ln(1+\sqrt2)]$. **1718.** $\frac{\pi a^2}{4}(e^2-e^{-2}+4)=\frac{\pi a^2}{2}(2+\mathrm{sh}\,2)$. **1719.** $\frac{12}{5}\pi a^2$. **1720.** $\frac\pi3(e-1)(e^2+e+4)$.

1721. $4\pi^2 ab$. Здесь $y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}$. Взяв знак плюс, получим внешнюю поверхность тора, а знак минус — получим внутреннюю поверхность тора. **1722.** 1) $2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$; 2) $2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, где $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ (эксцентриситет эллипса). **1723.** а) $\frac{64\pi a^2}{3}$; б) $16\pi^2 a^2$; в) $\frac{32}{3}\pi a^2$. **1724.** $\frac{128}{5}\pi a^2$. **1725.** $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$. **1726.** $\frac{128}{5}\pi a^2$. **1727.** $M_X = \frac{b}{2}\sqrt{a^2+b^2}$; $M_Y = \frac{a}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. **1728.** $M_a = \frac{ab^2}{2}$; $M_b = \frac{a^2 b}{2}$. **1729.** $M_X = M_Y = \frac{a^3}{6}$; $\bar{x} = \bar{y} = \frac{a}{3}$. **1730.** $M_X = m_Y = \frac{3}{5}a^2$; $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{5}a$. **1731.** $2\pi a^2$. **1732.** $x = 0$; $\bar{y} = \frac{a}{4}\frac{2+\operatorname{sh}2}{\operatorname{sh}1}$. **1733.** $\bar{x} = \frac{a\sin\alpha}{\alpha}$; $\bar{y} = 0$. **1734.** $\bar{x} = \pi a$; $\bar{y} = \frac{4}{3}a$. **1735.** $\bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$; $\bar{y} = \frac{4b}{3\pi}$. **1736.** $\bar{x} = \bar{y} = \frac{9}{20}$. **1737.** $\bar{x} = \pi a$; $\bar{y} = \frac{5}{6}a$. **1738.** $\left(0;\ 0;\ \frac{a}{2}\right)$. Разбиваем полусферу на элементарные шаровые пояса площади $d\sigma$ горизонтальными плоскостями. Имеем $d\sigma = 2\pi a\,dz$, где dz — высота пояса. Отсюда $\bar{z} = \dfrac{2\pi\int_0^a az\,dz}{2\pi a^2}$. В силу симметрии $\bar{x} = \bar{y} = 0$.

1739. На расстоянии $\frac{3}{4}$ высоты от вершины конуса. Решение. Разбиваем конус на элементы плоскостями, параллельными основанию. Масса элементарного слоя $dm_i = \gamma\pi\rho^2\,dz$, где γ — плотность, z — расстояние секущей плоскости от вершины конуса, $\rho = \frac{r}{h}z$. Отсюда $\bar{z} = \dfrac{\pi\int_0^h \frac{r^2}{h^2}z^3\,dz}{\frac{1}{3}\pi r^2 h} = \frac{3}{4}h$. **1740.** $\left(0;\ 0;\ +\frac{3}{8}a\right)$. Решение. В силу симметрии $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Для определения $\bar{z}$ разбиваем полушар на элементарные слои плоскостями, параллельными горизонтальной плоскости. Масса такого элементарного слоя $dm = \gamma\pi r^2\,dz$, где γ — плотность, z — расстояние секущей плоскости от основания полушара, $r = \sqrt{a^2 - z^2}$ — радиус сечения. Имеем $\bar{z} = \dfrac{\pi\int_0^a (a^2 - z^2)z\,dz}{\frac{2}{3}\pi a^3} = \frac{3}{8}a$. **1741.** $I = \pi a^3$. **1742.** $I_a = \frac{1}{3}ab^3$;

$I_b = \frac{1}{3}a^3 b$. **1743.** $I = \frac{4}{15}hb^3$. **1744.** $I_a = \pi ab^3$; $I_b = \frac{1}{4}\pi a^3 b$. **1745.** $I = \frac{1}{2}\pi(R_2^4 - R_1^4)$. Разбиваем кольцо на элементарные концентрические кольца. Масса такого элемента $dm = \gamma^2\pi r\,dr$ и момент инерции $I = 2\pi\int_{R_1}^{R_2} r^3\,dr = \frac{1}{2}\pi(R_2^4 - R_1^4)$ $(\gamma = 1)$.

1746. $I = \frac{1}{10}\pi R^4 H\gamma$. Разбиваем конус на элементарные цилиндрические трубки параллельно оси конуса. Объем такой элементарной трубки $dV = 2\pi rh\,dr$, где r — радиус трубки (расстояние до оси конуса), $h = H\left(1 - \frac{r}{R}\right)$ — высота трубки; тогда момент инерции $I = \gamma\int_0^R 2\pi H\left(1 - \frac{r}{R}\right)r^3\,dr = \frac{\gamma\pi R^4 H}{10}$, где γ — плотность конуса. **1747.** $I = \frac{2}{5}Ma^2$. Разбиваем шар на элементарные цилиндрические трубки, осью которых является данный диаметр. Элементарный объем $dV = 2\pi rh\,dr$, где r — радиус трубки, $h = 2a\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$ — ее высота. Тогда момент инерции $I = 4\pi a\gamma\int_0^a\sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}\,r^3\,dr = \frac{8}{15}\pi a^5\gamma$, где γ — плотность шара, а так как масса $M = \frac{4}{3}\pi a^3\gamma$, то $I = \frac{2}{5}Ma^2$. **1748.** $V = 2\pi^2 a^2 b$; $S = 4\pi^2 ab$. **1749.** а) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{2}{5}a$; б) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{9}{10}p$. **1750.** а) $\bar{x} = 0$, $\bar{y} = \frac{4}{3}\frac{r}{\pi}$ (оси координат выбраны так, что ось OX совпадает с диаметром, начало координат — в центре круга); б) $\bar{x} = \frac{h}{3}$. Решение. Объем тела — двойного конуса, полученного от вращения треугольника вокруг его основания, равен $V = \frac{1}{3}\pi bh^2$, где b — основание, h — высота треугольника. По теореме Гульдена тот же объем $V = 2\pi\bar{x}\cdot\frac{1}{2}bh$, где $\bar{x}$ — расстояние центра тяжести от основания. Отсюда $\bar{x} = \frac{h}{3}$.

1751. $v_0 t - \frac{gt^2}{2}$. **1752.** $\frac{c^2}{2g}\ln\left(1 + \frac{v_0^2}{c^2}\right)$. **1753.** $x = \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$; $v_{\text{ср}} = \frac{2}{\pi}v_0$. **1754.** $s = 10^4$ м. **1755.** $v = \frac{A}{b}\ln\left(\frac{a}{a - bt}\right)$; $h = \frac{A}{b^2}\left[bt_1 - (a - bt_1)\ln\frac{a}{a - bt_1}\right]$. **1756.** $A = \frac{\pi\gamma}{2}gR^2H^2$. Указание: элементарная сила тяжести равна $dF = \gamma\pi R^2 g\,dx$, где γ — плотность воды. Следовательно, элементарная работа силы $dA = \gamma\pi R^2(H-x)g\,dx$, где x — уровень воды. **1757.** $A=\frac{\pi}{12}\gamma R^2H^2$. **1758.** $A=\frac{\pi\gamma}{4}R^4g$. **1759.** $A=\gamma g\pi R^3H$. **1760.** $A=\frac{mgh}{1+\frac{h}{R}}$; $A_\infty = mgR$. Решение. Сила, действующая на тело массы m, равна $F=k\frac{mM}{r^2}$, где r — расстояние от центра Земли. Так как при $r=R$ имеем $F=mg$, то $kM=gR^2$. Искомая работа равна $A=\int_R^{R+h} k\frac{mM}{r^2}\,dr = kmM\left(\frac1R-\frac1{R+h}\right)=\frac{mgh}{1+\frac hR}$. При $h=\infty$ имеем $A_\infty=mgR$.

1761. $1{,}6\cdot10^{12}$ Дж. Сила взаимодействия зарядов $F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_0q_1}{x^2}$, где $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}\ \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н}\cdot \text{м}^2}$ — электрическая постоянная. Следовательно, работа при перемещении заряда q_1 из точки x_1 в точку x_2 будет $A=\frac{q_0q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{x^2} = \frac{q_0q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac1{x_1}-\frac1{x_2}\right)\approx 1{,}6\cdot10^{12}$ Дж. **1762.** $A=0{,}08\pi\ln2$ (Дж). Для изотермического процесса $pV=p_0V_0$. Работа при расширении газа от объема V_0 до объема V_1 равна $A=\int_{V_0}^{V_1}p\,dV = p_0V_0\ln\frac{V_1}{V_0}$. **1763.** $A\approx1{,}5$ Дж. Для адиабатного процесса справедлив закон Пуассона $pV^k=p_0V_0^k$, где $k\approx1{,}4$. Отсюда $A=\int_{V_0}^{V_1}\frac{p_0V_0^k}{V^k}\,dV=\frac{p_0V_0}{k-1}\left[1-(V_0/V_1)^{k-1}\right]$. **1764.** $A=\frac43\pi\mu Pa$. Если a — радиус основания вала, то давление $p=P/(\pi a^2)$. Сила трения от кольца шириной dr, удаленного от центра на r, равна $\frac{2\mu P}{a^2}r\,dr$. Работа силы трения на кольце при полном обороте есть $dA=\frac{4\pi\mu P}{a^2}r^2\,dr$. Поэтому полная работа $A=\frac{4\pi\mu P}{a^2}\int_0^a r^2\,dr=\frac43\pi\mu Pa$. **1765.** $\frac14MR^2\omega^2$. Кинетическая энергия элемента диска

$dK=\frac{v^2dm}{2}=\frac{pr^2\omega^2}{2}d\sigma$, где $d\sigma=2\pi r\,dr$ — элемент площади, r — расстояние его от оси вращения, ρ — поверхностная плотность, $\rho=M/\pi R^2$. Таким образом, $dK=\frac{M\omega^2}{2\pi R^2}r^2\,d\sigma$. Отсюда $K=\frac{M\omega^2}{R^2}\int_0^R r^3\,dr=\frac{MR^2\omega^2}{4}$. **1766.** $K=\frac{3}{20}MR^2\omega^2$. **1767.** $K=\frac15MR^2\omega^2\approx5{,}8\cdot10^7$ Дж. **1768.** $p=bh^2/6$. **1769.** $P=\frac{(a+2b)h^2}{6}\approx 11{,}3\cdot10^7$ Н. **1770.** $P=ab\gamma\pi h$. **1771.** $P=\frac{\pi R^2H}{3}$ (вертикальная составляющая силы давления направлена снизу вверх). **1772.** $533\frac13$ г. **1773.** $\approx 419{,}16$ Дж. **1774.** $M=\frac{hb^2p}{2}$. **1775.** $\frac{GMm}{a(a+l)}$ (G — постоянная тяготения). **1776.** $\frac{\pi pa^4}{8\mu l}$. Решение: $Q=\int_0^a v\,2\pi r\,dr=\frac{2\pi p}{4\mu l}\int_0^a(a^2-r^2)\,dr=\frac{\pi p}{2\mu l}\left[\frac{a^2r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^a=\frac{\pi pa^4}{8\mu l}$. **1777.** $Q=\int_0^{2b}va\,dy=\frac23p\frac{ab^3}{\mu l}$. (Ось абсцисс направить по большой нижней стороне прямоугольника, ось ординат — перпендикулярно к ней, в середине.) **1778.** Решение: $S=\int_{v_1}^{v_2}\left(\frac1a\right)dv$, с другой стороны, $\frac{dv}{dt}=a$, откуда $dt=\left(\frac1a\right)dv$, а следовательно, время разгона $t=\int_{v_1}^{v_2}\frac{dv}{a}=S$. **1779.** $M_x=-\int_0^x\frac Ql(x-t)\,dt+\frac Q2x = -\frac Ql\left[xt-\frac{t^2}{2}\right]_0^x+\frac Q2x==\frac{Qx}{2}\left(1-\frac xl\right)$. **1780.** $M_x=-\int_0^x(x-t)kt\,dt+Ax=\frac{kx}{6}(l^2-x^2)$. **1781.** $Q=0{,}5TRI_0^2$. Использовать закон Джоуля—Ленца.

Глава VI

1782. $V=\frac23(y^2-x^2)x$. **1783.** $S=\frac23(x+y)\sqrt{4z^2+3(x-y)^2}$. **1784.** $f\left(\frac12;3\right)=\frac53$; $f(1;-1)=-2$. **1785.** $\frac{y^2-x^2}{2xy}$, $\frac{x^2-y^2}{2xy}$, $\frac{2xy}{x^2-y^2}$. **1786.** $f(x,x^2)=1+x-x^2$.

1787. $z=\frac{R^4}{1-R^2}$. **1788.** $f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}$. Указание. Представить данную функцию в виде $f\left(\frac{y}{x}\right)=\pm\sqrt{\left(\frac{y}{x}\right)}$ и заменить $\frac{y}{x}$ на x. **1789.** $f(x, y)=\frac{x^2-xy}{2}$. Обозначим $x+y=u$, $x-y=v$. Тогда $x=\frac{u+v}{2}$, $y=\frac{u-v}{2}$; $f(u, v)=\frac{u+v}{2}\cdot\frac{u-v}{2}+\left(\frac{u-v}{2}\right)^2=\frac{u^2-uv}{2}$. Остается переименовать аргументы u и v в x и y. **1790.** $f(u)=u^2+2u$; $z=x-1+\sqrt{y}$. В равенстве $x=1+f(\sqrt{x}-1)$ положить $\sqrt{x}-1=u$; тогда $x=(u+1)^2$ и, следовательно, $f(u)=u^2+2u$. **1791.** $f(y)=\sqrt{1+y^2}$; $z=\frac{x}{|x|}\sqrt{x^2+y^2}$. При $x=1$ имеем равенство $\sqrt{1+y^2}=1\cdot f\left(\frac{y}{l}\right)$, т. е. $f(y)=\sqrt{1+y^2}$. Тогда $f\left(\frac{y}{x}\right)=\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$ и $z=x\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\sqrt{x^2+y^2}$. **1792.** а) Единичный круг с центром в начале координат, включая окружность ($x^2+y^2\leqslant 1$); б) биссектриса I и III координатных углов $y=x$; в) полуплоскость, расположенная над прямой $x+y=0$ ($x+y>0$); г) полоса, заключенная между прямыми $y=\pm 1$, включая эти прямые ($-1\leqslant y\leqslant 1$); д) квадрат, образованный отрезками прямых $x=\pm 1$ и $y=\pm 1$, включая его стороны ($-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$); е) часть плоскости, примыкающая к оси OX и заключенная между прямыми $y=\pm x$, включая эти прямые и исключая начало координат ($-x\leqslant y\leqslant x$ при $x>0$, $x\ x\leqslant y\leqslant -x$ при $x<0$); ж) две полосы $x\geqslant 2$, $-2\leqslant y\leqslant 2$ и $x\leqslant -2$, $-2\leqslant y\leqslant 2$; з) кольцо, заключенное между окружностями $x^2+y^2=a^2$ и $x^2+y^2=2a^2$, включая границы; и) полосы $2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$, $y\geqslant 0$ и $(2n+1)\pi\leqslant x\leqslant(2n+2)\pi$, $y\leqslant 0$, где n — целое число; к) часть плоскости, расположенная выше параболы $y=-x^2$ ($x^2+y>0$); л) вся плоскость XOY; м) вся плоскость XOY, за исключением начала координат; н) часть плоскости, расположенная выше параболы $y^2=x$ и вправо от оси OY, включая точки оси OY и исключая точки параболы ($x\geqslant 0$, $y>\sqrt{x}$); о) вся плоскость, за исключением точек прямых $x=1$ и $y=0$; п) семейство концентрических колец $2\pi k\leqslant x^2+y^2\leqslant\pi(2k+1)$ ($k=0, 1, 2, \ldots$). **1793.** а) I октант (включая границу); б) I, III, VI и VIII октанты (исключая границу); в) куб, ограниченный плоскостями $x=\pm 1$, $y=\pm 1$ и $z=\pm 1$, включая его грани; г) шар радиуса 1 с центром в начале координат, включая его поверхность. **1794.** а) Плоскость; линии уровня — прямые, параллельные прямой $x+y=0$; б) параболоид вращения; линии уровня — концентрические окружности с центром в начале координат; в) гиперболический параболоид; линии уровня — равносторонние гиперболы; г) конус 2-го порядка; линии уровня — равносторонние гиперболы; д) параболический цилиндр, образующие которого параллельны прямой $x+y+1=0$, линии уровня — параллельные прямые; е) боковая поверхность четырехугольной пирамиды, линии уровня — контуры квадратов; ж) линии уровня — параболы $y=Cx^2$; з) линии уровня — параболы $y=C\sqrt{x}$; и) линии уровня — окружности $C(x^2+y^2)=2x$. **1795.** а) Параболы $y=C-x^2$ ($C>0$); б) гиперболы $xy=C$ ($|C|\leqslant 1$); в) окружности $x^2+y^2=C^2$; г) прямые $y=ax+C$; д) прямые $y=Cx$ ($x\neq 0$). **1796.** а) Плоскости, параллельные плоскости $x+y+z=0$; б) концентрические сферы с центром в начале координат; в) при $u>0$ — однополостные гиперболоиды вращения вокруг оси OZ; при $u<0$ — двуполостные гиперболоиды вращения вокруг той же оси; оба семейства поверхностей разделяет конус $x^2+y^2-z^2=0$ ($u=0$). **1797.** а) 0; б) 0; в) 2; г) e^k; д) предел не существует; е) предел не существует; в пункте б) перейти к полярным координатам; в пунктах д) и е) рассмотреть изменение x и y вдоль прямых $y=kx$ и показать, что данное выражение может стремиться к различным пределам в зависимости от выбранного k. **1798.** Непрерывна. **1799.** а) Точка разрыва при $x=0$, $y=0$; б) все точки внутри прямой $x=y$ (линия разрыва); в) линия разрыва — окружность $x^2+y^2=1$; г) линии разрыва — координатные оси. **1800.** Положив $y=y_1=\mathrm{const}$, получим функцию $\varphi_1(x)=\frac{2xy_1}{x^2+y_1^2}$, которая непрерывна всюду, так как при $y_1\neq 0$ знаменатель $x^2+y_1^2\neq 0$, а при $y_1=0$ $\varphi_1(x)\equiv 0$. Аналогично, при $x=x_1=\mathrm{const}$ функция z имеет разрыв в точке $(0, 0)$, так как не существует $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} z$. Действительно, перейдя к полярным координатам ($x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$), получим $z=\sin 2\varphi$, откуда видно, что если $x\to 0$ и $y\to 0$ так, что $\varphi=\mathrm{const}$ ($0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$), то $z\to\sin 2\varphi$. Так как эти предельные значения функции z зависят от направления φ, то z не имеет предела при $x\to 0$ и $y\to 0$.

1801. $\frac{\partial z}{\partial x}=3(x^2-ay)$, $\frac{\partial z}{\partial y}=3(y^2-ax)$. **1802.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2y}{(x+y)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{2x}{(x+y)^2}$. **1803.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}$. **1804.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. **1805.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$. **1806.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}\,(x+\sqrt{x^2+y^2})}$. **1807.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$. **1808.** $\frac{\partial z}{\partial x}=yx^{y-1}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=x^y\ln x$. **1809.** $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}e^{\sin\frac{y}{x}}\cos\frac{y}{x}$.

1810. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{xy^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yx^2\sqrt{2x^2-2y^2}}{|y|(x^4-y^4)}$. **1811.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x+a}{2y\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x+a}{\sqrt{y}}$. **1812.** $\frac{\partial z}{\partial x}=yz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=xz(xy)^{z-1}$, $\frac{\partial u}{\partial z}=(xy)^z\ln(xy)$.

1813. $\frac{\partial u}{\partial x} = yz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial y} = xz^{xy}\ln z$, $\frac{\partial u}{\partial z} = xyz^{xy-1}$. **1814.** $f'_x(1, 2) = 1/2$, $f'_y(2, 1) = 0$. **1815.** $f'_x(1; 2; 0) = 1$, $f'_y(1; 2; 0) = 1/2$, $f'_z(1; 2; 0) = 1/2$. **1820.** $-\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$. **1821.** r. **1826.** $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \varphi(x)$. **1827.** $z = \frac{x^2}{2} + y^2\ln x + \sin y - \frac{1}{2}$. **1828.** 1) $\operatorname{tg}\alpha = 4$, $\operatorname{tg}\beta = \infty$, $\operatorname{tg}\gamma = 1/4$; 2) $\operatorname{tg}\alpha = \infty$, $\operatorname{tg}\beta = 4$, $\operatorname{tg}\gamma = 1/4$. **1829.** $\frac{\partial S}{\partial a} = \frac{1}{2}h$, $\frac{\partial S}{\partial b} = \frac{1}{2}h$, $\frac{\partial S}{\partial h} = \frac{1}{2}(a+b)$. **1830.** Указание. Проверить, что функция равна нулю на всей оси OX и на всей оси OY, и воспользоваться определением частных производных. Убедиться в том, что $f'x(0, 0) = f'y(0, 0) = 0$. **1831.** $\Delta f = 4\Delta x + \Delta y + 2\Delta x^2 + 2\Delta x\,\Delta y + \Delta x^2\,\Delta y$; $\mathrm{d}f = 4\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$; а) $\Delta f - \mathrm{d}f = 8$; б) $\Delta f - \mathrm{d}f = 0{,}062$. **1833.** $\mathrm{d}z = 3(x^2 - y)\mathrm{d}x + 3(y^2 - x)\mathrm{d}y$. **1834.** $\mathrm{d}z = 2xy^3\,\mathrm{d}x + 3x^2y^2\,\mathrm{d}y$. **1835.** $\mathrm{d}z = \frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}(y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y)$. **1836.** $\mathrm{d}z = \sin 2x\,\mathrm{d}x - \sin 2y\,\mathrm{d}y$. **1837.** $\mathrm{d}z = y^2x^{y-1}\,\mathrm{d}x + x^y(1 + y\ln x)\,\mathrm{d}y$. **1838.** $\mathrm{d}z = \frac{2}{x^2+y^2}(x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)$. **1839.** $\mathrm{d}f = \frac{1}{x+y}\left(\mathrm{d}x - \frac{x}{y}\mathrm{d}y\right)$. **1840.** $\mathrm{d}z = 0$. **1841.** $\mathrm{d}z = \frac{2}{x\sin(2y/x)} \times \left(\mathrm{d}y - \frac{y}{x}\mathrm{d}x\right)$. **1842.** $\mathrm{d}f(1, 1) = \mathrm{d}x - 2\mathrm{d}y$. **1843.** $\mathrm{d}u = yz\,\mathrm{d}x + zx\,\mathrm{d}y + xy\,\mathrm{d}z$. **1844.** $\mathrm{d}u = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **1845.** $\mathrm{d}u = \left(xy + \frac{x}{y}\right)^{z-1}\left[\left(y + \frac{1}{y}\right)z\,\mathrm{d}x + \left(1 - \frac{1}{y^2}\right) \times xz\,\mathrm{d}y + \left(xy + \frac{x}{y}\right)\ln\left(xy + \frac{x}{y}\right)\mathrm{d}z\right]$. **1846.** $\mathrm{d}u = \frac{z^2}{x^2y^2+z^4}\left(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y - \frac{2xy}{z}\,\mathrm{d}z\right)$. **1847.** $\mathrm{d}f(3, 4, 5) = \frac{1}{25}(5\mathrm{d}z - 3\mathrm{d}x - 4\mathrm{d}y)$. **1848.** $\mathrm{d}l = 0{,}062$ см; $\Delta l = 0{,}065$ см. **1849.** 75 см^3 (относительно внутренних размеров). **1850.** $\frac{1}{8}$ см. Положить дифференциал площади сектора равным нулю и найти отсюда дифференциал радиуса. **1851.** а) 1,00; б) 4,998; в) 0,273. **1853.** С точностью до 4 м (точнее 4,25 м). **1854.** $\pi\frac{\alpha g - \beta l}{g\sqrt{lg}}$. **1855.** $\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{\rho}(\mathrm{d}y\cos\alpha - \mathrm{d}x\sin\alpha)$. **1856.** $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{e^t(t\ln t - 1)}{t\ln^2 t}$. **1857.** $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{t}{\sqrt{y}}\operatorname{ctg}\frac{x}{\sqrt{y}}\left(6 - \frac{x}{2y^2}\right)$. **1858.** $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2t\ln t\operatorname{tg}t + \frac{(t^2+1)\operatorname{tg}t}{t} + \frac{(t^2+1)\ln t}{\cos^2 t}$. **1859.** $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$. **1860.** $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (\sin x)^{\cos x}(\cos x\operatorname{ctg}x - \sin x\ln\sin x)$.

1861. $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}$; $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2}$. **1862.** $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$; $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = x^y\left[\varphi_1(x)\ln x + \frac{y}{x}\right]$. **1863.** $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xf'_u(u, v) + ye^{xy}f'_v(u, v)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -2yf'_u(u, v) + xe^{xy}f'_v(u, v)$. **1864.** $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$; $\frac{\partial z}{\partial v} = 1$. **1865.** $\frac{\partial z}{\partial x} = y\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)f'\left(xy + \frac{y}{x}\right)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \left(x + \frac{1}{x}\right)f'\left(xy + \frac{y}{x}\right)$. **1867.** $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'_x(x, y, z) + \varphi'(x)f'_y(x, y, z) + f'_z(x, y, z)[\psi'_x(x, y) + \psi'_y(x, y)\varphi'(x)]$. **1873.** Периметр возрастает со скоростью 2 м/с, площадь возрастает со скоростью 70 м^2/с. **1874.** $\frac{1+2t^3+3t^4}{\sqrt{1+t^2+t^4}}$. **1875.** $20\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ км/ч. **1876.** $-\frac{9\sqrt{3}}{2}$. **1877.** 1. **1878.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **1879.** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **1880.** 68/13. **1881.** $\frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3}$. **1882.** а) (2; 0); б) (0; 0) и (1; 1); в) (7; 2; 1). **1884.** $9\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$. **1885.** $\frac{1}{4}(5\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$. **1886.** $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. **1887.** $|\operatorname{grad} u| = 6$; $\cos\alpha = 2/3$, $\cos\beta = -2/3$, $\cos\gamma = 1/3$. **1888.** $\cos\varphi = 3/\sqrt{10}$. **1889.** $\operatorname{tg}\varphi = 8{,}944$; $\varphi \approx 83°37'$. Поскольку вектор grad z в точке (2, 1, 8) и вектор $\mathbf{k}$ лежат в одной плоскости, то $|\operatorname{grad} z|$ в рассматриваемой точке определяет тангенс угла наклона наибольшего подъема поверхности. **1891.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{abcy^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{abcxy}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{abcx^2}{(b^2x^2+a^2y^2)^{3/2}}$. **1892.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2(y-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$. **1893.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{xy}{(2xy+y^2)^{3/2}}$. **1894.** $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = 0$. **1895.** $\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{r^2-x^2}{r^3}$. **1896.** $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial x} = 1$. **1897.** $\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial z} = \alpha\beta\gamma x^{\alpha-1}y^{\beta-1}z^{\gamma-1}$. **1898.** $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2} = -x^2y\cos(xy) - 2x\sin(xy)$. **1899.** $f''_{xx}(0, 0) = m(m-1)$; $f''_{xy}(0, 0) = mn$; $f''_{yy}(0, 0) = n(n-1)$. **1902.** Проверить, пользуясь правилами дифференцирования и определением частной производной, что $f'_x(x, y) = y\left[\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + \frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right]$ (при $x^2 + y^2 \neq 0$), $f'_x(0, 0) = 0$ и, следовательно, $f'_x(0, y) = -y$ при $x = 0$ и при любом y. Отсюда $f''_{xy}(0, y) = -1$, в частности $f''_{xy}(0, 0) = -1$. Аналогично находим, что $f''_{yx}(0, 0) = 1$.

1903. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2f'_u(u, v) + 4x^2f''_{uu}(u, v) + 4xyf''_{uu}(u, v) + y^2f''_{vv}(u, v)$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f'_v(u, v) + 4xyf''_{uu}(u, v) + 2(x^2 + y^2)f''_{uv}(u, v) + xyf''_{vv}(u, v);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2f'_u(u, v) + 4y^2 f''_{uu}(u, v) + 4xyf''_{uv}(u, v) + x^2 f''_{vv}(u, v).$$

1904. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''_{xx} + 2f''_{xz}\varphi'_x + f''_{zz}(\varphi'_x)^2 + f'_z\varphi''_{xx}$.

1905. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{uu}(\varphi'_x)^2 + 2f''_{uv}\varphi'_x\psi'_x + f''_{vv}(\psi'_x)^2 + f'_u\varphi''_{xx} + f'_v\psi''_{xx}$;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{uu}\varphi'_x\varphi'_y + f''_{uv}(\varphi'_x\psi'_y + \psi'_x\varphi'_y) + f''_{vv}\psi'_x\psi'_y + f'_u\varphi''_{xy} + f'_v\psi''_{xy};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{uu}(\varphi'_y)^2 + 2f''_{uv}\varphi'_y\psi'_y + f''_{vv}(\psi'_y)^2 + f'_u\varphi''_{yy} + f'_v\psi''_{yy}.$$

1914. $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$. **1915.** $u(x, y) = x\varphi(y) + \psi(y)$. **1916.** $d^2 z = e^{xy}[(y\,dx + x\,dy)^2 + 2dx\,dy]$. **1917.** $d^2 u = 2(x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy)$. **1918.** $d^2 z = 4\varphi''(t)(x\,dz + y\,dy)^2 + 2\varphi'(t)(dx^2 + dy^2)$. **1919.** $dz = \left(\frac{x}{y}\right)^{xy} xy \times \left(y\ln\frac{ex}{y}\,dx + x\ln\frac{x}{ey}\,dy\right)$; $d^2 z = \left(\frac{x}{y}\right)^{xy}\left[\left(y^2\ln^2\frac{ex}{y} + \frac{x}{y}\right)dx^2 + 2\left(xy\ln\frac{ex}{y} \times \ln\frac{x}{ey} + \ln\frac{x}{y}\right)dx\,dy + \left(x^2\ln^2\frac{x}{ey} - \frac{x}{y}\right)dy^2\right]$. **1920.** $d^2 z = a^2 f''_{uu}(u, v)dx^2 + 2abf''_{uv}(u, v)dx\,dy + b^2 f''_{vv}(u, v)dy^2$. **1921.** $d^2 z = (ye^x f'_v + e^{2y}f''_{uu} + 2ye^{x+y}f''_{uv} + y^2e^{2x}f''_{vv})dx^2 + 2(e^y f'_u + e^x f'_v + xe^{2y}f''_{uu} + e^{x-y}(1 + xy)f''_{uv} + ye^{2x}f''_{vv})dx\,dy + (xe^y f'_u + x^2e^{2y}f''_{uu} + 2xe^{x+y}f''_{uv} + e^{2x}f''_{vv})dy^2$. **1922.** $d^3 z = e^x(\cos y\,dx^3 - 3\sin y\,dx^2\,dy - 3\cos y\,dx\,dy^2 + \sin y\,dy^3)$. **1923.** $d^3 z = -y\cos x\,dx^3 - 3\sin x\,dx^2\,dy - 3\cos y\,dx\,dy^2 + x\sin y\,dy^3$. **1924.** $df(1; 2) = 0$; $d^2 f(1; 2) = 6dx^2 + 2dx\,dy + 4{,}5dy^2$. **1925.** $d^2 f(0, 0, 0) = 2dx^2 + 4dy^2 + 6dz^2 - 4dx\,dy + 8dx\,dz + 4dy\,dz$. **1926.** $xy + C$. **1927.** $x^3 y - \frac{y^3}{3} + \sin x + C$. **1928.** $\frac{x}{x+y} + \ln(x + y) + C$. **1929.** $\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{y} + C$. **1930.** $\frac{x}{y} + C$. **1931.** $\sqrt{x^2 + y^2} + C$. **1932.** $a = -1$, $b = -1$, $z = \frac{x - y}{x^2 + y^2} + C$. **1933.** $x^2 + y^2 + z^2 + xy + xz + yz + C$. **1934.** $x^3 + 2xy^2 + 3xz + y^2 - yz - 2z + C$. **1935.** $x^2yz - 3xy^2z + 4x^2y^2 + 2x + y + 3z + C$. **1936.** $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + C$. **1937.** $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + C$. **1938.** $\lambda = -1$. Написать условие полного

дифференциала для выражения $X\,dx + Y\,dy$. **1939.** $f'_x = f'_y$. **1940.** $u = \int_a^{xy} f(z)\,dz + C$.

1941. $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{b^4}{a^2 y^3}$; $\frac{d^3 y}{dx^3} = -\frac{3b^6 x}{a^4 y^5}$. **1942.** Уравнение, определяющее y, есть уравнение пары прямых. **1943.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y^x \ln y}{1 - xy^{x-1}}$. **1944.** $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-1}$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{y}{(1-y)^3}$. **1945.** $\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=1} = 3$ или -1; $\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_{x=1} = 8$ или -8. **1946.** $\frac{dy}{dx} = \frac{x + ay}{ax - y}$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{(a^2+1)(x^2+y^2)}{(ax-y)^3}$. **1947.** $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$; $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$. **1948.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x^2 - yz}{xy - z^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{6y^2 - 3xz - 2}{3(xy - z^2)}$. **1949.** $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{z\sin x - \cos y}{\cos x - y\sin z}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x\sin y - \cos z}{\cos x - y\sin z}$.

1950. $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$. **1951.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{c^4(b^2 - y^2)}{a^2b^2z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{c^4 xy}{a^2b^2z^3}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{c^4(a^2 - x^2)}{a^2b^2z^3}$. **1953.** $\frac{dz}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix}}{\psi'_y}$. **1954.** $dz = -\frac{x}{z}\,dx - \frac{y}{z}\,dy$; $d^2 z = \frac{y^2 - a^2}{z^3}\,dx^2 - 2\frac{xy}{z^3}\,dx\,dy + \frac{x^2 - a^2}{z^3}\,dy^2$. **1955.** $dz = 0$; $d^2 z = \frac{4}{15}(dx^2 + + dy^2)$. **1956.** $dz = \frac{z}{1 - z}(dx + dy)$; $d^2 z = \frac{z}{(1 - z)^3}(dx^2 + 2dx\,dy + dy^2)$.

1961. $\frac{dy}{dx} = \infty$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{5}$; $\frac{\partial^2 z}{dx^2} = \frac{4}{25}$. **1962.** $dy = \frac{y(z - x)}{x(y - z)}\,dx$; $dz = \frac{z(x - y)}{x(y - z)}\,dx$; $d^2 y = -d^2 z = -\frac{a}{x^3(y - z)^3}[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]\,dx^2$. **1963.** $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 1$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$; $\frac{\partial v}{\partial x} = -1$; $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 2$; $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 1$; $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$. **1964.** $du = \frac{y}{1 + y}\,dx + \frac{v}{1 + y}\,dy$; $dv = \frac{1}{1 + y}\,dx - \frac{v}{1 + y}\,dy$; $d^2 u = -d^2 v = \frac{2}{(1 + y)^2}\,dx\,dy - \frac{2v}{(1 + y)^2}\,dy^2$. **1965.** $du = \frac{\psi'_v\,dx - \varphi'_v\,dy}{\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}}$; $dv = \frac{-\psi'_u\,dx - \varphi'_u\,dy}{\begin{vmatrix} \varphi'_u & \varphi'_v \\ \psi'_u & \psi'_v \end{vmatrix}}$. **1966.** а) $\frac{\partial z}{\partial x} =$

$= \frac{c\sin v}{u}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{c\cos v}{u}$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2}(v + u)$; $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}(v - u)$; в) $\mathrm{d}z = \frac{1}{2\mathrm{e}^{2u}} \times$ $\times [\mathrm{e}^{u-v}(v+u)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{u+v}(v-u)\,\mathrm{d}y]$. **1967.** $\frac{\partial z}{\partial x} = F'_r(r, \varphi)\cos\varphi - F'_\varphi(r, \varphi)\frac{\sin\varphi}{r}$; $\frac{\partial z}{\partial y} = F'_r(r, \varphi)\sin\varphi + F'_\varphi(r, \varphi)\frac{\cos\varphi}{r}$. **1968.** $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{c}{a}\cos\varphi\,\mathrm{ctg}\,\psi$; $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c}{b}\sin\varphi\,\mathrm{ctg}\,\psi$.

1969. $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y = 0$. **1970.** $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = 0$. **1971.** а) $\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} - 2y\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 0$; б) $\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}y^3} = 0$.

1972. $\mathrm{tg}\,\mu = \frac{r}{r'}$. **1973.** $K = \dfrac{r^2 + 2\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2 - r\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}\varphi^2}}{\left[r^2 + \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}\right)^2\right]^{3/2}}$. **1974.** $\frac{\partial z}{\partial u} = 0$. **1975.** $u\frac{\partial z}{\partial u} - z = 0$.

1976. $\frac{\partial^2u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = 0$. **1977.** $\frac{\partial^2z}{\partial u\partial v} = \frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}$. **1978.** $\frac{\partial w}{\partial v} = 0$.

1979. $\frac{\partial^2w}{\partial v^2} = 0$. **1980.** $\frac{\partial^2w}{\partial u^2} = \frac{1}{2}$. **1981.** а) $2x - 4y - z - 5 = 0$; $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-5}{-1}$; б) $3x + 4y - 6z = 0$; $\frac{x-4}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-4}{-6}$; в) $x\cos\alpha + y\sin\alpha - R = 0$, $\frac{x - R\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{y - R\sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{z-R}{0}$. **1982.** $\pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $\pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; $\pm\frac{c^2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. **1983.** $3x + 4y + 12z - 169 = 0$. **1985.** $x + 4y + 6z = \pm 21$.

1986. $x \pm y \pm z = \pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. **1987.** В точках $(1; \pm 1; 0)$ касательные плоскости параллельны плоскости XOZ; в точках $(0; 0; 0)$ и $(2; 0; 0)$ — плоскости YOZ. Точек, в которых касательная плоскость была бы параллельна плоскости XOY, на поверхности нет. **1991.** $\pi/3$. **1994.** Проекция на плоскость XOY: $\begin{cases} z = 0, \\ x^2 + y^2 - xy - 1 = 0. \end{cases}$ Проекция на плоскость YOZ: $\begin{cases} x = 0, \\ \frac{3y^2}{4} + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$ Проекция на плоскость XOZ: $\begin{cases} y = 0, \\ \frac{3x^2}{4} + z^2 - 1 = 0. \end{cases}$

Указание. Линия касания поверхности с цилиндром, проецирующим эту поверхность на какую-нибудь плоскость, представляет собой геометрическое место точек, в которых касательная плоскость данной поверхности перпендикулярна плоскости проекции. **1996.** $f(x + h, y + k) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2(ax + by)h + 2(bx + cy)k + ah^2 + 2bhk + ck^2$. **1997.** $f(x, y) = 1 - (x + 2)^2 + 2(x + 2)(y - 1) + 3(y - 1)^2$. **1998.** $\Delta f(x, y) = 2h + k + h^2 + 2hk + h^2k$. **1999.** $f(x, y, z) = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 + 2(x - 1)(y - 1) - (y - 1)(z - 1)$.

2000. $f(x + h, y + k, z + l) = f(x, y, z) + 2[h(x - y - z) + k(y - x - z) + l(z - x - y)] + f(h, k, l)$. **2001.** $y + xy + \frac{3x^2y - y^3}{3}$. **2002.** $1 - \frac{x^2+y^2}{2!} + \frac{x^4 + 6x^2y^2 + y^4}{4!}$.

2003. $1 + (y - 1) + (x - 1)(y - 1)$. **2004.** $1 + [(x - 1) + (y + 1)] + \frac{[(x-1)+(y+1)]^2}{2!} + \frac{[(x-1)+(y+1)]^3}{3!}$. **2005.** а) $\mathrm{arctg}\,\frac{1+\alpha}{1-\beta} \approx \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}(\alpha + \beta) - \frac{1}{4}(\alpha^2 + \beta^2)$; б) $\sqrt{\frac{(1+\alpha)^m + (1+\beta)^n}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}(m\alpha + n\beta) + \frac{1}{32}[(3m^2 - 4m)\alpha^2 - 3mn\alpha\beta + (3n^2 - 4n)\beta^2]$. **2006.** а) 1,0081; б) 0,902. Применить формулу Тейлора для функций: а) $f(x, y) = \sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}$ в окрестности точки $(1; 1)$; б) $f(x, y) = y^x$ в окрестности точки $(2; 1)$. **2007.** $z = 1 + 2(x - 1) - (y - 1) - 8(x - 1)^2 + 10(x - 1)(y - 1) - 3(y - 1)^2 + \ldots$ **2008.** $z_{\min} = 0$ при $x = 1$, $y = 0$. **2009.** Экстремумов нет. **2010.** $z_{\min} = -1$ при $x = 1$, $y = 0$. **2011.** $z_{\max} = 108$ при $x = 3$, $y = 2$. **2012.** $z_{\min} = -8$ при $x = \sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$ и при $x = -\sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$. При $x = y = 0$ экстремумов нет. **2013.** $z_{\max} = \frac{ab}{3\sqrt{3}}$ в точках $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$ и $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{b}{\sqrt{3}}$; $z_{\min} = -\frac{ab}{3\sqrt{3}}$ в точках $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{b}{\sqrt{3}}$ и $x = -\frac{a}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$. **2014.** $z_{\max} = 1$ при $x = y = 0$. **2015.** $z_{\min} = 0$ при $x = y = 0$; нестрогий максимум $z = 1/\mathrm{e}$ в точках окружности $x^2 + y^2 = 1$. **2016.** $z_{\max} = \sqrt{3}$ при $x = 1$, $y = -1$. **2016. 1.** $z_{\min} = 6$ при $x = 4$, $y = 2$. **2016.2.** $z_{\max} = 8\mathrm{e}^{-2}$ при $x = -4$, $y = -2$; экстремума нет при $x = 0$, $y = 0$. **2017.** $u_{\min} = -4/3$ при $x = -2/3$, $y = -1/3$, $z = 1$. **2018.** $u_{\min} = 4$ при $x = 1/2$, $y = 1$, $z = 1$. **2019.** Уравнение определяет две функции, из которых одна имеет максимум ($z_{\max} = 8$) при $x = 1$, $y = -2$, другая — минимум ($z_{\min} = -2$) при $x = 1$, $y = -2$; в точках окружности $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$ каждая из этих функций имеет краевой экстремум $z = 3$. Упомянутые в ответе функции определяются явно равенствами $z = 3 \pm \sqrt{25 - (x-1)^2 - (y+2)^2}$ и существуют, следовательно, только внутри и на границе окружности $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$, в точках которой обе функции принимают значение $z = 3$. Это значение является наименьшим для первой функции и наибольшим для второй. **2020.** Одна из функций, определяемых уравнением, имеет максимум ($z_{\max} = -2$) при $x = -1$, $y = 2$, другая — минимум ($z_{\min} = 1$) при $x = -1$, $y = 2$; обе функции имеют краевой экстремум в точках кривой $4x^3 - 4y^2 - 12x + 16y - 33 = 0$. **2021.** $z_{\max} = 1/4$ при $x = y = 1/2$. **2022.** $z_{\max} = 5$ при $x = 1$, $y = 2$; $z_{\min} = -5$ при $x = -1$, $y = -2$. **2023.** $z_{\min} = 36/13$ при $x = 18/13$, $y = 12/13$. **2024.** $z_{\max} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$ при $x = \frac{7\pi}{8} + k\pi$, $y = \frac{9\pi}{8} + k\pi$;

$z_{\min} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$ при $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$, $y = \frac{5\pi}{8} + k\pi$. **2025.** $u_{\min} = -9$ при $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$; $u_{\max} = 9$ при $x = 1$, $y = -2$, $z = 2$. **2026.** $u_{\max} = a$ при $x = \pm a$, $y = z = 0$; $u_{\min} = c$ при $x = y = 0$, $z = \pm c$. **2027.** $u_{\max} = 2 \cdot 4^2 \cdot 6^3$ при $x = 2$, $y = 4$, $z = 6$. **2028.** $u_{\max} = 4\frac{4}{27}$ в точках (4/3; 4/3; 7/3), (4/3; 7/3; 4/3), (7/3; 4/3; 4/3); $u_{\min} = 4$ в точках (2; 2; 1), (2; 1; 2), (1; 2; 2). **2030.** а) Наибольшее значение $z = 3$ при $x = 0$, $y = 1$; б) наибольшее значение $z = 2$ при $x = 1$, $y = 0$. **2031.** а) Наибольшее значение $z = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = \pm\sqrt{2/3}$, $y = \sqrt{1/3}$; наименьшее значение $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ при $x = \pm\sqrt{2/3}$, $y = -\sqrt{1/3}$; б) наибольшее значение $z = 1$ при $x = \pm 1$, $y = 0$; наименьшее значение $z = -1$ при $x = 0$, $y = \pm 1$. **2032.** Наибольшее значение $z = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ при $x = y = \pi/3$ (внутренний максимум); наименьшее значение $z = 0$ при $x = y = 0$ (краевой минимум). **2033.** Наибольшее значение $z = 13$ при $x = 2$, $y = -1$ (краевой максимум); наименьшее значение $z = -1$ при $x = y = 1$ (внутренний минимум) и при $x = 0$, $y = -1$ (краевой минимум). **2034.** Куб. **2035.** $\sqrt[3]{2V}$; $\sqrt[3]{2V}$; $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2V}$. **2036.** Равносторонний треугольник. **2037.** Куб. **2038.** $a = \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$. **2039.** $M(-1/4;\ 1/4)$. **2040.** Стороны треугольника: $\frac{3}{4}p$, $\frac{3}{4}p$ и $\frac{p}{2}$. **2041.** $x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$, $y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$. **2042.** $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 3$. **2043.** Измерения параллелепипеда: $\frac{2a}{\sqrt{3}}$, $\frac{2b}{\sqrt{3}}$, $\frac{2c}{\sqrt{3}}$, где a, b и c — полуоси эллипсоида. **2044.** $x = y = 2\delta + \sqrt[3]{2V}$, $z = x/2$. **2045.** $x = \pm a/\sqrt{2}$, $y = \pm b/\sqrt{2}$. **2046.** Большая ось $2a = 6$, малая ось $2b = 2$. Квадрат расстояния точки (x, y) эллипса от его центра (начала координат) равен $x^2 + y^2$. Задача сводится к отысканию экстремума функции $x^2 + y^2$ при условии $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$. **2047.** Радиус основания цилиндра $\frac{R}{2}\sqrt{2 + \frac{2}{\sqrt{5}}}$, высота $R\sqrt{2 - \frac{2}{\sqrt{5}}}$, где R — радиус шара. **2048.** Канал должен соединять точку параболы (1/2; 1/4) с точкой прямой (11/8; −5/8); его длина $\frac{7\sqrt{2}}{8}$. **2049.** $\frac{1}{14}\sqrt{2730}$. **2050.** $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$. Очевидно, точка M, в которой луч переходит из одной среды в другую, должна находиться между A_1 и B_1, причем $AM = \frac{a}{\cos\alpha}$, $BM = \frac{b}{\cos\beta}$, $A_1M_1 = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$,

$B_1M = b\,\mathrm{tg}\,\beta$. Время распространения луча равна $\frac{a}{v_1\cos\alpha} + \frac{b}{v_2\cos\beta}$. Задача сводится к отысканию минимума функции $f(\alpha, \beta) = \frac{a}{v_1\cos\alpha} + \frac{b}{v_2\cos\beta}$ при условии, что $a\,\mathrm{tg}\,\alpha + b\,\mathrm{tg}\,\beta = c$. **2051.** $\alpha = \beta$. **2052.** $I_1 : I_2 : I_3 = \frac{1}{R_1} : \frac{1}{R_2} : \frac{1}{R_3}$. Найти минимум функции $f(I_1, I_2, I_3) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2 + I_3^2 R_3$ при условии, что $I_1 + I_2 + I_3 = I$. **2053.** Изолированная точка (0; 0). **2054.** Точка возврата 2-го рода (0; 0). **2055.** Точка самоприкосновения (0; 0). **2056.** Изолированная точка (0; 0). **2057.** Узел (0; 0). **2058.** Точка возврата 1-го рода (0; 0). **2059.** Узел (0; 0). 2060. Узел (0; 0). **2061.** Начало координат — изолированная точка, если $a > b$; точка возврата 1-го рода, если $a = b$, и узел, если $a < b$. **2062.** Если среди величин a, b и c нет равных между собой, то кривая не имеет особых точек. Если $a = b < c$, то $A(a, 0)$ — изолированная точка; если $a < b = c$, то $B(b, 0)$ — узел; если $a = b = c$, то $A(a, 0)$ — точка возврата 1-го рода. **2063.** $y = \pm x$. **2064.** $y^2 = 2px$. **2065.** $y = \pm R$. **2066.** $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$. **2067.** $xy = \frac{1}{2}S$. **2068.** Пара сопряженных равносторонних гипербол, уравнения которых, если оси симметрии эллипсов принять за оси координат, имеют вид $xy = \pm S/2\pi$. **2069.** а) Дискриминантная кривая $y = 0$ является геометрическим местом точек перегиба и огибающей данного семейства; б) дискриминантная кривая $y = 0$ является геометрическим местом точек заострения и огибающей семейства; в) дискриминантная кривая $y = 0$ есть геометрическое место точек заострения и не является огибающей; г) дискриминантная кривая распадается на прямые: $x = 0$ (геометрическое место узловых точек) и $x = a$ (огибающая). **2070.** $y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}$. **2071.** $7\frac{1}{3}$. **2072.** $\sqrt{9 + 4\pi^2}$. **2073.** $\sqrt{3}(e^t - 1)$. **2074.** 42. **2075.** 5. **2076.** $x_0 + z_0$. **2077.** $11 + \frac{\ln 10}{9}$. **2079.** а) Прямая; б) парабола; в) эллипс; г) гипербола. **2080.** 1) $\frac{da}{dt}\mathbf{a}^0$; 2) $a\frac{d\mathbf{a}^0}{dt}$; 3) $\frac{da}{dt}\mathbf{a}^0 + a\frac{d\mathbf{a}^0}{dt}$. **2081.** $\frac{d}{dt}(\mathbf{abc}) = \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt}\mathbf{bc}\right) + \left(\mathbf{a}\frac{d\mathbf{b}}{dt}\mathbf{c}\right) + \left(\mathbf{ab}\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right)$. **2082.** $4t(t^2 + 1)$. **2083.** $x = 3\cos t$; $y = 4\sin t$ (эллипс); $\mathbf{v} = 4\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = -3\mathbf{i}$ при $t = 0$; $\mathbf{v} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} + 2\sqrt{2}\mathbf{j}$, $\mathbf{w} = -\frac{3\sqrt{2}}{2}\mathbf{i} - 2\sqrt{2}\mathbf{j}$ при $t = \pi/4$; $\mathbf{v} = -3\mathbf{i}$, $\mathbf{w} = -4\mathbf{j}$ при $t = \pi/2$. **2084.** $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $z = 3t$ (винтовая линия); $\mathbf{v} = -2\mathbf{i}\sin t + 2\mathbf{j}\cos t + 3\mathbf{k}$; $v = \sqrt{13}$ при любом t; $\mathbf{w} = -2\mathbf{i}\cos t - 2\mathbf{j}\sin t$, $w = 2$ при любом t; $\mathbf{v} = 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -2\mathbf{i}$ при $t = 0$; $\mathbf{v} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{w} = -2\mathbf{j}$ при $t = \pi/2$. **2085.** $x = \cos\alpha\cos\omega t$; $y = \sin\alpha\cos\omega t$; $z = \sin\omega t$ (окружность); $\mathbf{v} = -\omega\mathbf{i}\cos\alpha\sin\omega t - \omega\mathbf{j}\sin\alpha\sin\omega t + \omega\mathbf{k}\cos\omega t$; $v = |\omega|$; $\mathbf{w} = -\omega^2\mathbf{i}\cos\alpha\cos\omega t - \omega^2\mathbf{j}\sin\alpha\cos\omega t - \omega^2\mathbf{k}\sin\omega t$; $w = \omega^2$. **2086.** $v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + (v_{0z} - gt)^2}$; $w_x = w_y = 0$; $w_z = -g$;

$w = g$. **2088.** $\omega\sqrt{a^2+h^2}$, где $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ — угловая скорость вращения винта. **2089.** $\sqrt{a^2\omega^2+v_0^2-2a\omega v_0\sin\omega t}$. **2090.** $\tau = \dfrac{\sqrt2}{2}(\mathbf{i}+\mathbf{k})$; $\nu = -\mathbf{j}$; $\beta = \dfrac{\sqrt2}{2}(\mathbf{i}-\mathbf{k})$. **2091.** $\tau = \dfrac{1}{\sqrt3}[(\cos t - \sin t)\mathbf{i} + (\sin t + \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}]$; $\nu = -\dfrac{1}{\sqrt2}[(\sin t + \cos t)\mathbf{i} + (\sin t - \cos t)\mathbf{j}]$; $\cos(\tau, z) = \sqrt3/3$; $\cos(\nu, z) = 0$. **2092.** $\tau = \dfrac{\mathbf{i}+4\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{21}}$; $\nu = \dfrac{4\mathbf{i}+5\mathbf{j}-8\mathbf{k}}{\sqrt{105}}$; $\beta = \dfrac{-2\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt5}$. **2093.** $\dfrac{x-a\cos t}{-a\sin t} = \dfrac{y-a\sin t}{a\cos t} = \dfrac{z-bt}{b}$ (касательная); $\dfrac{x-a\cos t}{b\sin t} = \dfrac{y-a\sin t}{-b\cos t} = \dfrac{z-bt}{a}$ (бинормаль); $\dfrac{x-a\cos t}{\cos t} = \dfrac{y-a\sin t}{\sin t} = \dfrac{z-bt}{0}$ (главная нормаль). Направляющие косинусы касательной: $\cos\alpha = -\dfrac{a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\beta = \dfrac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\cos\gamma = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Направляющие косинусы главной нормали: $\cos\alpha_1 = \cos t$; $\cos\beta_1 = \sin t$; $\cos\gamma_1 = 0$. **2094.** $2x - z = 0$ (нормальная плоскость); $y - 1 = 0$ (соприкасающаяся плоскость); $x + 2z - 5 = 0$ (спрямляющая плоскость). **2095.** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-4}{4} = \dfrac{z-8}{12}$ (касательная); $x + 4y + 12z - 114 = 0$ (нормальная плоскость); $12x - 6y + z - 8 = 0$ (соприкасающаяся плоскость). **2096.** $\dfrac{x-(t^4/4)}{t^2} = \dfrac{y-(t^3/3)}{t} = \dfrac{z-(t^2/2)}{1}$ (касательная); $\dfrac{x-(t^4/4)}{t^3+2t} = \dfrac{y-(t^3/3)}{1-t^4} = \dfrac{z-(t^2/2)}{-2t^3-t}$ (главная нормаль); $\dfrac{x-(t^4/4)}{1} = \dfrac{y-(t^3/3)}{-2t} = \dfrac{z-(t^2/2)}{t^2}$ (бинормаль); $M_1(1/4;\ -1/3;\ 1/2)$; $M_2(4; -8/3; 2)$. **2097.** $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-2}{2}$ (касательная); $x + y = 0$ (соприкасающая плоскость); $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z-2}{-1}$ (главная нормаль); $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-2}{0}$ (бинормаль); $\cos\alpha_2 = 1/\sqrt2$; $\cos\beta_2 = 1/\sqrt2$, $\cos\gamma_2 = 0$. **2098.** а) $\dfrac{x-(R/2)}{2} = \dfrac{y-(R/2)}{0} = \dfrac{z-(\sqrt2(R/2))}{-\sqrt2}$ (касательная); $x\sqrt2 - z = 0$ (нормальная плоскость); б) $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-2}{4}$ (касательная); $x + y + 4z - 10 = 0$ (нормальная плоскость); в) $\dfrac{x-2}{2\sqrt3} = \dfrac{y-2\sqrt3}{1} = \dfrac{z-3}{-2\sqrt3}$ (касательная);

$2\sqrt3\,x + y - 2\sqrt3\,z = 0$ (нормальная плоскость). **2099.** $x + y = 0$. **2100.** $x - y - z\sqrt2 = 0$. **2101.** а) $4x - y - z - 9 = 0$; б) $9x - 6y + 2x - 18 = 0$; в) $b^2x^3{}_0x - a^2y^3{}_0y + (a^2-b^2)z^3{}_0z = a^2b^2(a^2-b^2)$. **2102.** $6x - 8y - z + 3 = 0$ (соприкасающаяся плоскость); $\dfrac{x-1}{31} = \dfrac{y-1}{26} = \dfrac{z-1}{-22}$ (главная нормаль); $\dfrac{x-1}{-6} = \dfrac{y-1}{8} = \dfrac{z-1}{1}$ (бинормаль). **2103.** $bx - z = 0$ (соприкасающаяся плоскость); $\left.\begin{matrix} x = 0, \\ z = 0 \end{matrix}\right\}$ (главная нормаль); $\left.\begin{matrix} x+bz = 0, \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ (бинормаль); $\tau = \dfrac{\mathbf{i}+b\mathbf{k}}{\sqrt{1+b^2}}$; $\beta = \dfrac{b\mathbf{i}+\mathbf{k}}{\sqrt{1+b^2}}$; $\nu = \mathbf{l}$. **2106.** $2x + 3y + 19z - 27 = 0$. **2107.** а) $\sqrt2$; б) $\sqrt6/4$. **2108.** а) $K = \dfrac{e^{-t}\sqrt2}{3}$; $T = \dfrac{e^{-t}}{3}$; б) $K = T = \dfrac{1}{2a\,\mathrm{ch}^2 t}$. **2109.** а) $R = \rho = \dfrac{(y+a)^2}{a}$; б) $R = \rho = \dfrac{(p^4+2x^4)^3}{8p^4x^3}$. **2111.** $\dfrac{av^2}{a^2+b^2}$. **2112.** а) $K = 2$, $w_\tau = 0$, $w_n = 2$ при $t = 0$; $K = \dfrac{1}{7}\sqrt{19/14}$, $w_\tau = 22/\sqrt{14}$, $w_n = 2\sqrt{19/14}$ при $t = 1$.

Глава VII

2113. $4\dfrac{2}{3}$. **2114.** $\ln\dfrac{25}{24}$. **2115.** $\dfrac{\pi}{12}$. **2116.** $\dfrac{9}{4}$. **2117.** 50,4. **2118.** $\dfrac{\pi a^2}{2}$. **2119.** 2,4. **2120.** $\dfrac{\pi}{6}$. **2121.** $x = \dfrac{y^2}{4} - 1$; $x = 2 - y$; $y = -6$; $y = 2$. **2122.** $y = x^2$; $y = x + 9$; $x = 1$; $x = 3$. **2123.** $y = x$; $y = 10 - x$; $y = 0$; $y = 4$. **2124.** $y = \dfrac{x}{3}$; $y = 2x$; $x = 1$; $x = 3$. **2125.** $y = 0$; $y = \sqrt{25-x^2}$; $x = 0$; $x = 3$. **2126.** $y = x^2$; $y = x + 2$; $x = -1$; $x = 2$. **2127.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^2 f(x,\ y)\,dx = \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^1 f(x,\ y)\,dy$. **2128.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 f(x,\ y)\,dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x f(x,\ y)\,dy$. **2129.** $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,\ y)\,dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,\ y)\,dy + \int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{2-x} f(x,\ y)\,dy$. **2130.** $\int\limits_1^2 dx \int\limits_{2x}^{2x-3} f(x,\ y)\,dy =$

$$= \int\limits_{2}^{4} dy \int\limits_{1}^{\frac{y}{2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{4}^{5} dy \int\limits_{1}^{2} f(x, y)\,dx + \int\limits_{5}^{7} dy \int\limits_{\frac{y-3}{2}}^{2} f(x, y)\,dx.$$

2131. $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{-y}^{y} f(x, y)\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y)\,dx = \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{-x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x, y)\,dy$. **2132.** $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{2x^2}^{2} f(x, y)\,dy = \int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{y/2}}^{\sqrt{y/2}} f(x, y)\,dx$.

2133. $\int\limits_{-2}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{1}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{-\sqrt{1-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{1}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x, y)\,dx$. **2134.** $\int\limits_{-3}^{-2} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1+x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{2}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{y^2-1}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-\sqrt{5}}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} dy \int\limits_{-\sqrt{9-y^2}}^{-\sqrt{y^2-1}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{1}^{\sqrt{5}} dy \int\limits_{\sqrt{y^2-1}}^{\sqrt{9-y^2}} f(x, y)\,dx$. **2135.** а) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x, y)\,dy = \int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{0}^{(1-y)} f(x, y)\,dx$; б) $\int\limits_{-a}^{a} dx \int\limits_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_{-a}^{a} dy \int\limits_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx$; в) $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{x-x^2}}^{\sqrt{x-x^2}} f(x, y)\,dy = \int\limits_{-1/2}^{1/2} dy \int\limits_{\frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2}} f(x, y)\,dx$; г) $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x}^{1} f(x, y)\,dy = \int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{-1}^{y} f(x, y)\,dx$;

д) $\int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{y}^{y+2a} f(x, y)\,dx = \int\limits_{0}^{a} dx \int\limits_{0}^{x} f(x, y)\,dy + \int\limits_{a}^{2a} dx \int\limits_{0}^{a} f(x, y)\,dy + \int\limits_{2a}^{3a} dx \int\limits_{x-2a}^{a} f(x, y)\,dy$. **2136.** $\int\limits_{0}^{48} dy \int\limits_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x, y)\,dx$. **2137.** $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{\sqrt{\frac{y}{2}}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{2}^{3} dy \int\limits_{\frac{y}{3}}^{1} f(x, y)\,dx$. **2138.** $\int\limits_{0}^{\frac{a}{2}} dy \int\limits_{\sqrt{a^2-2ay}}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} dy \int\limits_{0}^{\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx$.

2139. $\int\limits_{0}^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^{a} dy \int\limits_{a-\sqrt{a^2-y^2}}^{a} f(x,y)\,dx$. **2140.** $\int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x,y)\,dx + \int\limits_{0}^{a} dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx + \int\limits_{0}^{2\sqrt{2a}} dy \int\limits_{\frac{y^2}{4a}}^{2a} f(x, y)\,dx$. **2141.** $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{1-x} f(x, y)\,dy$. **2142.** $\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{2x}} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{0}^{1} f(x, y)\,dy + \int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} f(x, y)\,dy$. **2143.** $\int\limits_{0}^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x, y)\,dx$. **2144.** $\int\limits_{0}^{1} dy \int\limits_{\arcsin y}^{\pi-\arcsin y} f(x, y)\,dx$.

2145. 1/6. **2146.** 1/3. **2147.** $\frac{\pi}{2}a$. **2148.** $\pi/6$. **2149.** 6. **2150.** 1/2. **2151.** $\ln 2$.

2152. а) 4/3; б) $\frac{15\pi-16}{150}$; в) $2\frac{2}{5}$. **2153.** $\frac{8\sqrt{2}}{21}p^5$. **2154.** $\int\limits_{1}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-(x-2)^2}} xy\,dy = \frac{4}{3}$.

2155. $\frac{8}{3}a\sqrt{2a}$. **2156.** $\frac{5}{2}\pi R^3$. Указание: $\iint\limits_{(S)} y\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{2\pi R} dx \int\limits_{0}^{y=f(x)} y\,dy = \int\limits_{0}^{2\pi} R(1-\cos t)\,dt \int\limits_{0}^{R(1-\cos t)} y\,dy$, где последний интеграл получается из предыдущего в результате замены $x = R(t - \sin t)$. **2157.** $\frac{R^4}{80}$. **2158.** $\frac{1}{6}$. **2159.** $a^2 + \frac{R^2}{2}$.

2160. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr$.

2161. $\int\limits_0^{\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\cos\varphi} rf(r)\,dr$. **2162.** $\int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr$.

2163. $\int\limits_0^{\pi/4} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\sin\varphi/\cos^2\varphi} r\,dr + \int\limits_{\pi/4}^{3\pi/4} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{1/\sin\varphi} r\,dr + \int\limits_{3\pi/4}^{\pi} f(\operatorname{tg}\varphi)\,d\varphi \int\limits_0^{\sin\varphi/\cos^2\varphi} r\,dr$. **2164.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr + \int\limits_{\frac{3\pi}{4}}^{5\pi} d\varphi \int\limits_0^{a\sqrt{\cos2\varphi}} rf(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)\,dr$. **2165.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_0^{a\cos\varphi} r^2\sin\varphi\,dr = \frac{a^3}{12}$.

2166. $\frac{3}{2}\pi a^4$. **2167.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **2168.** $\left(\frac{22}{9}+\frac{\pi}{2}\right)a^3$. **2169.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **2170.** $\left(\frac{\pi}{3}-\frac{16\sqrt{2}-20}{9}\right)\frac{a^3}{2}$.

2171. $\frac{2}{3}\pi ab$. Указание. Якобиан $I = abr$. Пределы интегрирования: $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant r \leqslant 1$. **2172.** $\int\limits_{\frac{\alpha}{1+\alpha}}^{\frac{\beta}{1+\beta}} dv \int\limits_0^{\frac{c}{1-v}} f(u-uv,\ uv)u\,du$. Решение. Имеем $x = u(1-v)$ и $y = uv$; якобиан $I = u$. Определяем пределы u как функции от v: $u(1-v) = 0$ при $x = 0$, откуда $u = 0$ (так как $1 - v \neq 0$); $u = \frac{c}{1-v}$ при $x = c$. Пределы изменения v: так как $y = ax$, то $uv = \alpha u(1-v)$, откуда $v = \frac{\alpha}{1+\alpha}$; для $y = \beta x$ находим $v = \frac{\beta}{1+\beta}$. **2173.** $I = \frac{1}{2}\left[\int\limits_0^1 du \int\limits_{-u}^{u} f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right)dv + \int\limits_1^2 du \int\limits_{u-2}^{2-u} f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right)dv\right] = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{-1}^0 dv \int\limits_{-1}^{2+v} f\left(\frac{u+v}{2},\ \frac{u-v}{2}\right)du + \int\limits_0^1 dv \int\limits_v^{2-v} f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)du\right]$. После замены переменных уравнения сторон квадрата будут $u = v$; $u + v = 2$; $u - v = 2$; $u = -v$. **2174.** $ab\left[\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh} + \frac{ab}{hk}\right]$. Уравнение кривой $r^4 = r^2\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\right)$, откуда нижний предел $r = 0$ и верхний $r = \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}$. Так как r должно быть вещественным, то $\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi \geqslant 0$; отсюда для первого координатного угла имеем $\operatorname{tg}\varphi \leqslant \frac{ak}{bh}$. Вследствие симметрии области интегрирования относительно осей можно вычислить $\frac{1}{4}$ всего интеграла, ограничиваясь первым квадрантом:

$$\iint\limits_{(S)} dx\,dy = 4\int\limits_0^{\operatorname{arctg}\frac{ak}{bh}} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}} abr\,dr.$$

2175. а) $4\frac{1}{2}$; $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_{y-2}^{\sqrt{2}} dx$; б) $\frac{\pi a^2}{4} - \frac{a^2}{2}$; $\int\limits_0^a dx \int\limits_{a-x}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy$. **2176.** а) $\frac{9}{2}$; б) $\left(2+\frac{\pi}{4}\right)a^2$. **2177.** $\frac{7a^2}{120}$.

2178. $\frac{10}{3}a^2$. **2179.** π $(-1 \leqslant x \leqslant 1)$. **2180.** $\frac{16}{3}\sqrt{15}$. **2181.** $3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$. **2182.** $\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$. **2183.** $\frac{5}{4}\pi a^2$. **2184.** 6. **2185.** 10π. Сделать замену переменных $x - 2y = u$, $3x + 4y = v$. **2186.** $\frac{1}{3}(b-a)(\beta-\alpha)$. **2187.** $\frac{1}{3}(\beta-\alpha)\ln\frac{b}{a}$. **2188.** $v = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^1 (1-x)\,dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^x (1-x)\,dy$. **2193.** $\frac{\pi a^3}{6}$. **2194.** 3/4. **2195.** 1/6. **2196.** $\frac{a^3}{3}$. **2197.** $\frac{\pi r^4}{4a}$.

2198. $\frac{48\sqrt{6}}{5}$. **2199.** 88/105. **2200.** $\frac{a^3}{18}$. **2201.** $\frac{abc}{3}$. **2202.** $\pi a^3(\alpha - \beta)$.

2203. $\frac{4}{3}\pi a^3(2\sqrt{2} - 1)$. **2204.** $\frac{4}{3}\pi a^3(\sqrt{2} - 1)$. **2205.** $\frac{\pi a^3}{3}$. **2206.** $\frac{4}{3}\pi abc$.

2207. $\frac{\pi a^3}{3}(6\sqrt{3} - 5)$. **2208.** $\frac{32}{9}a^3$. **2209.** $\pi a(1 - e^{R^2})$. **2210.** $\frac{3\pi ab}{2}$. **2211.** $\frac{3\sqrt{3}-2}{2}$.

2212. $\frac{\sqrt{2}}{3}(2\sqrt{2} - 1)$. Сделать замену переменных $xy = u$, $\frac{y}{x} = v$.

2213. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$. **2214.** $4(m-n)R^2$. **2215.** $\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$. Интегрировать в плоскости YOZ. **2216.** $4a^2$. **2217.** $8a^2\arcsin\frac{b}{a}$. **2218.** $\frac{1}{3}\pi a^2(3\sqrt{3}-1)$. **2219.** $8a^2$. **2220.** 1. $3\pi a^2$. Перейти к полярным координатам. 2. Спроецировать поверхность на координатную плоскость XOY. 3. $a^2\sqrt{2}$. **2221.** $\sigma=\frac{2}{3}\pi a^2\left[\left(1+\frac{R^2}{a^2}\right)-1\right]$. Перейти к полярным координатам. **2222.** $\frac{16}{9}a^3$ и $8a^2$. Перейти к полярным координатам. **2223.** $8a^2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{5}$. Указание: $\sigma=\int\limits_0^{a/2}\mathrm{d}x\int\limits_0^{a/2}\frac{a\,\mathrm{d}y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}=$ $=8a\int\limits_0^{a/2}\arcsin\frac{a}{2\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x$. Интегрировать по частям, а затем сделать подстановку $x=\frac{a\sqrt{3}}{2\sin t}$; ответ преобразовать. **2224.** $\frac{\pi}{4}\left(b\sqrt{b^2+c^2}-a\sqrt{a^2+c^2}+\right.$ $\left.+c^2\ln\frac{b+\sqrt{b^2+c^2}}{a+\sqrt{a^2+c^2}}\right)$. Перейти к полярным координатам. **2225.** $\frac{2\pi\delta R^2}{3}$. **2226.** $\frac{a^3b}{12}$; $\frac{a^2b^2}{24}$. **2227.** $\bar{x}=\frac{12-\pi}{3(4-\pi)}$; $\bar{y}=\frac{\pi}{6(4-\pi)}$. **2228.** $\bar{x}=\frac{5}{6}a$; $\bar{y}=0$. **2229.** $\bar{x}=\frac{2a\sin\alpha}{3\alpha}$; $\bar{y}=0$. **2230.** $\bar{x}=\frac{2}{5}$; $\bar{y}=0$. **2231.** $I_X=4$. **2232.** а) $I_0=$ $=\frac{\pi}{32}(D^4-d^4)$; б) $I_X=\frac{\pi}{64}(D^4-d^4)$. **2233.** $I=\frac{2}{3}a^4$. **2234.** $\frac{8}{5}a^4$. Указание: $I=$ $=\int\limits_0^a\mathrm{d}x\int\limits_{-\sqrt{ax}}^{\sqrt{ax}}(y+a)^2\,\mathrm{d}y$. **2235.** $16\ln 2-9\frac{3}{8}$. Расстояние точки (x, y) от прямой $x=y$, равное $d=\frac{x-y}{\sqrt{2}}$, находится с помощью нормального уравнения прямой. **2236.** $I=\frac{1}{40}ka^5[7\sqrt{2}+3\ln(\sqrt{2}+1)]$, где k — коэффициент пропорциональности. Поместив начало координат в ту вершину, расстояние от которой пропорционально плотности пластинки, направим оси координат по сторонам квадрата. Момент инерции определяется относительно оси OX. Переходя к полярным координатам, имеем $I_x=\int\limits_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{a\sec\varphi}kr(r\sin\varphi)^2r\,\mathrm{d}r+$

$+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{a\operatorname{cosec}\varphi}kr(r\sin\varphi)^2r\,\mathrm{d}r$. **2237.** $I_0=\frac{35}{16}\pi a^4$. **2238.** $I_0=\frac{\pi a^4}{2}$. **2239.** $\frac{35}{12}\pi a^4$. Принять за переменные интегрирования t и y (см. задачу 2156). **2240.** $\int\limits_0^1\mathrm{d}x\int\limits_0^{1-x}\mathrm{d}y\int\limits_0^{1-x-y}f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$. **2241.** $\int\limits_{-R}^{R}\mathrm{d}x\int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\int\limits_0^H f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$. **2242.** $\int\limits_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int\limits_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}y\int\limits_{c\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}^{c}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$. **2243.** $\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}}f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$. **2244.** $\frac{8}{15}(31+12\sqrt{2}-27\sqrt{3})$. **2245.** $\frac{4\pi\sqrt{2}}{3}$. **2246.** $\frac{\pi^2a^2}{8}$. **2247.** $\frac{1}{720}$. **2248.** $\frac{1}{2}\ln 2-\frac{5}{16}$. **2249.** $\frac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$. **2250.** $\frac{59}{480}\pi R^5$. **2251.** $\frac{\pi abc^2}{4}$. **2252.** $\frac{4}{5}\pi abc$. **2253.** $\frac{\pi h^2R^2}{4}$. **2254.** πR^3. **2255.** $\frac{8}{9}a^2$. **2256.** $\frac{8}{3}r^3\left(\pi-\frac{4}{3}\right)$. **2257.** $\frac{4}{15}\pi R^5$. **2258.** $\frac{\pi}{10}$. **2259.** $\frac{32}{9}a^2h$. **2260.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. Решение: $v=$ $=2\int\limits_0^{2a}\mathrm{d}x\int\limits_0^{\sqrt{2ax-x^2}}\mathrm{d}y\int\limits_0^{\frac{x^2+y^2}{2a}}\mathrm{d}z=2\int\limits_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}r\,\mathrm{d}r\int\limits_0^{\frac{r^2}{2a}}\mathrm{d}h=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{2a\cos\varphi}\frac{r^3dr}{2a}=$ $=\frac{1}{a}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2a\cos\varphi)^4}{4}\,\mathrm{d}\varphi=\frac{3}{4}\pi a^3$. **2261.** $\frac{2\pi a^3\sqrt{2}}{3}$. Перейти к сферическим координатам. **2262.** $\frac{19}{6}\pi$. Перейти к цилиндрическим координатам. **2263.** $\frac{a^3}{9}(3\pi-4)$. **2264.** 1. πabc. 2. $\frac{\pi^2abc}{4\sqrt{2}}$. 3. $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)abc$. **2265.** $\frac{abc}{2}(a+b+c)$. **2266.** $\frac{ab}{24}(6c^2-$ $-a^2-b^2)$. **2267.** $\bar{x}=0$; $\bar{y}=0$; $\bar{z}=\frac{2}{5}a$. Ввести сферические координаты. **2268.** $\bar{x}=\frac{4}{3}$; $\bar{y}=0$; $\bar{z}=0$. **2269.** $\frac{\pi a^2}{12}(3a^2+4h^2)$. Ось цилиндра принимается за ось OZ, плоскость основания цилиндра — за плоскость XOY. Момент инерции вычисляется относительно оси OX. После перехода к цилиндрическим координатам квадрат расстояния элемента $r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ от оси OX равен $r^2\sin^2\varphi+z^2$. **2270.** $\frac{\pi\rho ha^2}{60}(2h^2+3a^2)$. Основание конуса принимается за плоскость XOY, ось конуса — за ось OZ. Момент инерции вычисляется относительно оси OX. Переходя к цилиндрическим координатам, для точек поверхности конуса имеем $r = \frac{a}{h}(h - z)$, причем квадрат расстояния элемента $r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$ от оси OX равен $r^2\sin^2\varphi + z^2$. **2271.** $2\pi k\rho h(1 - \cos\alpha)$, где k — коэффициент пропорциональности, ρ — плотность. Решение. Вершина конуса принимается за начало координат, а его ось — за ось OZ. Если ввести сферические координаты, то уравнение боковой поверхности конуса будет $\psi = \frac{\pi}{a} - \alpha$, а уравнение плоскости основания $r = \frac{h}{\sin\psi}$. Из симметрии следует, что результирующее напряжение направлено по оси OZ. Масса элемента объема $\mathrm{d}m = \rho r^2\cos\psi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}r$, где ρ — плотность. Компонента по оси OZ силы притяжения этим элементом единицы массы, находящейся в точке 0, равна $\frac{k\,\mathrm{d}m}{r^2}\sin\psi = k\rho\sin\psi\cos\psi\,\mathrm{d}\psi\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$. Результирующая сила притяжения равна $\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\mathrm{d}\psi\int\limits_0^{h\operatorname{cosec}\psi}k\rho\sin\psi\cos\psi\,\mathrm{d}r$. **2272.** Введем цилиндрические координаты (ρ, φ, z) с началом в центре шара и осью OZ, проходящей через материальную точку, массу которой полагаем равной m. Расстояние этой точки от центра шара обозначим через ξ. Пусть $r = \sqrt{\rho^2 + (\xi - z)^2}$ — расстояние от элементарного объема $\mathrm{d}v$ до массы m. Сила притяжения элементарного объема $\mathrm{d}v$ шара и материальной точки направлена вдоль r и численно равна $-k\gamma m\frac{\mathrm{d}v}{r^2}$, где $\gamma = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ — плотность шара, $\mathrm{d}v = \rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}z$ — элементарный объем. Проекция этой силы на ось OZ будет $\mathrm{d}F = -\frac{km\gamma\,\mathrm{d}v}{r^2}\cos(\widehat{rz}) = -km\gamma\frac{\xi - z}{r^3}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}p\,\mathrm{d}z$. Отсюда $F = -\int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_{-R}^{R}(\xi - z)\,\mathrm{d}z\int\limits_0^{\sqrt{R^2 - z^2}}\frac{\rho\,\mathrm{d}\rho}{r^3} = km\gamma\cdot\frac{4}{3}\pi R^3\frac{1}{\xi^2}$, но так как $\frac{4}{3}\gamma\pi R^3 = M$, то $F = \frac{kMm}{\xi^2}$. **2273.** $-\int\limits_x^{\infty}y^2 e^{-xy^2}\,\mathrm{d}y - e^{-x^3}$. **2275.** а) $\frac{1}{p}$ $(p > 0)$; б) $\frac{1}{p - \alpha}$ при $p > \alpha$; в) $\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$ $(p > 0)$; г) $\frac{p}{p^2 + \beta^2}$ $(p > 0)$. **2276.** $-\frac{1}{n^2}$. **2277.** $2/p^3$. (Продифференцировать два раза $\int\limits_0^{\infty}e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{p}$.) **2278.** $\ln\frac{\beta}{\alpha}$. **2279.** $\operatorname{arctg}\frac{\beta}{m} - \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{m}$.

2280. $\frac{\pi}{2}\ln(1 + \alpha)$. **2281.** $\pi(\sqrt{1 - \alpha^2} - 1)$. **2282.** $\operatorname{arcctg}\frac{\alpha}{\beta}$. **2283.** 1. **2284.** $\frac{1}{2}$. **2285.** $\frac{\pi}{4}$. **2286.** $\frac{\pi}{4a^2}$. Надо перейти к полярным координатам. **2287.** $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. **2288.** $\frac{\pi^2}{8}$. **2289.** Сходится. Исключим из S начало координат вместе с его ε-окрестностью, т. е. рассмотрим $I_\varepsilon = \iint\limits_{(S_\varepsilon)}\ln\sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, где удаляемая область — круг радиуса ε с центром в начале координат. Перейдя к полярным координатам, имеем $I_\varepsilon = \int\limits_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int\limits_\varepsilon^1 r\ln r\,\mathrm{d}r = \int\limits_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\ln r\Big|_\varepsilon^1 - \frac{1}{2}\int\limits_\varepsilon^1 r\,\mathrm{d}r\right]\mathrm{d}\varphi = 2\pi\left(\frac{\varepsilon^2}{4} - \frac{\varepsilon}{2}\ln\varepsilon - \frac{1}{4}\right)$. Отсюда $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = -\frac{\pi}{2}$. **2290.** Сходится при $\alpha > 1$. **2291.** Сходится. Окружаем прямую $y = x$ узенькой полоской и полагаем

$$\iint\limits_{(S)}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt[3]{(x - y)^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0}\int\limits_0^1\mathrm{d}x\int\limits_0^{x-\varepsilon}\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt[3]{(x - y)^2}} + \lim_{\delta \to 0}\int\limits_0^1\mathrm{d}x\int\limits_{x+\delta}^1\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt[3]{(x - y)^2}}.$$

2292. Сходится при $\alpha > \frac{3}{2}$. **2293.** 0. **2294.** $\ln\frac{\sqrt{5} + 3}{2}$. **2295.** $\frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$. **2296.** $\frac{256}{15}a^3$. **2297.** $\frac{a^2}{3}[(1 + 4\pi^2)^{3/2} - 1]$. **2298.** $\frac{a^5\sqrt{1 + m^2}}{5m}$. **2299.** $a^2\sqrt{2}$. **2300.** $\frac{1}{54}(56\sqrt{7} - 1)$. **2301.** $\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}\operatorname{arctg}\frac{2\pi b}{a}$. **2302.** $2\pi a^2$. **2303.** $\frac{16}{27}(10\sqrt{10} - 1)$. Указание: $\int\limits_C f(x, y)\,\mathrm{d}s$ можно геометрически интерпретирвоать как площадь цилиндрической поверхности с образующей, параллельной оси OZ, основанием — контуром интегрирования и высотами, равными значениям подынтегральной функции. Поэтому $S = \int\limits_C x\,\mathrm{d}s$, где C — дуга OA параболы $y = \frac{3}{8}x^2$, соединяющая точки $(0;\ 0)$ и $(4;\ 6)$. **2304.** $a\sqrt{3}$. **2305.** $2\left(b^2 + \frac{a^2 b}{\sqrt{a^2 - b^2}\arcsin\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}}\right)$. **2306.** $\sqrt{a^2 + b^2}\left(\pi\sqrt{a^2 + 4\pi b^2} + \frac{a^2}{2b}\ln\frac{2\pi b + \sqrt{a^2 + 4\pi b^2}}{a}\right)$. **2307.** $\left(\frac{4}{3}a;\ \frac{4}{3}a\right)$. **2308.** $2\pi a^2\sqrt{a^2 + b^2}$. **2309.** $kMmb\Big/\sqrt{(a^2 + b^2)^3}$. **2310.** $40\frac{19}{30}$. **2311.** $-2\pi a^2$.

2312. а) $\frac{4}{3}$; б) 0; в) $\frac{12}{5}$; г) -4; д) 4. **2313.** Во всех случаях **4**. **2314.** -2π. Использовать параметрические уравнения окружности. **2315.** $\frac{4}{3}ab^2$. **2316.** $-2\sin 2$. **2317.** 0. **2318.** а) 8; б) 12; в) 2; г) $\frac{3}{2}$; д) $\ln(x+y)$; е) $\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(x)\,dx + \int\limits_{y_1}^{y_2}\psi(y)\,dy$. **2319.** а) 62; б) 1; в) $\frac{1}{4}+\ln 2$; г) $1+\sqrt{2}$. **2320.** $\sqrt{1+a^2}-\sqrt{1+b^2}$. **2322.** а) $x^2+3xy-2y^2+C$; б) $x^3-x^2y+xy^2-y^3+C$; в) $e^{x-y}(x+y)+C$; г) $\ln|x+y|+C$. **2323.** $-2\pi a(a+b)$. **2324.** $-\pi R^2\cos^2\alpha$. **2325.** $\left(\frac{1}{6}+\frac{\pi\sqrt{2}}{16}\right)R^3$. **2326.** а) -2; б) $abc-1$; в) $5\sqrt{2}$; г) 0. **2327.** $I=\iint\limits_{(S)}y^2\,dx\,dy$. **2328.** $-4/3$. **2329.** $\pi R^4/2$. **2330.** $-1/3$. **2331.** 0.

2332. а) 0; б) $2n\pi$. В случае б) формула Грина применяется в области, заключенной между контуром C и кругом достаточно малого радиуса с центром в начале координат. **2333.** Если считать, что направление касательной совпадает с направлением положительного обхода контура, то $\cos(X, n)=\cos(Y, t)=\frac{dy}{ds}$, следовательно, $\oint\limits_C\cos(X,n)\,ds=\oint\limits_C\frac{dy}{ds}\,ds=\oint\limits_C dy=0$. **2334.** $2S$, где S — площадь, ограниченная контуром C. **2335.** -4. Формулу Грина применять нельзя. Данный интеграл несобственный, так как в точках пересечения контура интегрирования с прямой $x+y=0$ подынтегральное выражение принимает вид $\frac{0}{0}$. **2336.** πab. **2337.** $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2338.** $6\pi a^2$. **2339.** $\frac{3}{2}a^2$. Указание. Положить $y=tx$, где t — параметр. **2340.** $a^2/60$. **2341.** $\pi(R+r)(R+2r)$; $6\pi R^2$ при $R=4$. Уравнение эпициклоиды имеет вид $x=(R+r)\cos t - r\cos\frac{R+r}{r}t$, $y=(R+r)\sin t - r\sin\frac{R+r}{r}t$, где t — угол поворота радиуса неподвижного круга, проведенного в точку касания. **2342.** $\pi(R-r)(R-2r)$; $\frac{3}{8}\pi R^2$ при $r=R/4$. Уравнение гипоциклоиды получается из уравнения соответствующей эпициклоиды (см. задачу 2341) заменой r на $-r$. **2343.** FR. **2344.** $mg(z_1-z_2)$. **2345.** $\frac{k}{2}(a^2-b^2)$, где k — коэффициент пропорциональности. **2346.** а) Потенциал $U=-mgz$, работа $mg(z_1-z_2)$; б) потенциал $U=\mu/r$, работа $-\frac{\mu}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$; в) потенциал $U=-\frac{k^2}{2}(x^2+y^2+z^2)$, работа $\frac{k^2}{2}(R^2-r^2)$. **2347.** $\frac{8}{3}\pi a^4$. **2348.** $\frac{2\pi a^2\sqrt{a^2+b^2}}{3}$. **2349.** 0. **2350.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **2351.** $\frac{\pi a^4}{2}$. **2352.** 3/4. **2353.** $\frac{25\sqrt{5}+1}{10(5\sqrt{5}-1)}a$. **2354.** $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}h^4$. **2355.** а) 0; б) $-\iint\limits_{(S)}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)\,dS$. **2356.** 0. **2357.** 4π. **2358.** $-\pi a^2$. **2359.** $-a^3$. **2360.** $\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$. **2361.** 0. **2362.** $2\iiint\limits_{(V)}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$. **2363.** $2\iiint\limits_{(V)}\frac{dx\,dy\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. **2364.** $\iiint\limits_{(V)}\left(\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\right)dx\,dy\,dz$. **2365.** $3a^4$. **2366.** $a^3/2$. **2367.** $\frac{12}{5}\pi a^5$. **2368.** $\frac{\pi a^2b^2}{2}$. **2371.** Сферы; цилиндры. **2372.** Конусы. **2374.** Окружности $x^2+y^2=c_1^2$, $z=c_2$. **2376.** grad $U(A)=9\mathbf{i}-3\mathbf{j}-3\mathbf{k}$; $|\mathrm{grad}\,U(A)|=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$; $z^2=xy$; $x=y=z$. **2377.** а) $\mathbf{r}/r$; б) $2\mathbf{r}$; в) $-\mathbf{r}/r^3$; г) $f'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$. **2378.** grad $(\mathbf{cr})=\mathbf{c}$; поверхности уровня — плоскости, перпендикулярные вектору $\mathbf{c}$. **2379.** $\frac{\partial U}{\partial r}=\frac{2U}{r}$; $\frac{\partial U}{\partial r}=|\mathrm{grad}\,U|$ при $a=b=c$. **2380.** $\frac{\partial U}{\partial l}=-\frac{\cos(\mathbf{l},\mathbf{r})}{r^2}$; $\frac{\partial U}{\partial l}=0$ при $\mathbf{l}\perp\mathbf{r}$. **2382.** $2/r$. **2383.** div $\mathbf{a}=(2/r)f(r)+f'(r)$. **2385.** а) div $\mathbf{r}=3$, rot $\mathbf{r}=0$; б) div $(\mathbf{rc})=\frac{\mathbf{rc}}{r}$, rot $(\mathbf{rc})=\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{c}}{r}$; в) div $(f(r)\mathbf{c})=\frac{f'(r)}{r}(\mathbf{cr})$, rot $(f(r)\mathbf{c})=\frac{f'(r)}{r}\,\mathbf{c}\times\mathbf{r}$. **2386.** div $\mathbf{v}=0$; rot $\mathbf{v}=2\boldsymbol{\omega}$, где $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k}$. **2387.** $2\omega\mathbf{n}^0$, где $\mathbf{n}^0$ — единичный вектор, параллельный оси вращения. **2388.** div grad $U=\frac{\partial^2U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2U}{\partial z^2}$; rot grad $U=0$. **2391.** $3\pi R^2H$. **2392.** а) $\frac{1}{10}R^2H(3R^2+2H^2)$; б) $\frac{3}{10}\pi R^2H(R^2+2H^2)$. **2393.** div $\mathbf{F}=0$ во всех точках, кроме начала координат. Поток равен $-4\pi m$. При вычислении потока использовать теорему Остроградского—Гаусса. **2394.** $2\pi^2h^2$. **2395.** $\frac{-\pi R^6}{8}$. **2396.** $U=\int\limits_{r_0}^{r_1}rf(r)\,dr$. **2397.** m/r. **2398.** а) Не имеет; б) $U=xyz+C$; в) $U=xy+xz+yz+C$. **2400.** Да.

Глава VIII

2401. $\frac{1}{2n-1}$. **2402.** $\frac{1}{2n}$. **2403.** $\frac{n}{2^{n-1}}$. **2404.** $\frac{1}{n^2}$. **2405.** $\frac{n+2}{(n+1)^2}$. **2406.** $\frac{2n}{3n+2}$.

2407. $\frac{1}{n(n+1)}$. **2408.** $\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(3n-1)}{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}$. **2409.** $(-1)^{n+1}$. **2410.** $n^{(n-1)n+1}$.

2416. Расходится. **2417.** Сходится. **2418—2424.** Расходится. **2425—2433.** Сходится. **2434.** Расходится. **2435.** Расходится. **2436.** Сходится. **2437.** Расходится. **2438—2440.** Сходится. **2441.** Расходится. **2442—2449.** Сходится. **2450.** Расходится. **2451.** Сходится. **2452.** Расходится. **2453.** Сходится. **2454, 2455.** Расходится. **2456.** Сходится. **2457.** Расходится. **2458.** Сходится. **2459.** Расходится. **2460.** Сходится. **2461.** Расходится. **2462.** Сходится. **2463.** Расходится. **2464—2466.** Сходится. **2467.** Расходится. **2468.** Расходится. Указание. $\frac{a_n+1}{a_n}>1$. **2470.** Сходится условно. **2471.** Сходится условно. **2472.** Сходится абсолютно. **2473.** Расходится. **2474.** Сходится условно. **2475.** Сходится абсолютно. **2476.** Сходится условно. **2477.** Сходится абсолютно. **2478.** Сходится абсолютно. **2479.** Расходится. **2480.** Сходится абсолютно. **2481.** Сходится условно. **2482.** Сходится абсолютно. **2484.** а) Расходится; б) сходится абсолютно; в) расходится; г) сходится условно. Указание. В примерах а) и г) рассмотреть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1}+a_{2k})$, а в примерах б) и в) исследовать отдельно ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{2k}$. **2485.** Расходится. **2486.** Сходится абсолютно. **2487.** Сходится абсолютно. **2488.** Сходится условно. **2489.** Расходится. **2490.** Сходится абсолютно. **2491.** Сходится абсолютно. **2492.** Сходится абсолютно. **2493.** Да. **2494.** Нет. **2495.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{3^n}$; сходится. **2496.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n(2n-1)}$; сходится. **2497.** Расходится. **2499.** Сходится. **2500.** Сходится. **2501.** $|R_4|<\frac{1}{120}$. $|R_5|<\frac{1}{720}$; $R_4<0$, $R_5>0$. **2502.** $R_n<\frac{a_n}{2n+1}=\frac{1}{2^n(2n+1)n!}$. Указание. Остаток ряда можно оценить с помощью суммы геометрической прогрессии, превышающей этот остаток: $R_n=a_n\left[\frac12\frac{1}{n+1}+\left(\frac12\right)^2\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots\right]<a_n\left[\frac12\times\frac{1}{n+1}+\left(\frac12\right)^2\cdot\frac{1}{(n+1)^2}+\ldots\right]$. **2503.** $R_n<\frac{n+2}{(n+1)(n+1)!}$; $R_{10}<3\cdot 10^{-8}$.

2504. $\frac{1}{n+1}<R_n<\frac1n$. Решение: $R_n=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots>\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\ldots=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)+\ldots=\frac{1}{n+1}$; $R_n<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\ldots=\frac1n$. **2505.** Для данного ряда легко можно найти точное значение остатка:

$$R_n=\frac{1}{15}\left(n+\frac{15}{16}\right)\left(\frac14\right)^{2n-2}.$$

Решение: $R_n=(n+1)\left(\frac14\right)^{2n}+(n+2)\left(\frac14\right)^{2n+2}+\ldots$ Умножим на $\left(\frac14\right)^2$:

$$\frac{1}{16}R_n=(n+1)\left(\frac14\right)^{2n+2}+(n+2)\left(\frac14\right)^{2n+4}+\ldots.$$

Вычитая, получим

$$\frac{15}{16}R_n=n\left(\frac14\right)^{2n}+\left(\frac14\right)^{2n}+\left(\frac14\right)^{2n+2}+\left(\frac14\right)^{2n+4}+\ldots=n\left(\frac14\right)^{2n}+\frac{\left(\frac14\right)^{2n}}{1-\frac{1}{16}}=$$

$$=\left(n+\frac{16}{15}\right)\left(\frac14\right)^{2n}.$$

Отсюда находим приведенное выше значение R_n. Полагая $n=0$, находим сумму ряда $S=\left(\frac{16}{15}\right)^2$. **2506.** 99; 999. **2507.** 2; 3; 5. **2508.** $S=1$. Указание: $a_n=\frac1n-\frac{1}{n+1}$. **2509.** $S=1$ при $x>0$, $S=-1$ при $x<0$; $S=0$ при $x=0$. **2510.** При $x>1$ сходится абсолютно, при $x\leqslant 1$ расходится. **2511.** При $x>1$ сходится абсолютно, при $0<x\leqslant 1$ сходится неабсолютно, при $x\leqslant 0$ расходится. **2512.** При $x>e$ сходится абсолютно, при $1<x\leqslant e$ сходится неабсолютно, при $x\leqslant 1$ расходится. **2513.** $-\infty<x<\infty$. **2514.** $-\infty<x<\infty$. **2515.** Сходится абсолютно при $x>0$, расходится при $x\leqslant 0$. Решение: 1) $|a_n|\leqslant\frac{1}{e^{nx}}$, а при $x>0$ ряд с общим членом $\frac{1}{e^{nx}}$ сходится; 2) $\frac{1}{e^{nx}}\geqslant 1$ при $x\leqslant 0$, а $\cos nx$ не стремится к нулю при $n\to\infty$, так как из $\cos nx\to 0$ следовало бы, что $\cos 2nx\to -1$; таким образом, при $x\leqslant 0$ нарушен необходимый признак сходимости. **2516.** Сходится абсолютно при $2k\pi<x<(2k+1)\pi$ $(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$; в остальных точках расходится. **2517.** Расходится везде. **2518.** Сходится абсолютно при $x\neq 0$. **2519.** $x>1$, $x\leqslant -1$. **2520.** $x>3$, $x<1$. **2521.** $x\geqslant 1$, $x\leqslant -1$. **2522.** $x\geqslant 5\frac13$, $x<4\frac23$. **2523.** $x>1$, $x<-1$.

2524. $-1 < x < -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} < x < 1$. Указание. При этих значениях x сходится как ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$, так и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k x^k}$. При $|x| \geqslant 1$ и при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ общий член ряда не стремится к нулю. **2525.** $-1 < x < 0$, $0 < x < 1$. **2526.** $-1 < x < 1$. **2527.** $-2 \leqslant x < 2$. **2528.** $-1 < x < 1$. **2529.** $-\frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant x \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. **2530.** $-1 < x \leqslant 1$. **2531.** $-1 < x < 1$. **2532.** $-1 < x < 1$. **2533.** $-\infty < x < \infty$. **2534.** $x = 0$. **2535.** $-\infty < x < \infty$. **2536.** $-4 < x < 4$. **2537.** $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$. **2538.** $-2 < x < 2$. **2539.** $-e < x < e$. **2540.** $-3 \leqslant x < 3$. **2541.** $-1 < x < 1$. **2542.** $-1 < x < 1$. Расходимость ряда при $|x| \geqslant 1$ очевидна (интересно, однако, отметить, что расходимость ряда на концах интервала сходимости $x = \pm 1$ обнаруживается не только с помощью необходимого признака сходимости, но и с помощью признака Даламбера). При $|x| < 1$ имеем $\lim\limits_{n \to 0} \left|\frac{(n+1)!\,x^{(x+1)!}}{n!\,x^{n!}}\right| = \lim\limits_{n \to 0} |(n+1)x^{n!n}| \leqslant \lim\limits_{n \to 0} (n+1)|x|^n = \lim\limits_{n \to 0} \frac{n+1}{\left|\frac{1}{x}\right|^n} = 0$ (последнее равенство легко получить с помощью правила Лопиталя). **2543.** $-1 < x < 1$. С помощью признака Даламбера можно не только найти интервал сходимости, но и исследовать сходимость данного ряда на концах интервала сходимости. **2544.** $-1 \leqslant x \leqslant 1$. С помощью признака Коши можно не только найти интервал сходимости, но и исследовать сходимость данного ряда на концах интервала сходимости. **2545.** $2 < x \leqslant 8$. **2546.** $-2 \leqslant x < 8$. **2547.** $-2 < x < 4$. **2548.** $1 \leqslant x \leqslant 3$. **2549.** $-4 \leqslant x \leqslant -2$. **2550.** $x = -3$. **2551.** $-7 < x < -3$. **2552.** $0 \leqslant x < 4$. **2553.** $-\frac{5}{4} < x < \frac{13}{4}$. **2554.** $-e - 3 < x < e - 3$. **2555.** $-2 \leqslant x \leqslant 0$. **2556.** $2 < x < 4$. **2557.** $1 < x \leqslant 3$. **2558.** $-3 \leqslant x \leqslant -1$. **2559.** $1 - \frac{1}{e} < x < 1 + \frac{1}{e}$. При $x = 1 \pm \frac{1}{e}$ ряд расходится, так как $\lim\limits_{n \to 0} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}{e^n} = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$. **2560.** $-2 < x < 0$. **2561.** $1 < x \leqslant 3$. **2562.** $1 \leqslant x < 5$. **2563.** $2 \leqslant x \leqslant 4$. **2564.** $|z| < 1$. **2565.** $|z| < 1$. **2566.** $|z - 2i| < 3$. **2567.** $|z| < \sqrt{2}$. **2568.** $z = 0$. **2569.** $|z| < \infty$. **2570.** $|z| < \frac{1}{2}$. **2576.** $-\ln(1 - x)$ $(-1 \leqslant x < 1)$. **2577.** $\ln(1 + x)$ $(-1 < x \leqslant 1)$. **2578.** $\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ $(|x| < 1)$. **2579.** $\operatorname{arctg} x$ $(|x| \leqslant 1)$. **2580.** $\frac{1}{(x-1)^2}$ $(|x| < 1)$. **2581.** $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$ $(|x| < 1)$. **2582.** $\frac{2}{(1-x)^3}$ $(|x| < 1)$.

2583. $\frac{x}{(x-1)^2}$ $(|x| > 1)$. **2584.** $\frac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}\right)$ $(|x| < 1)$. **2585.** $\frac{\pi\sqrt{3}}{6}$. Рассмотреть сумму ряда $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$ (см. задачу 2579) при $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **2586.** 3. **2587.** $a^x = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \ln^n a}{n!}$ $(-\infty < x < \infty)$. **2588.** $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 + x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{\frac{n^2-n}{2}}\frac{x^n}{n!} + \ldots\right]$. **2589.** $\cos(x + a) = \cos a - x\sin a - \frac{x^2}{2!}\cos a + \frac{x^3}{3!}\sin a + \frac{x^4}{4!}\cos a + \ldots + \frac{x^n}{n!}\sin\left[a + \frac{(n+1)\pi}{2}\right] + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$. **2590.** $\sin^2 x = \frac{2x^2}{2!} - \frac{2^3x^4}{4!} + \frac{2^5x^6}{6!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$. **2591.** $\ln(2 + x) = \ln 2 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{2 \cdot 2^2} + \frac{x^3}{3 \cdot 2^3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n \cdot 2^n} + \ldots$ $(-2 < x \leqslant 2)$. При исследовании остаточного члена воспользоваться теоремой об интегрировании степенного ряда. **2592.** $\frac{2x-3}{(x-1)^2} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty} (n+3)x^n$ $(|x| < 1)$. **2593.** $\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = -\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1 + \frac{2}{3^{n+1}}\right)x^n$ $(|x| < 1)$. **2594.** $xe^{-2x} = x + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}2^{n-1}x^n}{(n-1)!}$ $(-\infty < x < \infty)$. **2595.** $e^{x^2} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}$ $(-\infty < x < \infty)$. **2596.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty < x < \infty)$. **2597.** $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n}x^{2n}}{(2n)!}$. **2598.** $1 + \frac{1}{2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2x)^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty < x < \infty)$. **2599.** $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)3^{2n} \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty < x < \infty)$. **2600.** $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(-3 < x < 3)$. **2601.** $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\frac{x^4}{2^5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\frac{x^6}{2^7} + \ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 2n}\frac{x^{2n}}{2^{2n+1}} + \ldots$ $(-2 < x < 2)$.

2602. $2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x| < 1)$. **2603.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n-1}{n}x^n$ $\left(-\frac{1}{2} < x \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

2604. $x + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(n-1)n}$ $(|x| \leqslant 1)$. **2605.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x| \leqslant 1)$.

2606. $x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ $(|x| \leqslant 1)$.

2607. $x - \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ $(|x| \leqslant 1)$.

2608. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{4n-3}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty < x < \infty)$. **2609.** $1 + \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n-1}{n!}x^n$ $(-\infty < x < \infty)$. **2610.** $8 + 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2^n+3^{n-1}}{n!}x^n$ $(-\infty < x < \infty)$. **2611.** $2 + \frac{x}{2^2\cdot 3\cdot 1!} - \frac{2\cdot x^2}{2^5\cdot 3^2\cdot 2!} + \frac{2\cdot 5x^3}{2^8\cdot 3^3\cdot 3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-4)x^n}{2^{3n-1}\cdot 3^n\cdot n!} + \ldots$ $(-\infty < x < \infty)$.

2612. $\frac{1}{6} - \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}}\right)x^n$ $(-2 < x < 2)$. **2613.** $1 + \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1+3^{2n-1})x^{2n}}{(2n)!}$ $(|x| < \infty)$. **2614.** $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n}}{4^{n+1}}$ $(|x| < \sqrt{2})$. **2615.** $\ln 2 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1 + 2^{-n})\frac{x^n}{n}$ $(-1 < x \leqslant 1)$. **2616.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$ $(-\infty < x < \infty)$. **2617.** $x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$ $(|x| < \infty)$. **2618.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n^2}$ $(|x| \leqslant 1)$. **2619.** $x + \frac{1}{2\cdot 5}x^5 + \frac{1\cdot 3}{2^2\cdot 9\cdot 2!}x^9 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2^n(4n+1)n!}x^{4n+1} + \ldots$ $(|x| < 1)$. **2620.** $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots$ **2621.** $x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \ldots$ **2622.** $e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \ldots\right)$. **2623.** $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \ldots$ **2624.** $-\left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^6}{45} + \ldots\right)$. **2625.** $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \ldots$

2626. Исходя из параметрических уравнений эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, вычислить длину эллипса и полученное выражение разложить в ряд по степеням ε. **2628.** $x^3 - 2x^2 - 5x - 2 = -78 + 59(x + 4) - 14(x + 4)^2 + (x + 4)^3$ $(-\infty < x < \infty)$. **2629.** $f(x + h) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2 + (15x^2 - 8x - 3)h + (15x - 4)h^2 + 5h^3$ $(-\infty < x < \infty;\ -\infty < h < \infty)$.

2630. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-1)^n}{n}$ $(0 < x \leqslant 2)$. **2631.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x - 1)^n$ $(0 < x < 2)$. **2632.** $\sum_{n=0}^{\infty}(n + 1)(x + 1)^n$ $(-2 < x < 0)$. **2633.** $\sum_{n=0}^{\infty}(2^{-n-1} - 3^{-n-1})(x + 4)^n$ $(-6 < x < -2)$. **2634.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+2)^{2n}}{3^{n+1}}$ $(-2 - \sqrt{3} < x < -2 + \sqrt{3})$. **2635.** $e^{-2}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{n!}\right]$ $(|x| < \infty)$. **2636.** $2 + \frac{x-4}{2^2} - \frac{1}{4}\cdot\frac{(x-4)^2}{2^4} = \frac{1\cdot 3}{4\cdot 6}\cdot\frac{(x-4)^3}{2^6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{4\cdot 6\cdot 8}\cdot\frac{(x-4)^4}{2^8} + \ldots + (-1)^{n-1}\times$ $\times\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{4\cdot 6\cdot 8\ldots 2n}\frac{(x-4)^n}{2^{2n}} + \ldots$ $(0 \leqslant x \leqslant 8)$. **2637.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x| < \infty)$.

2638. $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{n-1}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(|x| < \infty)$. **2639.** $-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\frac{(1-x)}{(1+x)}^{2n+1}$ $(0 < x < \infty)$. Сделать замену $\frac{1-x}{1+x} = t$ и разложить $\ln x$ по степеням t.

2640. $\frac{x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{x}{1+x}\right)^3 + \ldots + \frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-3)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots(2n-2)}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n + \ldots$ $\left(-\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant \infty\right)$. **2641.** $|R| < \frac{e}{5!} < \frac{1}{40}$. **2642.** $|R| < \frac{1}{11}$. **2643.** $\frac{\pi}{6} \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^5}{5} \approx 0{,}523$. Чтобы доказать, что ошибка не превышает 0,001, нужно оценить остаток с помощью геометрической прогрессии, превышающей этот остаток. **2644.** Два члена, т. е. $1 - \frac{x^2}{2}$. **2645.** Два члена, т. е. $x - \frac{x^3}{6}$.

2646. Восемь членов, т. е. $1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$. **2647.** 99; 999. **2648.** 1,92. **2649.** $|R| < 0{,}0003$. **2650.** 2,087. **2651.** $|x| < 0{,}69$; $|x| < 0{,}39$; $|x| < 0{,}22$. **2652.** $|x| < 0{,}39$; $|x| < 0{,}18$. **2653.** $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 3\cdot 3!} \approx 0{,}4931$. **2654.** 0,7468. **2655.** 0,608.

2656. 0,621. **2657.** 0,2505. **2658.** 0,026. **2659.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty;$ $-\infty<y<\infty)$. **2660.** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-y)^{2n}-(x+y)^{2n}}{2\cdot(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty;\ -\infty<y<\infty)$.

2661. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^2+y^2)^{2n-1}}{(2n-1)!}$ $(-\infty<x<\infty;\ -\infty<y<\infty)$. **2662.** $1+2\sum_{n=1}^{\infty}(y-x)^n$; $|x-y|<1$. Указание. $\frac{1-x+y}{1+x-y}=-1+\frac{2}{1-(y-x)}$. Воспользоваться геометрической прогрессией. **2663.** $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n+y^n}{n}$ $(-1\leqslant x<1;\ -1\leqslant y<1)$. Указание: $1-x-y+xy=(1-x)(1-y)$. **2664.** $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}+y^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1\leqslant x\leqslant 1;\ -1\leqslant y\leqslant 1)$. Указание. $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}=\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y$ (при $|x|\leqslant 1$, $|y|\leqslant 1$).

2665. $f(x+h,y+k)=ax^2+2bxy+cy^2+2(ax+by)h+2(bx+cy)k+ah^2+2bh+ck^2$. **2666.** $f(1+h,2+k)-f(1,2)=9h-21k+3h^2+3hk-12k^2+h^3-2k^3$.

2667. $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(x-2)+(y+2)]^n}{n!}$. **2668.** $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left[x+\left(y-\frac{\pi}{2}\right)\right]^{2n}}{(2n)!}$. **2669.** $1+x+\frac{x^2-y^2}{2!}+\frac{x^3-3xy^2}{3!}+\ldots$ **2670.** $1+x+xy+\frac{1}{2}x^2y+\ldots$ **2671.** $\frac{c_1+c_2}{2}-\frac{2(c_1-c_2)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}$; $S(0)=\frac{c_1+c_2}{2}$; $S(\pm\pi)=\frac{c_1+c_2}{2}$. **2672.** $\frac{b-a}{4}\pi-\frac{2(b-a)}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}+(a+b)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n}$; $S(\pm\pi)=\frac{b-a}{2}\pi$.

2673. $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; $S(\pm\pi)=\pi^2$. **2674.** $\frac{2}{\pi}\operatorname{sh}a\pi\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{a^2+n^2}(a\cos nx-n\sin nx)\right]$; $S(\pm\pi)=\operatorname{ch}a\pi$. **2675.** $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin nx}{a^2-n^2}$, если a — не целое; $\sin ax$, если a — целое; $S(\pm\pi)=0$. **2676.** $\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2-n^2}\right]$, если a — не целое; $\cos ax$, если a — целое; $S(\pm\pi)=\cos a\pi$.

2677. $\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$; $S(\pm\pi)=0$. **2678.** $\frac{2\operatorname{sh}a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a\cos nx}{a^2+n^2}\right]$; $S(\pm\pi)=\operatorname{ch}a\pi$.

2679. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}$. **2680.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2a-1)x}{2n-1}$; а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\frac{\pi}{3}$; в) $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$.

2681. а) $2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{x}$; б) $\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; $\frac{\pi^8}{8}$.

2682. а) $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, где $b_{2k-1}=\frac{2\pi}{2k-1}-\frac{8}{\pi(2k-1)^3}$, а $b_{2k}=-\frac{\pi}{k}$; б) $\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\cos nx}{n^2}$; 1) $\frac{\pi^2}{6}$; 2) $\frac{\pi^2}{12}$. **2683.** а) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}[1-(-1)^n e^{a\pi}]\frac{n\sin nx}{a^2+n^2}$; б) $\frac{e^{a\pi}-1}{a\pi}+\frac{2a}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[(-1)^n e^{a\pi}-1]\cos nx}{a^2+n^2}$. **2684.** а) $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin nx$; б) $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\cos nx$. **2685.** а) $\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^2}$; б) $\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2(2n-1)x}{(2n-1)^2}$. **2686.** $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$, где $b_{2k}=(-1)^{k-1}\frac{1}{2k}$, $b_{2k+1}=(-1)^k\frac{2}{\pi(2k+1)^2}$. **2687.** $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)^3}$. **2688.** $\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\sin nx}{4n^2-1}$.

2689. $\frac{2h}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{nh}\cos nx\right)$. **2690.** $\frac{2h}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin nh}{nh}\right)^2\cos nx\right]$.

2691. $1-\frac{\cos x}{2}+2\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos nx}{n^2-1}$. **2692.** $\frac{4}{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}\right]$.

2694. Решение: 1) $a_{2n}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)\cos 2nx\,dx+$

$+\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x$. Если сделать замену $t=\frac{2}{\pi}-x$ в первом интеграле и $t=x-\frac{2}{\pi}$ во втором интеграле, то, воспользовавшись предложенным тождеством $f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$, легко обнаружить, что $a_{2n}=0$ ($n=0, 1, 2, \ldots$);

2) $b_{2n}=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x+\frac{2}{\pi}\int\limits_{\pi/2}^{\pi} f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x$. Та же замена, что и в случае 1), с учетом предложенного тождества $f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$ приводит к равенствам $b_{2n}=0$ ($n=1, 2, \ldots$). **2695.** $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$.

2696. $1-\frac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2n\pi x}{n}$. **2697.** $\operatorname{sh} l\left[\frac{1}{l}+2\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{l\cos\frac{n\pi x}{l}-\pi n\sin\frac{n\pi x}{l}}{l^2+n^2\pi^2}\right]$.

2698. $\frac{10}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{n\pi x}{5}}{n}$. **2699.** а) $\frac{4}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2(n-1)\pi x}{2n-1}$; б) 1. **2700.** а) $\frac{2l}{\pi}\times\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}}{n}$; б) $\frac{l}{2}-\frac{4l}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{l}}{(2n-1)^2}$. **2701.** а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{nx}{2}$, где $b_{2k+1}=\frac{8}{\pi}\left[\frac{\pi^2}{2k+1}-\frac{4}{(2k+1)^3}\right]$, $b_{2k}=-\frac{4\pi}{k}$; б) $\frac{4\pi^2}{3}-16\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{nx}{2}}{n^2}$.

2702. а) $\frac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2}}{(2n+1)^2}$; б) $\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}$. **2703.** $\frac{2}{3}-\frac{9}{2\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{2n\pi x}{3}+\frac{1}{2\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\pi x}{n^2}$.

Глава IX

2704. Да. **2705.** Нет. **2706.** Да. **2707.** Да. **2708.** Да. **2709.** а) Да; б) нет. **2710.** Да. **2714.** $y-xy'=0$. **2715.** $xy'-2y=0$. **2716.** $y-2xy'=0$. **2717.** $x\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y=0$. **2718.** $y'=y$. **2719.** $3y^2-x^2=2xyy'$. **2720.** $xyy'(xy^2+1)=1$. **2721.** $y=xy'\ln\frac{x}{y}$. **2722.** $2xy''+y'=0$. **2723.** $y''-y'-2y=0$. **2724.** $y''+4y=0$. **2725.** $y'''-2y''+y'=0$. **2726.** $y''=0$. **2727.** $y'''=0$. **2728.** $(1+y'^2)y'''-3y'y''^2=0$. **2729.** $y^2-x^2=25$. **2730.** $y=xe^{2x}$. **2731.** $y=-\cos x$. **2732.** $y=\frac{1}{6}(-5e^{-x}+9e^{x}-4e^{2x})$. **2738.** 2,593 (точное значение $y=e$). **2739.** 4,780 (точное значение $y=3(e-1)$). **2740.** 0,946 (точное значение $y=1$). **2741.** 1,826 (точное значение $y=\sqrt{3}$). **2742.** $\operatorname{ctg}^2 y=\operatorname{tg}^2 x+C$. **2743.** $x=\frac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$; $y=0$.

2744. $x^2+y^2=\ln Cx^2$. **2745.** $y=\frac{a+Cx}{1+ax}$. **2746.** $\operatorname{tg} y=C(1-e^x)^3$; $x=0$. **2747.** $y=C\sin x$. **2748.** $2e^{y^2/2}=\sqrt{e}\,(1+e^x)$. **2749.** $1+y^2=\frac{2}{1-x^2}$. **2750.** $y=1$. **2751.** $\operatorname{arctg}(x+y)=x+C$. **2752.** $8x+2y+1=2\operatorname{tg}(4x+C)$. **2753.** $x+2y+3\ln|2x+3y-7|=C$. **2754.** $5x+10y+C=3\ln|10x-5y+6|$. **2755.** $\rho=\frac{C}{1-\cos\varphi}$ или $y^2=2Cx+C^2$. **2756.** $\ln\rho=\frac{1}{2\cos^2\varphi}-\ln|\cos\varphi|+C$ или $\ln|x|-\frac{y^2}{2x^2}=C$.

2757. Прямая $y=Cx$ или гипербола $y=\frac{C}{x}$. Отрезок касательной равен $\sqrt{y^2+\left(\frac{y}{y'}\right)^2}$. **2758.** $y^2-x^2=C$. **2759.** $y=Ce^{x/a}$. **2760.** $y^2=2px$. **2761.** $y=ax^2$.

По условию, $\dfrac{\int\limits_0^x x\,\mathrm{d}x}{\int\limits_0^x y\,\mathrm{d}x}=\frac{3}{4}x$. Дифференцируя дважды по x, получим дифференциальное уравнение. **2762.** $y^2=\frac{1}{3}x$. **2763.** $y=\sqrt{4-x^2}+2\ln\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}$.

2764. Пучок прямых $y=kx$. **2765.** Семейство подобных эллипсов $2x^2+y^2=C^2$. **2766.** Семейство гипербол $x^2-y^2=C$. **2767.** Семейство окружностей $x^2+(y-b)^2=b^2$. **2768.** $y=x\ln\frac{C}{x}$. **2769.** $y=\frac{C}{x}-\frac{x}{2}$. **2770.** $x=Ce^{x/y}$.

2771. $(x - C)^2 - y^2 = C^2$; $(x - 2)^2 - y^2 = 4$; $y = \pm x$. **2772.** $\sqrt{x/y} + \ln|y| = C$. **2773.** $y = \frac{C}{2}x^2 - \frac{1}{2C}$; $x = 0$. **2774.** $(x^2 + y^2)^3(x + y)^2 = C$. **2775.** $y = x\sqrt{1 - \frac{3}{8}x}$. **2776.** $(x + y - 1)^3 = C(x - y + 3)$. **2777.** $3x + y + 2\ln|x + y - 1| = C$. **2778.** $\ln|4x + 8y + 5| + 8y - 4x = C$. **2779.** $x^2 = 1 - 2y$. **2780.** Параболоид вращения. Решение. В силу симметрии искомое зеркало является поверхностью вращения. Начало координат помещается в источнике света; ось OX — направление пучка лучей. Если касательная в любой точке $M(x; y)$ кривой сечения искомой поверхности плоскостью XOY образует с осью OX угол φ, а отрезок, соединяющий начало координат с точкой $M(x; y)$, — угол α, то $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}$. Но $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{tg}\varphi = y'$. Искомое дифференциальное уравнение $y - yy'^2 = 2xy'$ и его решение $y^2 = 2Cx + C^2$. Плоское сечение — парабола. Искомая поверхность — параболоид вращения. **2781.** $(x - y)^2 - Cy = 0$. **2782.** $x^2 = C(2y + C)$. **2783.** $(2y^2 - x^2)^3 = Cx^2$. Использовать, что площадь равна $\int\limits_a^x y\,\mathrm{d}x$. **2784.** $y = Cx - x\ln|x|$. **2785.** $y = Cx + x^2$. **2786.** $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$. **2787.** $x\sqrt{1 + y^2} + \cos y = C$. Уравнение линейно относительно x и $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$. **2788.** $x = Cy^2 - \frac{1}{y}$. **2789.** $y = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{ab - \mathrm{e}^a}{x}$. **2790.** $y = \frac{1}{2}(x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x)\sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}}$. **2791.** $y = \frac{x}{\cos x}$. **2792.** $y(x^2 + Cx) = 1$. **2793.** $y^2 = x\ln\frac{C}{x}$. **2794.** $x^2 = \frac{1}{y + Cy^2}$. **2795.** $y^3(3 + Ce^{\cos x}) = x$. **2797.** $xy = Cy^2 + a^2$. **2798.** $y^2 + x + ay = 0$. **2799.** $x = y\ln\frac{y}{a}$. **2800.** $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = 1$. **2801.** $x^2 + y^2 - Cy + a^2 = 0$. **2802.** $\frac{x^2}{2} + xy + y^2 = C$. **2803.** $\frac{x^3}{3} + xy^2 + x^2 = C$. **2804.** $\frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2y^2 + 2x + \frac{y^3}{3} = C$. **2805.** $x^2 + y^2 - 2\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = C$. **2806.** $x^2 - y^2 = Cy^3$. **2807.** $\frac{x^2}{2} + y\mathrm{e}^{\frac{x}{y}} = 2$. **2808.** $\ln|x| - \frac{y^2}{x} = C$. **2809.** $\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} = C$. **2810.** $\frac{1}{y}\ln x + \frac{1}{2}y^2 = C$. **2811.** $(x\sin y + y\cos y - \sin y)\mathrm{e}^x = C$. **2812.** $(x^2C^2 + 1 - 2Cy)(x^2 + C^2 - 2Cy) = 0$; особый интеграл $x^2 - y^2 = 0$. **2813.** Общий интеграл $(y + C)^2 = x^3$; особого интеграла нет. **2814.** Общий интеграл $\left(\frac{x^2}{2} - y + C\right)\left(x - \frac{y^2}{2} + C\right) = 0$; особого интеграла нет. **2815.** Общий интеграл $y^2 + C^2 = 2Cx$; особый интеграл $x^2 - y^2 = 0$. **2816.** $y = \frac{1}{2}\cos x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$.

2817. $\begin{cases} x = \sin p + \ln p, \\ y = p\sin p + \cos p + p + C. \end{cases}$ **2818.** $\begin{cases} x = \mathrm{e}^p + p\mathrm{e}^p + C, \\ y = p^2\mathrm{e}^p. \end{cases}$ **2819.** $\begin{cases} x = 2p - \frac{2}{p} + C, \\ y = p^2 + 2\ln p. \end{cases}$

Особое решение $y = 0$. **2820.** $4y = x^2 + p^2$, $\ln|p - x| = C + \frac{x}{p - x}$. **2821.** $\ln\sqrt{p^2 + y^2} + \operatorname{arctg}\frac{p}{y} = C$, $x = \ln\frac{y^2 + p^2}{2p}$. Особое решение $y = \mathrm{e}^x$. **2822.** $y = C + (x^2/C)$; $y = \pm 2x$. **2823.** $\begin{cases} x = \ln|p| - \arcsin p + C, \\ y = p + \sqrt{1 - p^2}. \end{cases}$

2824. $\begin{cases} x = C\mathrm{e}^{-p} - 2p + 2, \\ y = C(1 + p)\mathrm{e}^{-p} - p^2 + 2. \end{cases}$ **2825.** $\begin{cases} x = \frac{1}{3}(Cp^{-1/2} - p), \\ y = \frac{1}{6}(2Cp^{1/2} + p^2). \end{cases}$ Указание. Дифференциальное уравнение, из которого определяется x как функция от p, однородно. **2826.** $y = Cx + C^2$; $y = -\frac{x^2}{4}$. **2827.** $y = Cx + C$; особого решения нет. **2828.** $y = Cx + \sqrt{1 + C^2}$; $x^2 + y^2 = 1$. **2829.** $y = Cx + \frac{1}{C}$; $y^2 = 4x$. **2830.** $xy = C$. **2831.** Окружность и семейство ее касательных. **2832.** Астроида $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$. **2833.** а) Однородное; $y = xu$; б) линейное относительно x; $x = uv$; в) линейное относительно y; $y = uv$; г) уравнение Бернулли; $y = uv$; д) с разделяющимися переменными; е) уравнение Клеро; привести к виду $y = xy' \pm \sqrt{y'^3}$; ж) уравнение Лагранжа; дифференцировать по x; з) уравнение Бернулли; $y = uv$; и) приводящееся к уравнению с разделяющимися переменными; $u = x + y$; к) уравнение Лагранжа; дифференцировать по x; л) уравнение Бернулли относительно x; $x = uv$; м) уравнение в полных дифференциалах; н) линейное; $y = uv$; о) уравнение Бернулли; $y = uv$. **2834.** а) $\sin\frac{y}{x} = -\ln|x| + C$; б) $x = y\cdot\mathrm{e}^{Cy + 1}$. **2835.** $x^2 + y^4 = Cy^2$. **2836.** $y = \frac{x}{x^2 + C}$. **2837.** $xy\left(C - \frac{1}{2}\ln^2 x\right) = 1$. **2838.** $y = Cx + C\ln C$; особое решение $y = -\mathrm{e}^{-(x + 1)}$. **2839.** $y = Cx + \sqrt{-aC}$; особое решение $y = \frac{a}{4x}$. **2840.** $3y + \ln\frac{|x^3 - 1|}{(y + 1)^6} = C$. **2841.** $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^y - \operatorname{arctg} y - \frac{1}{2}\ln(1 + y^2) = C$. **2842.** $y = x^2(1 + C\mathrm{e}^{1/x})$. **2843.** $x = y^2(C - \mathrm{e}^{-y})$. **2844.** $y = C\mathrm{e}^{-\sin x} + \sin x - 1$. **2845.** $y = ax + C\sqrt{1 - x^2}$. **2846.** $y = \frac{x}{x + 1}(x + \ln|x| + C)$.

2847. $x = Ce^{\sin y} - 2a(1 + \sin y)$. **2848.** $\frac{x^2}{2} + 3x + y + \ln[(x-3)^{10}|y-1|^3] = C$. **2849.** $2\operatorname{arctg}\frac{y-1}{2x} = \ln Cx$. **2850.** $x^2 = 1 - \frac{2}{y} + Ce^{-2/y}$. **2851.** $x^3 = Ce^y - y - 2$. **2852.** $\sqrt{\frac{y}{x}} + \ln|x| = C$. **2853.** $y = x\arcsin(Cx)$. **2854.** $y^2 = Ce^{2x} + \frac{2}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x$. **2855.** $xy = C(y-1)$, $xy = C(y-1)$. **2856.** $x = Ce^y - \frac{1}{2}(\sin y + \cos y)$. **2857.** $py = C(p-1)$. **2858.** $x^4 = Ce^{4y} - y^3 - \frac{3}{4}y^2 - \frac{3}{8}y - \frac{3}{32}$. **2859.** $(xy + C)\times(x^2y + C) = 0$. **2860.** $\sqrt{x^2+y^2} - \frac{x}{y} = C$. **2861.** $xe^y - y^2 = C$.

2862. $\begin{cases} x = \dfrac{C}{p^2} - \dfrac{\sqrt{1+p^2}}{2p} + \dfrac{1}{2p^2}\ln(p + \sqrt{1+p^2}), \\ y = 2px + \sqrt{1+p^2}. \end{cases}$ **2863.** $y = xe^{Cx}$. **2864.** $2e^x - y^4 = Cy^2$. **2865.** $\ln|y+2| + 2\operatorname{arctg}\frac{y+2}{x-3} = C$. **2866.** $y^2 + Ce^{-y^2/2} + \frac{1}{x} - 2 = 0$. **2867.** $x^2y = Ce^{y/a}$. **2868.** $x + \frac{x}{y} = C$. **2869.** $y = \frac{C - x^4}{4(x^2-1)^{3/2}}$. **2870.** $y = C\sin x - a$. **2871.** $y = \frac{a^2\ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + C}{x + \sqrt{a^2+x^2}}$. **2872.** $(y - Cx)(y^2 - x^2 + C) = 0$. **2873.** $y = Cx + \frac{1}{C^2}$, $y = \frac{3}{2}\sqrt[3]{2x^2}$. **2874.** $x^3 + x^2y - y^2x - y^3 = C$. **2875.** $p^2 + 4y^2 = Cy^3$. **2876.** $y = x - 1$. **2877.** $y = x$. **2878.** $y = 2$. **2879.** $y = 0$. **2880.** $y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$. **2881.** $y = \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1)$. **2882.** $y = e^{-x} + 2x - 2$. **2883.** а) $y = x$; б) $y = Cx$, где C произвольно; точка (0; 0) — особая точка дифференциального уравнения. **2884.** а) $y^2 = x$; б) $y^2 = 2px$; (0; 0) — особая точка. **2885.** а) $(x - C)^2 + y^2 = C^2$; б) нет решения; в) $x^2 + y^2 = x$; (0; 0) — особая точка. **2886.** $y = e^{x/y}$. **2887.** $y = (\sqrt{2a} \pm \sqrt{x})^2$. **2888.** $y^2 = 1 - e^{-x}$. **2889.** $r = Ce^{a\varphi}$. Надо перейти к полярным координатам. **2890.** $3y^2 - 2x = 0$. **2891.** $r = k\varphi$. **2892.** $x^2 + (y-b)^2 = b^2$. **2893.** $y^2 + 16x = 0$. **2894.** Гиперболы $y^2 - x^2 = C$ или окружности $x^2 + y^2 = C^2$. **2895.** $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$. Использовать, что площадь равна $\int_0^x y\,dx$, а длина дуги $\int_0^x \sqrt{1+y'^2}\,dx$. **2896.** $x = \frac{a^2}{y} + Cy$.

2897. $y^2 = 4C(C + a - x)$. **2898.** Пользоваться тем, что равнодействующая силы тяжести и центробежной силы нормальна к поверхности. Принимая ось вращения за ось (OY) и обозначая через ω угловую скорость вращения, получаем для плоского осевого сечения искомой поверхности дифференциальное уравнение $g\frac{dy}{dx} = \omega^2 x$. **2899.** $p = 10^5 \cdot e^{-0{,}000167h}$. Давление на каждом уровне вертикального воздушного столба можно считать обусловленным только давлением вышележащих слоев. Использовать закон Бойля—Мариотта, по которому плотность пропорциональна давлению. Искомое дифференциальное уравнение $dp = -kp\,dh$. **2900.** $s = \frac{1}{2}klw$. Указание. Уравнение $ds = kw\times\frac{l-x}{l}dx$. **2901.** $s = (p + \frac{1}{2}w)kl$. **2902.** $T = a + (T_0 - a)e^{-kt}$, k — постоянный параметр. **2903.** Через час. **2904.** $\omega(t) = 100\left(\frac{3}{5}\right)^t$ об/мин. **2905.** За 100 лет распадется 4,2% начального количества Q_0. Указание: уравнение $\frac{dQ}{dt} = kQ$; $Q = Q_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$. **2906.** $t \approx 35{,}2$ с. Указание: уравнение $\pi(h^2 - 2h)\,dh = \pi\left(\frac{1}{10}\right)^2 v\,dt$. **2907.** $\frac{1}{1024}$. Указание: уравнение изменения интенсивности света I, проходящего через слой воды, имеет вид $dI = -kI\,dh$, откуда $I = I_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{3}}$, где I_0 — интенсивность света на поверхности воды. **2908.** $v \to \sqrt{\frac{gm}{k}}$ при $t \to \infty$ (k — коэффициент пропорциональности). Указание: уравнение $m\frac{dv}{dt} = mg - kv^2$; $v = \sqrt{\frac{gm}{k}}\operatorname{th}\left(t\sqrt{\frac{gk}{m}}\right)$. **2909.** 18,1 кг. Указание: уравнение $\frac{dx}{dt} = k\left(\frac{1}{3} - \frac{x}{300}\right)$. **2910.** $i = \frac{E}{R^2 + L^2\omega^2}\times\left[(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t) + L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right]$. Указание: уравнение $Ri + L\frac{di}{dt} = E\sin\omega t$. **2911.** $y = x\ln|x| + C_1x + C_2$. **2912.** $1 + C_1y^2 = \left(C_2 + \frac{C_1x}{\sqrt{2}}\right)^2$. **2913.** $y = \ln|e^{2x} + C_1| - x + C_2$. **2914.** $y = C_1 + C_2\ln|x|$. **2915.** $y = C_1e^{C_2x}$. **2916.** $y = \pm\sqrt{C_1x + C_2}$. **2917.** $y = (1 + C_1^2)\ln|x + C_1| - C_1x + C_2$. **2918.** $(x - C_1) = a\ln\left|\sin\frac{y - C_2}{a}\right|$. **2919.** $y = \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + C_1\ln|x| + C_2$. **2920.** $x = \frac{1}{C_1}\ln\left|\frac{y}{y + C_1}\right| + C_2$;

$y = C$. **2921.** $y = C_1 e^{C_2 x} + \frac{1}{C_2}$. **2922.** $y = \pm\frac{1}{2}\left[x\sqrt{C_1^2 - x^2} + C_1^2 \arcsin\frac{x}{C_1}\right] + C_2$. **2923.** $y = (C_1 e^x + 1)x + C_2$. **2924.** $y = (C_1 x - C_1^2)e^{\frac{x}{C_1}+1} + C_2$; $y = \frac{e}{2}x^2 + C$ (особое решение). **2925.** $y = C_1 x(x - C_1) + C_2$; $y = \frac{x^3}{3} + C$ (особое решение). **2926.** $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + C_1 x \ln x + C_2 x + C_3$. **2927.** $y = \sin(C_1 + x) + C_2 x + C_3$. **2928.** $y = x^3 + 3x$. **2929.** $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$. **2930.** $y = x + 1$. **2931.** $y = Cx^2$. **2932.** $y = C_1\frac{1 + C_2 e^x}{1 - C_2 e^x}$; $y = C$. **2933.** $x = C_1 + \ln\left|\frac{y - C_2}{y + C_2}\right|$. **2934.** $x = C_1 - \frac{1}{C_2} \times \ln\left|\frac{y}{y + C_2}\right|$. **2935.** $x = C_1 y^2 + y\ln y + C_2$. **2936.** $2y^2 - 4x^2 = 1$. **2937.** $y = x + 1$. **2938.** $y = \frac{x^2 - 1}{2(e^2 - 1)} - \frac{e^2 - 1}{4}\ln|x|$ или $y = \frac{1 - x^2}{2(e^2 + 1)} + \frac{e^2 + 1}{4}\ln|x|$. **2939.** $y = \frac{1}{2}x^2$. **2940.** $y = \frac{1}{2}x^2$. **2941.** $y = 2e^x$. **2942.** $x = -\frac{3}{2}(y + 2)^{2/3}$. **2943.** $y = e^x$. **2944.** $y^2 = \frac{e}{e - 1} + \frac{e^{-x}}{1 - e}$. **2945.** $y = \frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2} - \frac{8}{3}$. **2946.** $y = \frac{3e^{3x}}{2 + e^{3x}}$. **2947.** $y = \sec^2 x$. **2948.** $y = \sin x + 1$. **2949.** $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}$. **2950.** $x = -\frac{1}{2}e^{-y^2}$. **2951.** Решения нет. **2952.** $y = e^x$. **2953.** $y = 2\ln|x| - \frac{2}{x}$. **2954.** $y = \frac{(x + C_1^2 + 1)^2}{2} + \frac{4}{3}C_1(x + 1)^{3/2} + C_2$. Особое решение $y = C$. **2955.** $y = C_1\frac{x^2}{2} + (C_1 - C_1^2)x + C_2$. Особое решение $y = \frac{(x + 1)^3}{12} + C$. **2956.** $y = \frac{1}{12}(C_1 + x)^4 + C_2 x + C_3$. **2957.** $y = C_1 + C_2 e^{C_1 x}$; $y = 1 - e^x$; $y = -1 + e^{-x}$; особое решение $y = \frac{4}{C - x}$. **2958.** Окружности. **2959.** $(x - C_1)^2 - C_2 y^2 + kC_2^2 = 0$. **2960.** Цепная линия $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x - x_0}{2}$. Окружность $(x - x_0)^2 + y^2 = a^2$. **2961.** Парабола $(x - x_0)^2 = 2ay - a^2$. Циклоида $x - x_0 = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. **2962.** $e^{ay + C_2} = \sec(ax + C_1)$. **2963.** Парабола. **2964.** $y = \frac{C_1}{2}\frac{H}{q}e^{\frac{q}{H}x} + \frac{1}{2C_1}\frac{H}{q}e^{-\frac{q}{H}x} + C_2$ или $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x + C}{a} + C_2$,

где H — постоянное горизонтальное натяжение, а $\frac{H}{q} = a$. Указание: дифференциальное уравнение $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q}{H}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$. **2965.** Уравнение движения $\frac{d^2s}{dt^2} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$. Закон движения $s = \frac{gt^2}{2}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$ **2966.** $s = \frac{m}{k}\ln\mathrm{ch}\left(t\sqrt{g\frac{k}{m}}\right)$. Указание: уравнение движения $m\frac{d^2s}{dt^2} = mg - k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$. **2967.** Через 63 с. Указание: уравнение движения лодки $300x'' = -10x'$. **2968.** а) Нет; б) да; в) да; г) да; д) нет; у) нет; ж) нет; з) да. **2969.** а) $y'' + y' = 0$; б) $y'' - 2y' + y = 0$; в) $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; г) $y''' - 3y'' + 4y' - 2y = 0$. **2970.** $y = 3x - 5x^2 + 2x^3$. **2971.** $y = \frac{1}{x}(C_1\sin x + C_2\cos x)$. Применить подстановку $y = y_1 u$. **2972.** $y = C_1 x + C_2\ln x$. **2973.** $y = A + Bx^2 + x^3$. **2974.** $y = \frac{x^2}{3} + Ax + \frac{B}{x}$. Частные решения однородного уравнения $y_1 = x$, $y_2 = 1/x$. Методом вариации произвольных постоянных находим: $C_1 = \frac{x}{2} + A$; $C_2 = -\frac{x^3}{6} + B$. **2975.** $y = A + B\sin x + C\cos x + \ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + \sin x\ln|\cos x| - x\cos x$. **2976.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. **2977.** $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{3x}$. **2978.** $y = C_1 + C_2e^x$. **2979.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x$. **2980.** $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x)$. **2981.** $y = e^{-2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. **2982.** $y = (C_1 + C_2x)e^{-x}$. **2983.** $y = e^{2x}(C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}})$. **2984.** Если $k > 0$, $y = C_1e^{x\sqrt{k}} + C_2e^{-x\sqrt{k}}$; если $k < 0$, $y = C_1\cos\sqrt{-k}\,x + C_2\sin\sqrt{-k}\,x$. **2985.** $y = e^{-x/2}\left(C_1e^{\frac{\sqrt{5}}{2}x} + C_2e^{-\frac{\sqrt{5}}{2}x}\right)$. **2986.** $y = e^{x/6}\left(C_1\cos\frac{\sqrt{11}}{6}x + C_2\sin\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$. **2987.** $y = 4e^x + e^{4x}$. **2988.** $y = e^{-x}$. **2989.** $y = \sin 2x$. **2990.** $y = 1$. **2991.** $y = a\,\mathrm{ch}\,\frac{x}{a}$. **2992.** $y = 0$. **2993.** $y = C\sin\pi x$. **2994.** а) $xe^{2x}(Ax^2 + Bx + C)$; б) $A\cos 2x + B\sin 2x$; в) $A\cos 2x + B\sin 2x + Cx^2e^{2x}$; г) $e^x(A\cos x + B\sin x)$; д) $e^x(Ax^2 + Bx + C) + xe^{2x}(Dx + E)$; е) $xe^x[(Ax^2 + Bx + C)\cos 2x + (Dx^2 + Ex + F)\sin 2x]$. **2995.** $y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{8}(2x^2 + 4x + 3)$. **2996.** $y = e^{x/2}\left(C_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2} + C_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right) + x^3 + 3x^2$. **2997.** $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$. **2998.** $y = C_1e^x + C_2e^{7x} + 2$. **2999.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$. **3000.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}x\sin x$.

3001. $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} - \frac{2}{5}(3\sin 2x + \cos 2x)$. **3002.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x} + x\left(\frac{x}{10} - \frac{1}{25}\right)e^{2x}$. **3003.** $y = (C_1 + C_2x)e^x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{x^2}{4}e^x - \frac{1}{8}e^{-x}$. **3004.** $y = C_1 + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{20}(2\cos 2x - \sin 2x)$. **3005.** $y = e^x(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + \frac{x}{4}e^x\sin 2x$. **3006.** $y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin x + \sin 2x)$. **3007.** 1) $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t + \frac{A}{\omega^2 - p^2}\sin pt$; 2) $x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t - \frac{A}{2\omega}t\cos\omega t$. **3008.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x} - xe^{4x}$. **3009.** $y = C_1 + C_2e^{2x} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}$. **3010.** $y = e^x(C_1 + C_2x + x^2)$. **3011.** $y = C_1 + C_2e^{2x} + \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{5}{2}x$. **3012.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{4x} - \frac{1}{9}e^x + \frac{1}{5}(3\cos 2x + \sin 2x)$. **3013.** $y = C_1 + C_2e^{-x} + e^x + \frac{5}{2}x^2 - 5x$. **3014.** $y = C_1 + C_2e^x - 3xe^x - x - x^2$. **3015.** $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{1}{2}x^2\right)e^{-x} + \frac{1}{4}e^x$. **3016.** $y = (C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)e^x + \frac{1}{37}(\sin 3x + 6\cos 3x) + \frac{e^x}{9}$. **3017.** $y = (C_1 + C_2x + x^2)e^{2x} = \frac{x+1}{8}$.

3018. $y = C_1 + C_2e^{3x} - \frac{1}{10}(\cos x + 3\sin x) - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{9}$. **3019.** $y = \frac{1}{8}e^{2x}(4x + 1) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}$. **3020.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} - x\sin x - \cos x$. **3021.** $y = C_1e^{-2x} + C_2e^{2x} - \frac{e^{2x}}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x)$. **3022.** $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{x}{4}(3\sin 2x + 2\cos 2x) + \frac{1}{4}$. **3023.** $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x)$. **3024.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{4}(x^2 - x)e^x$. **3025.** $y = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x + \frac{1}{4}x\sin x - \frac{1}{16}\cos x + \frac{1}{54}(3x - 1)e^{3x}$. **3026.** $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-x} + \frac{1}{9}(2 - 3x) + \frac{1}{16}(2x^2 - x)e^{3x}$.

3027. $y = C_1 + C_2e^{2x} - 2xe^x - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x^2$. **3028.** $y = \left(C_1 + C_2x + \frac{x^3}{6}\right)e^{2x}$.

3029. $y = C_1e^{-3x} + C_2e^x - \frac{1}{8}(2x^2 + x)e^{-3x} + \frac{1}{16}(2x^2 + 3x)e^x$. **3030.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{x}{4}\cos x + \frac{x^2}{4}\sin x - \frac{x}{8}\cos 3x + \frac{3}{32}\sin 3x$. Указание: произведение косинусов преобразовать к сумме косинусов. **3031.** $y = C_1e^{-x\sqrt{2}} + C_2e^{x\sqrt{2}} + xe^x\sin x + e^x\cos x$. **3032.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x\ln\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$.

3033. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x\cdot\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$. **3034.** $y = (C_1 + C_2x)e^x + xe^x\ln|x|$.

3035. $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + xe^{-x}\ln|x|$. **3036.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x + \cos x\ln|\cos x|$. **3037.** $y = C_1\cos x + C_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$.

3038. а) $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + (e^x + e^{-x})\operatorname{arctg} e^x$; б) $y = C_1e^{x\sqrt{2}} + C_2e^{-x\sqrt{2}} + ex^2$.

3040. Уравнение движения $m\frac{d^2x}{dt^2} = mg - k(x + a)$, где a соответствует положению равновесия; $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. **3041.** Если x отсчитывать от положения покоя груза, то $mx'' = mg - k(x_0 + x - y - l)$, где x_0 — расстояние точки покоя груза от начальной точки подвеса пружины, l — длина пружины в состоянии покоя; поэтому $k(x_0 - l) = mg$, следовательно, $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - y)$, где $y = A\sin\omega t$. **3042.** $m\frac{d^2x}{dt^2} = k(b - x) - k(b + x)$; $x = c\cos\left(t\sqrt{\frac{2k}{m}}\right)$.

3043. $6\frac{d^2s}{dt^2} = gs$; $t = \sqrt{\frac{6}{g}}\ln(6 + \sqrt{35})$. **3044.** а) $r = \frac{a}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$; б) $r = \frac{v_0}{2\omega}(e^{\omega t} - e^{-\omega t})$. Указание: дифференциальное уравнение движения $\frac{d^2r}{dt^2} = \omega^2 r$.

3045. $y = C_1 + C_2e^x + C_3e^{12x}$. **3046.** $y = C_1 + C_2e^{-x} + C_3e^x$. **3047.** $y = C_1e^{-x} + e^{x/2}\left(C_2\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. **3048.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{x\sqrt{2}} + C_4e^{-x\sqrt{2}}$.

3049. $y = e^x(C_1 + C_2x + C_3x^2)$. **3050.** $y = e^x(C_1\cos x + C_2\sin x) + e^{-x}(C_3\cos x + C_4\sin x)$. **3051.** $y = (C_1 + C_2x)\cos 2x + (C_3 + C_4x)\sin 2x$. **3052.** $y = C_1 + C_2e^{-x} + e^{x/2}\left(C_3\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_4\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$. **3053.** $y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3 + C_4x)e^x$.

3054. $y = C_1e^{ax} + C_2e^{-ax} + C_3\cos ax + C_4\sin ax$. **3055.** $y = (C_1 + C_2x)e^{\sqrt{3}x} + (C_3 + C_4x)e^{-\sqrt{3}x}$. **3056.** $y = C_1 + C_2x + C_3\cos ax + C_4\sin ax$. **3057.** $y = C_1 + C_2x + (C_3 + C_4x)e^{-x}$. **3058.** $y = (C_1 + C_2x)\cos x + (C_3 + C_4x)\sin x$.

3059. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x + \ldots + C_nx^{n-1})$. **3060.** $y = C_1 + C_2x + \left(C_3 + C_4x + \frac{x^2}{2}\right)e^x$.

3061. $y = C_1 + C_2x + 12x^2 + 3x^3 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{20}x^5 + (C_3 + C_4x)e^x$. **3062.** $y = C_1e^x +$

$+ e^{-x/2}\left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) - x^3 - 5$. **3063.** $y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 e^{-x} + \frac{1}{1088}(4 \cos 4x - \sin 4x)$. **3064.** $y = C_1 e^{x} + C_2 + C_3 x + \frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{12} x^4 + e^x\left(\frac{3}{2}x - \frac{15}{4}\right)$. **3065.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 \cos x + C_3 \sin x + e^x\left(\frac{x}{4} - \frac{3}{8}\right)$. **3066.** $y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x + \sec x + \cos x \ln|\cos x| - \operatorname{tg} x \sin x + x \sin x$. **3067.** $y = e^{-x} + e^{-x/2}\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + x - 2$. **3068.** $y = (C_1 + C_2 \ln x)\frac{1}{x}$, $x > 0$. **3069.** $y = C_1 x^3 + \frac{C_2}{x}$. **3070.** $y = C_1 \cos(2 \ln x) + C_2 \sin(2 \ln x)$. **3071.** $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3$. **3072.** $y = C_1 + C_2 (3x + 2)^{-4/3}$. **3073.** $y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x}$. **3074.** $y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x)$. **3075.** $y = C_1 x^3 + C_2 x^2 + \frac{1}{2} x$. **3076.** $y = (x + 1)^2[C_1 + C_2 \ln(x + 1)] + (x + 1)^3$. **3077.** $y = x(\ln x + \ln^2 x)$. **3078.** $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, $z = C_2 \cos x - C_1 \sin x$. **3079.** $y = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$, $z = \frac{1}{5} e^{x}[(C_2 - 2C_1)\cos x - (C_1 + 2C_2)\sin x]$. **3080.** $y = (C_1 - C_2 - C_1 x)e^{-2x}$, $z = (C_1 x + C_2)e^{-2x}$. **3081.** $x = C_1 e^t + e^{-t/2}\left(C_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + C_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$, $y = C_1 e^t + e^{-t/2}\left(\frac{C_3\sqrt{3} - C_2}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t - \frac{C_2\sqrt{3} + C_3}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$, $z = C_1 e^t + e^{-t/2}\left(\frac{-C_3\sqrt{3} - C_2}{2} \times \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{C_2\sqrt{3} - C_3}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right)$. **3082.** $x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $y = C_3 e^{-t} + C_2 e^{2t}$, $z = -(C_1 + C_2)e^{-t} + C_2 e^{2t}$. **3083.** $y = C_1 + C_2 e^{2x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)$, $z = C_2 e^{2x} - C_1 + \frac{1}{4}(x^2 - x - 1)$. **3084.** $y = C_1 + C_2 x + 2 \sin x$, $z = -2C_1 - C_2(2x + 1) - 3 \sin x - 2 \cos x$. **3085.** $y = (C_2 - 2C_1 - 2C_2 x)e^{x} - 6x + 14$, $z = (C_1 + C_2 x)e^{x} + 5x - 9$; $C_1 = 9$, $C_2 = 4$, $y = 14(1 - e^{-x}) - 2x(3 + 4e^{-x})$, $z = -9(1 - e^{x}) + x(5 + 4e^{-x})$. **3086.** $x = 10e^{2t} - 8e^{3t} - e^t + 6t - 1$; $y = -20e^{2t} + 8e^{3t} + 3e^t + 12t + 10$. **3087.** $y = \frac{2C_1}{(C_2 - x)^2}$, $z = \frac{C_1}{C_2 - x}$. **3088*.** а) $\frac{(x^2 + y^2)y}{x^2} = C_1$, $\frac{z}{y} = C_2$; б) $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_1$, $\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_2$. Интегрируя однородное уравнение

$\frac{dx}{x - y} = \frac{dx}{x + y}$, находим *первый интеграл* $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_1$. Далее, пользуясь свойствами производных пропорций, имеем $\frac{dz}{z} = \frac{x\,dx}{x(x - y)} = \frac{y\,dy}{y(x + y)} = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2}$. Отсюда $\ln z^2 = \ln(x^2 + y^2) + \ln C_2^2$ и, следовательно, $\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C_2$; в) $x + y + z = 0$, $x^2 + y^2 + x^2 = 6$. **Указание: применяя свойства** производных пропорций, имеем $\frac{dx}{y - z} = \frac{dy}{z - x} = \frac{dz}{x - y} = \frac{dx + dy + dz}{0}$; отсюда $dx + dy + dz = 0$ и, следовательно, $x + y + z = C_1$. Аналогично, $\frac{x\,dx}{x(y - z)} = \frac{y\,dy}{y(z - x)} = \frac{z\,dz}{z(x - y)} = = \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0}$; $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$ и $x^2 + y^2 + z^2 = C^2$. Таким образом, интегральные кривые — окружности $x + y + z = C_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = C_2$. Из начальных условий $x = 1$, $y = 1$, $x = -2$ будем иметь $C_1 = 0$, $C_2 = 6$. **3089.** $y = C_1 x^2 + \frac{C_2}{x} - \frac{x^2}{18}(3 \ln^2 x - 2 \ln x)$, $z = 1 - 2C_1 x + \frac{C_2}{x^2} + \frac{x}{9}(3 \ln^2 x + \ln x - 1)$. **3090.** $y = C_1 e^{x\sqrt{2}} + C_2 e^{-x\sqrt{2}} + C_3 \cos x + C_4 \sin x + e^x - 2x$, $z = -C_1 e^{x\sqrt{2}} - C_2 e^{-x\sqrt{2}} - \frac{C_3}{4} \cos x - \frac{C_4}{4} \sin x - \frac{1}{2} e^x + x$. **3091.** $x = \frac{v_0 m \cos\alpha}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$, $y = \frac{m}{k^2}(kv_0 \sin\alpha + mg)\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right) - \frac{mgt}{k}$. **Решение:** $m\frac{dv_x}{dt} = -kv_x$; $m\frac{dv_y}{dt} = -kv_y - mg$ **при начальных условиях:** $x_0 = y_0 = 0$, $v_{x0} = v_0 \cos\alpha$, $v_{y0} = v_0 \sin\alpha$ при $t = 0$. Интегрируя, получим: $v_x = v_0 \cos\alpha\, e^{-\frac{k}{m}t}$, $kv_y + mg = (kv_0 \sin\alpha + mg)e^{-\frac{k}{m}t}$. **3092.** $x = \alpha \cos \frac{k}{\sqrt{m}} t$, $y = \frac{v_0\sqrt{m}}{k} \sin \frac{k}{\sqrt{m}} t$, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{k^2 y^2}{m v_0^2} = 1$. Указание: дифференциальные уравнения движения: $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2 x$; $m\frac{d^2y}{dt^2} = -k^2 y$. **3093.** $y = -2 - 2x - x^2$. **3094.** $y = \left(y_0 + \frac{1}{4}\right)e^{2(x-1)} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$. **3095.** $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + \frac{9}{32}x^4 + \frac{21}{320}x^5 \ldots$ **3096.** $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{7 \cdot 9}x^7 + \frac{2}{7 \cdot 11 \cdot 27}x^{11} - \ldots$ **3097.** $y = x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \ldots$; ряд сходится при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. **3098.** $y = x - \dfrac{x^2}{(1!)^2 \cdot 2} + \dfrac{x^3}{(2!)^2 \cdot 3} + \dfrac{x^4}{(3!)^2 \cdot 4} + \ldots$; ряд сходится при $-\infty < x < +\infty$. Использовать метод неопределенных коэффициентов. **3099.** $y = 1 - \dfrac{1}{3!}x^3 + \dfrac{1 \cdot 4}{6!}x^6 - \dfrac{1 \cdot 4 \cdot 7}{9!} + \ldots$; ряд сходится при $-\infty < x < +\infty$.

3100. $y = \dfrac{\sin x}{x}$. Использовать метод неопределенных коэффициентов.

3101. $y = 1 - \dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} - \dfrac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \ldots$; ряд сходится при $|x| < +\infty$.

Использовать метод неопределенных коэффициентов. **3102.** $x = a\left(1 - \dfrac{1}{2!}t^2 + \dfrac{2}{4!}t^4 - \dfrac{9}{6!}t^6 + \dfrac{55}{8!}t^8 - \ldots\right)$. **3103.** $u = A\cos\dfrac{a\pi t}{l}\sin\dfrac{\pi x}{l}$. Использовать условия: $u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0,\ u(x,\ 0) = A\sin\dfrac{\pi x}{l},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$.

3104. $u = \dfrac{2l}{\pi^2 a}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{(2k+1)^2}\sin\dfrac{(2k+1)\pi a t}{l}\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{l}$. Использовать условия: $u(0,\ t) = 0,\ u(l,\ t) = 0,\ u(x,\ 0) = 0,\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 1$. **3105.** $u = \dfrac{8h}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}\sin\dfrac{n\pi}{2}\cos\dfrac{n\pi a t}{l}\sin\dfrac{n\pi x}{l}$. Использовать условия: $\dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$,

$$u(0,\ t) = 0,\quad u(l,\ t) = 0,\quad u(x,\ 0) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{l} & \text{для } 0 < x \leqslant l/2, \\ 2h(1 - (x/l)) & \text{для } l/2 < x < l. \end{cases}$$

3106. $u = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n \cos\dfrac{(2n+1)a\pi t}{2l}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}$, где коэффициенты $A_n = \dfrac{2}{l}\int\limits_0^l \dfrac{x}{l}\sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx = \dfrac{8(-1)^n}{(2n+1)^2\pi^2}$. Использовать условия: $u(0,\ t) = 0$, $\dfrac{\partial u(l,t)}{\partial x} = 0,\ u(x,\ 0) = \dfrac{x}{l},\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} = 0$. **3107.** $u = \dfrac{400}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^3}(1 - \cos n\pi) \times \sin\dfrac{n\pi x}{100}\, e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{100^2}}$. Использовать условия: $u(0,\ t) = 0,\ u(100,\ t) = 0,\ u(x,\ 0) = 0{,}01x(100 - x)$.

Глава X

3108. а) $\leqslant 1''$; $\leqslant 0{,}0023\%$; б) $\leqslant 1$ мм; $\leqslant 0{,}26\%$; в) $\leqslant 1$ г; $\leqslant 0{,}0016\%$. **3109.** а) $\leqslant 0{,}05 < 0{,}021\%$; б) $\leqslant 0{,}0005$; $\leqslant 1{,}45\%$; в) $\leqslant 0{,}005$; $\leqslant 0{,}16\%$. **3110.** а) 2 знака; $48 \cdot 10^3$ или $49 \cdot 10^3$, так как число заключено между 47 877 и 48 845; б) 2 знака; 15; в) 1 знак; $6 \cdot 10^2$. Практически результат следует писать в виде $(5{,}9 \pm 0{,}1) \cdot 10^2$. **3111.** а) 29,5; б) $1{,}6 \cdot 10^2$; в) 43,2. **3112.** а) 84,2; б) 18,5 или $18{,}47 \pm 0{,}01$; в) результат вычитания не имеет верных знаков, так как разность равна одной сотой при возможном значении абсолютной погрешности в одну сотую. **3113*.** $(1{,}8 \pm 0{,}3)$ см^2. Воспользоваться формулой приращения площади квадрата. **3114.** а) $30{,}0 \pm 0{,}2$; б) $43{,}7 \pm 0{,}1$; в) $0{,}3 \pm 0{,}1$. **3115.** $(19{,}9 \pm 0{,}1)$ м^2. **3116.** а) $1{,}1295 \pm 0{,}0002$; б) $0{,}120 \pm 0{,}006$; в) частное может колебаться между 48 и 62. Следовательно, в записи частного нельзя считать достоверным ни один десятичный знак. **3117.** 0,480. Последняя цифра может колебаться на 1. **3118.** а) 0,1729; б) $277 \cdot 10^3$; в) 2. **3119.** $(2{,}05 \pm 0{,}01) \cdot 10^3$ см^2. **3120.** а) 1,648; б) $4{,}025 \pm 0{,}001$; в) $9{,}006 \pm 0{,}003$. **3121.** $4{,}01 \cdot 10^3$ см^2. Абсолютная погрешность 6,5 см^2. Относительная погрешность 0,16%. **3122.** Катет равен $(13{,}8 \pm 0{,}2)$ см; $\sin\alpha = 0{,}44 \pm 0{,}01$; $\alpha = 26°15' \pm 35'$. **3123.** $(2{,}7 \pm 0{,}1)$ г/см^3. **3124.** 0,27 А. **3125.** Длину маятника следует измерить с точностью до 0,3 см; числа π и g взять с тремя знаками (по принципу равных влияний). **3126.** Радиусы и образующую измерить с относительной погрешностью 1/300. Число π взять с тремя знаками (по принципу равных влияний). **3127.** Величину l измерить с точностью 0,2%, а s измерить с точностью 0,7% (по принципу равных влияний).

3128.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
1	3	7	−2	−6	14	−23
2	10	5	−8	8	−9	
3	15	−3	0	−1		
4	12	−3	−1			
5	9	−4				
6	5					

3129.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
1	−4	−12	32	48
3	−16	20	80	48
5	4	100	128	48
7	104	228	176	
9	332	404		
11	736			

3130.

x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
0	0	−4	−42	−24	24
1	−4	−46	−66	0	24
2	−50	−112	−66	24	24
3	−162	−178	−42	48	24
4	−340	−220	6	72	24
5	−560	−214	78	96	24
6	−774	−136	174	120	24
7	−910	38	294	144	
8	−872	332	438		
9	−540	770			
10	230				

Указание. Вычислить первые пять значений y и, получив $\Delta^4 y_0 = 24$, повторить число 24 по всему столбцу четвертых разностей. После этого остальная часть таблицы заполняется с помощью действия сложения (двигаясь справа налево).

3131. а) 0,211; 0,389; 0,490; 0,660; б) 0,229; 0,399; 0,491; 0,664. **3132.** 0,1822; 0,1993; 0,2165; 0,2334; 0,2503. **3133.** $1 + x + x^2 + x^3$. **3134.** $y = \frac{1}{96}x^4 - \frac{11}{48}x^3 + \frac{65}{24}x^2 - \frac{85}{12}x + 8$; $y \approx 22$ при $x = 5{,}5$; $y = 20$ при $x \approx 5{,}2$. При вычислении x для $y = 20$ принять $y_0 = 11$. **3135.** Интерполирующий многочлен $y = x^2 - 10x + 1$; $y = 1$ при $x = 0$. **3136.** 158 Н (приближенно). **3137.** а) $y(0{,}5) = -1$, $y(2) = 11$; б) $y(0{,}5) = -15/16$, $y(2) = -3$. **3138.** −1,325. **3139.** 1,01. **3140.** −1,86; −0,25; 2,11. **3141.** 2,09. **3142.** 2,45; 0,019. **3143.** 0,31; 4. **3144.** 2,506. **3145.** 0,02. **3146.** 0,24. **3147.** 1,27. **3148.** −1,88; 0,35; 1,53. **3149.** 1,84. **3150.** 1,31; −0,67. **3151.** 7,13. **3152.** 0,165. **3153.** ±1,73 и 0. **3154.** 1,72. **3155.** 1,38. **3156.** $x = 0{,}83$; $y = 0{,}56$; $x = -0{,}83$; $y = -0{,}56$. **3157.** $x = 1{,}67$; $y = 1{,}22$. **3158.** 4,493. **3159.** ±1,1997. **3160.** По формуле трапеций 11,625; по формуле Симпсона 11,417. **3161.** −0,995; −1; 0,005; 0,5%; $\Delta = 0{,}005$. **3162.** 0,3068; $\Delta = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$. **3163.** 0,69. **3164.** 0,79. **3165.** 0,84. **3166.** 0,28. **3167.** 0,10. **3168.** 1,61. **3169.** 1,85. **3170.** 0,09. **3171.** 0,67. **3172.** 0,75. **3173.** 0,79. **3174.** 4,93. **3175.** 1,29. Указание. Воспользоваться параметрическими уравнениями эллипса $x = \cos t$, $y = 0{,}6222 \sin t$ и преобразовать формулу длины дуги к виду $\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \cos^2 t} \cdot dt$, где ε — эксцентриситет эллипса.

3176. $y_1(x) = \frac{x^3}{3}$, $y_2(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63}$, $y_3(x) = \frac{x^3}{3} + + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}$.

3177. $y_1(x) = \frac{x^2}{2} - x + 1$, $y_2(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - x + 1$, $y_3(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - x + 1$; $z_1(x) = 3x - 2$, $z_2(x) = \frac{x^3}{6} - 2x^2 + 3x - 2$, $z_3(x) = \frac{7x^3}{6} - 2x^2 + 3x - 2$.

3178. $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x - \frac{x^3}{6}$, $y_3(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$. **3179.** $y(1) = 3{,}36$. **3180.** $y(2) = 0{,}80$. **3181.** $y(1) = 3{,}72$; $z(1) = 2{,}72$. **3182.** $y = 1{,}80$. **3183.** 3,15. **3184.** 0,14. **3185.** $y(0{,}5) = 3{,}15$; $z(0{,}5) = -3{,}15$. **3186.** $y(0{,}5) = 0{,}55$; $z(0{,}5) = -0{,}18$. **3187.** 1,16. **3188.** 0,87. **3189.** $x(\pi) = 3{,}58$; $x'(\pi) = 0{,}79$. **3190.** $429 + 1739 \cos x - 1037 \sin x - 6321 \cos 2x + 1263 \sin 2x - 1242 \cos 3x - 33 \sin 3x$. **3191.** $6{,}49 - 1{,}96 \cos x + 2{,}14 \sin x - 1{,}68 \cos 2x + 0{,}53 \sin 2x - 1{,}13 \cos 3x + 0{,}04 \sin 3x$. **3192.** $0{,}960 + 0{,}851 \cos x + 0{,}915 \sin x + 0{,}542 \cos 2x + 0{,}620 \sin 2x + 0{,}271 \cos 3x + 0{,}100 \sin 3x$. **3193.** а) $0{,}608 \sin x + 0{,}076 \sin 2x + 0{,}022 \sin 3x$; б) $0{,}338 + 0{,}414 \cos x + 0{,}111 \cos 2x + 0{,}056 \cos 3x$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Греческий алфавит

Α α — альфа
Β β — бета
Γ γ — гамма
Δ δ — дельта
Ε ε — эпсилон
Ζ ζ — дзета
Η η — эта
Θ θ — тэта
Ι ι — иота
Κ κ — каппа
Λ λ — ламбда
Μ μ — мю
Ν ν — ню
Ξ ξ — кси
Ο ο — омикрон
Π π — пи
Ρ ρ — ро
Σ σ — сигма
Τ τ — тау
Υ υ — ипсилон
Φ φ — фи
Χ χ — хи
Ψ ψ — пси
Ω ω — омега

II. Некоторые постоянные*)

Величина	x	$\lg x$	Величина	x	$\lg x$
π	3,14159	0,49715	$1/e$	0,36788	$\bar{1}{,}56571$
2π	6,28318	0,79918	e^2	7,38906	0,86859
$\pi/2$	1,57080	0,19612	$\sqrt{e}$	1,64872	0,21715
$\pi/4$	0,78540	$\bar{1}{,}89509$	$\sqrt[3]{e}$	1,39561	0,14476
$1/\pi$	0,31831	$\bar{1}{,}50285$	$M = \lg e$	0,43429	$\bar{1}{,}63778$
π^2	9,86960	0,99430	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,30258	0,36222
$\sqrt{\pi}$	1,77245	0,24857	1 радиан	57°17′45″	
$\sqrt[3]{\pi}$	1,46459	0,16572	arc 1°	0,01745	$\bar{2}{,}24188$
e	2,71828	0,43429	g	9,81	0,99167

*) При решении задач наряду с данными таблиц II—V можно использовать новое пособие: А. А. Рывкин. Шестизначные математические таблицы. — М.: Астрель, 2000.

III. Обратные величины, степени, корни, логарифмы

x	$1/x$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	$\lg x$ (мантиссы)	$\ln x$
1,0	1,000	1,000	1,000	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642	0,000	0,0000
1,1	0,909	1,210	1,331	1,049	3,317	1,032	2,224	4,791	0414	0,0953
1,2	0,833	1,440	1,728	1,095	3,464	1,063	2,289	4,932	0792	0,1823
1,3	0,769	1,690	2,197	1,140	3,606	1,091	2,351	5,066	1139	0,2624
1,4	0,714	1,960	2,744	1,183	3,742	1,119	2,410	5,192	1461	0,3365
1,5	0,667	2,250	3,375	1,225	3,873	1,145	2,466	5,313	1761	0,4055
1,6	0,625	2,560	4,096	1,265	4,000	1,170	2,520	5,429	2041	0,4700
1,7	0,588	2,890	4,913	1,304	4,123	1,193	2,571	5,540	2304	0,5306
1,8	0,556	3,240	5,832	1,342	4,243	1,216	2,621	5,646	2553	0,5878
1,9	0,526	3,610	6,859	1,378	4,359	1,239	2,668	5,749	2788	0,6419
2,0	0,500	4,000	8,000	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848	3010	0,6931
2,1	0,476	4,410	9,261	1,449	4,583	1,281	2,759	5,944	3222	0,7419
2,2	0,454	4,840	10,65	1,483	4,690	1,301	2,802	6,037	3424	0,7885
2,3	0,435	5,290	12,17	1,517	4,796	1,320	2,844	6,127	3617	0,8329
2,4	0,417	5,760	13,82	1,549	4,899	1,339	2,884	6,214	3802	0,8755
2,5	0,400	6,250	15,62	1,581	5,000	1,357	2,924	6,300	3979	0,9163
2,6	0,385	6,760	17,58	1,612	5,099	1,375	2,962	6,383	4150	0,9555
2,7	0,370	7,290	19,68	1,643	5,196	1,392	3,000	6,463	4314	0,9933
2,8	0,357	7,840	21,95	1,673	5,292	1,409	3,037	6,542	4472	1,0296
2,9	0,345	8,410	24,39	1,703	5,385	1,426	3,072	6,619	4624	1,0647
3,0	0,333	9,000	27,00	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694	4771	1,0986
3,1	0,323	9,610	29,79	1,761	5,568	1,458	3,141	6,768	4914	1,1314
3,2	0,312	10,24	32,77	1,789	5,657	1,474	3,175	6,840	5051	1,1632
3,3	0,303	10,89	35,94	1,817	5,745	1,489	3,208	6,910	5185	1,1939
3,4	0,294	11,56	39,30	1,844	5,831	1,504	3,240	6,980	5315	1,2238
3,5	0,286	12,25	42,88	1,871	5,916	1,518	3,271	7,047	5441	1,2528
3,6	0,278	12,96	46,66	1,897	6,000	1,533	3,302	7,114	5563	1,2809
3,7	0,270	13,69	50,65	1,924	6,083	1,547	3,332	7,179	5682	1,3083
3,8	0,263	14,44	54,87	1,949	6,164	1,560	3,362	7,243	5798	1,3350
3,9	0,256	15,21	59,32	1,975	6,245	1,574	3,391	7,306	5911	1,3610
4,0	0,250	16,00	64,00	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368	6021	1,3863
4,1	0,244	16,81	68,92	2,025	6,403	1,601	3,448	7,429	6128	1,4110
4,2	0,238	17,64	74,09	2,049	6,481	1,613	3,476	7,489	6232	1,4351
4,3	0,233	18,49	79,51	2,074	6,557	1,626	3,503	7,548	6335	1,4586
4,4	0,227	19,36	85,18	2,098	6,633	1,639	3,530	7,606	6435	1,4816
4,5	0,222	20,25	91,12	2,121	6,708	1,651	3,557	7,663	6532	1,5041
4,6	0,217	21,16	97,34	2,145	6,782	1,663	3,583	7,719	6628	1,5261
4,7	0,213	22,09	103,8	2,168	6,856	1,675	3,609	7,775	6721	1,5476
4,8	0,208	23,04	110,6	2,191	6,928	1,687	3,634	7,830	6812	1,5686
4,9	0,204	24,01	117,6	2,214	7,000	1,698	3,659	7,884	6902	1,5892
5,0	0,200	25,00	125,0	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937	6990	1,6094
5,1	0,196	26,01	132,7	2,258	7,141	1,721	3,708	7,990	7076	1,6292
5,2	0,192	27,04	140,6	2,280	7,211	1,732	3,733	8,041	7160	1,6487
5,3	0,189	28,09	148,9	2,302	7,280	1,744	3,756	8,093	7243	1,6677
5,4	0,185	29,16	157,5	2,324	7,348	1,754	3,780	8,143	7324	1,6864

Продолжение

x	$1/x$	x^2	x^3	$\sqrt{x}$	$\sqrt{10x}$	$\sqrt[3]{x}$	$\sqrt[3]{10x}$	$\sqrt[3]{100x}$	lg x (мантиссы)	ln x
5,5	0,182	30,25	166,4	2,345	7,416	1,765	3,803	8,193	7404	1,7047
5,6	0,179	31,36	175,6	2,366	7,483	1,776	3,826	8,243	7482	1,7228
5,7	0,175	32,49	185,2	2,387	7,550	1,786	3,849	8,291	7559	1,7405
5,8	0,172	33,64	195,1	2,408	7,616	1,797	3,871	8,340	7634	1,7579
5,9	0,169	34,81	205,4	2,429	7,681	1,807	3,893	8,387	7709	1,7750
6,0	0,167	36,00	216,0	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434	7782	1,7918
6,1	0,164	37,21	227,0	2,470	7,810	1,827	3,936	8,481	7853	1,8083
6,2	0,161	38,44	238,3	2,490	7,874	1,837	3,958	8,527	7924	1,8245
6,3	0,159	39,69	250,0	2,510	7,937	1,847	3,979	8,573	7993	1,8405
6,4	0,156	40,96	262,1	2,530	8,000	1,857	4,000	8,618	8062	1,8563
6,5	0,154	42,25	274,6	2,550	8,062	1,866	4,021	8,662	8129	1,8718
6,6	0,151	43,56	287,5	2,569	8,124	1,876	4,041	8,707	8195	1,8871
6,7	0,149	44,89	300,8	2,588	8,185	1,885	4,062	8,750	8261	1,9021
6,8	0,147	46,24	314,4	2,608	8,246	1,895	4,082	8,794	8325	1,9169
6,9	0,145	47,61	328,5	2,627	8,307	1,904	4,102	8,837	8388	1,9315
7,0	0,143	49,00	343,0	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879	8451	1,9459
7,1	0,141	50,41	357,9	2,665	8,426	1,922	4,141	8,921	8513	1,9601
7,2	0,139	51,84	373,2	2,683	8,485	1,931	4,160	8,963	8573	1,9741
7,3	0,137	53,29	389,0	2,702	8,544	1,940	4,179	9,004	8633	1,9879
7,4	0,135	54,76	405,2	2,720	8,602	1,949	4,198	9,045	8692	2,0015
7,5	0,133	56,25	421,9	2,739	8,660	1,957	4,217	9,086	8751	2,0149
7,6	0,132	57,76	439,0	2,757	8,718	1,966	4,236	9,126	8808	2,0281
7,7	0,130	59,29	456,5	2,775	8,775	1,975	4,254	9,166	8865	2,0412
7,8	0,128	60,84	474,6	2,793	8,832	1,983	4,273	9,205	8921	2,0541
7,9	0,127	62,41	493,0	2,811	8,888	1,992	4,291	9,244	8976	2,0669
8,0	0,125	64,00	512,0	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283	9031	2,0794
8,1	0,123	65,61	531,4	2,846	9,000	2,008	4,327	9,322	9085	2,0919
8,2	0,122	67,24	551,4	2,864	9,055	2,017	4,344	9,360	9138	2,1041
8,3	0,120	68,89	571,8	2,881	9,110	2,025	4,362	9,398	9191	2,1163
8,4	0,119	70,56	592,7	2,898	9,165	2,033	4,380	9,435	9243	2,1282
8,5	0,118	72,25	614,1	2,915	9,220	2,041	4,397	9,473	9294	2,1401
8,6	0,116	73,96	636,1	2,933	9,274	2,049	4,414	9,510	9345	2,1518
8,7	0,115	75,69	658,5	2,950	9,327	2,057	4,431	9,546	9395	2,1633
8,8	0,114	77,44	681,5	2,966	9,381	2,065	4,448	9,583	9445	2,1748
8,9	0,112	79,21	705,0	2,983	9,434	2,072	4,465	9,619	9494	2,1861
9,0	0,111	81,00	729,0	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655	9542	2,1972
9,1	0,110	82,81	753,6	3,017	9,539	2,088	4,498	9,691	9590	2,2083
9,2	0,109	84,64	778,7	3,033	9,592	2,095	4,514	9,726	9638	2,2192
9,3	0,108	86,49	804,4	3,050	9,644	2,103	4,531	9,761	9685	2,2300
9,4	0,106	88,36	830,6	3,066	9,695	2,110	4,547	9,796	9731	2,2407
9,5	0,105	90,25	857,4	3,082	9,747	2,118	4,563	9,830	9777	2,2513
9,6	0,104	92,16	884,7	3,098	9,798	2,125	4,579	9,865	9823	2,2618
9,7	0,103	94,09	912,7	3,114	9,849	2,133	4,595	9,899	9868	2,2721
9,8	0,102	96,04	941,2	3,130	9,899	2,140	4,610	9,993	9912	2,2824
9,9	0,101	98,01	970,3	3,146	9,950	2,147	4,626	9,967	9956	2,2925
10,0	0,100	100,00	1000,0	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000	0000	2,3026

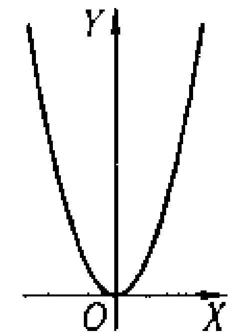
IV. Тригонометрические функции

$x°$	x (радианы)	sin x	tg x	ctg x	cos x		
0	0,0000	0,0000	0,0000	∞	1,0000	1,5708	90
1	0,0175	0,0175	0,0175	57,29	0,9998	1,5533	89
2	0,0349	0,0349	0,0349	28,64	0,9994	1,5359	88
3	0,0524	0,0523	0,0524	19,08	0,9986	1,5184	87
4	0,0698	0,0698	0,0699	14,30	0,9976	1,5010	86
5	0,0873	0,0872	0,0875	11,43	0,9962	1,4835	85
6	0,1047	0,1045	0,1051	9,514	0,9945	1,4661	84
7	0,1222	0,1219	0,1228	8,144	0,9925	1,4486	83
8	0,1396	0,1392	0,1405	7,115	0,9903	1,4312	82
9	0,1571	0,1564	0,1584	6,314	0,9877	1,4137	81
10	0,1745	0,1736	0,1763	5,671	0,9848	1,3963	80
11	0,1920	0,1908	0,1944	5,145	0,9816	1,3788	79
12	0,2094	0,2079	0,2126	4,705	0,9781	1,3614	78
13	0,2269	0,2250	0,2309	4,331	0,9744	1,3439	77
14	0,2443	0,2419	0,2493	4,011	0,9703	1,3265	76
15	0,2618	0,2588	0,2679	3,732	0,9659	1,3090	75
16	0,2793	0,2756	0,2867	3,487	0,9613	1,2915	74
17	0,2967	0,2924	0,3057	3,271	0,9563	1,2741	73
18	0,3142	0,3090	0,3249	3,078	0,9511	1,2566	72
19	0,3316	0,3256	0,3443	2,904	0,9455	1,2392	71
20	0,3491	0,3420	0,3640	2,747	0,9397	1,2217	70
21	0,3665	0,3584	0,3839	2,605	0,9336	1,2043	69
22	0,3840	0,3746	0,4040	2,475	0,9272	1,1868	68
23	0,4014	0,3907	0,4245	2,356	0,9205	1,1694	67
24	0,4189	0,4067	0,4452	2,246	0,9135	1,1519	66
25	0,4363	0,4226	0,4663	2,145	0,9063	1,1345	65
26	0,4538	0,4384	0,4877	2,050	0,8988	1,1170	64
27	0,4712	0,4540	0,5095	1,963	0,8910	1,0996	63
28	0,4887	0,4695	0,5317	1,881	0,8829	1,0821	62
29	0,5061	0,4848	0,5543	1,804	0,8746	1,0647	61
30	0,5236	0,5000	0,5774	1,732	0,8660	1,0472	60
31	0,5411	0,5150	0,6009	1,6643	0,8572	1,0297	59
32	0,5585	0,5299	0,6249	1,6003	0,8480	1,0123	58
33	0,5760	0,5446	0,6494	1,5399	0,8387	0,9948	57
34	0,5934	0,5592	0,6745	1,4826	0,8290	0,9774	56
35	0,6109	0,5736	0,7002	1,4281	0,8192	0,9599	55
36	0,6283	0,5878	0,7265	1,3764	0,8090	0,9425	54
37	0,6458	0,6018	0,7536	1,3270	0,7986	0,9250	53
38	0,6632	0,6157	0,7813	1,2799	0,7880	0,9076	52
39	0,6807	0,6293	0,8098	1,2349	0,7771	0,8901	51
40	0,6981	0,6428	0,8381	1,1918	0,7660	0,8727	50
41	0,7156	0,6561	0,8693	1,1504	0,7547	0,8552	49
42	0,7330	0,6691	0,9004	1,1106	0,7431	0,8378	48
43	0,7505	0,6820	0,9325	1,0724	0,7314	0,8203	47
44	0,7679	0,6947	0,9657	1,0355	0,7193	0,8029	46
45	0,7854	0,7071	1,0000	1,0000	0,7071	0,7854	45
		cos x	ctg x	tg x	sin x	x (радианы)	$x°$

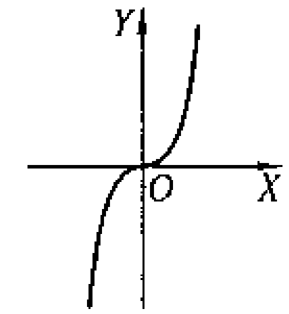
V. Показательные, гиперболические и тригонометрические функции

x	e^x	e^{-x}	sh x	ch x	th x	sin x	cos x
0,0	1,0000	1,0000	0,0000	1,0000	0,0000	0,0000	1,0000
0,1	1,1052	0,9048	0,1002	1,0050	0,0997	0,0998	0,9950
0,2	1,2214	0,8187	0,2013	1,0201	0,1974	0,1987	0,9801
0,3	1,3499	0,7408	0,3045	1,0453	0,2913	0,2955	0,9853
0,4	1,4918	0,6703	0,4108	1,0811	0,3799	0,3894	0,9211
0,5	1,6487	0,6065	0,5211	1,1276	0,4621	0,4794	0,8776
0,6	1,8221	0,5488	0,6367	1,1855	0,5370	0,5646	0,8253
0,7	2,0138	0,4966	0,7586	1,2552	0,6044	0,6442	0,7648
0,8	2,2255	0,4493	0,8881	1,3374	0,6640	0,7174	0,6967
0,9	2,4596	0,4066	1,0265	1,4331	0,7163	0,7833	0,6216
1,0	2,7183	0,3679	1,1752	1,5431	0,7616	0,8415	0,5403
1,1	3,0042	0,3329	1,3356	1,6685	0,8005	0,8912	0,4536
1,2	3,3201	0,3012	1,5095	1,8107	0,8337	0,9320	0,3624
1,3	3,6693	0,2725	1,6984	1,9709	0,8617	0,9636	0,2675
1,4	4,0552	0,2466	1,9043	2,1509	0,8854	0,9854	0,1700
1,5	4,4817	0,2231	2,1293	2,3524	0,9051	0,9975	0,0707
1,6	4,9530	0,2019	2,3756	2,5775	0,9217	0,9996	−0,0292
1,7	5,4739	0,1827	2,6456	2,8283	0,9354	0,9917	−0,1288
1,8	6,0496	0,1653	2,9422	3,1075	0,9468	0,9738	−0,2272
1,9	6,6859	0,1496	3,2682	3,4177	0,9562	0,9463	−0,3233
2,0	7,3891	0,1353	3,6269	3,7622	0,9640	0,9093	−0,4161
2,1	8,1662	0,1225	4,0219	4,1443	0,9704	0,8632	−0,5048
2,2	9,0250	0,1108	4,4571	4,5679	0,9757	0,8085	−0,5885
2,3	9,9742	0,1003	4,9370	5,0372	0,9801	0,7457	−0,6663
2,4	11,0232	0,0907	5,4662	5,5569	0,9837	0,6755	−0,7374
2,5	12,1825	0,0821	6,0502	6,1323	0,9866	0,5985	−0,8011
2,6	13,4637	0,0743	6,6947	6,7690	0,9890	0,5155	−0,8569
2,7	14,8797	0,0672	7,4063	7,4735	0,9910	0,4274	−0,9041
2,8	16,4446	0,0608	8,1919	8,2527	0,9926	0,3350	−0,9422
2,9	18,1741	0,0550	9,0596	9,1146	0,9940	0,2392	−0,9710
3,0	20,0855	0,0498	10,0179	10,0677	0,9950	0,1411	−0,9900
3,1	22,1979	0,0450	11,0764	11,1215	0,9959	0,0416	−0,9991
3,2	24,5325	0,0408	12,2459	12,2356	0,9967	−0,0584	−0,9983
3,3	27,1126	0,0369	13,5379	13,5748	0,9973	−0,1577	−0,9875
3,4	29,9641	0,0334	14,9654	14,9987	0,9978	−0,2555	−0,9668
3,5	33,1154	0,0302	16,5426	16,5728	0,9982	−0,3508	−0,9365

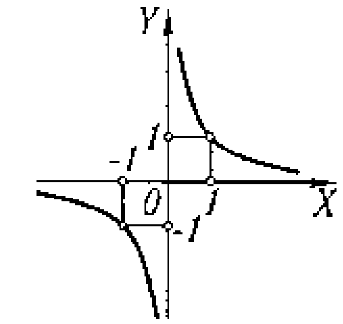
VI. Некоторые кривые (*для справок*)



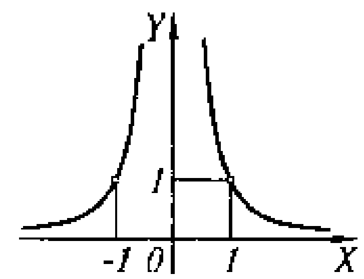
1. Парабола $y = x^2$.



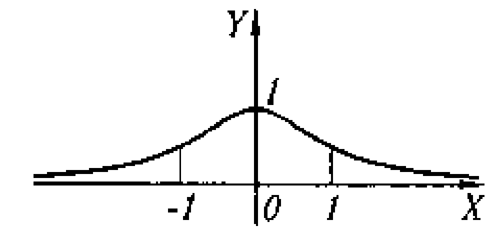
2. Кубическая парабола $y = x^3$.



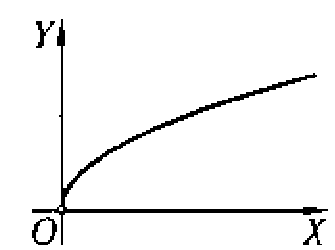
3. Равноосная гипербола $y = \frac{1}{x}$.



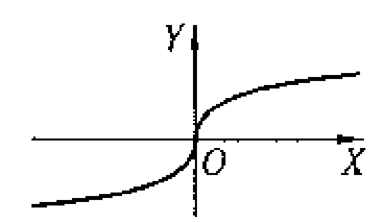
4. График дробной функции $y = \frac{1}{x^2}$.



5. Локон Аньези $y = \frac{1}{1+x^2}$.

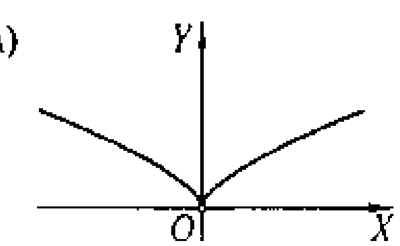


6. Парабола (верхняя ветвь) $y = \sqrt{x}$.

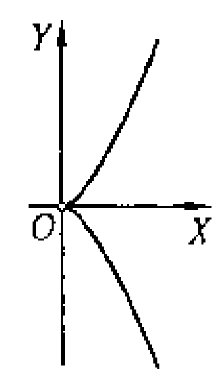


7. Кубическая парабола $y = \sqrt[3]{x}$.

а)



б)

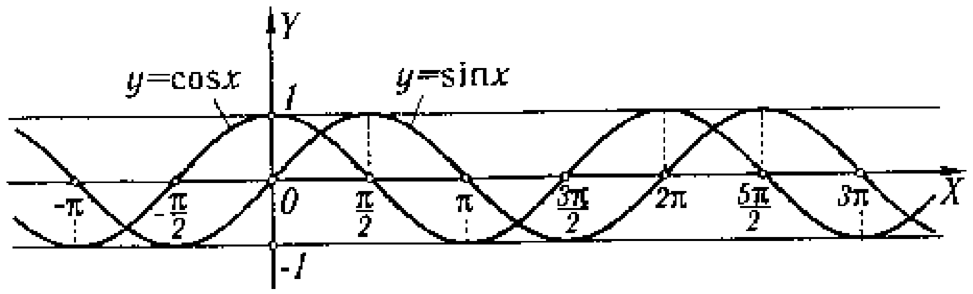


8а. Парабола Нейля

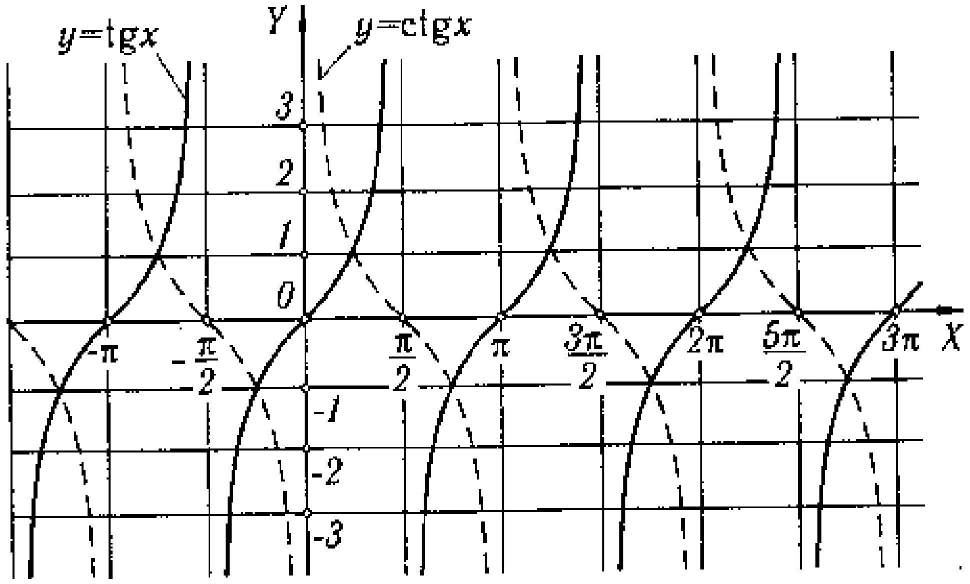
$$y = x^{\frac{2}{3}} \text{ или } \begin{cases} x = t^3, \\ y = t^2. \end{cases}$$

8б. Полукубическая парабола

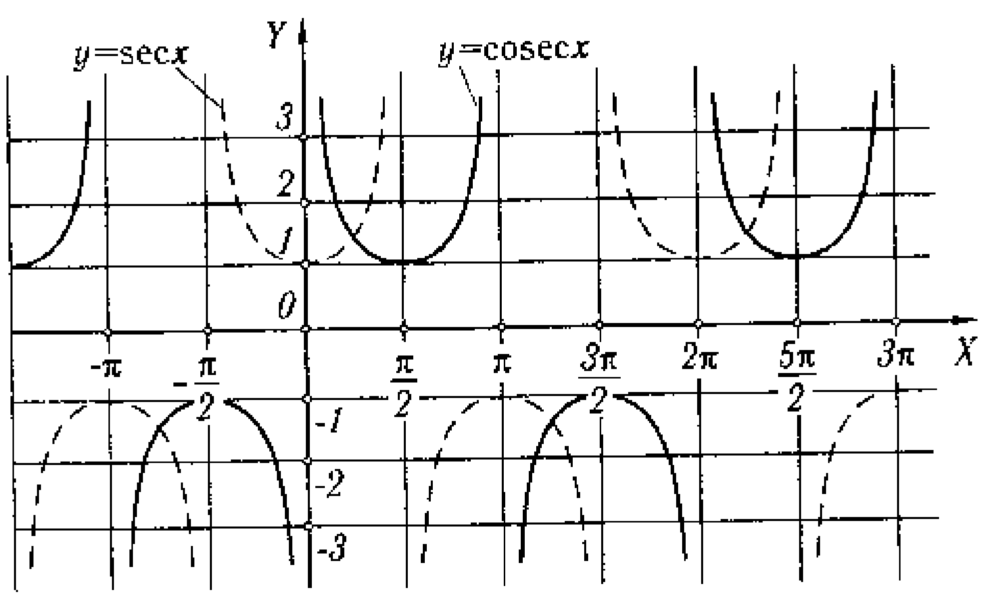
$$y^2 = x^3 \text{ или } \begin{cases} x = t^2, \\ y = t^3. \end{cases}$$



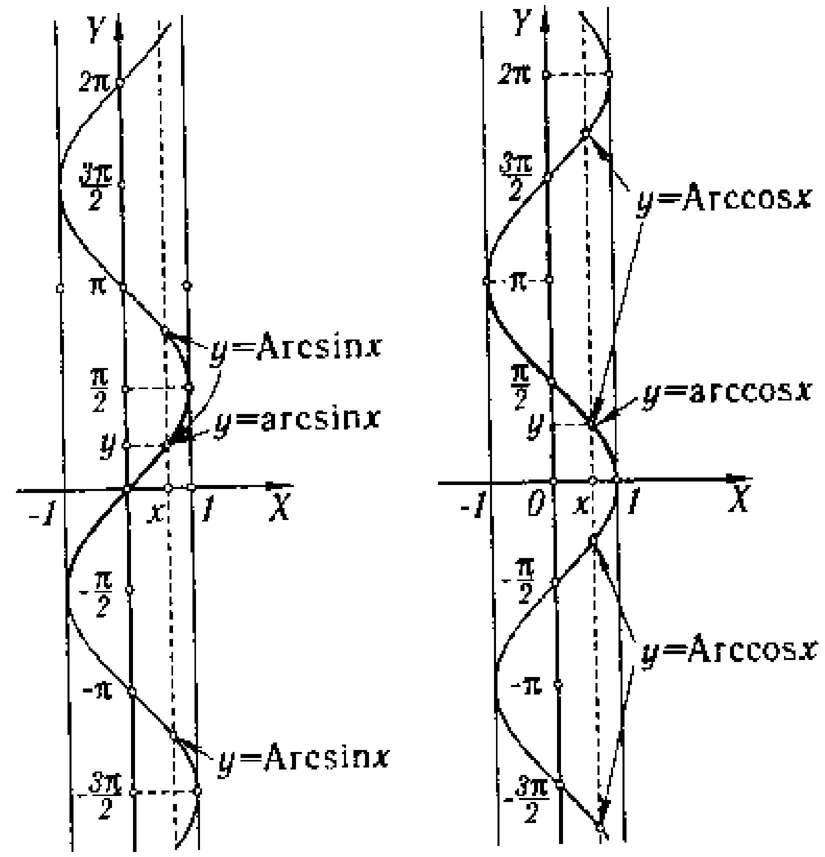
9. Синусоида и косинусоида
$y = \sin x$ и $y = \cos x$.



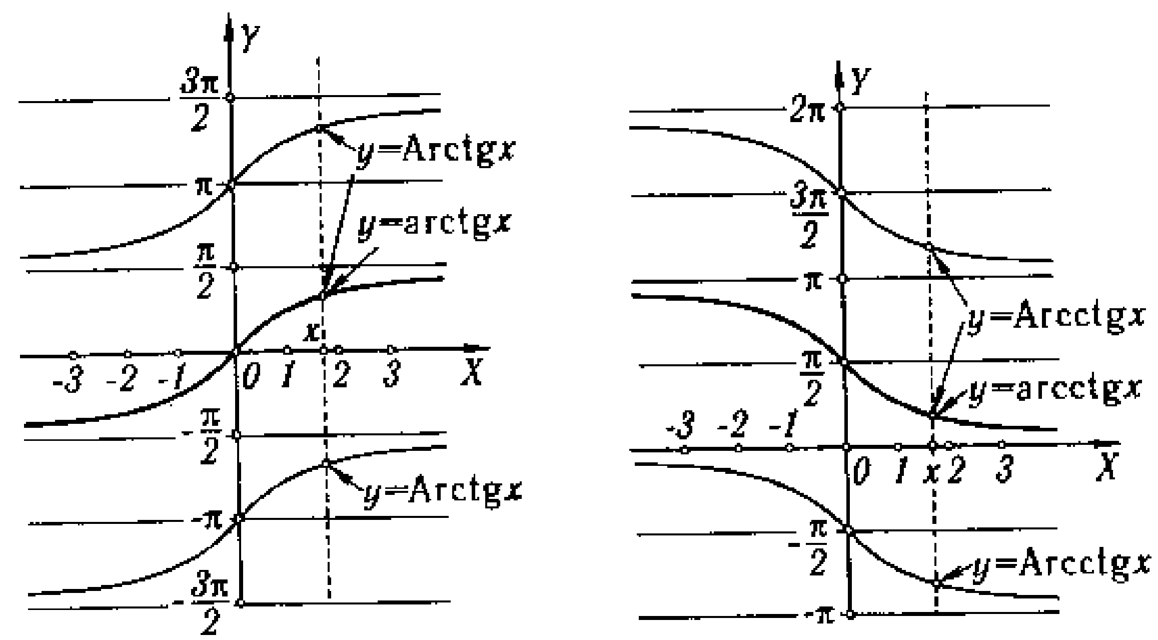
10. Тангенсоида и котангенсоида
$y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.



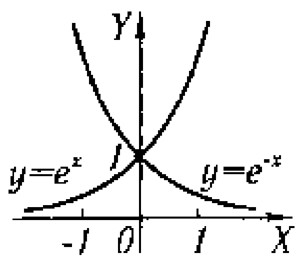
11. Графики функций
$y = \sec x$ и $y = \operatorname{cosec} x$.



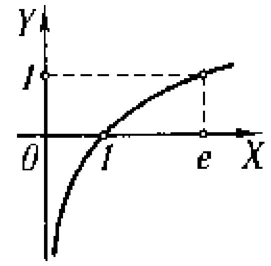
12. Графики обратных тригонометрических функций
$y = \operatorname{Arcsin} x$
и $y = \operatorname{Arccos} x$.



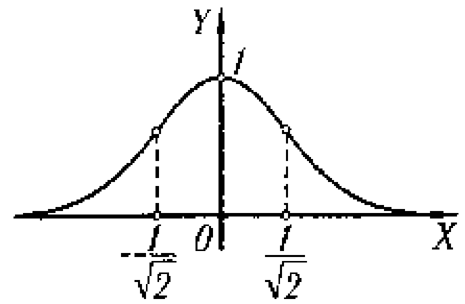
13. Графики обратных тригонометрических функций
$y = \operatorname{Arctg} x$ и $y = \operatorname{Arcctg} x$.



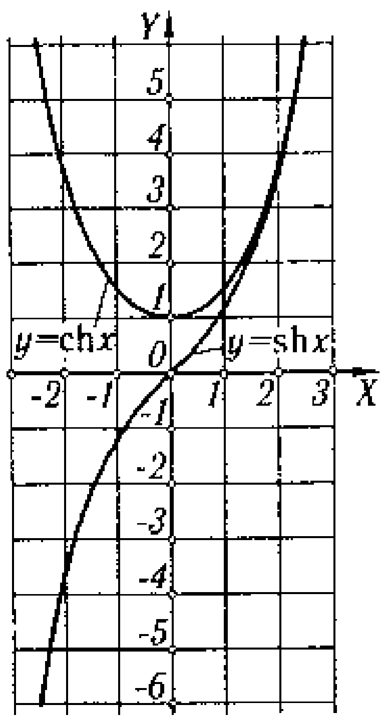
14. Графики показательных функций $y = e^x$ и $y = e^{-x}$.



15. Логарифмическая кривая $y = \ln x$.



16. Кривая Гаусса $y = e^{-x^2}$.

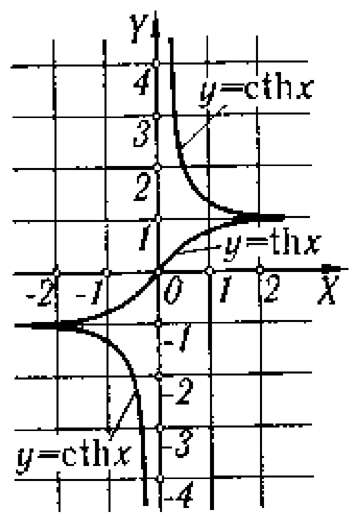


17. Графики гиперболических функций

$$y = \operatorname{sh} x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

и

$$y = \operatorname{ch} x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (цепная линия).}$$

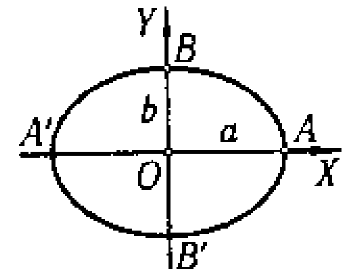


18. Графики гиперболических функций

$$y = \operatorname{th} x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

и

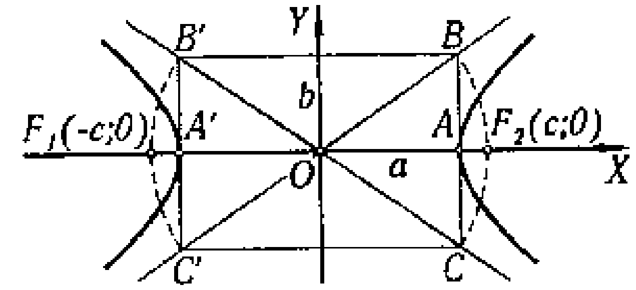
$$y = \operatorname{cth} x \equiv \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$



19. Эллипс

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или}$$

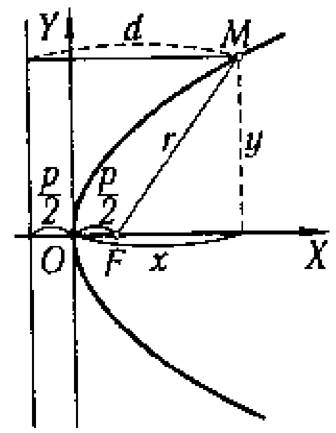
$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$



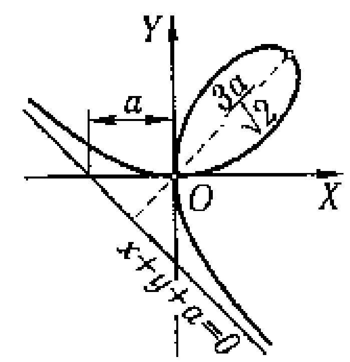
20. Гипербола

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ или}$$

$$\begin{cases} x = a \operatorname{ch} t, \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases} \text{ (для правой ветви).}$$

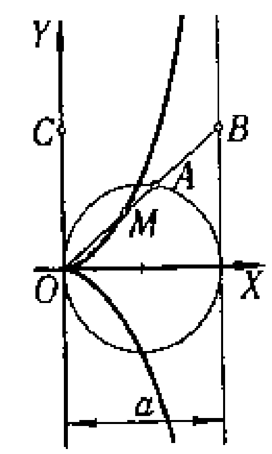


21. Парабола $y^2 = 2px$.



22. Декартов лист $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ или

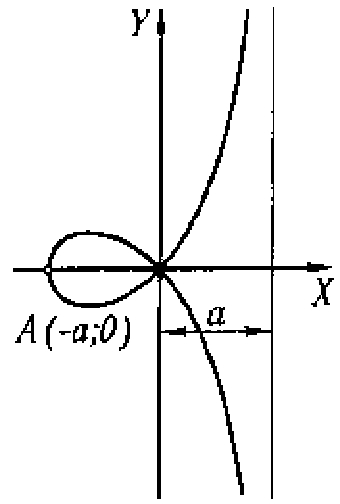
$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}. \end{cases}$$



23. Циссоида Диоклеса

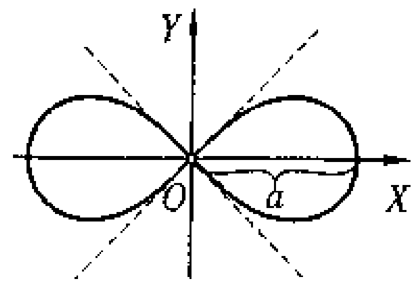
$$y^2 = \frac{x^3}{a-x} \text{ или}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{at^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{at^3}{1+t^2}. \end{cases}$$



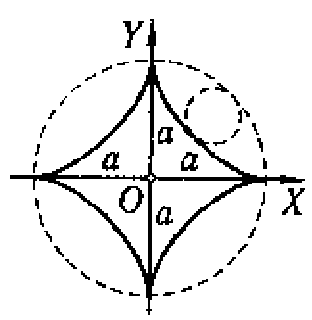
24. Строфоида

$$y^2 = x^2 \frac{a+x}{a-x}.$$



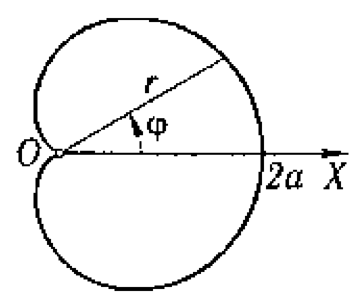
25. Лемниската Бернулли

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2) \text{ или}$$
$$r^2 = a^2 \cos 2\varphi.$$



26. Циклоида

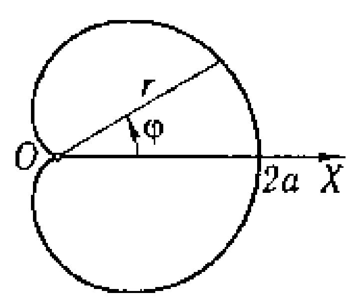
$$\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$$



27. Гипоциклоида (астроида)

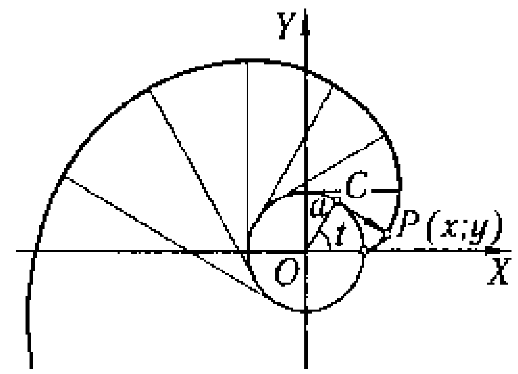
$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \text{ или}$$

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$



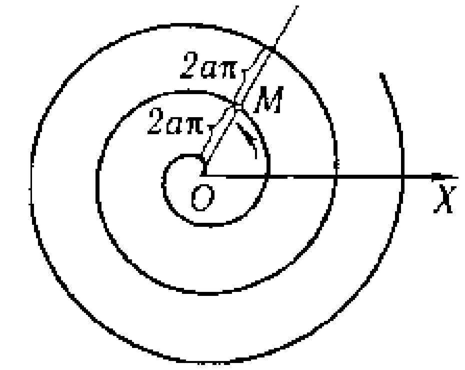
28. Кардиоида

$r = a(1 + \cos\varphi)$.



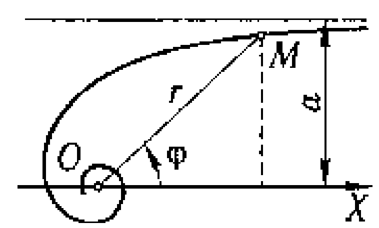
29. Эвольвента (развертка) окружности

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t). \end{cases}$$



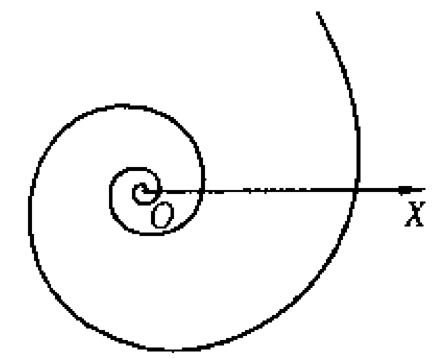
30. Спираль Архимеда

$r = a\varphi$ $(r \geqslant 0)$.



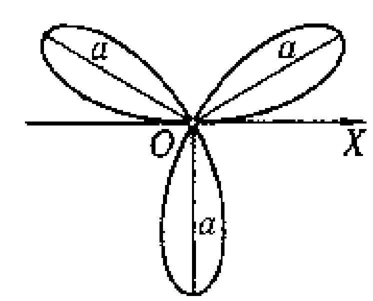
32. Гиперболическая спираль

$$r = \frac{a}{\varphi} \quad (r > 0).$$



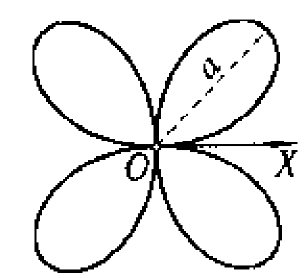
33. Логарифмическая спираль

$r = e^{a\varphi}$.



33. Трехлепестковая роза

$r = a\sin 3\varphi$ $(r \geqslant 0)$.



34. Четырехлепестковая роза

$r = a\,|\sin 2\varphi|$.