

**ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3.
ДЛЯ ПОТОКОВ ЭР-11-17-12 и ЭР-1-6-12, ЭЛ-15-12**

«ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ»

Теоретический материал к данной теме содержится в [1, глава 14].

Отчет по лабораторной работе должен содержать следующие материалы по каждой задаче: 1) постановка задачи; 2) необходимый теоретический материал; 3) решение поставленной задачи; 4) анализ полученных результатов; 5) графический материал; 6) тексты программ.

Защита лабораторной работы содержит темы: численное дифференцирование и интегрирование, численное решение задачи Коши.

Варианты заданий к задачам 3.1, 3.2 даны в *ПРИЛОЖЕНИИ 3.А*.

Расчетные формулы методов решения задачи Коши приведены в *ПРИЛОЖЕНИИ 3.В*.

Фрагмент решения задачи 3.1 в пакете MathCAD приведен в *ПРИЛОЖЕНИИ 3.С*.

Задача 3.1. (выполняется с использованием пакета MathCAD)

Для тестового примера найти приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1 порядка

$$\begin{aligned}y' &= y(t) + s(t) \quad t \in [t_0, T], \quad (1) \\ y(t_0) &= y_0\end{aligned}$$

с заданным шагом $h=0.2$ и вычислить погрешность приближенного решения.

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

1. Построить тестовый пример. Для этого вычислить функцию $s(t)$ по формуле: $s(t) = y' - y(t)$, где $y(t)$ - функция из индивидуального варианта (таблица 3.1).
2. Вычислить значение $y_0 = y(t_0)$ в заданной точке t_0 . Положить значение $T = t_0 + 1$.
3. Записать задачу Коши в виде:

$$\begin{aligned}y' &= f(t, y) \quad t \in [t_0, T], \\ y(t_0) &= y_0,\end{aligned}$$

где $f(t, y)$ - правая часть уравнения (1) с найденной функцией $s(t)$.

4. Найти приближенное решение задачи Коши с шагом $h=0.2$ по явному методу Эйлера для тестового примера (самостоятельно написать программу вычисления приближенного решения по методу Эйлера).

5. Используя встроенную функцию **rkfixed** пакета MATHCAD, найти приближенное решение задачи Коши с шагом $h=0.2$ по методу Рунге-Кутты 4 порядка точности (см. *ПРИЛОЖЕНИЕ 3.С*) для построенного тестового примера.

6. Найти величины погрешностей приближенных решений по формуле $\varepsilon = \max_{0 \leq i \leq N} |y(t_i) - y_i|$, где $y(t_i)$ и y_i - значения точного и приближенного решений в узлах сетки $t_i, i=1..N$.

7. Построить таблицы значений точного и приближенных решений для тестового примера. На одном чертеже построить графики найденных решений.

Задача 3.2. (выполняется с использованием языка программирования, доступного студентам). Найти с точностью $\varepsilon = 0.001$ приближенное решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) 1 порядка

$$y' = f(t, y), \quad t \in [t_0, t_0 + 1],$$

$$y(t_0) = y_0$$

ПОРЯДОК РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ:

Часть 1:

1. Найти приближенное решение задачи Коши с шагом $h=0.1$ по явному методу Эйлера.
2. Уменьшая шаг вдвое, найти решение задачи с заданной точностью. Погрешность оценивать по правилу Рунге.
3. Построить график найденного решения.

Часть 2:

3. Найти приближенное решение задачи Коши с шагом $h=0.1$ методом, указанным в индивидуальном варианте.
4. Уменьшая шаг вдвое, найти решение задачи с заданной точностью. Погрешность оценивать по правилу Рунге.
5. Построить график найденного решения.
6. Сравнить шаги, на которых была достигнута точность, и сопоставить их с порядками методов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.A.

ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ К ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЕ

Таблица к задаче 3.1

N	$y(t)$	t_0	N	$y(t)$	t_0	N	$y(t)$	t_0
3.1.1	$\frac{e^t}{t}$	1	3.1.11	$\sin^2 t$	$\pi/6$	3.1.21	$\frac{t+2}{1+\ln(1+t)}$	0
3.1.2	$t \ln t$	2	3.1.12	$2^{1-\sqrt{t}}$	1	3.1.22	$\frac{e^{-t}}{t+2}$	0
3.1.3	$t^3 e^{-t}$	0	3.1.13	$\cos(t^2 - 1)$	1	3.1.23	$\frac{\sin(2t)}{\sqrt{t}}$	$\frac{\pi}{8}$
3.1.4	$(t+1)\cos t$	0	3.1.14	$\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)$	1	3.1.24	$\frac{\sqrt{\ln t + 2}}{t-1}$	e
3.1.5	$t \cdot \operatorname{tg}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{4}$	3.1.15	e^{2-t^2}	0	3.1.25	$\frac{t-\sqrt{t}}{t^2+1}$	0
3.1.6	$t^2 - \sqrt{t+2}$	0	3.1.16	$\frac{1}{t+\sqrt{t}}$	1	3.1.26	$\frac{3-t}{\operatorname{tg} t}$	$\frac{\pi}{6}$
3.1.7	$e^t \sqrt{t}$	1	3.1.17	$\frac{2t}{t^2+1}$	1	3.1.27	$t^2 + 1$	0
3.1.8	$t^2 \cdot \sin t$	$\frac{\pi}{2}$	3.1.18	$\sin(\sqrt{t-2})$	4	3.1.28	$\cos t$	0
3.1.9	$\ln(t^3 - 0.5)$	1	3.1.19	$\cos^2 t$	$\frac{\pi}{3}$	3.1.29	$\ln t$	2
3.1.10	$\frac{3^t}{\sqrt{t}}$	1	3.1.20	$\ln^2 t$	1	3.1.30	$\frac{1}{t}$	1

Таблица к задаче 3.2. Часть 1

N	$f(t, y)$	t_0	y_0	N	$f(t, y)$	t_0	y_0
3.2.1	$ctg(t)y + \sin^2(t)$	$\frac{\pi}{2}$	0	3.2.16	$\frac{1}{t+2}y + 2 + t$	0	4
3.2.2	$\frac{1-4t}{t}y + 2t$	1	1	3.2.17	$\frac{1}{t}y + 2t^2e^{t^2}$	1	e
3.2.3	$-\frac{3}{t}y + \frac{6}{t^2} - 5t$	1	2	3.2.18	$-2ty + 2te^{-t^2}$	0	0
3.2.4	$\frac{1}{t+2}y + (t+2)^2$	0	4	3.2.19	$\cos(t)y + 3\cos(t)$	0	-2
3.2.5	$-tg(t)y + 2t\cos(t)$	0	2	3.2.20	$\frac{1}{t+1}y + (t+1)e^{-t}$	0	0
3.2.6	$-\sin(t)y + 4\sin(t)$	$\frac{\pi}{2}$	2	3.2.21	$3t^2y + 6t^2$	0	1
3.2.7	$\frac{1}{t+3}y - \frac{t+3}{t^2}$	1	4	3.2.22	$-tg(t)y - \sin(2t)$	0	2
3.2.8	$\frac{1}{t}y + 2\ln(t)$	1	0	3.2.23	$\frac{1}{t-4}y + \frac{t-4}{t}$	1	0
3.2.9	$-\frac{1}{t}y - \frac{\sin(t)}{t}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4}{\pi}$	3.2.24	$\sin(t)y - 2\sin(t)e^{\cos(t)}$	0	0
3.2.10	$\frac{1}{t+1}y + t + 1$	1	0	3.2.25	$\frac{2t+1}{t}y + t$	1	0.5
3.2.11	$\frac{1}{t}y + t(\cos(t) + 1)$	π	π^2	3.2.26	$ctg(t)y + \sin(2t)$	$\frac{\pi}{2}$	2
3.2.12	$\frac{2}{t}y + \frac{6}{t^2}$	1	0	3.2.27	$\cos(t)y + 3t^2e^{\sin(t)}$	0	0
3.2.13	$\frac{1}{t+2}y + 3(t+2)e^{3t}$	0	4	3.2.28	$-\frac{1}{t\ln(t)}y + \frac{2t}{\ln(t)}$	e	e^2
3.2.14	$4ty + e^{2t^2}$	0	0	3.2.29	$\cos(t)y + e^{\sin(t)}$	0	1
3.2.15	$-\frac{1}{t}y + \frac{\cos(t)}{t}$	$\frac{\pi}{2}$	0	3.2.30	$\frac{1}{t-1}y + t^2 - 1$	-1	5

Таблица к задаче 3.2. Часть 2.

N	Метод решения задачи Коши	N	Метод решения задачи Коши
3.2.1	Метод Эйлера-Коши	3.2.16	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант III)
3.2.2	Усовершенствованный метод Эйлера	3.2.17	Метод разложения по Тейлору 2-го порядка
3.2.3	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант I)	3.2.18	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант I)
3.2.4	Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка	3.2.19	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант II)
3.2.5	Метод разложения по Тейлору 2-го порядка	3.2.20	Метод разложения по Тейлору 2-го порядка
3.2.6	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант III)	3.2.21	Метод Эйлера-Коши
3.2.7	Метод Эйлера-Коши	3.2.22	Усовершенствованный метод Эйлера
3.2.8	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант I)	3.2.23	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант I)
3.2.9	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант II)	3.2.24	Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка

3.2.10	Метод разложения по Тейлору 2-го порядка	3.2.25	Метод разложения по Тейлору 2-го порядка
3.2.11	Метод Эйлера-Коши	3.2.26	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант III)
3.2.12	Усовершенствованный метод Эйлера	3.2.27	Метод Эйлера-Коши
3.2.13	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант I)	3.2.28	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант I)
3.2.14	Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка	3.2.29	Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант II)
3.2.15	Метод разложения по Тейлору 2-го порядка	3.2.30	Метод разложения по Тейлору 2-го порядка

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.В

Правило Рунге практической оценки погрешности (правило двойного пересчета):

$$y(t_i) - y_i^{h/2} \approx \varepsilon_i^h, \text{ где } \varepsilon_i^h = \frac{y_i^{h/2} - y_i^h}{2^p - 1}, i=1, \dots, N, p - \text{порядок метода, а вычисления ведутся в}$$

узлах сетки t_i . Уточненное решение вычисляется по формуле: $y_{i,\text{уточн.}} = y_i^{h/2} + \varepsilon_i^h, i=1, \dots, N.$

Расчетные формулы методов решения задачи Коши для ОДУ 1-го порядка:

Метод разложения по формуле Тейлора 2-го порядка:

$$y_{i+1} = y_i + h \left(f(t_i, y_i) + \frac{h}{2} \left[\frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial t} + \frac{\partial f(t_i, y_i)}{\partial y} f(t_i, y_i) \right] \right)$$

Модифицированный метод Эйлера 2-го порядка:

$$\bar{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i), \quad y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \bar{y}_{i+1}))$$

Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант I):

$$k1 = hf(t_i, y_i), \quad k2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}\right), \quad k3 = hf(t_i + h, y_i - k1 + 2k2),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k1 + 4k2 + k3)$$

Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант II):

$$k1 = hf(t_i, y_i), \quad k2 = hf\left(t_i + \frac{h}{3}, y_i + \frac{k1}{3}\right), \quad k3 = hf\left(t_i + \frac{2}{3}h, y_i + \frac{2}{3}k2\right),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{4}(k1 + 3k3)$$

Метод Рунге-Кутты 3-го порядка (вариант III):

$$k1 = hf(t_i, y_i), \quad k2 = hf\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}\right), \quad k3 = hf\left(t_i + \frac{3}{4}h, y_i + \frac{3}{4}k2\right),$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{9}(2k1 + 3k2 + 4k3)$$

Экстраполяционный метод Адамса 2-го порядка:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(3f(t_i, y_i) - f(t_{i-1}, y_{i-1}))$$

Недостающее для старта значение можно получить одношаговым методом того же порядка.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3.С
Фрагмент решения задачи 3.1

Исходные данные: $y(t) = e^t - t, \quad t_0 = 0$

Вычисляем $s(t)$ по формуле: $s(t) = y' - y(t) = e^t - 1 - (e^t - t) = t - 1$

Вычисляем значение $y_0 = e^0 - 0 = 1$

Получили задачу Коши:

$$y' = y + t - 1, \quad t \in [0, 1]$$

$$y_0 = 0$$

Правая часть уравнения: $f(t, y) = y + t - 1$

Начальное значение: $y_0 = 1$

Концы отрезка:

$$t_0 := 0 \quad T := 1$$

Шаг сетки:

$$h := 0.2$$

Число узлов сетки:

$$N := \frac{T - t_0}{h} \quad N = 5$$

Вычисление решения по методу Рунге-Кутты 4 порядка точности:

$$y_{RK4} := \text{rkfixed}(y, t_0, T, N, f)$$

входные параметры:

y - вектор начальных значений;

t_0 - начальная точка отрезка;

T - конечная точка отрезка;

N - число узлов сетки;

f - функция правой части. Функция **rkfixed** возвращает матрицу, первый столбец которой содержит узлы сетки, а второй - приближенное решение в этих узлах.

Точное решение: $Y(t) := e^t - t$

Точное решение в узлах сетки:

$$i := 0..N \quad t_i := t_0 + i \cdot h \quad y_{t_i} := Y(t_i)$$

Решение по
методу Эйлера

Решение по
методу Рунге-Кутты

Точное решение

Точки

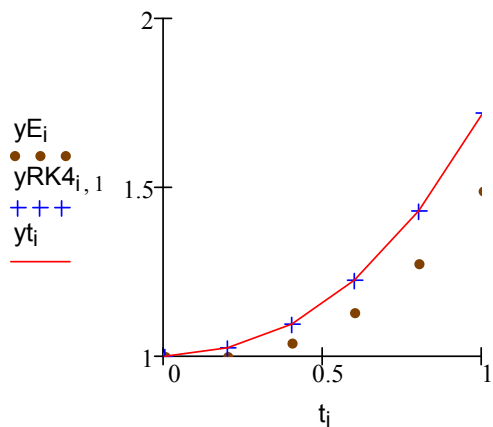
$$y_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1.04 \\ 1.128 \\ 1.274 \\ 1.488 \end{pmatrix}$$

$$y_{RK4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0.2 & 1.021 \\ 0.4 & 1.092 \\ 0.6 & 1.222 \\ 0.8 & 1.426 \\ 1 & 1.718 \end{pmatrix}$$

$$y_t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.021403 \\ 1.091825 \\ 1.222119 \\ 1.425541 \\ 1.718282 \end{pmatrix}$$

$$t = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \\ 0.6 \\ 0.8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Графики приближенных и точного решений



$$zE_i := |yE_i - Y(t_i)| \quad zRK4_i := |yRK4_{i,1} - Y(t_i)|$$

Значения погрешностей:

$$\max(zE) = 0.23 \quad \max(zRK4) = 3.069 \times 10^{-5}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова Н.В. Вычислительные методы для инженеров. М.: Высшая школа, 2003.