КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§ 7.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. Определение двойного и тройного интегралов. Их геометрический и физический смысл.
2. Основные свойства двойных и тройных интегралов.
3. Теорема о среднем для двойного и тройного интегралов.
4. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (случай прямоугольной области).
5. Вычисление двойных интегралов двумя последовательными интегрированиями (общий случай).
6. Замена переменных в двойном интеграле.
7. Якобиан, его геометрический смысл.
8. Двойной интеграл в полярных координатах.
9. Тройной интеграл в цилиндрических координатах.
10. Тройной интеграл в сферических координатах.

§ 7.2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ УПРАЖНЕНИЯ

1. Пользуясь определением двойного интеграла, доказать, что

$$\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} x^m y^n dxdy = 0,$$

если m и n - натуральные числа, и, по меньшей мере, одно из них нечетно.

2. С помощью теоремы о среднем найти

$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f\left(x,y\right)dxdy,$$

где $f\left(x,y\right)$ - непрерывная функция.

3. Оценить интеграл

$$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le R^2}\frac{dxdydz}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}},\quad x_0^2+y_0^2+z_0^2>R^2,$$

т.е. указать, между какими значениями заключена его величина.

4. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D f\left(x,y\right)dxdy,$$

если область D - прямоугольник $\{a \le x \le b,\ \ c \le y \le d\}$, а $f\left(x,y\right) = F''_{xy}\left(x,y\right)$.

5. Доказать равенство

$$\iint\limits_D f\left(x\right)g\left(y\right)dxdy = \int\limits_a^b f\left(x\right)dx \int\limits_c^d g\left(y\right)dy$$ б

если область D - прямоугольник $\{a \le x \le b,\ \ c \le y \le d\}$.

6. Доказать формулу Дирихле

$$\int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f\left(x,y\right)dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f\left(x,y\right)dx, \qquad a > 0.$$

7. Пользуясь формулой Дирихле, доказать равенство

$$\int\limits_0^a dy \int\limits_0^y f\left(x\right)dx = \int\limits_0^a \left(a-x\right)f\left(x\right)dx.$$

8. Какой из интегралов больше

$$\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f\left(x,y,z\right)dz \qquad \text{или} \qquad \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} f\left(x,y,z\right)dz,$$

если $f\left(x,y,z\right) > 0$?

§ 7.3. **РАСЧЕТНЫЕ ЗАДАНИЯ**

Задача 1. Изменить порядок интегрирования.

1.1. $\int\limits_{-2}^{-1} dy \int\limits_{-\sqrt{2+y}}^{0} f\ dx + \int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f\ dx.$

1.2. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{-y}}^{0} f\ dx.$

1.3. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^y f\ dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\ dx.$

1.4. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\ dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y}} f\ dx.$

1.5. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f\ dy + \int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{0} f\ dy.$

1.6. $\int\limits_0^{1/\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\arcsin y} f\ dx + \int\limits_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int\limits_0^{\arccos y} f\ dx.$

1.7. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f\ dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f\ dx.$

1.8. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f\ dx.$

1.9. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f\ dy.$

1.10. $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy.$

1.11. $\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} f\ dy + \int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} f\ dy.$

1.12. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} f\ dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f\ dx.$

1.13. $\int_{0}^{\pi/4} dy \int_{0}^{\sin y} f\ dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_{0}^{\cos y} f\ dx..$

1.14. $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f\ dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f\ dy.$

1.15. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f\ dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f\ dx.$

1.16. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f\ dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f\ dx.$

1.17. $\int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{0} f\ dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\ dx.$

1.18. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y^2} f\ dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f\ dx.$

1.19. $\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f\ dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f\ dy.$

1.20. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f\ dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f\ dx.$

1.21. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f\ dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f\ dx.$

1.22. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f\ dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy.$

1.23. $\int_{0}^{\pi/4} dx \int_{0}^{\sin x} f\ dy + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dx \int_{0}^{\cos x} f\ dy.$

1.24. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f\ dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{y}^{0} f\ dx.$

1.25. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f\ dy + \int_{1}^{2} dx \int_{0}^{2-x} f\ dy.$

1.26. $\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{0}^{2-\sqrt{4-x^2}} f\ dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{0}^{\sqrt{4-x^2}} f\ dy.$

1.27. $\int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{0} f\ dy + \int_{1}^{2} dx \int_{-\sqrt{2-x}}^{0} f\ dy.$

1.28. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} f\ dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f\ dy.$

1.29. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt{y}} f\ dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f\ dx.$

1.30. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f\ dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f\ dy.$

1.31. $\int\limits_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f\ dy + \int\limits_{-\sqrt{3}}^0 dx \int\limits_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f\ dy.$

Задача 2. Вычислить.

2.1. $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.2. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.3. $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.4. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.5. $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.6. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$

2.7. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

2.8. $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

2.9. $\iint\limits_D \left(4xy + 3x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.10. $\iint\limits_D \left(12xy + 9x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.11. $\iint\limits_D \left(8xy + 9x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.12. $\iint\limits_D \left(24xy + 18x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.13. $\iint\limits_D \left(12xy + 27x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.14. $\iint\limits_D \left(8xy + 18x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$

2.15. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

2.16. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+9x^2y^2\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

2.17. $\iint\limits_D \left(24xy-48x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.18. $\iint\limits_D \left(6xy+24x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.19. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.20. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.21. $\iint\limits_D \left(44xy+16x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.22. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.23. $\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

2.24. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^3.$

2.25. $\iint\limits_D \left(6x^2y^2+\frac{25}{3}x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}.$

2.26. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt{x},\ y=-x^2.$

2.27. $\iint\limits_D \left(3x^2y^2+\frac{50}{3}x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^3.$

2.28. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.29. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}.$

2.30. $\iint\limits_D \left(xy-9x^5y^5\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=-x^2.$

2.31. $\iint\limits_D \left(54x^2y^2+150x^4y^4\right)dxdy;$

$D:\ x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}.$

Задача 3. Вычислить.

3.1. $\iint\limits_D ye^{xy/2}dxdy;$

$D:\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=2,\ x=4.$

3.2. $\iint\limits_D y^2\sin\frac{xy}{2}\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2}.$

3.3. $\iint\limits_D y\cos xy\ dxdy;$

$D:\ y=\pi/2,\ y=\pi,\ x=1,\ x=2.$

3.4. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/4}dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=2,\ y=x.$

3.5. $\iint\limits_D y\sin xy\ dxdy;$

$D:\ y=\pi/2,\ y=\pi,\ x=1,\ x=2.$

3.6. $\iint\limits_D y^2\cos\frac{xy}{2}\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi/2},\ \mathrm{y}=x/2.$

3.7. $\iint\limits_D 4ye^{2xy}dxdy;$

$D:\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\frac{1}{2},\ x=1.$

3.8. $\iint\limits_D 4y^2\sin xy\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=x.$

3.9. $\iint\limits_D y\cos 2xy\ dxdy;$

$D:\ y=\frac{\pi}{2},\ y=\pi,\ x=\frac{1}{2},\ x=1.$

3.10. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/8}dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=2,\ y=\frac{x}{2}.$

3.11. $\iint\limits_D 12y\sin 2xy\ dxdy;$

$D:\ y=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2},\ x=2,\ x=3.$

3.12. $\iint\limits_D y^2\cos xy\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x.$

3.13. $\iint\limits_D ye^{xy/4}dxdy;$

$D:\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=4,\ x=8.$

3.14. $\iint\limits_D y^2\sin 2xy\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x.$

3.15. $\iint\limits_D 2y\cos 2xy\ dxdy;$

$D:\ y=\frac{\pi}{4},\ y=\frac{\pi}{2},\ x=1,\ x=2.$

3.16. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/2}dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{2},\ y=x.$

3.17. $\iint\limits_D y\sin xy\ dxdy;$

$D:\ y=\pi,\ y=2\pi,\ x=\dfrac{1}{2},\ x=1.$

3.18. $\iint\limits_D y^2\cos 2xy\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y=\dfrac{x}{2}.$

3.19. $\iint\limits_D 8ye^{4xy}dxdy;$

$D:\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=\dfrac{1}{4},\ x=\dfrac{1}{2}.$

3.20. $\iint\limits_D 3y^2\sin\dfrac{xy}{2}\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{4\pi}{3}},\ y=\dfrac{2}{3}x.$

3.21. $\iint\limits_D y\cos xy\ dxdy;$

$D:\ y=\pi,\ y=3\pi,\ x=1/2,\ x=1.$

3.22. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/2}dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=1,\ y=\dfrac{x}{2}.$

3.23. $\iint\limits_D y\sin 2xy\ dxdy;$

$D:\ y=\pi/2,\ y=3\pi/2,\ x=1/2,\ x=2.$

3.24. $\iint\limits_D y^2\cos xy\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=2x.$

3.25. $\iint\limits_D 6ye^{xy/3}dxdy;$

$D:\ y=\ln 2,\ y=\ln 3,\ x=3,\ x=6.$

3.26. $\iint\limits_D y^2\sin\dfrac{xy}{2}\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x.$

3.27. $\iint\limits_D y\cos 2xy\ dxdy;$

$D:\ y=\pi/2,\ y=3\pi/2,\ x=1/2,\ x=2.$

3.28. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/8}dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=4,\ y=2x.$

3.29. $\iint\limits_D 3y\sin xy\ dxdy;$

$D:\ y=\pi/2,\ y=3\pi,\ x=1,\ x=3.$

3.30. $\iint\limits_D y^2\cos\dfrac{xy}{2}\ dxdy;$

$D:\ x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x.$

3.31. $\iint\limits_D 12ye^{6xy}dxdy;$

$D:\ y=\ln 3,\ y=\ln 4,\ x=1/6,\ x=1/3.$

Задача 4. Вычислить.

4.1. $\iiint\limits_V 2y^2e^{xy}\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=1,\ y=x, \\ z=0,\ z=1. \end{cases}$

4.2. $\iiint\limits_V x^2z\sin(xyz)\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=2,\ y=\pi,\ \mathrm{z}=1, \\ x=0,\ y=1,\ z=0. \end{cases}$

4.3. $\iiint\limits_V y^2\mathrm{ch}(2xy)\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=-2,\ \mathrm{y}=4x, \\ z=0,\ z=2. \end{cases}$

4.4. $\iiint\limits_V 8y^2z\ e^{2xyz}\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=-1,\ y=2,\ \mathrm{z}=1, \\ x=0,\ \mathrm{y}=0,\ z=0. \end{cases}$

4.5. $\iiint\limits_V x^2\mathrm{sh}(3xy)\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=1,\ y=2x,\ \mathrm{y}=0, \\ z=0,\ z=36. \end{cases}$

4.6. $\iiint\limits_V y^2z\cos(xyz)\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=1,\ y=2\pi,\ \mathrm{z}=2, \\ x=0,\ y=1,\ z=0. \end{cases}$

4.7. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\frac{\pi}{4}xy\right)\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=-1,\ \mathrm{y}=x/2, \\ z=0,\ z=-\pi^2. \end{cases}$

4.8. $\iiint\limits_V x^2z\sin\frac{xyz}{4}\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=1,\ y=2\pi,\ \mathrm{z}=4, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.9. $\iiint\limits_V y^2e^{-xy}\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=-2,\ \mathrm{y}=4x, \\ z=0,\ z=1. \end{cases}$

4.10. $\iiint\limits_V 2y^2z\ e^{2xyz}\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=1,\ y=1,\ \mathrm{z}=1, \\ x=0,\ \mathrm{y}=0,\ z=0. \end{cases}$

4.11. $\iiint\limits_V y^2\mathrm{ch}(2xy)\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=1,\ \mathrm{y}=x, \\ z=0,\ z=8. \end{cases}$

4.12. $\iiint\limits_V x^2z\ \mathrm{sh}(\mathrm{xyz})\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=2,\ y=1,\ \mathrm{z}=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.13. $\iiint\limits_V y^2e^{xy/2}\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=2,\ \mathrm{y}=2x, \\ z=0,\ z=-1. \end{cases}$

4.14. $\iiint\limits_V y^2z\cos\frac{xyz}{3}\ dx\ dy\ dz;$

$V\ \begin{cases} x=3,\ y=1,\ \mathrm{z}=2\pi, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.15. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\dfrac{\pi xy}{2}\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=-1,\ \mathrm{y}=x, \\ z=0,\ z=2\pi^2. \end{cases}$

4.16. $\iiint\limits_V x^2 z\ \mathrm{sh}\left(\mathrm{xyz}\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=1,\ y=-1,\ \mathrm{z}=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.17. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\pi xy\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=1,\ \mathrm{y}=2x, \\ z=0,\ z=\pi^2. \end{cases}$

4.18. $\iiint\limits_V 2x^2 z\ \mathrm{sh}\left(2\mathrm{xyz}\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=2,\ y=1/2,\ \mathrm{z}=1/2, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.19. $\iiint\limits_V x^2\mathrm{sh}\left(2xy\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=-1,\ y=x,\ \mathrm{y}=0, \\ z=0,\ z=8. \end{cases}$

4.20. $\iiint\limits_V x^2 z\ \sin\dfrac{\mathrm{xyz}}{2}\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=1,\ y=4,\ \mathrm{z}=\pi, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.21. $\iiint\limits_V y^2\mathrm{ch}\left(xy\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=-1,\ \mathrm{y}=x, \\ z=0,\ z=2. \end{cases}$

4.22. $\iiint\limits_V x^2 z\ \mathrm{ch}\left(\mathrm{xyz}\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=1,\ y=1,\ \mathrm{z}=1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.23. $\iiint\limits_V x^2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}xy\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=2,\ y=x,\ \mathrm{y}=0, \\ z=0,\ z=\pi. \end{cases}$

4.24. $\iiint\limits_V y^2 z\cos\dfrac{xyz}{9}\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=9,\ y=1,\ \mathrm{z}=2\pi, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.25. $\iiint\limits_V x^2\cos\left(\pi xy\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=1,\ y=2x,\ \mathrm{y}=0, \\ z=0,\ z=4\pi. \end{cases}$

4.26. $\iiint\limits_V y^2 z\ \mathrm{ch}\left(\dfrac{\mathrm{xyz}}{2}\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=2,\ y=-1,\ \mathrm{z}=2, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

4.27. $\iiint\limits_V y^2\mathrm{ch}\left(3xy\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=0,\ y=2,\ \mathrm{y}=6x, \\ z=0,\ z=-3. \end{cases}$

4.28. $\iiint\limits_V 2y^2 z\ \mathrm{ch}\left(2xyz\right)\,dx\,dy\,dz;$

$V\ \begin{cases} x=\dfrac{1}{2},\ y=2,\ \mathrm{z}=-1, \\ x=0,\ y=0,\ z=0. \end{cases}$

$$\iiint_V x^2 \sin(4\pi xy)\, dx\, dy\, dz;$$

4.29. $V\ \begin{cases} x=1,\ y=x/2,\ \mathrm{y}=0, \\ z=0,\ z=8\pi. \end{cases}$

$$\iiint_V x^2 \operatorname{sh}(xy)\, dx\, dy\, dz;$$

4.31. $V\ \begin{cases} x=2,\ y=x/2,\ \mathrm{y}=0, \\ z=0,\ z=1. \end{cases}$

$$\iiint_V 8y^2 z\, e^{-xyz}\, dx\, dy\, dz;$$

4.30. $V\ \begin{cases} x=2,\ y=-1,\ \mathrm{z}=2, \\ x=0,\ \mathrm{y}=0,\ z=0. \end{cases}$

Задача 5. Вычислить.

$$\iiint_V x\, dx\, dy\, dz;$$

5.1. $V:\ y=10x,\ y=0,\ x=1,$
$z=xy,\ z=0.$

$$\iiint_V 15\left(y^2+z^2\right) dx\, dy\, dz;$$

5.3. $V:\ z=x+y,\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0, z=0.$

$$\iiint_V \left(1+2x^3\right) dx\, dy\, dz;$$

5.5. $V:\ y=9x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

$$\iiint_V y\, dx\, dy\, dz;$$

5.7. $V:\ y=15x,\ y=0,\ x=1,$
$z=xy,\ z=0.$

$$\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{\left(1+\frac{\mathrm{x}}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}\right)^4};$$

5.2. $V:\ 1+\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{8}=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

$$\iiint_V (3x+4y)\, dx\, dy\, dz;$$

5.4. $V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=5\left(x^2+y^2\right),\ z=0.$

$$\iiint_V \left(27+54y^3\right) dx\, dy\, dz;$$

5.6. $V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

$$\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{\left(1+\frac{\mathrm{x}}{16}+\frac{y}{8}+\frac{z}{3}\right)^5};$$

5.8. $V:\ \frac{x}{16}+\frac{y}{5}+\frac{z}{3}=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

$$\iiint_V \left(3x^2 + y^2\right)\, dx\, dy\, dz;$$

5.9. $V:\ z = 10y,\ x + y = 1,$
$x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

$$\iiint_V \left(15x + 30z\right)\, dx\, dy\, dz;$$

5.10. $V:\ z = x^2 + 3y^2,\ z = 0,$
$y = x,\ y = 0,\ z = 0.$

$$\iiint_V \left(4 + 8z^3\right)\, dx\, dy\, dz;$$

5.11. $V:\ y = x,\ y = 0,\ x = 1,$
$z = \sqrt{xy},\ z = 0.$

$$\iiint_V \left(1 + 2x^3\right)\, dx\, dy\, dz;$$

5.12. $V:\ y = 36x,\ y = 0,\ x = 1,$
$z = \sqrt{xy},\ z = 0.$

$$\iiint_V 21xz\, dx\, dy\, dz;$$

5.13. $V:\ y = x,\ y = 0,\ x = 2,$
$z = xy,\ z = 0.$

$$\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{\left(1 + \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3}\right)^6};$$

5.14. $V:\ \frac{x}{10} + \frac{y}{8} + \frac{z}{3} = 1,$
$x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

$$\iiint_V \left(x^2 + 3y^2\right)\, dx\, dy\, dz;$$

5.15. $V:\ z = 10x,\ x + y = 1,$
$x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

$$\iiint_V \left(60y + 90z\right)\, dx\, dy\, dz;$$

5.16. $V:\ y = x,\ y = 0,\ x = 1,$
$z = x^2 + y^2,\ z = 0.$

$$\iiint_V \left(\frac{10}{3}x + \frac{5}{3}\right)\, dx\, dy\, dz;$$

5.17. $V:\ y = 9x,\ y = 0,\ x = 1,$
$z = \sqrt{xy},\ z = 0.$

$$\iiint_V \left(9 + 18z\right)\, dx\, dy\, dz;$$

5.18. $V:\ y = 4x,\ y = 0,\ x = 1,$
$z = \sqrt{xy},\ z = 0.$

$$\iiint_V 3y^2\, dx\, dy\, dz;$$

5.19. $V:\ y = 2x,\ y = 0,\ x = 2,$
$z = xy,\ z = 0.$

$$\iiint_V \frac{dx\, dy\, dz}{\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6}\right)^6};$$

5.20. $V:\ \frac{x}{2} + \frac{y}{4} + \frac{z}{6} = 1,$
$x = 0,\ y = 0,\ z = 0.$

$$\iiint\limits_V x^2\ dx\ dy\ dz;$$

5.21. $V:\ z=10\left(x+3y\right),\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

$$\iiint\limits_V 63\left(1+2\sqrt{y}\right)\ dx\ dy\ dz;$$

5.23. $V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=\sqrt{xy},\ z=0.$

$$\iiint\limits_V \frac{dx\ dy\ dz}{\left(1+\frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}\right)^6};$$

5.25. $V:\ \frac{x}{6}+\frac{y}{4}+\frac{z}{16}=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

$$\iiint\limits_V y^2\ dx\ dy\ dz;$$

5.27. $V:\ z=10\left(3x+y\right),\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

$$\iiint\limits_V \left(x^2+4y^2\right)\ dx\ dy\ dz;$$

5.29. $V:\ z=20\left(2x+y\right),\ x+y=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

$$\iiint\limits_V x^2 z\ dx\ dy\ dz;$$

5.31. $V:\ y=3x,\ y=0,\ x=2,$
$z=xy,\ z=0.$

$$\iiint\limits_V \left(8y+12z\right)\ dx\ dy\ dz;$$

5.22. $V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=3x^2+2y^2,\ z=0.$

$$\iiint\limits_V \left(x+y\right)\ dx\ dy\ dz;$$

5.24. $V:\ y=x,\ y=0,\ x=1,$
$z=30x^2+60y^2,\ z=0.$

$$\iiint\limits_V xyz\ dx\ dy\ dz;$$

5.26. $V:\ y=x,\ y=0,\ x=2,$
$z=xy,\ z=0.$

$$\iiint\limits_V \left(5x+\frac{3z}{2}\right)\ dx\ dy\ dz;$$

5.28. $V:\ y=x,\ y=0,\ x=2,$
$z=x^2+15y^2,\ z=0.$

$$\iiint\limits_V \frac{dx\ dy\ dz}{\left(1+\frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}\right)^6};$$

5.30. $V:\ \frac{x}{8}+\frac{y}{3}+\frac{z}{5}=1,$
$x=0,\ y=0,\ z=0.$

Задача 6. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

6.1. $y = 3/x,\ y = 4e^x,\ y = 3,\ y = 4.$

6.2. $x = \sqrt{36 - y^2},\ x = 6 - \sqrt{36 - y^2}.$

6.3. $x^2 + y^2 = 72,\ 6y = -x^2\ \ (y \le 0).$

6.4. $x = 8 - y^2,\ x = -2y.$

6.5. $y = \dfrac{3}{x},\ y = 8e^x,\ y = 3,\ y = 8.$

6.6. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{2},\ y = \dfrac{1}{2x},\ \mathrm{x} = 16.$

6.7. $x = 5 - y^2,\ x = -4y.$

6.8. $x^2 + y^2 = 12,\quad -\sqrt{6}y = x^2\ \ (y \le 0).$

6.9. $y = \sqrt{12 - x^2},\ y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2},\ x = 0\ \ (x \ge 0).$

6.10. $y = \dfrac{3}{2}\sqrt{x},\ y = \dfrac{3}{2x},\ \mathrm{x} = 9.$

6.11. $y = \sqrt{24 - x^2},\ 2\sqrt{3}y = x^2,\ x = 0\ \ (x \ge 0).$

6.12. $y = \sin x,\ y = \cos x,\ \mathrm{x} = 0,\ \ (x \ge 0).$

6.13. $y = 20 - x^2,\ y = -8x.$

6.14. $y = \sqrt{18 - x^2},\ y = 3\sqrt{2} - \sqrt{18 - x^2}.$

6.15. $y = 32 - x^2,\ y = -4x.$

6.16. $y = 2/x,\ y = 5e^x,\ y = 2,\ y = 5.$

6.17. $x^2 + y^2 = 36,\ \ 3\sqrt{2}y = x^2\ \ (y \ge 0).$

6.18. $y = 3\sqrt{x},\ y = 3/x,\ x = 4.$

6.19. $y = 6 - \sqrt{36 - x^2},\ y = \sqrt{36 - x^2},\ x = 0\ \ (x \ge 0).$

6.20. $y = 25/4 - x^2,\ y = x - 5/2.$

6.21. $y = \sqrt{x},\ y = 1/x,\ x = 16.$

6.22. $y = 2/x,\ y = 7e^x,\ y = 2,\ y = 7.$

6.23. $x = 27 - y^2,\ x = -6y.$

6.24. $x = \sqrt{72 - y^2},\ 6x = y^2,\ y = 0\ \ (y \geq 0).$

6.25. $y = \sqrt{6 - x^2},\ y = \sqrt{6} - \sqrt{6 - x^2}.$

6.26. $y = \frac{3}{2}\sqrt{x},\ y = \frac{3}{2x},\ \mathrm{x} = 4.$

6.27. $y = \sin x,\ y = \cos x,\ \mathrm{x} = 0,\ \ (x \leq 0).$

6.28. $y = \frac{1}{x},\ y = 6e^x,\ y = 1,\ y = 6.$

6.29. $y = 3\sqrt{x},\ y = 3/x,\ x = 9.$

6.30. $y = 11 - x^2,\ y = -10x.$

6.31. $x^2 + y^2 = 12,\quad x\sqrt{6} = y^2\ \ (x \geq 0).$

Задача 7. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

7.1. $y^2 - 2y + x^2 = 0,\ y^2 - 4y + x^2 = 0,\ y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x.$

7.2. $x^2 - 4x + y^2 = 0,\ x^2 - 8x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = x/\sqrt{3}.$

7.3. $y^2 - 6y + x^2 = 0,\ y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x.$

7.4. $x^2 - 2x + y^2 = 0,\ x^2 - 4x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = x.$

7.5. $y^2 - 8y + x^2 = 0,\ y^2 - 10y + x^2 = 0,\ y = x/\sqrt{3},\ y = \sqrt{3}x.$

7.6. $x^2 - 4x + y^2 = 0,\ x^2 - 8x + y^2 = 0,\ y = 0,\ y = x.$

$y^2-4y+x^2=0,$

7.7. $y^2-6y+x^2=0,$

$y=x,\ \ x=0.$

$x^2-2x+y^2=0,$

7.8. $x^2-10x+y^2=0,$

$y=0,\ y=\sqrt{3}x.$

$y^2-6y+x^2=0,$

7.9. $y^2-10y+x^2=0,$

$y=x,\ \ x=0.$

$x^2-2x+y^2=0,$

7.10. $x^2-4x+y^2=0,$

$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

$y^2-2y+x^2=0,$

7.11. $y^2-4y+x^2=0,$

$y=\sqrt{3}x,\ \ x=0.$

$x^2-2x+y^2=0,$

7.12. $x^2-6x+y^2=0,$

$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

$y^2-4y+x^2=0,$

7.13. $y^2-6y+x^2=0,$

$y=\sqrt{3}x,\ \ x=0.$

$x^2-2x+y^2=0,$

7.14. $x^2-8x+y^2=0,$

$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

$y^2-2y+x^2=0,$

7.15. $y^2-6y+x^2=0,$

$y=x/\sqrt{3},\ y=0.$

$x^2-2x+y^2=0,$

7.16. $x^2-4x+y^2=0,$

$y=0,\ y=x/\sqrt{3}.$

$y^2-2y+x^2=0,$

7.17. $y^2-10y+x^2=0,$

$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

$x^2-2x+y^2=0,$

7.18. $x^2-6x+y^2=0,$

$y=0,\ y=x/\sqrt{3}.$

$y^2-4y+x^2=0,$

7.19. $y^2-10y+x^2=0,$

$y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

$x^2-2x+y^2=0,$

7.20. $x^2-6x+y^2=0,$

$y=0,\ \ y=x.$

$y^2-2y+x^2=0,$

7.21. $y^2-4y+x^2=0,$

$y=x,\ \ x=0.$

$x^2-2x+y^2=0,$

7.22. $x^2-4x+y^2=0,$

$y=0,\ \ y=\sqrt{3}x.$

7.23. $y^2-6y+x^2=0,$ $y^2-8y+x^2=0,$ $y=x,\ x=0.$

7.24. $x^2-4x+y^2=0,$ $x^2-8x+y^2=0,$ $y=0,\ y=\sqrt{3}x.$

7.25. $y^2-4y+x^2=0,$ $y^2-8y+x^2=0,$ $y=x,\ x=0.$

7.26. $x^2-4x+y^2=0,$ $x^2-8x+y^2=0,$ $y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.27. $y^2-4y+x^2=0,$ $y^2-8y+x^2=0,$ $y=\sqrt{3}x,\ x=0.$

7.28. $x^2-4x+y^2=0,$ $x^2-6x+y^2=0,$ $y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.29. $y^2-2y+x^2=0,$ $y^2-10y+x^2=0,$ $y=x/\sqrt{3},\ x=0.$

7.30. $x^2-6x+y^2=0,$ $x^2-10x+y^2=0,$ $y=x/\sqrt{3},\ y=\sqrt{3}x.$

7.31. $y^2-4y+x^2=0,$ $y^2-8y+x^2=0,$ $y=x/\sqrt{3},\ x=0.$

Задача 8. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ - поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

8.1. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\ge 0);$ $\mu=7x^2+y.$

8.2. $D:\ x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,$ $x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$ $\mu=(x+y)/(x^2+y^2).$

8.3. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\ge 0);$ $\mu=7x^2/2+5y.$

8.4. $D:\ x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,$ $x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$ $\mu=(2x+5y)/(x^2+y^2).$

8.5. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2/8+2y.$

8.6. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(x+y)\big/(x^2+y^2).$

8.7. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2/2+6y.$

8.8. $D:\ x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=25,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\le 0);$
$\mu=(2x-3y)\big/(x^2+y^2).$

8.9. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=x+3y^2.$

8.10. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\le 0);$
$\mu=(x-y)\big/(x^2+y^2).$

8.11. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=3x+6y^2.$

8.12. $D:\ x^2+y^2=9,\ \ x^2+\ y^2=25,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\le 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(2y-x)\big/(x^2+y^2).$

8.13. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ \ (y\ge 0);$
$\mu=2x+3y^2.$

8.14. $D:\ x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\le 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(2y-3x)\big/(x^2+y^2).$

8.15. $D:\ x=\dfrac{1}{2},\ y=0,\ y^2=8x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x+3y^2.$

8.16. $D:\ x^2+y^2=9,\ \ x^2+\ y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\le 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(2y-5x)\big/(x^2+y^2).$

8.17. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2+2y.$

8.18. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(x+3y)\big/(x^2+y^2).$

8.19. $D:\ x=2,\ y^2=2x,\ y=0\ \ (y\ge 0);$
$\mu=7x^2/4+y/2.$

8.20. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=4,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(x+2y)\big/(x^2+y^2).$

8.21. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ \ (y\ge 0);$
$\mu = 7x^2/4 + y.$

8.22. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\le 0);$
$\mu=(2x-y)/(x^2+y^2).$

8.23. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ \ (y\ge 0);$
$\mu = 7x^2/2 + 8y.$

8.24. $D:\ x^2+y^2=1,\ \ x^2+\ y^2=25,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\le 0);$
$\mu=(x-4y)/(x^2+y^2).$

8.25. $D:\ x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ \ (y\ge 0);$
$\mu = 6x + 3y^2.$

8.26. $D:\ x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=16,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\ge 0,\ y\le 0);$
$\mu=(3x-y)/(x^2+y^2).$

8.27. $D:\ x=2,\ y=0,\ y^2=x/2\ \ (y\ge 0);$
$\mu = 4x + 6y^2.$

8.28. $D:\ x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\le 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(y-4x)/(x^2+y^2).$

8.29. $D:\ x=\frac{1}{2},\ y=0,\ y^2=2x\ \ (y\ge 0);$
$\mu = 4x + 9y^2.$

8.30. $D:\ x^2+y^2=4,\ \ x^2+\ y^2=9,$
$x=0,\ y=0\ \ (x\le 0,\ y\ge 0);$
$\mu=(y-2x)/(x^2+y^2).$

8.31. $D:\ x=\frac{1}{4},\ y=0,\ y^2=16x\ \ (y\ge 0);$
$\mu = 16x + 9y^2/2.$

Задача 9. Пластинка D задана неравенствами, μ - поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

9.1. $D:\ x^2+y^2/4\le 1;$
$\mu = y^2.$

9.2. $D:\ 1\le x^2/9+y^2/4\le 2;$
$y\ge 0,\ \ y\le \frac{2}{3}x;$
$\mu = y/x.$

9.3. $D:\ \ x^2/9+y^2/25\le 1;$
$y\ge 0;$
$\mu = x^2 y.$

9.4. $D:\ \ x^2/9+y^2/25\le 1;$
$y\ge 0;$
$\mu = 7x^2 y/18.$

9.5. $D:\ 1 \le x^2/9 + y^2/4 \le 4;$
$y \ge 0,\ y \le x/2;$
$\mu = 8y/x^3.$

9.6. $D:\ x^2/9 + y^2 \le 1;$
$x \ge 0;$
$\mu = 7xy^6.$

9.7. $D:\ x^2/4 + y^2 \le 1;$
$\mu = 4y^4.$

9.8. $D:\ 1 \le x^2/4 + y^2/9 \le 4;$
$x \ge 0,\ y \le 3x/2;$
$\mu = x/y.$

9.9. $D:\ 1 \le x^2/16 + y^2/4 \le 4;$
$x \ge 0,\ y \le x/2;$
$\mu = x/y.$

9.10. $D:\ x^2/4 + y^2/9 \le 1;$
$x \ge 0,\ y \ge 0;$
$\mu = x^3 y.$

9.11. $D:\ x^2/4 + y^2 \le 1;$
$x \ge 0,\ y \ge 0;$
$\mu = 6x^3 y^3.$

9.12. $D:\ 1 \le x^2/4 + y^2 \le 25;$
$x \ge 0,\ y \le x/2;$
$\mu = x/y^3.$

9.13. $D:\ x^2/9 + y^2/4 \le 1;$
$\mu = x^2 y^2.$

9.14. $D:\ x^2/16 + y^2 \le 1;$
$x \ge 0,\ y \ge 0;$
$\mu = 5xy^7.$

9.15. $D:\ x^2/4 + y^2 \le 1;$
$x \ge 0,\ y \ge 0;$
$\mu = 30x^3 y^7.$

9.16. $D:\ 1 \le x^2/9 + y^2/4 \le 3;$
$y \ge 0,\ y \le \frac{2}{3}x;$
$\mu = y/x.$

9.17. $D:\ x^2 + y^2/25 \le 1;$
$y \ge 0;$
$\mu = 7x^4 y.$

9.18. $D:\ x^2 + y^2/9 \le 1;$
$y \ge 0;$
$\mu = 35x^4 y^3.$

9.19. $D:\ x^2/4 + y^2/9 \le 1;$
$\mu = x^2.$

9.20. $D:\ 1 \le x^2 + y^2/16 \le 9;$
$y \ge 0,\ y \le 4x;$
$\mu = y/x^3.$

9.21. $D:\ x^2/9 + y^2 \le 1;$
$x \ge 0;$
$\mu = 11xy^8.$

9.22. $D:\ 1 \le x^2/4 + y^2/16 \le 5;$
$x \ge 0,\ y \le 2x;$
$\mu = x/y.$

9.23. $D:\ 1 \le x^2/9 + y^2/4 \le 5;$
$x \ge 0,\ y \le 2x/3;$
$\mu = x/y.$

9.24. $D:\ x^2/4 + y^2/9 \le 1;$
$x \ge 0,\ y \ge 0;$
$\mu = x^5 y.$

9.25. $D:\ x^2/4 + y^2/25 \le 1;$
$\mu = x^4.$

9.26. $D:\ x^2 + y^2/4 \le 1;$
$x \ge 0,\ y \ge 0;$
$\mu = 15x^5 y^3.$

9.27. $D:\ 1 \le x^2/4 + y^2/9 \le 36;$
$x \ge 0,\ y \ge \frac{3}{2}x;$
$\mu = 9x/y^3.$

9.28. $D:\ x^2/100 + y^2 \le 1;$
$x \ge 0,\ y \ge 0;$
$\mu = 6xy^9.$

9.29. $D:\ x^2/16 + y^2 \le 1;$
$x \ge 0,\ y \ge 0;$
$\mu = 105x^3 y^9.$

9.30. $D:\ 1 \le x^2/9 + y^2/16 \le 2;$
$y \ge 0,\ y \le \frac{4}{3}x;$
$\mu = 27y/x^5.$

9.31. $D:\ 1 \le x^2/16 + y^2 \le 3;$
$x \ge 0,\ y \ge x/4;$
$\mu = x/y^5.$

Задача 10. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

10.1. $y = 16\sqrt{2x},\ y = \sqrt{2x},$
$z = 0,\ x + z = 2.$

10.2. $y = 5\sqrt{x},\ y = 5x/3,$
$z = 0,\ z = 5 + 5\sqrt{x}/3.$

10.3. $x^2 + y^2 = 2,\ y = \sqrt{x},\ y = 0,$
$z = 0,\ z = 15x.$

10.4. $x + y = 2,\ y = \sqrt{x},$
$z = 12y,\ z = 0.$

10.5. $x = 20\sqrt{2y},\ x = 5\sqrt{2y},$
$z = 0,\ z + y = 1/2.$

10.6. $x = 5\sqrt{y}/2,\ x = 5y/6,$
$z = 0,\ z = \frac{5}{6}\left(3 + \sqrt{y}\right).$

10.7. $x^2 + y^2 = 2,\ x = \sqrt{y},\ x = 0,$
$z = 0,\ z = 30y.$

10.8. $x + y = 2,\ x = \sqrt{y},$
$z = 12x/5,\ z = 0.$

10.9. $y = 17\sqrt{2x},\ \ y = 2\sqrt{2x},$
$z = 0,\ \ x + z = 1/2.$

10.10. $y = 5\sqrt{x}/3,\ \ y = 5x/9,$
$z = 0,\ \ z = 5\left(3 + \sqrt{x}\right)/9.$

10.11. $x^2 + y^2 = 8,\ \ y = \sqrt{2x},\ \ y = 0,$
$z = 0,\ \ z = 15x/11.$

10.12. $x + y = 4,\ \ y = \sqrt{2x},$
$z = 3y,\ \ z = 0.$

10.13. $x = \dfrac{5}{6}\sqrt{y},\ \ x = \dfrac{5}{18}y,$
$z = 0,\ \ z = \dfrac{5}{18}\left(3 + \sqrt{y}\right).$

10.14. $x = 19\sqrt{2y},\ \ x = 4\sqrt{2y},$
$z = 0,\ \ z + y = 2.$

10.15. $x^2 + y^2 = 8,\ \ x = \sqrt{2y},\ \ x = 0,$
$z = 30y/11,\ \ z = 0.$

10.16. $x + y = 4,\ \ x = \sqrt{2y},$
$z = 3x/5,\ \ z = 0.$

10.17. $y = 6\sqrt{3x},\ \ y = \sqrt{3x},$
$z = 0,\ \ x + z = 3.$

10.18. $y = \dfrac{5}{6}\sqrt{x},\ \ y = \dfrac{5}{18}x,$
$z = 0,\ \ z = \dfrac{5}{18}\left(3 + \sqrt{x}\right).$

10.19. $x^2 + y^2 = 18,\ \ y = \sqrt{3x},\ \ y = 0,$
$z = 0,\ \ z = 5x/11.$

10.20. $x + y = 6,\ \ y = \sqrt{3x},$
$z = 4y,\ \ z = 0.$

10.21. $x = 7\sqrt{3y},\ \ x = 2\sqrt{3y},$
$z = 0,\ \ z + y = 3.$

10.22. $x = 5\sqrt{y}/3,\ \ x = 5y/9,$
$z = 0,\ \ z = 5\left(3 + \sqrt{y}\right)/9.$

10.23. $x^2 + y^2 = 18,\ \ x = \sqrt{3y},\ \ x = 0,$
$z = 0,\ \ z = 10y/11.$

10.24. $x + y = 6,\ \ x = \sqrt{3y},$
$z = 4x/5,\ \ z = 0.$

10.25. $y = \sqrt{15x},\ \ y = \sqrt{15}x,$
$z = 0,\ \ z = \sqrt{15}\left(1 + \sqrt{x}\right).$

10.26. $x^2 + y^2 = 50,\ \ y = \sqrt{5x},$
$y = 0,\ \ z = 0,\ \ z = 3x/11.$

10.27. $x + y = 8,\ \ y = \sqrt{4x},$
$z = 3y,\ \ z = 0.$

10.28. $x = 16\sqrt{2y},\ \ x = \sqrt{2y},$
$z + y = 2,\ \ z = 0.$

10.29. $x=\sqrt{y},\ x=15y,$
$z=0,\ z=15\left(1+\sqrt{y}\right).$

10.30. $x^2+y^2=50,\ x=\sqrt{5y},$
$x=0,\ z=0,\ z=6y/11.$

10.31. $x=17\sqrt{2y},\ x=2\sqrt{2y},$
$z=0,\ z+y=1/2.$

Задача 11. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

11.1. $x^2+y^2=2y,$
$z=5/4-x^2,\ z=0.$

11.2. $x^2+y^2=y,\ x^2+y^2=4y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$

11.3. $x^2+y^2=8\sqrt{2}x,$
$z=x^2+y^2-64,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

11.4. $x^2+y^2+4x=0,$
$z=8-y^2,\ z=0.$

11.5. $x^2+y^2=6x,\ x^2+y^2=9x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,$
$y=0\ \ (y\le 0)$

11.6. $x^2+y^2=6\sqrt{2}y,$
$z=x^2+y^2-36,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

11.7. $x^2+y^2=2y,$
$z=9/4-x^2,\ z=0.$

11.8. $x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=5y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$

11.9. $x^2+y^2+2\sqrt{2}y=0,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

11.10. $x^2+y^2=4x,$
$z=10-y^2,\ z=0.$

11.11. $x^2+y^2=7x,\ x^2+y^2=9x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0,$
$y=0\ \ (y\le 0)$

11.12. $x^2+y^2=8\sqrt{2}y,$
$z=x^2+y^2-64,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

11.13. $x^2+y^2=2y,$
$z=13/4-x^2,\ z=0.$

11.14. $x^2+y^2=3y,\ x^2+y^2=6y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ z=0.$

11.15. $x^2+y^2=6\sqrt{2}x,$
$z=x^2+y^2-36,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

11.16. $x^2+y^2=2\sqrt{2}y,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

11.17. $x^2+y^2=4x,$
$z=12-y^2,\ \ z=0.$

11.18. $x^2+y^2=8x,\ \ x^2+y^2=11x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0,$
$y=0\ \ (y\le 0)$

11.19. $x^2+y^2=4\sqrt{2}x,$
$z=x^2+y^2-16,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

11.20. $x^2+y^2=4y,$
$z=4-x^2,\ \ z=0.$

11.21. $x^2+y^2=4y,\ \ x^2+y^2=7y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0.$

11.22. $x^2+y^2=4\sqrt{2}y,$
$z=x^2+y^2-16,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

11.23. $x^2+y^2+2x=0,$
$z=17/4-y^2,\ \ z=0.$

11.24. $x^2+y^2=9x,\ \ x^2+y^2=12x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0,$
$y=0\ \ (y\ge 0)$

11.25. $x^2+y^2+2\sqrt{2}x=0,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

11.26. $x^2+y^2=4y,$
$z=6-x^2,\ \ z=0.$

11.27. $x^2+y^2=10x,\ \ x^2+y^2=13x,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0,$
$y=0\ \ (y\ge 0)$

11.28. $x^2+y^2=2\sqrt{2}x,$
$z=x^2+y^2-4,$
$z=0\ \ (z\ge 0).$

11.29. $x^2+y^2=2x,$
$z=21/4-y^2,\ \ z=0.$

11.30. $x^2+y^2=5y,\ \ x^2+y^2=8y,$
$z=\sqrt{x^2+y^2},\ \ z=0.$

11.31. $x^2+y^2+2x=0,$
$z=25/4-y^2,\ \ z=0.$

Задача 12. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

12.1. $y = 5x^2 + 2,\ y = 7,$
$z = 3y^2 - 7x^2 - 2,$
$z = 3y^2 - 7x^2 - 5.$

12.2. $y = 5x^2 - 2,\ y = -4x^2 + 7,$
$z = 4 + 9x^2 + 5y^2,$
$z = -1 + 9x^2 + 5y^2.$

12.3. $x = -5y^2 + 2,\ x = -3,$
$z = 3x^2 + y^2 + 1,$
$z = 3x^2 + y^2 - 5.$

12.4. $x = 2y^2 - 3,\ x = -7y^2 + 6,$
$z = 1 + \sqrt{x^2 + 16y^2},$
$z = -3 + \sqrt{x^2 + 16y^2}.$

12.5. $y = -6x^2 + 8,\ y = 2,$
$z = x - x^2 - y^2 - 1,$
$z = x - x^2 - y^2 - 5.$

12.6. $y = 5x^2 - 1,\ y = -3x^2 + 1,$
$z = -2 + \sqrt{3x^2 + y^2},$
$z = -5 + \sqrt{3x^2 + y^2}.$

12.7. $x = 5y^2 - 9,\ x = -4,$
$z = x^2 + 4x - y^2 - 4,$
$z = x^2 + 4x - y^2 + 2.$

12.8. $y = 6x^2 - 1,\ y = 5,$
$z = 2x^2 + x - y^2,$
$z = 2x^2 + x - y^2 + 4.$

12.9. $x = 5y^2 - 1,\ x = -3y^2 + 1,$
$z = 2 - \sqrt{x^2 + 6y^2},$
$z = -1 - \sqrt{x^2 + 6y^2}.$

12.10. $x = -3y^2 + 7,\ x = 4,$
$z = 2 + \sqrt{6x^2 + y^2},$
$z = 3 + \sqrt{6x^2 + y^2}.$

12.11. $y = -5x^2 + 3,\ y = -2,$
$z = 2x^2 - 3y - 6y^2 - 1,$
$z = 2x^2 - 3y - 6y^2 + 2.$

12.12. $y = x^2 - 5,\ y = -x^2 + 3,$
$z = 4 + \sqrt{5x^2 + 8y^2},$
$z = 1 + \sqrt{5x^2 + 8y^2}.$

12.13. $x = 3y^2 - 5,\ x = -2,$
$z = 2 - \sqrt{x^2 + 16y^2},$
$z = 8 - \sqrt{x^2 + 16y^2}.$

12.14. $x = y^2 - 2,\ x = -4y^2 + 3,$
$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} + 2,$
$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2} - 1.$

$y = 2x^2 - 1,\ \ y = 1,$

12.15. $z = x^2 - 5y^2 - 3,$

$z = x^2 - 5y^2 - 6.$

$y = x^2 - 2,\ \ y = -4x^2 + 3,$

12.16. $z = 2 + \sqrt{x^2 + y^2},$

$z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}.$

$x = -4y^2 + 1,\ \ x = -3,$

12.17. $z = x^2 - 7y^2 - 1,$

$z = x^2 - 7y^2 + 2.$

$x = 7y^2 - 6,\ \ x = -2y^2 + 3,$

12.18. $z = 3 - 12y^2 + 5x^2,$

$z = -2 - 12y^2 + 5x^2.$

$y = 1 - 2x^2,\ \ y = -1,$

12.19. $z = x^2 + 2y + y^2 - 2,$

$z = x^2 + 2y + y^2 + 1.$

$y = x^2 - 7,\ \ y = -8x^2 + 2,$

12.20. $z = 3 - 12y^2 + 5x^2,$

$z = -2 - 12y^2 + 5x^2.$

$x = 2y^2 + 3,\ \ x = 5,$

12.21. $z = 1 + \sqrt{9x^2 + 4y^2},$

$z = 4 + \sqrt{9x^2 + 4y^2}.$

$y = 3x^2 + 4,\ \ y = 7,$

12.22. $z = 5 - \sqrt{2x^2 + 3y^2},$

$z = 1 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}.$

$x = 5y^2 - 2,\ \ x = -4y^2 + 7,$

12.23. $z = 4 - \sqrt{2x^2 + 3y^2},$

$z = -1 - \sqrt{2x^2 + 3y^2}.$

$x = -2y^2 + 5,\ \ x = 3,$

12.24. $z = 5 - \sqrt{x^2 + 25y^2},$

$z = 2 - \sqrt{x^2 + 25y^2}.$

$y = -3x^2 + 5,\ \ y = 2,$

12.25. $z = 3 + \sqrt{5x^2 + y^2},$

$z = -1 + \sqrt{5x^2 + y^2}.$

$y = 3x^2 - 5,\ \ y = -6x^2 + 4,$

12.26. $z = 2 + 10x^2 - y^2,$

$z = -2 + 10y^2 - y^2.$

$x = 4y^2 + 2,\ \ x = 6,$

12.27. $z = x^2 + 4y^2 + y + 1,$

$z = x^2 + 4y^2 + y + 4.$

$x = 3y^2 - 2,\ \ x = -4y^2 + 5,$

12.28. $z = 4 - 7x^2 - 9y^2,$

$z = 1 - 7x^2 - 9y^2.$

$y = 2x^2 - 5,\ \ y = -3,$

12.29. $z = 2 + \sqrt{x^2 + 4y^2},$

$z = -1 + \sqrt{x^2 + 4y^2}.$

$y = 2x^2 - 3,\ \ y = -7x^2 + 6,$

12.30. $z = 1 - 5x^2 - 6y^2,$

$z = -3 - 5x^2 - 6y^2.$

$y = -2x^2 + 7,\ \ y = 5,$

12.31. $z = 1 - 2x^2 + 3y^2,$

$z = 4 - 2x^2 + 3y^2.$

Задача 13. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

13.1. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$

$9z/2 = x^2 + y^2.$

13.2. $z = 15\sqrt{x^2 + y^2}\,/2,$

$z = 17/2 - x^2 - y^2.$

13.3. $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2},$

$z = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)/255}.$

13.4. $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2},\ \ z = 1,$

$x^2 + y^2 = 60$

$\left(\text{внутри цилиндра}\right).$

13.5. $z = \sqrt{\frac{16}{9} - x^2 - y^2},$

$2z = x^2 + y^2.$

13.6. $z = 3\sqrt{x^2 + y^2},$

$z = 10 - x^2 - y^2.$

13.7. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2},$

$z = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)/99}.$

13.8. $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2},\ \ z = 6,$

$x^2 + y^2 = 51$

$\left(\text{внутри цилиндра}\right).$

13.9. $z = 21\sqrt{x^2 + y^2}\,/2,$

$z = 23/2 - x^2 - y^2.$

13.10. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2},$

$6z = x^2 + y^2.$

13.11. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},$

$z = \sqrt{\left(x^2 + y^2\right)/80}.$

13.12. $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2},\ \ z = 5,$

$x^2 + y^2 = 45$

$\left(\text{внутри цилиндра}\right).$

13.13. $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$

$3z/2 = x^2 + y^2.$

13.14. $z = 6\sqrt{x^2 + y^2},$

$z = 16 - x^2 - y^2.$

13.15. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/63}$.

13.16. $z=\sqrt{64-x^2-y^2}$, $z=4$, $x^2+y^2=39$ (внутри цилиндра).

13.17. $z=\sqrt{144-x^2-y^2}$, $18z=x^2+y^2$.

13.18. $z=3\sqrt{x^2+y^2}\,/2$, $z=5/2-x^2-y^2$.

13.19. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/35}$.

13.20. $z=\sqrt{49-x^2-y^2}$, $z=3$, $x^2+y^2=33$ (внутри цилиндра).

13.21. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, $9z=x^2+y^2$.

13.22. $z=9\sqrt{x^2+y^2}$, $z=22-x^2-y^2$.

13.23. $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/15}$.

13.24. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, $z=2$, $x^2+y^2=27$ (внутри цилиндра).

13.25. $z=\sqrt{4/9-x^2-y^2}$, $z=x^2+y^2$.

13.26. $z=12\sqrt{x^2+y^2}$, $z=28-x^2-y^2$.

13.27. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/8}$.

13.28. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}$, $z=1$, $x^2+y^2=21$ (внутри цилиндра).

13.29. $z=\sqrt{64-x^2-y^2}$, $12z=x^2+y^2$.

13.30. $z=9\sqrt{x^2+y^2}\,/2$, $z=11/2-x^2-y^2$.

13.31. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/3}$.

Задача 14. Найти объем тела, заданного ограничивающими его поверхностями.

14.1. $z = 2 - 12\left(x^2 + y^2\right),$
$z = 24x + 2.$

14.2. $z = 10\left[(x-1)^2 + y^2\right] + 1,$
$z = 21 - 20x.$

14.3. $z = 8\left(x^2 + y^2\right) + 3,$
$z = 16x + 3.$

14.4. $z = 2 - 20\left[(x+1)^2 + y^2\right],$
$z = -40 - 38x.$

14.5. $z = 4 - 14\left(x^2 + y^2\right),$
$z = 4 - 28x.$

14.6. $z = 28\left[(x+1)^2 + y^2\right] + 3,$
$z = 56x + 59.$

14.7. $z = 32\left(x^2 + y^2\right) + 3,$
$z = 3 - 64x.$

14.8. $z = 4 - 6\left[(x-1)^2 + y^2\right],$
$z = 12x - 8.$

14.9. $z = 2 - 4\left(x^2 + y^2\right),$
$z = 8x + 2.$

14.10. $z = 22\left[(x-1)^2 + y^2\right] + 3,$
$z = 47 - 44x.$

14.11. $z = 24\left(x^2 + y^2\right) + 1,$
$z = 48x + 1.$

14.12. $z = 2 - 18\left[(x+1)^2 + y^2\right],$
$z = -36x - 34.$

14.13. $z = -16\left(x^2 + y^2\right) - 1,$
$z = -32x - 1.$

14.14. $z = 30\left[(x+1)^2 + y^2\right] + 1,$
$z = 60x + 61.$

14.15. $z = 26\left(x^2 + y^2\right) - 2,$
$z = -52x - 2.$

14.16. $z = -2\left[(x-1)^2 + y^2\right] - 1,$
$z = 4x - 5.$

14.17. $z = -2\left(x^2 + y^2\right) - 1,$
$z = 4y - 1.$

14.18. $z = 26\left[(x-1)^2 + y^2\right] - 2,$
$z = 50 - 52x.$

14.19. $z = 30\left(x^2 + y^2\right) + 1,$
$z = 60y + 1.$

14.20. $z = -16\left[(x+1)^2 + y^2\right] - 1,$
$z = -32x - 33.$

14.21. $z = 2 - 18\left(x^2 + y^2\right),$
$z = 2 - 36y.$

14.22. $z = 24\left[(x+1)^2 + y^2\right] + 1,$
$z = 48x + 49.$

14.23. $z = 22\left(x^2 + y^2\right) + 3,$
$z = 3 - 44y.$

14.24. $z = 2 - 4\left[\left(x-1\right)^2 + y^2\right],$
$z = 8x - 6.$

14.25. $z = 4 - 6\left(x^2 + y^2\right),$
$z = 12y + 4.$

14.26. $z = 32\left[\left(x-1\right)^2 + y^2\right] + 3,$
$z = 67 - 64x.$

14.27. $z = 28\left(x^2 + y^2\right) + 3,$
$z = 56y + 3.$

14.28. $z = 4 - 14\left[\left(x+1\right)^2 + y^2\right],$
$z = -28x - 24.$

14.29. $z = 2 - 20\left(x^2 + y^2\right),$
$z = 2 - 40y.$

14.30. $z = 8\left[\left(x+1\right)^2 + y^2\right] + 3,$
$z = 16x + 19.$

14.31. $z = 10\left(x^2 + y^2\right) + 1,$
$z = 1 - 20y.$

Задача 15. Найти объем тела, заданного неравенствами.

15.1. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49,$
$-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},$
$-x \le y \le 0.$

15.2. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,$
$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},$
$-\sqrt{3}x \le y \le 0.$

15.3. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,$
$z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, \quad -\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 0.$

15.4. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36,$
$z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}}, \quad 0 \le y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

15.5. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 36,$
$z \ge \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}, \quad -\sqrt{3}x \le y \le \sqrt{3}x.$

15.6. $25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,$
$z \le -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}, \quad \sqrt{3}x \le y \le -\sqrt{3}x.$

15.7. $1 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49,$
$0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}},$
$y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \le -\sqrt{3}x.$

15.8. $25 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49,$
$-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \le z \le 0,$
$y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \ge -\sqrt{3}x.$

15.9. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,$
$-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},$
$x \le y \le 0.$

15.10. $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,$
$\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{15}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}},$
$\sqrt{3}x \le y \le 0.$

15.11. $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,$
$z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, \quad -\sqrt{3}x \le y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

15.12. $16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,$
$z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}},$
$-\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le -\sqrt{3}x.$

15.13. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 49,$
$z \ge \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}, \quad y \le 0, \quad y \le \sqrt{3}x.$

15.14. $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 121,$
$z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{99}}, \quad y \ge 0, \quad y \ge \sqrt{3}x.$

15.15. $4 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,$
$0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}},$
$y \le \sqrt{3}x, \quad y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

15.16. $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144,$
$-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{24}} \le z \le 0,$
$y \ge \sqrt{3}x, \quad y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

15.17. $9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81,$
$-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}},$
$0 \le y \le -x.$

15.18. $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144,$
$-\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{35}},$
$0 \le y \le -\sqrt{3}x.$

15.19. $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144,$
$z \le \sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{3}}, \quad \sqrt{3}x \le y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

15.20. $36 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,$
$z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{63}},$
$\dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x.$

$9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 64,$

15.21. $z \ge \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}},$

$y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \le -\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

$49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144,$

15.22. $z \le -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}},$

$y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}}, \quad y \ge -\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

$9 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81,$

15.23. $0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}},$

$y \le 0, \quad y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

$49 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81,$

15.24. $-\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}} \le z \le 0,$

$y \ge 0, \quad y \ge \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

$16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,$

15.25. $-\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}} \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{35}},$

$0 \le y \le x.$

$64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 196,$

15.26. $-\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}} \le z \le -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{15}},$

$0 \le y \le \sqrt{3}x.$

$64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 196,$

15.27. $z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{3}}, \quad \dfrac{x}{\sqrt{3}} \le y \le 0.$

$64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 144,$

15.28. $z \ge -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{63}}, \quad 0 \le y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

$16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 81,$

15.29. $z \ge \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}},$

$y \le 0, \quad y \le -\sqrt{3}x.$

$64 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 169,$

15.30. $z \le -\sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}},$

$y \ge 0, \quad y \ge -\sqrt{3}x.$

$16 \le x^2 + y^2 + z^2 \le 100,$

15.31. $0 \le z \le \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{24}},$

$y \le 0, \quad y \le \dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

Задача 16. Тело V задано ограничивающими его поверхностями, μ - плотность. Найти массу тела.

$$64\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=4,$$

16.1. $y=0,\quad z=0\quad \left(y\ge 0,\ z\ge 0\right),$

$$\mu=5\left(x^2+y^2\right)\big/4.$$

$$x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=1,$$

16.2. $\left(x^2+y^2\le 1\right),\quad x=0\quad \left(x\ge 0\right);$

$$\mu=4\left|z\right|.$$

$$x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=2z,$$

16.3. $x=0,\ y=0,\ z=0\quad \left(x\ge 0,\ y\ge 0\right);$

$$\mu=10x.$$

$$x^2+y^2=\frac{16}{49}z^2,\quad x^2+y^2=\frac{4}{7}z,$$

16.4. $x=0,\ y=0,\quad \left(x\ge 0,\ y\ge 0\right);$

$$\mu=80yz.$$

$$x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2=4z^2,$$

16.5. $x=0,\ y=0,\quad \left(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0\right);$

$$\mu=20z.$$

$$36\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=1,$$

16.6. $x=0,\quad z=0\quad \left(x\ge 0,\ z\ge 0\right),$

$$\mu=\frac{5}{6}\left(x^2+y^2\right).$$

$$x^2+y^2+z^2=16,\quad x^2+y^2=4,$$

16.7. $\left(x^2+y^2\le 4\right);$

$$\mu=2\left|z\right|.$$

$x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=8z,$

16.8. $x=0,\ y=0,\ z=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$

$\mu=5x.$

$x^2+y^2=\dfrac{4}{25}z^2,\quad x^2+y^2=\dfrac{2}{5}z,$

16.9. $x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0);$

$\mu=28xz.$

$x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=z^2,$

16.10. $x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0);$

$\mu=6z.$

$25\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=4,$

$x=0,\quad y=0,\ z=0$

16.11. $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0),$

$\mu=2\left(x^2+y^2\right).$

$x^2+y^2+z^2=9,\quad x^2+y^2=4,$

16.12. $\left(x^2+y^2\le 4\right),\quad y=0\ \ (y\ge 0);$

$\mu=|z|.$

$x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=6z,$

16.13. $x=0,\ y=0,\ z=0\ \ (x\ge 0,\ y\ge 0);$

$\mu=90y.$

$x^2+y^2=\dfrac{1}{25}z^2,\quad x^2+y^2=\dfrac{1}{5}z,$

16.14. $x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0);$

$\mu=14yz.$

$x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=9z^2,$

16.15. $x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0);$

$\mu=10z.$

16.16. $9\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=4,$
$x=0,\quad y=0,\quad z=0$
$\left(x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ z\geq 0\right),$
$\mu=5\left(x^2+y^2\right)/3.$

16.17. $x^2+y^2+z^2=4,$
$x^2+y^2=1,\quad \left(x^2+y^2\leq 1\right);$
$\mu=|z|.$

16.18. $x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=z,$
$x=0,\ \ y=0,\ \ z=0,$
$\left(x\geq 0,\ \ y\geq 0\right);$
$\mu=10y.$

16.19. $x^2+y^2=\frac{1}{49}z^2,\quad x^2+y^2=\frac{1}{7}z,$
$x=0,\ \ y=0,\quad \left(x\geq 0,\ \ y\geq 0\right);$
$\mu=10xz.$

16.20. $x^2+y^2+z^2=4,\quad x^2+y^2=4z^2,$
$x=0,\ \ y=0,\quad \left(x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ z\geq 0\right);$
$\mu=10z.$

16.21. $16\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=1,$
$x=0,\quad y=0,\ \ z=0\quad \left(x\geq 0,\ \ y\geq 0,\ \ z\geq 0\right),$
$\mu=5\left(x^2+y^2\right).$

16.22. $x^2+y^2+z^2=16,$
$x^2+y^2=4\quad \left(x^2+y^2\leq 4\right);$
$\mu=|z|.$

$x^2+y^2=4,\quad x^2+y^2=4z,$

16.23. $x=0,\ y=0,\ z=0\quad (x\ge 0,\ y\ge 0);$

$\mu=5y.$

$x^2+y^2=z^2,\quad x^2+y^2=z,$

16.24. $x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0);$

$\mu=35yz.$

$x^2+y^2+z^2=1,\quad x^2+y^2=z^2,$

16.25. $x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0);$

$\mu=32z.$

$x^2+y^2=z^2,\quad x^2+y^2=4,$

$x=0,\quad y=0,\ z=0$

16.26. $(x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0),$

$\mu=5\left(x^2+y^2\right)/2.$

$x^2+y^2+z^2=9,\quad x^2+y^2=4,$

16.27. $\left(x^2+y^2\le 4\right),\quad z=0\quad (z\ge 0);$

$\mu=2z.$

$x^2+y^2=1,\quad x^2+y^2=3z,$

$x=0,\ y=0,\ z=0$

16.28. $(x\ge 0,\ y\ge 0);$

$\mu=15x.$

$x^2+y^2=\frac{4}{49}z^2,\quad x^2+y^2=\frac{2}{7}z,$

16.29. $x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0);$

$\mu=20xz.$

$x^2+y^2+z^2=16,\quad x^2+y^2=9z^2,$

16.30. $x=0,\ y=0,\ (x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0);$

$\mu=5z.$

$$4\left(x^2+y^2\right)=z^2,\quad x^2+y^2=1,$$

16.31. $y=0,\quad z=0\quad \left(y\geq 0,\ z\geq 0\right),$

$$\mu=10\left(x^2+y^2\right).$$