МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

УТВЕРЖДАЮ
Директор ИДО
_______________ С.И. Качин

«____»_____________ 2011 г.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания и индивидуальные задания
для студентов ИДО, обучающихся по направлениям
140100 «Теплоэнергетика и теплотехника»,
140400 «Электроэнергетика и электротехника»,
200100 «Приборостроение»,
221700 «Стандартизация и метрология»,
280700 «Техносферная безопасность»

Составители
Л.И. Терехина, И.И. Фикс

Семестр	**1**
Кредиты	4
Лекции, часов	6
Практические занятия, часов	8
Индивидуальные задания	№ 1, № 2, № 3, № 4
Самостоятельная работа, часов	94
Формы контроля	зачет

Издательство
Томского политехнического университета
2011

УДК 517

Линейная алгебра и аналитическая геометрия: метод. указания и индивидуальные задания для студентов ИДО, обучающихся по направлениям 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника», 140400 «Электроэнергетика и электротехника», 200100 «Приборостроение», 221700 «Стандартизация и метрология», 280700 «Техносферная безопасность» / сост. Л.И. Терехина, И.И. Фикс; Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2011. – 129 с.

Методические указания и индивидуальные задания рассмотрены и рекомендованы к изданию методическим семинаром кафедры высшей математики и математической физики ФТИ «____» ________ 2011 г., протокол № ___.

Зав. кафедрой ВММФ
профессор, доктор физ.-мат. наук ______________А.Ю. Трифонов

Аннотация

Методические указания и индивидуальные задания по дисциплине «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» предназначены для студентов ИДО, обучающихся по направлениям 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника», 140400 «Электроэнергетика и электротехника», 200100 «Приборостроение», 221700 «Стандартизация и метрология», 280700 «Техносферная безопасность». Данная дисциплина изучается в одном семестре.

Приводится содержание основных тем дисциплины, темы практических занятий, варианты заданий для индивидуальных домашних заданий и список рекомендуемой литературы. Даны методические указания по выполнению индивидуальных домашних заданий.

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОСНОВНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

Дисциплина «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» изучается в первом семестре первого курса студентами всех технических специальностей ИДО, Задачами дисциплины являются:

- развитие математической интуиции;
- воспитание математической культуры;
- формирование навыков, необходимых для использования знаний при изучении специальных дисциплин и дальнейшей практической деятельности;
- овладение студентами необходимым математическим аппаратом, дающим возможность анализировать, моделировать и решать технические задачи
- воспитание у студентов отношения к математике как к инструменту исследования и решения технических задач, необходимому в их дальнейшей работе.

После изучения дисциплины студент должен *знать и уметь использовать:*

- теорию матриц, определителей, систем линейных уравнений;
- основные понятия векторной алгебры и аналитической геометрии на плоскости и в пространстве;

а также *иметь навыки:*

- выполнения линейных и нелинейных операций над матрицами;
- вычисления определителей различного порядка;
- решения систем линейных уравнений различными способами;
- выполнения линейных и нелинейных действий над векторами и применения средств векторной алгебры к решению геометрических и физических задач;
- составления уравнений прямых, плоскостей и их построения;
- построения кривых и поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям.

Дисциплина «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» является базовой дисциплиной естественно-научного цикла (Б2).

Для её успешного усвоения необходимы математические знания и умения на уровне среднего образования, а именно, необходимо свободно оперировать с числами: положительными, отрицательными, простыми дробями, простейшие действия с векторами, значения основных тригонометрических функций определенных углов, строить графики прямой линии, кривых: окружности, параболы, гиперболы, находить точку пересечения прямых.

Пререквизитов данная дисциплина не имеет, поскольку является первой обязательной дисциплиной образовательной программы.

Кореквизитами являются «Информатика» (Б2, В2)

2. СОДЕРЖАНИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

Тема 1. Линейная алгебра

Матрицы и действия над ними. Виды матриц. Определители, их свойства и вычисление. Обратная матрица, матричные уравнения. Ранг матрицы. Системы линейных уравнений. Решение систем методами Крамера, матричным и Гаусса. Неопределенные системы. Однородные системы. Фундаментальная система решений. Собственные значения и собственные векторы матрицы.

Рекомендуемая литература: [1, с. 28–45], [3, с. 76–104], [4, с. 3–48].

Методические указания

Необходимо освоить методы вычисления определителей, сложение, вычитание и умножение матриц, нахождение обратной матрицы и решения матричных уравнений, а также решение систем линейных уравнений методами: Крамера, матричным, Гаусса.

Тема 2. Векторная алгебра

Основные понятия векторной алгебры. Линейные операции над векторами в геометрической форме. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Базис в векторном пространстве, его размерность. Системы координат. Декартовый базис. Проекция вектора, орт вектора, направляющие косинусы вектора. Линейные операции над векторами в координатной форме. Простейшие задачи векторной алгебры. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Определения, свойства, вычисление в координатной форме, приложения. Некоторые физические приложения векторной алгебры.

Рекомендуемая литература: [1, с. 46–83], [2, с. 157–196], [3, с. 47–56], [4, с. 55–92].

Методические указания

Необходимо изучить действия над векторами в геометрической и координатной формах, уметь выполнять линейные операции над векторами, находить длину вектора, а также изучить скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и их применение к решению задач нахождения угла между векторами, площадей параллелограмма и треугольника, объема параллелепипеда и пирамиды.

Тема 3. Аналитическая геометрия на плоскости

Прямая на плоскости. Различные виды уравнений прямой. Взаимное расположение прямых на плоскости. Нахождение расстояния от точки до прямой на плоскости. Кривые второго порядка. Основные типы кривых и их канонические уравнения. Построение кривых по каноническим уравнениям. Приведение уравнений кривых к каноническому виду. Полярные координаты. Построение кривых, заданных параметрически и в полярных координатах.

Рекомендуемая литература: [1, с. 109–128], [2, с. 59–128], [3, с. 6–25], [4, с. 96–161].

Методические указания

Необходимо изучить все уравнения прямой на плоскости, уметь определять основные параметры прямой, решать задачи на взаимное расположение прямых на плоскости. Изучить основные виды кривых второго порядка, их отличительные признаки, научиться строить кривые на плоскости по каноническим уравнениям.

Тема 4. Аналитическая геометрия в пространстве

Плоскость. Основные уравнения плоскости. Взаимное расположение плоскостей. Расстояние от точки до плоскости. Прямая линия в пространстве. Общие, канонические и параметрические уравнения прямых. Взаимное расположение прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой в пространстве. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве. Поверхности второго порядка, канонические уравнения и построение. Понятие о цилиндрических и сферических координатах.

Рекомендуемая литература: [1, с. 126–210], [2, с. 204–247], [3, с. 57–75], [4, с. 165–220].

Методические указания

Не обходимо изучить основные уравнения прямой и плоскости в пространстве, решать задачи на взаимном расположении е прямых и плоскостей, определять тип поверхности второго порядка по каноническому уравнению и строить поверхности по основным характеристикам.

3. СОДЕРЖАНИЕ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛА ДИСЦИПЛИНЫ

3.1. Тематика практических занятий

1. Линейная алгебра (Вычисление определителей, действия над матрицами, решение систем линейных уравнений) (2 часа).

2. Векторная алгебра (линейные операции над векторами, скалярное, векторное и смешанное произведения векторов, их приложения) (2 часа).

3. Аналитическая геометрия на плоскости (Составление уравнений прямой на плоскости, построение, нахождение точки пересечения, угла между прямыми. Кривые второго порядка. Построение кривых в полярных координатах и заданных параметрически) (2 часа).

4. Аналитическая геометрия в пространстве (Плоскость и прямая в пространстве. Задачи на взаимное расположение прямой и плоскости. Поверхности 2-го порядка) (2 часа).

4. ИНДИВИДУАЛЬНЫЕ ДОМАШНИЕ ЗАДАНИЯ

4.1. Общие методические указания

В соответствии с учебным графиком предусмотрено выполнение четырех индивидуальных домашних заданий (ИДЗ). Выполнение этих заданий необходимо для закрепления теоретических знаний и приобретения практических навыков решения типовых задач. Номера индивидуальных заданий соответствуют номерам тем раздела «Содержание теоретического раздела дисциплины».

Студент выполняет **вариант индивидуального домашнего задания**, который соотвествует числу, составленному из двух последних цифр шифра его зачётной книжки. Если получаемое число больше 20, то из него нужно вычесть 20. Например, если номер зачетной книжки З-5Б11/14, то студент выбирает вариант индивидуального домашнего задания под номером 14, если шифр З-5Б11/35, то номер ИДЗ 15.

Индивидуальные задания выполняются в соответствии с графиком изучения дисциплины и высылаются на проверку преподавателю.

Студенты, обучающиеся с использованием ДОТ, в обязательном порядке получают рецензию на каждое индивидуальное задание. Правильно выполненные работы студенту не возвращаются.

При оформлении необходимо соблюдать следующие требования:

1. Каждое индивидуальное задание оформляется отдельно (в отдельной тетради для студентов КЗФ и в отдельном файле для студентов ДОТ).

2. Обязательно должен быть титульный лист. На титульном листе указываются номер индивидуального задания, номер варианта, название дисциплины; фамилия, имя, отчество студента; номер группы, шифр.

3. Все страницы работы должны иметь сквозную нумерацию.

4. Обязательно прилагается список использованной литературы, в который включается рабочая программа и методические указания, в соответствии с которыми выполнены задания.

5. Решения задач следует располагать в той же последовательности, что и задания. Перед решением следует записать текст условия задачи.

6. Решения всех задач должны быть подробными, со всеми промежуточными расчётами, с указанием использованных формул и т.п.

7. В случае не соответствия работы требованиям к оформлению студент получает оценку «незачтено». В этом случае работа должна быть исправлена и повторно предоставлена на проверку преподавателю.

8. Студент, не получивший положительной аттестации по всем индивидуальным заданиям, не допускается к сдаче экзамена по данной дисциплине.

4.2. Варианты домашних заданий и методические указания

4.2.1. Индивидуальное задание № 1

Линейная алгебра

Вариант № 1

1. Вычислить определитель 4-го порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -4 & 2 & 4 & -2 \\ -2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Найти произведения матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 4 \\ -7 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений тремя способами: a) методом Крамера, b) матричным методом, c) методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 5y - z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = -12 \end{cases}$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 23 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 12 \end{cases}$$

6. Найти ненулевые решения однородной системы.

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 = 0 \end{cases}$$

Вариант № 2

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & -4 \\ 7 & -8 & -1 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X - 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений тремя способами: a) методом Крамера, b) матричным методом, c) методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \end{cases}$$

6. Найти ненулевые решения однородной системы.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант № 3

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 4 \\ 7 & 0 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 4 \\ 1 & 6 & -7 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему уравнений тремя способами: a) методом Крамера, b) матричным методом, c) методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 10 \\ x + 4y - 13z = -27 \\ 12x + 5y - 7z = -23 \end{cases}$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3 \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7 \end{cases}$$

6. Найти ненулевые решения однородной системы.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_4 = 0 \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Вариант № 4

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -5 & 2 \\ 4 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X - 2\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

4. Решить систему уравнений тремя способами: a) методом Крамера, b) матричным методом, c) методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 2x - y - z = 14 \\ x + 4y + 3z = -7 \\ 2x + 6y = 10 \end{cases}$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2 \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3 \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

6. Найти ненулевые решения однородной системы.

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}$$

Вариант № 5

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 & -1 \\ -3 & -4 & 4 & -3 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ -4 & -3 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ 7 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 9 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений тремя способами: a) методом Крамера, b) матричным методом, c) методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x - 2y + z = -8 \\ 2x + 3y + z = -1 \\ x + 2y + 6z = -5 \end{cases}$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

6. Найти ненулевые решения однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Вариант № 6

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -2 & 3 & -6 & 2 \\ 3 & -10 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 1 \\ -4 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричное уравнение

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X.$$

4. Решить систему уравнений тремя способами: a) методом Крамера, b) матричным методом, c) методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x + 5y - z = 5 \\ 2x + 3y + 2z = 2 \\ 5x - y = 15 \end{cases}$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$$

6. Найти ненулевые решения однородной системы.

$$\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Вариант № 7

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 & -1 \\ -3 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 5 \\ -6 & 3 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \cdot X - 2\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений тремя способами: a) методом Крамера, b) матричным методом, c) методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -3 \\ 7y + 11z = 1 \\ -x + 3y + 7z = 2 \end{cases}$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1 \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1 \end{cases}$$

6. Найти ненулевые решения однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 + 11x_2 + 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

Вариант № 8

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 & 1 \\ -4 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -1 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричное уравнение

$$4\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений тремя способами: a) методом Крамера, b) матричным методом, c) методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x + 4y + 3z = -3 \\ 2x + y - 5z = -7 \\ 3x + 5y - z = -8 \end{cases}$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 2x_5 = 1 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ 3x_2 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$

6. Найти ненулевые решения однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Вариант № 9

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -8 & 1 \\ 2 & 3 & -8 & 6 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & -5 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричное уравнение

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений тремя способами: a) методом Крамера, b) матричным методом, c) методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x + 4y - z = -3 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ 4x - 7y + 2z = 35 \end{cases}$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = -2 \\ x_1 + x_2 + 3x_4 + 3x_5 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

6. Найти ненулевые решения однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

Вариант № 10

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & -4 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 5 \\ -4 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} - X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

4. Решить систему уравнений тремя способами: a) методом Крамера, b) матричным методом, c) методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} x + y - z = 9 \\ 5x - 2y = -3 \\ 3x + 2y - 2z = 19 \end{cases}$$

5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2 \\ 4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 3 \end{cases}$$

6. Найти ненулевые решения однородной системы.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0 \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0 \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

Вариант № 11

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}+2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:
а) методом Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_4 + x_5 = -1, \\ -2x_2 + x_3 + 5x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 9x_4 + 3x_5 = 5. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 12

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 & 2 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} -6 & 1 \\ -8 & 9 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:
а) методом Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3=7, \\ x_1+2x_2+3x_3=1, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=9. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1+x_2+4x_3+5x_4-3x_5=5, \\ 2x_1-x_2+x_3+2x_4=3, \\ 4x_1-2x_2+2x_3+3x_4-x_5=7, \\ 2x_1-x_2+x_3+x_4-x_5=4. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1-7x_2-2x_3+8x_4=0, \\ 2x_1-9x_2-3x_3+8x_4=0, \\ -x_1+9x_2+2x_3-12x_4=0. \end{cases}$$

Вариант № 13

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -9 & 13 \\ 15 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:
а) методом Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -2. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 14

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 10 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:
а) методом Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2, \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 = 3. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 - 3x_3 - x_4 + x_5 = -4. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 7x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 15

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 3 & -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 14 & 9 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}-3\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:
а) методом Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 10x_4 + 4x_5 = -7, \\ x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 7x_4 + 3x_5 = -6. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 16

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 13 & 2 & 6 & 4 \\ 18 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=4\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:
а) методом Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 4x_1+x_2-3x_3=19, \\ 2x_1-3x_2-4x_3=11, \\ -x_1+2x_2-7x_3=13. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 9x_1+x_2-2x_3-x_4-2x_5=5, \\ x_1-x_2-x_4+2x_5=1, \\ 3x_1+x_2-x_3-x_4=2, \\ x_1+x_2-x_3-3x_4+4x_5=2. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1+3x_2+4x_3+x_4=0, \\ 2x_1+2x_2+3x_3+x_4=0, \\ 3x_1+3x_2+4x_3+x_4=0. \end{cases}$$

Вариант № 17

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} -7 & -2 & -3 & 3 \\ 9 & 3 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 12 & -4 & -3 & 4 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:
а) методом Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+x_3=7, \\ x_1-2x_2-x_3=3, \\ 5x_2+2x_3=1. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1+5x_2-x_3+x_4+x_5=-3, \\ 3x_1+x_2+3x_3+3x_4-3x_5=-3, \\ -x_1+x_3-x_4+3x_5=2, \\ -x_1+2x_2-2x_3-x_4+2x_5=0. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0, \\ 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0. \end{cases}$$

Вариант № 18

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} -7 & -3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\mathbf{X} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:
а) методом Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 14, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5 = 1, \\ 4x_1 - 10x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 = 1, \\ 2x_1 - 14x_2 + 7x_3 - 7x_4 + 11x_5 = -1. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0, \\ 6x_1 - 12x_2 + 17x_3 - 9x_4 = 0. \end{cases}$$

Вариант № 19

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 & 2 \\ -4 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}+2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}=5\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:
а) методом Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ 2x_1-7x_2+2x_3=-11, \\ 2x_1+4x_2+5x_3=3. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3-x_4=0, \\ 2x_1+x_2-4x_3+x_4=0, \\ x_1-x_2-2x_3+2x_4=0. \end{cases}$$

Вариант № 20

1. Вычислите определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 1 & 3 \\ 4 & -6 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

2. Вычислите произведения матриц $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$, если

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Решите матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\mathbf{X}-2\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Решите систему уравнений тремя способами:
а) методом Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса. Сделайте проверку.

$$\begin{cases} 2x_1-7x_2+x_3=-4, \\ x_1+x_2-x_3=1, \\ 4x_1-x_2+x_3=4. \end{cases}$$

5. Найдите общее решение системы линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1, \\ x_1-x_2+x_3+x_4-2x_5=0, \\ 3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2, \\ 4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3. \end{cases}$$

6. Найдите общее решение системы линейных однородных уравнений и запишите её фундаментальную систему решений

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+5x_4=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+3x_4=0, \\ 3x_1-x_2-x_3+x_4=0. \end{cases}$$

4.2.2. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 1

Линейная алгебра

Задача 1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$ Получим нули в третьем столбце, используя для этого 1 в первой строке. Проделаем следующее:

a) прибавим ко 2-ой строке 1-ю;

b) к 3-ей строке прибавим 1-ю, умноженную на (-2);

c) к 4-ой строке прибавим 1-ю, умноженную на (-1).

d) Получив нули, раскладываем определитель по элементам 3-го столбца

$$= 1 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$ Вычисление определителя 4-го порядка свелось к вычислению определителя 3-го порядка.

Проделываем с ним аналогичные действия.

$$= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 3 & 12 \end{vmatrix} =$$ Получим нули в первом столбце, используя для этого элемент (-1) в первой строке:

a) прибавим ко 2-ой строке 1-ю;

b) к 3-ей строке прибавим 1-ю, умноженную на 2.

c) Получив нули, раскладываем определитель по элементам 1-го столбца

и вычисляем определитель 2-го порядка

$$= (-1)\cdot(-1)^2\cdot\begin{vmatrix}3 & 9\\ 3 & 12\end{vmatrix} = -(3\cdot 12 - 3\cdot 9) = -(36-27) = -9$$

Задача 2. Вычислить произведение матриц AB и BA,

если $A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & 5\\ -3 & 4\end{pmatrix}$

1) Выполним умножение матриц в том и другом порядках:

Правило умножения: При умножении матриц каждый элемент матрицы произведения находится как сумма произведений элеменьов строки первой матрицы на соответствующие элементы столбца второй матрицы

$$AB=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & 5\\ -3 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(-1)(-4)+2\cdot 2+1\cdot(-3) & (-1)\cdot 3+2\cdot 5+1\cdot 4\\ 2\cdot(-4)+(-1)\cdot 2+3\cdot(-3) & 2\cdot 3+(-1)\cdot 5+3\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 11\\ -19 & 13\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}-4 & 3\\ 2 & 5\\ -3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}(-4)\cdot(-1)+3\cdot 2 & (-4)\cdot 2+3\cdot(-1) & (-4)\cdot 1+3\cdot 3\\ 2\cdot(-1)+5\cdot 2 & 2\cdot 2+5\cdot(-1) & 2\cdot 1+5\cdot 3\\ (-3)\cdot(-1)+4\cdot 2 & (-3)\cdot 2+4\cdot(-1) & (-3)\cdot 1+4\cdot 3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}10 & -11 & 5\\ 8 & -1 & 17\\ 11 & -10 & 9\end{pmatrix}$$

Задача 3. Решить матричное уравнение

$$X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Выполним вначале умножение матриц на число и упростим уравнение:

$$X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

$$X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}, \Rightarrow \quad X\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

Тогда получим матричное уравнение вида $X \cdot A = B$, решение которого $X = B \cdot A^{-1}$, где A^{-1} – матрица, обратная матрице A. Итак,

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

Найдем A^{-1} по известной схеме:

1) $\det(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 4 = 10$, 2) $A^{*} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$,

3) $A^{*T} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ 4) $A^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)} A^{*T} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

Окончательно:

$$X = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 29 & 3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}$$

Задача 4. Решить систему уравнений тремя способами: 1) методом Крамера, 2) матричным методом, 3) методом Гаусса. Сделать проверку.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 4 \\ x + y - z = 2 \\ 2x - y + 3z = 6 \end{cases}.$$

1. **Метод Крамера**

1) Вычисляем главный определитель системы, который составляется из коэффициентов при неизвестных.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2(3-1)+1(3+2)+1(-1-2) = 4+5-3 = 6.$$

2) Вычисляем побочные определители системы

a) определитель Δ_x составляется на основе главного путем замены в нем первого столбца столбцом свободных членов

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4(3-1)+1(6+6)+1(-2-6) = 8+12-8 = 12$$

b) определитель Δ_y составляется на основе главного путем замены в нем второго столбца столбцом свободных членов

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = 2(6+6)-4(3+2)+1(6-4) = 24-20+2 = 6$$

c) определитель Δ_z составляется на основе главного путем замены в нем третьего столбца столбцом свободных членов

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 2(6+2)+1(6-4)+4(-1-2) = 16+2-12 = 6$$

Решение системы находим по формулам Крамера

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{12}{6} = 2, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{6}{6} = 1$$

Для проверки правильности полученного ответа $x = 2, y = 1, z = 1$

достаточно подставить значения неизвестных в исходную систему и получить тождественные равенства.

2. **Матричный метод**

1) Обозначим матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

и перепишем систему и вид ее решения в матричной форме

$$A\cdot X=B \quad \Rightarrow \quad X=A^{-1}\cdot B \quad \text{или}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

2) Находим обратную матрицу A^{-1} согласно схеме

1) Находим определитель данной матрицы (раскладываем по элементам первой строки) $\det(A)=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 2+1\cdot 5+1\cdot(-3)=6\neq 0$

Определитель не равен нулю, значит обратная матрица существует и система имеет единственное решение.

2) Составляем союзную матрицу, для чего на место каждогоэлемента матрицы ставим его алгебраическое дополнение

$$A^{*}=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

3) Транспонируем союзную матрицу $A^{*T}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$

4) Записываем обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{A^{*T}}{\det(A)}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -5 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

и находим решение системы, умножая полученную обратную матрицу на столбец свободных членов

$$X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2&2&0\\-5&4&3\\-3&0&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\6\end{pmatrix}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}2\cdot4+2\cdot2+0\cdot6\\(-5)\cdot4+4\cdot2+3\cdot6\\(-3)\cdot4+0\cdot2+3\cdot6\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}12\\6\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

3. **Метод Гаусса**

1) Выпишем расширненную матрицу системы и преобразуем ее

$$\widetilde{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1&4\\1&1&-1&2\\2&-1&3&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\2&-1&1&4\\2&-1&3&6\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-3&3&0\\0&-3&5&2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-1&1&0\\0&-3&5&2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\0&-1&1&0\\0&0&2&2\end{pmatrix}$$

2) Выписываем эквивалентную систему и ее решение

$$\begin{cases}x+y-z=2\\-y+z=0\\2z=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2-y+z\\y=z\\z=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\\z=1\end{cases}$$

Задача 5. Найти общее решение системы

$$\begin{cases}x_1-x_2+3x_3+x_4-2x_5=0\\2x_1+x_2-x_3-x_4+x_5=1\\3x_1+3x_2-3x_3-3x_4+4x_5=2\\4x_1+5x_2-5x_3-5x_4+7x_5=3\end{cases}$$

Решение. Записываем расширенную матрицу системы и выполняем необходимые линейные преобразования строк этой матрицы

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&3&1&-2&0\\2&1&-1&-1&1&1\\3&3&-3&-3&4&2\\4&5&-5&-5&7&3\end{array}\right)\sim\begin{matrix}-2\cdot S_1+S_2\\-3\cdot S_1+S_3\\-4\cdot S_1+S_4\end{matrix}\quad :$$

$$:\left(\begin{array}{ccccc|c}1&-1&3&1&-2&0\\0&3&-7&-3&5&1\\0&6&-12&-6&10&2\\0&9&-17&-9&15&3\end{array}\right)\sim\begin{matrix}-2\cdot S_3+S_3\\-3\cdot S_2+S_4\end{matrix}\quad :$$

$$:\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -3 & 5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 3 & -7 & -3 & 5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

Делаем выводы: система совместна, так как ранг основной и расширенной матриц равны и равны трем, т.к. три строки матрицы линейно независимы,

$R = 3$. Далее, ранг матрицы меньше числа неизвестных, $\mathrm{R}ang\ A = 3 < n = 5 -$, поэтому система имеет бесконечное множество решений.

Выбираем базисный минор. Это должен быть минор третьего порядка, не равный нулю. Видно, что в качестве базисных следует взять 1-й, 2-ой и 3-й столбцы $M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$

Базисных неизвестных будет три: $x_1,\ x_2,\ x_3$.

Свободных неизвестных будет два: $x_4,\ x_5$, так как $(n-R) = 5-3 = 2$.

Записываем эквивалентную систему, при этом базисные неизвестные остаются в левой части уравнений, а свободные переносятся с противоположным знаком в правую часть

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = -x_4 + 2x_5 \\ 3x_2 - 7x_3 = 1 + 3x_4 - 5x_5 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = x_4 + 2x_5 \\ 3x_2 = 1 + 3x_4 - 5x_5 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 - (1/3 + x_4 - 5/3x_5) = x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 1/3 + x_4 - 5/3\,x_5 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1/3 + 1/3x_5 \\ x_2 = 1/3 + x_4 - 5/3\,x_5 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Итак, мы получили *общее решение системы*

$$X = \begin{pmatrix} 1/3 + 1/3\,x_5 \\ 1/3 + x_4 - 5/3\,x_5 \\ 0 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}.$$

Задача 6. Найти ненулевые решения однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0 \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} S_2 - 2S_1 \\ S_3 - S_1 \end{matrix} \sim$$

$$:\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim S_3 + S_1 \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Три строки матрицы линейно независимы, ранг матрицы равен трем:

$\mathrm{R}ang\ A = 3$. Кроме того, $\mathrm{R}ang\ A = 3 < n = 5 -$ значит система имеет бесконечное множество решений.

Выбираем базисный минор. Его нужно составить из трех столбцов так, чтобы определитель 3-го порядка не равнялся нулю. Видно, что в качестве базисных следует взять 1-й, 2-й и 5-й столбцы

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Базисных неизвестных будет три: $x_1,\ x_2,\ x_5$.

Свободных неизвестных будет два: $x_3,\ x_4$, так как $(n - R) = 5 - 3 = 2$.

При составлении эквивалентной системы базисные неизвестные остаются в левой части уравнений, а свободные переносятся с противоположным знаком в правую часть

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_5 = -2x_3 \\ x_2 + 7x_5 = -x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 4(-x_3 - 2x_4) = -2x_3 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2x_3 + 8x_4 \\ x_2 = -x_3 - 2x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}.$$

Неизвестное $x_5 = 0$ подставляем во второе уравнение, находим x_2 и подставляем найденные x_2 и x_5 в первое уравнение. Получаем решение, в котором базисные неизвестные выражены через свободные.

Итак, *ненулевые решения системы* $X = \begin{pmatrix} 2x_3 + 8x_4 \\ -x_3 - 2x_4 \\ x_3 \\ x_4 \\ 0 \end{pmatrix}$

4.2.3. Индивидуальное задание № 2

Векторная алгебра

Вариант № 1

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{1;1;4\}$, $\vec{b} = \{0;-3;2\}$, $\vec{c} = \{2;1;-1\}$.

Требуется найти:

a) вектор $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$

b) скалярное произведение векторов $(\vec{a} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

c) векторное произведение векторов $[(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{a})]$

d) смешанное произведение векторов $([\vec{a}, \vec{b}], \vec{c})$

2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если
$A(2;-3;1)$, $B(-2;2;-4)$ и $|AC|:|CB| = 5:2$

3. Найти модули векторов $(3\vec{a} + 2\vec{b})$ и $(3\vec{a} - 2\vec{b})$, если
$|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}) = 60^0$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
$A(3;0;-3)$, $B(-8;2;0)$, $C(0;3;-4)$. Определить:

a) координаты четвертой вершины D,
в) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,
c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a} = \{1;-2;3\}$ и $\vec{b} = \{5;0;-12\}$.
Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x} \parallel \vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b}) = -9$

6. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a} = \{-3;-5;1\}$ и $\vec{b} = \{-2;6;2\}$, если $(\vec{x} \hat{\ } \vec{j}) \le \pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках
$A(1;1;1),\ B(-1;2;4),\ C(2;0;6),\ D(-2;5;1)$
найти объем пирамиды и длину ее высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{a} = \{0;2;1\}$, $\vec{b} = \{0;1;-1\}$, $\vec{c} = \{5;-3;2\}$
образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x} = \{15;-20;-1\}$ в этом базисе.

Вариант № 2

1. Даны три вектора $\vec{a} = \{1;-1;2\}$, $\vec{b} = \{2;1;1\}$, $\vec{c} = \{4;-1;5\}$.
Требуется найти:
a) вектор $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$
b) скалярное произведение векторов $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{c} + \vec{b})$
c) векторное произведение векторов $[(\vec{a} + \vec{c}) \times (\vec{b} - \vec{a})]$
d) смешанное произведение векторов $([\vec{c},\vec{a}],\vec{b})$

2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если
$A(6;1;5),\ B(-1;3;0)$ и $|AC|:|CB| = 2:1$

3. Найти модули векторов $(2\vec{a} + 3\vec{b})$ и $(2\vec{a} - 3\vec{b})$, если
$|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 1,\ (\vec{a},\hat{\ }\vec{b}) = 60^0$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
$A(1;-2;3),\ B(0;-1;2),\ C(3;-4;5)$. Определить:
a) координаты четвертой вершины D,
b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,
c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{-2;4;1\}$ и $\vec{b}=\{1;-2;7\}$.

Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=6$

6. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{-3;1;1\}$ и $\vec{b}=\{4;2;3\}$, если $(\vec{x}\,\hat{}\,\vec{k})\geq\pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках

$A(0;5;0),\ B(2;3;-4),\ C(0;0;-6),\ D(-3;1;-1)$

найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{a}=\{0;1;2\}$, $\vec{b}=\{1;0;1\}$, $\vec{c}=\{-1;2;4\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x}=\{-2;4;7\}$ в этом базисе.

Вариант № 3

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{2;1;3\}$, $\vec{b}=\{-1;0;1\}$, $\vec{c}=\{0;1;-1\}$.

Требуется найти:

a) вектор $\vec{d}=\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$

b) скалярное произведение векторов $(\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$

c) векторное произведение векторов $[(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}-\vec{a})]$

d) смешанное произведение векторов $([\vec{c},\vec{b}],\vec{a})$

2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если

$A(1;-1;6),\ B(4;5;-2)$ и $|AC|:|CB|=3:2$

3. Найти модули векторов $(\vec{a}-3\vec{b})$ и $(\vec{a}+3\vec{b})$, если

$|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ (\vec{a},\hat{}\,\vec{b})=60^0$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$A(0;-3;6),\ B(-12;-3;-3),\ C(-9;-3;-6)$. Определить:

a) координаты четвертой вершины D,

b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,

c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{5;0;-1\}$ и $\vec{b}=\{7;2;3\}$.

Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=16$

6. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{4;-2;3\}$ и $\vec{b}=\{3;-5;4\}$, если $(\vec{x}\,\hat{}\,\vec{i}\,)\le\pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках

$A(-5;6;-1),\ B(6;-5;2),\ C(6;5;1),\ D(0;0;2)$

найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{a}=\{0;3;1\}$, $\vec{b}=\{1;-2;0\}$, $\vec{c}=\{1;0;1\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x}=\{2;7;5\}$ в этом базисе.

Вариант № 4

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{-1;1;3\}$, $\vec{b}=\{1;3;1\}$, $\vec{c}=\{2;-1;-1\}$.

Требуется найти:

a) вектор $\vec{d}=2\vec{c}-\vec{a}+3\vec{b}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$

b) скалярное произведение векторов $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{b})$

c) векторное произведение векторов $[(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}-\vec{a})]$

d) смешанное произведение векторов $([\vec{b},\vec{a}],\vec{c})$

2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если

$A(-1;3;0),\ B(1;-1;5)$ и $|AC|:|CB|=3:5$

3. Найти модули векторов $(2\vec{a}+\vec{b})$ и $(2\vec{a}-\vec{b})$, если

$|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=4,\ (\vec{a},\hat{}\,\vec{b})=120^0$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$A(3;3;-1),\ B(5;5;-2),\ C(4;1;1)$. Определить:

a) координаты четвертой вершины D,

b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,

c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{-2;-3;-2\}$ и $\vec{b}=\{1;0;5\}$.

Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=-6$

6. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{3;2;-1\}$ и $\vec{b}=\{7;2;-3\}$, если $(\vec{x}\,\hat{}\,\vec{k})\ge\pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках

$A(7;2;2),\ B(5;7;7),\ C(5;3;1),\ D(2;3;7)$

найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{a}=\{0;-1;2\}$, $\vec{b}=\{2;-1;1\}$, $\vec{c}=\{1;3;0\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x}=\{6;12;-1\}$ в этом базисе.

Вариант № 5

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{5;2;3\}$, $\vec{b}=\{1;0;5\}$, $\vec{c}=\{0;5;-3\}$.

Требуется найти:

a) вектор $\vec{d}=\vec{b}-\vec{a}-2\vec{c}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$

b) скалярное произведение векторов $(\vec{c}-\vec{b})\cdot(\vec{b}+\vec{a})$

c) векторное произведение векторов $[(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}-\vec{a})]$

d) смешанное произведение векторов $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$

2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если

$A(2;2;5),\ B(-2;1;0)$ и $|AC|:|CB|=1:5$

3. Найти модули векторов $(2\vec{a}+\vec{b})$ и $(2\vec{a}-\vec{b})$, если

$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=4,\ (\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=60^0$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$A(-1;2;-3),\ B(3;4;-6),\ C(1;1;-1)$. Определить:

a) координаты четвертой вершины D,

b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,

c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{3;5;4\}$ и $\vec{b}=\{5;-9;7\}$.

Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=-4$

6. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{0;8;3\}$ и $\vec{b}=\{3;5;1\}$, если $(\vec{x}\,\hat{\ }\vec{j})\le\pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках

$A(3;5;4),\ B(8;7;4),\ C(5;10;4),\ D(4;7;8)$

найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{a}=\{3;-1;2\}$, $\vec{b}=\{-1;0;1\}$, $\vec{c}=\{0;1;5\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x}=\{8;-7;-13\}$ в этом базисе.

Вариант № 6

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{2;2;3\}$, $\vec{b}=\{1;2;3\}$, $\vec{c}=\{3;0;-2\}$.

Требуется найти:

a) вектор $\vec{d}=2\vec{c}-3\vec{b}+\vec{a}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$

b) скалярное произведение векторов $(\vec{c}+\vec{b})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

c) векторное произведение векторов $[(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}-\vec{a})]$

d) смешанное произведение векторов $([\vec{c},\vec{a}],\vec{b})$

2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если

$A(1;-2;1)$, $B(3;1;2)$ и $|AC|:|CB|=3:4$

3. Найти модули векторов $(2\vec{a}+5\vec{b})$ и $(2\vec{a}-5\vec{b})$, если

$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ (\vec{a},\hat{}\ \vec{b})=120^0$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$A(-4;-2;0)$, $B(-1;-2;4)$, $C(3;-2;1)$. Определить:

a) координаты четвертой вершины D,

b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,

c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{7;9;-2\}$ и $\vec{b}=\{5;-4;3\}$.

Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=14$

6. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{-1;2;8\}$ и $\vec{b}=\{3;7;-1\}$, если $(\vec{x}\,\hat{}\,\vec{i})\ge\pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках

$A(6;0;4)$, $B(0;6;4)$, $C(4;6;0)$, $D(0;-6;4)$

найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{a}=\{0;3;2\}$, $\vec{b}=\{2;1;-1\}$, $\vec{c}=\{1;-1;1\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x}=\{1;-4;4\}$ в этом базисе.

Вариант № 7

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{2;1;3\}$, $\vec{b}=\{-1;0;1\}$, $\vec{c}=\{0;1;-1\}$.

Требуется найти:

a) вектор $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$

b) скалярное произведение векторов $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})$

c) векторное произведение векторов $[(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}-\vec{a})]$

d) смешанное произведение векторов $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$

2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если

$A(8;6;4)$, $B(10;5;5)$ и $|AC|:|CB|=3:7$

3. Найти модули векторов $(4\vec{a}+\vec{b})$ и $(4\vec{a}-\vec{b})$, если

$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ (\vec{a},\hat{}\ \vec{b})=60^0$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$A(5;3;-1)$, $B(5;2;0)$, $C(6;4;-1)$. Определить:

a) координаты четвертой вершины D,

b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,

c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{4;2;9\}$ и $\vec{b}=\{0;-1;3\}$.

Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=-50$

6. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{8;3;-1\}$ и $\vec{b}=\{4;1;3\}$, если $(\vec{x}\,\hat{}\,\vec{i})\le\pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках

$A(6;1;5)$, $B(-1;3;0)$, $C(4;5;-2)$, $D(1;-1;6)$

найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{a}=\{0;-2;1\}$, $\vec{b}=\{4;0;1\}$, $\vec{c}=\{3;1;-1\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x}=\{0;-8;9\}$ в этом базисе.

Вариант № 8

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{2;-1;3\}$, $\vec{b}=\{1;1;-4\}$, $\vec{c}=\{4;1;-5\}$.

Требуется найти:

a) вектор $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$

b) скалярное произведение векторов $(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

c) векторное произведение векторов $[(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}-\vec{a})]$

d) смешанное произведение векторов $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$

2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если

$A(-2;1;2)$, $B(3;2;7)$ и $|AC|:|CB|=4:2$

3. Найти модули векторов $(2\vec{a}+5\vec{b})$ и $(2\vec{a}-5\vec{b})$, если

$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=120^0$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$A(-2;1;1)$, $B(2;3;-2)$, $C(0;0;3)$. Определить:

a) координаты четвертой вершины D,

b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,

c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{3;-7;10\}$ и $\vec{b}=\{4;6;1\}$.

Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=30$

6. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{4;2;-7\}$ и $\vec{b}=\{5;0;-3\}$, если $(\vec{x}\,\hat{\ }\,\vec{i})\ge\pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках

$A(1;-1;6)$, $B(4;5;-2)$, $C(-1;3;0)$, $D(1;-1;5)$

найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{a}=\{2;0;-3\}$, $\vec{b}=\{-1;2;1\}$, $\vec{c}=\{4;1;1\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x}=\{-9;5;5\}$ в этом базисе.

Вариант № 9

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{1;-1;5\}$, $\vec{b}=\{2;3;-4\}$, $\vec{c}=\{1;2;1\}$.

Требуется найти:

a) вектор $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$

b) скалярное произведение векторов $(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{b})$

c) векторное произведение векторов $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{c}-\vec{a})]$

d) смешанное произведение векторов $([\vec{c},\vec{b}],\vec{a})$

2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если
$A(6;3;5)$, $B(5;-6;3)$ и $|AC|:|CB|=3:1$

3. Найти модули векторов $(2\vec{a}+3\vec{b})$ и $(2\vec{a}-3\vec{b})$, если
$|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $(\vec{a},\hat{}\,\vec{b})=60^0$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:
$A(3;3;-1)$, $B(5;1;-2)$, $C(4;1;-3)$. Определить:

a) координаты четвертой вершины D,

b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,

c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{-1;3;4\}$ и $\vec{b}=\{2;-1;0\}$.

Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=15$

6. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{2;3;-8\}$ и $\vec{b}=\{4;1;-2\}$, если $(\vec{x}\,\hat{}\,\vec{j})\geq\pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках
$A(8;6;4)$, $B(10;5;5)$, $C(5;6;8)$, $D(8;10;7)$
найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{a}=\{2;0;1\}$, $\vec{b}=\{1;1;0\}$, $\vec{c}=\{4;1;2\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x}=\{8;0;5\}$ в этом базисе.

Вариант № 10

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{2;2;1\}$, $\vec{b}=\{1;-3;1\}$, $\vec{c}=\{-1;0;1\}$.

Требуется найти:

a) вектор $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$

b) скалярное произведение векторов $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{c})$

c) векторное произведение векторов $[(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{c})]$

d) смешанное произведение векторов $([\vec{b},\vec{a}],\vec{c})$

2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если

$A(4;4;10)$, $B(2;8;4)$ и $|AC|:|CB|=2:6$

3. Найти модули векторов $(2\vec{a}+\vec{b})$ и $(2\vec{a}-\vec{b})$, если

$|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=1$, $(\vec{a},\hat{}\,\vec{b})=120^0$

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$:

$A(-4;3;0)$, $B(0;1;3)$, $C(-2;4;-2)$. Определить:

a) координаты четвертой вершины D,

b) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB,

c) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{-2;5;3\}$ и $\vec{b}=\{7;1;-2\}$.

Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=-10$

6. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{5;1;-2\}$ и $\vec{b}=\{6;0;7\}$, если $(\vec{x}\,\hat{}\,\vec{k})\le\pi/2$.

7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках

$A(7;7;3)$, $B(6;5;8)$, $C(3;5;8)$, $D(8;4;1)$

найти объем и длину высоты, опущенной на грань ABC.

8. Доказать, что векторы $\vec{a}=\{0;1;1\}$, $\vec{b}=\{2;-1;4\}$, $\vec{c}=\{1;0;2\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x}=\{3;-3;4\}$ в этом базисе.

Вариант № 11

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{4;2;-1\}$, $\vec{b}=\{5;3;-2\}$, $\vec{c}=\{3;2;-1\}$.
Найдите:
а) вектор $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
б) скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a})$;
в) векторное произведение $[\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a}]$;
г) смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB, если $A(1;1;1)$, $B(4;5;-3)$ и $|AB|:|CB|=5:2$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=30^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
$A(-3;5;6)$, $B(1;-5;7)$, $C(6;-7;2)$.
Найдите:
а) координаты четвёртой вершины D;
б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB;
в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{2;3;-1\}$ и $\vec{b}=\{5;0;-12\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=5$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{3;-4;4\}$ и $\vec{b}=\{-1;1;2\}$, образует с осью Oy острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}|=14\sqrt{5}$.

7. Даны вершины пирамиды $A(0;0;0)$, $B(2;0;1)$, $C(3;1;2)$, $D(0;1;3)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC.

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы $\overline{e}_1=\{4;2;-1\}$, $\overline{e}_2=\{5;3;-2\}$, $\overline{e}_3=\{3;2;-1\}$, $\overline{x}=\{12;7;-4\}$.
а) Докажите, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ можно принять за новый базис;
б) Найдите координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

Вариант № 12

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{-3;1;0\}$, $\vec{b}=\{1;-2;3\}$, $\vec{c}=\{-2;1;-1\}$.

Найдите:

а) вектор $\vec{d}=-3\vec{a}-2\vec{b}+7\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;

б) скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a})$;

в) векторное произведение $[\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a}]$;

г) смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB, если $A(0;-1;2)$, $B(2;1;-3)$ и $|AB|:|CB|=2:3$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p}=\vec{a}-3\vec{b}$ и $\vec{q}=5\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$ $A(3;1;4)$, $B(-1;6;1)$, $C(-1;1;6)$.

Найдите:

а) координаты четвёртой вершины D;

б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB;

в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{4;-4;-3\}$ и $\vec{b}=\{3;2;-4\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{b}$ и $(\vec{x},\vec{a})=3$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{3;5;3\}$ и $\vec{b}=\{-6;-1;4\}$, образует с осью Oz тупой угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}|=2$.

7. Даны вершины пирамиды $A(-1;1;1)$, $B(2;3;2)$, $C(-1;1;3)$, $D(3;2;4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC.

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\bar{e}_1=\{5;3;5\}$, $\bar{e}_2=\{2;0;3\}$, $\bar{e}_3=\{0;1;-1\}$, $\bar{x}=\{9;6;8\}$.

а) Докажите, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ можно принять за новый базис;

б) Найдите координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Вариант № 13

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{-1;0;5\}$, $\vec{b}=\{1;1;3\}$, $\vec{c}=\{2;-2;4\}$.
Найдите:
а) вектор $\vec{d}=-\vec{a}+2\vec{b}+2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
б) скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a})$;
в) векторное произведение $[\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a}]$;
г) смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если $A(1;4;1)$, $B(-1;1;3)$ и $|AB|:|CB|=2:5$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p}=\vec{a}-2\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}+2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=5\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=135^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
$A(-1;2;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;-3;-1)$.
Найдите:
а) координаты четвёртой вершины D;
б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB;
в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{1;-3;4\}$ и $\vec{b}=\{-3;5;1\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=4$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{-1;3;-2\}$ и $\vec{b}=\{4;2;1\}$, образует с осью Oz острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}|=\sqrt{6}$.

7. Даны вершины пирамиды $A(1;0;-1)$, $B(4;2;0)$, $C(1;0;1)$, $D(5;1;2)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC.

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\overline{e}_1=\{3;2;1\}$, $\overline{e}_2=\{2;3;1\}$, $\overline{e}_3=\{-1;-3;-1\}$, $\overline{x}=\{2;1;1\}$.
а) Докажите, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ можно принять за новый базис;
б) Найдите координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$.

Вариант № 14

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{1;1;3\}$, $\vec{b}=\{-1;0;3\}$, $\vec{c}=\{2;1;2\}$.
Найдите:
а) вектор $\vec{d}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
б) скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a})$;
в) векторное произведение $[\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a}]$;
г) смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB, если $A(1;2;-1)$, $B(3;-3;2)$ и $|AB|:|CB|=3:2$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p}=-2\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}-3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=120^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
$A(3;-1;-1)$, $B(1;2;-7)$, $C(-5;14;-3)$.
Найдите:
а) координаты четвёртой вершины D;
б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB;
в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{3;4;-3\}$ и $\vec{b}=\{4;-5;-3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{b}$ и $(\vec{x},\vec{a})=8$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{1;3;6\}$ и $\vec{b}=\{5;3;-2\}$, образует с осью Oy тупой угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}|=3$.

7. Даны вершины пирамиды $A(1;1;1)$, $B(4;3;2)$, $C(1;1;3)$, $D(5;2;4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC.

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\overline{e}_1=\{1;2;3\}$, $\overline{e}_2=\{2;3;1\}$, $\overline{e}_3=\{1;1;-3\}$, $\overline{x}=\{2;4;1\}$.
а) Докажите, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ можно принять за новый базис;
б) Найдите координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$

Вариант № 15

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{2;3;-1\}$, $\vec{b}=\{4;5;-2\}$, $\vec{c}=\{-1;0;7\}$.
Найдите:
а) вектор $\vec{d}=2\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
б) скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a})$;
в) векторное произведение $[\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a}]$;
г) смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB, если $A(3;1;1)$, $B(2;-1;3)$ и $|AB|:|CB|=4:3$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p}=-2\vec{a}+5\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}+\vec{b}$, если $|\vec{a}|=\sqrt{3}$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=150^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
$A(2;-1;-3)$, $B(5;2;-7)$, $C(-7;11;6)$.
Найдите:
а) координаты четвёртой вершины D;
б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB;
в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{4;1;-2\}$ и $\vec{b}=\{-6;7;7\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=2$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{9;3;0\}$ и $\vec{b}=\{4;-1;-2\}$, образует с осью Ox острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}|=2$.

7. Даны вершины пирамиды $A(0;2;1)$, $B(1;-1;3)$, $C(3;-2;0)$, $D(2;-3;4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC.

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\overline{e}_1=\{9;3;0\}$, $\overline{e}_2=\{2;0;3\}$, $\overline{e}_3=\{0;1;-1\}$, $\overline{x}=\{-11;-7;1\}$.
а) Докажите, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ можно принять за новый базис;
б) Найдите координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$

Вариант № 16

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{4;0;5\}$, $\vec{b}=\{1;2;-3\}$, $\vec{c}=\{0;2;1\}$.
Найдите:
а) вектор $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}-\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
б) скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a})$;
в) векторное произведение $[\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a}]$;
г) смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB, если $A(0;1;3)$, $B(-2;2;4)$ и $|AB|:|CB|=3:4$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p}=3\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=60^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
$A(3;-2;0)$, $B(2;-3;-1)$, $C(-5;0;-1)$.
Найдите:
а) координаты четвёртой вершины D;
б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB;
в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{2;4;3\}$ и $\vec{b}=\{1;3;0\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=-4$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{5;-3;6\}$ и $\vec{b}=\{1;0;7\}$, образует с осью Ox острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}|=1$.

7. Даны вершины пирамиды $A(-1;2;-3)$, $B(4;-1;0)$, $C(2;1;-2)$, $D(-7;0;-1)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC.

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\bar{e}_1=\{5;1;0\}$, $\bar{e}_2=\{2;-1;3\}$, $\bar{e}_3=\{1;0;-1\}$, $\bar{x}=\{13;2;7\}$.
а) Докажите, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ можно принять за новый базис;
б) Найдите координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Вариант № 17

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{1;-2;-3\}$, $\vec{b}=\{1;-5;-4\}$, $\vec{c}=\{-3;-1;2\}$.
Найдите:
а) вектор $\vec{d}=4\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
б) скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a})$;
в) векторное произведение $[\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a}]$;
г) смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB, если $A(-1;4;3)$, $B(0;2;0)$ и $|AB|:|CB|=1:2$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p}=\vec{a}+2\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-2\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=4$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=120^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
$A(-3;3;1)$, $B(-1;3;-1)$, $C(-2;7;-2)$.
Найдите:
а) координаты четвёртой вершины D;
б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB;
в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{2;5;1\}$ и $\vec{b}=\{1;2;-3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=-3$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{0;-1;-2\}$ и $\vec{b}=\{2;0;6\}$, образует с осью Ox тупой угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}|=\sqrt{7}$.

7. Даны вершины пирамиды $A(0;0;1)$, $B(2;3;5)$, $C(6;2;3)$, $D(3;7;2)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC.

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\bar{e}_1=\{1;0;1\}$, $\bar{e}_2=\{1;-2;0\}$, $\bar{e}_3=\{0;3;1\}$, $\bar{x}=\{2;7;5\}$.
а) Докажите, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ можно принять за новый базис;
б) Найдите координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

Вариант № 18

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{1;2;3\}$, $\vec{b}=\{-1;0;4\}$, $\vec{c}=\{-2;0;-1\}$.
Найдите:
а) вектор $\vec{d}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
б) скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a})$;
в) векторное произведение $[\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a}]$;
г) смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB, если $A(0;-3;5)$, $B(2;4;-2)$ и $|AB|:|CB|=3:2$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p}=-\vec{a}+4\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}-4\vec{b}$, если $|\vec{a}|=\sqrt{6}$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=30^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
$A(5;-1;1)$, $B(2;-3;-1)$, $C(-2;2;1)$.
Найдите:
а) координаты четвёртой вершины D;
б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB;
в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{3;-1;5\}$ и $\vec{b}=\{1;2;-3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=14$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{0;-3;-2\}$ и $\vec{b}=\{2;0;3\}$, образует с осью Oy острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}|=6$.

7. Даны вершины пирамиды $A(1;5;-7)$, $B(-3;6;3)$, $C(-2;7;3)$, $D(1;-1;2)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC.

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\bar{e}_1=\{1;0;2\}$, $\bar{e}_2=\{0;1;1\}$, $\bar{e}_3=\{2;-1;4\}$, $\bar{x}=\{3;-3;4\}$.
а) Докажите, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ можно принять за новый базис;
б) Найдите координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

Вариант № 19

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{0;1;-1\}$, $\vec{b}=\{2;-3;-1\}$, $\vec{c}=\{2;5;3\}$.
Найдите:
а) вектор $\vec{d}=3\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
б) скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a})$;
в) векторное произведение $[\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a}]$;
г) смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB, если $A(-2;3;1)$, $B(5;-2;-4)$ и $|AB|:|CB|=5:3$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p}=5\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{q}=\vec{a}+3\vec{b}$, если $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=3$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=45^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
$A(2;3;-7)$, $B(1;8;-6)$, $C(2;6;-7)$.
Найдите:
а) координаты четвёртой вершины D;
б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB;
в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{2;3;-1\}$ и $\vec{b}=\{1;-2;3\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=-14$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{-3;1;-1\}$ и $\vec{b}=\{-1;0;2\}$, образует с осью Oz острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}|=\sqrt{6}$.

7. Даны вершины пирамиды $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-1;2;4)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC.

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\overline{e}_1=\{2;1;0\}$, $\overline{e}_2=\{1;-1;2\}$, $\overline{e}_3=\{2;2;-1\}$, $\overline{x}=\{3;7;-7\}$.
а) Докажите, что векторы $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ можно принять за новый базис;
б) Найдите координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$

Вариант № 20

1. Даны три вектора $\vec{a}=\{2;-2;3\}$, $\vec{b}=\{-1;3;-4\}$, $\vec{c}=\{5;0;1\}$.
Найдите:
а) вектор $\vec{d}=\vec{a}-3\vec{b}-2\vec{c}$, его модуль, направляющие косинусы, орт $\vec{d}_0$;
б) скалярное произведение $(\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a})$;
в) векторное произведение $[\vec{a}+\vec{c},\vec{b}-\vec{a}]$;
г) смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

2. Определите координаты точки C на отрезке AB, если $A(-1;2;3)$, $B(1;0;6)$ и $|AB|:|CB|=3:5$.

3. Найдите модули векторов $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{q}=3\vec{a}+5\vec{b}$, если $|\vec{a}|=3\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=2$, $(\vec{a},\hat{\ }\vec{b})=135^\circ$.

4. Даны три вершины параллелограмма $ABCD$
$A(2;3;-7)$, $B(1;8;-6)$, $C(2;6;-7)$.
Найдите:
а) координаты четвёртой вершины D;
б) длину высоты, опущенной из вершины D на сторону AB;
в) косинус острого угла между диагоналями AC и BD.

5. Даны векторы $\vec{a}=\{0;2;3\}$ и $\vec{b}=\{-12;0;5\}$. Найдите вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel\vec{a}$ и $(\vec{x},\vec{b})=3$.

6. Вектор $\vec{x}$, перпендикулярный векторам $\vec{a}=\{-1;1;-1\}$ и $\vec{b}=\{1;2;1\}$, образует с осью Ox острый угол. Найдите его координаты, если известно, что $|\vec{x}|=\sqrt{2}$.

7. Даны вершины пирамиды $A(1;-5;4)$, $B(0;-3;1)$, $C(-2;-4;3)$, $D(4;4;-2)$. Найдите объём пирамиды и длину её высоты, опущенной на грань ABC.

8. Относительно некоторого базиса заданы векторы: $\bar{e}_1=\{0;1;5\}$, $\bar{e}_2=\{3;-1;2\}$, $\bar{e}_3=\{-1;0;1\}$, $\bar{x}=\{8;-7;13\}$.
а) Докажите, что векторы $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$ можно принять за новый базис;
б) Найдите координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$

4.2.4. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 2

Векторная алгебра

Задача 1. Даны три вектора
$\vec{a}=\{0;-1;3\}$, $\vec{b}=\{3;-2;1\}$, $\vec{c}=\{4;0;-4\}$.

Требуется найти:

a) вектор $\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$, его модуль и направляющие косинусы, записать орт вектора $\vec{d}^{\,0}$

b) скалярное произведение векторов $(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})$

c) векторное произведение векторов $[(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}-\vec{a})]$

d) смешанное произведение векторов $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$

Р е ш е н и е

a) По правилам выполнения арифметических операций над векторами

$$\vec{d}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}=2\{0;-1;3\}-\{3;-2;1\}+3\{4;0;-4\}=\{9;0;-7\}$$

Координаты орта вектора равны отношению координат данного вектора к его модулю.

$$|\vec{d}|=\sqrt{0^2+0^2+(-7)^2}=\sqrt{130}\Rightarrow\vec{d}^{\,0}=\left\{\frac{9}{\sqrt{130}};0;-\frac{7}{\sqrt{130}}\right\}$$

b) Сначала выполним операцию сложения векторов, а затем скалярное умножение (сумма произведений одноименных координат)

$$\vec{a}+\vec{c}=\{0;-1;3\}+\{4;0;-4\}=\{4;-1;-1\}$$

$$\vec{b}-\vec{a}=\{3;-2;1\}-\{0;-1;3\}=\{3;-1;-2\}$$

$$(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{a})=\{4;-1;-1\}\cdot\{3;-1;-2\}=4\cdot3+(-1)\cdot(-1)+(-1)\cdot(-2)=$$
$$=12+1+2=15.$$

c) векторное произведение векторов находится по правилу

$$[(\vec{a}+\vec{c})\times(\vec{b}-\vec{a})]=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\4&-1&-1\\3&-1&-2\end{vmatrix}=1\cdot\vec{i}-5\cdot\vec{j}-1\cdot\vec{k}=\{1;-5;-1\}$$

(определитель раскладываем по элементам первой строки).

d) Произведение векторов, обозначаемое символом $([\vec{a},\vec{b}],\vec{c})$, есть векторно-скалярное, т.е. смешанное произведение 3-х векторов. Оно вычисляется по правилу

$$([\vec{a},\vec{b}],\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0\cdot 8 - 1\cdot 16 + 3\cdot 8 = 8.$$

Задача 2. Определить координаты точки C на отрезке AB, если $A(-2;2;4)$, $B(5;-3;-1)$ и $|AC|:|CB| = 4:3$.

Р е ш е н и е

Обозначим координаты точки $C(x_c;y_c;z_c)$ и составим два вектора

$\overleftarrow{AB} = \{7;-5;-5\}$, $\overleftarrow{CB} = \{5-x_c;-3-y_c;-1-z_c\}$.

Координаты этих векторов находятся как разность соответствующих координат конечной и начальной точек.

Так как все точки лежат на одной прямой, то составленные векторы являются коллинеарными и, согласно известному отношению, в котором точка делит отрезок

$$\overleftarrow{CB} = \frac{3}{7}\overleftarrow{AB} \Rightarrow \quad \{5-x_c;-3-y_c;-1-z_c\} = \frac{3}{7}\{7;-5;-5\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 5-x_c = 3 \\ -3-y_c = \dfrac{-15}{7} \\ -1-z_c = \dfrac{-15}{7} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c = 2 \\ y_c = \dfrac{6}{7} \\ z_c = \dfrac{-8}{7} \end{cases} \Rightarrow \qquad C\left(2;\frac{6}{7};\frac{-8}{7}\right).$$

Задача 3. Найти модули векторов $(2\vec{a}+3\vec{b})$ и $(2\vec{a}-3\vec{b})$, если $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a},\hat{}\,\vec{b}) = 120^0$

Р е ш е н и е

Так как координаты векторов не даны, для нахождения длин воспользуемся общей формулой длины вектора $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$

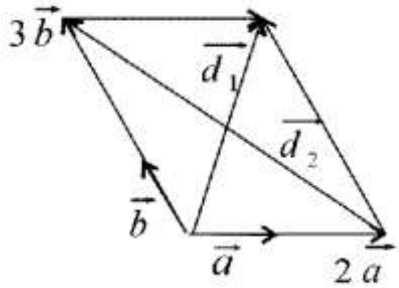
Так как

$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 25$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 9$, $(\vec{a}\vec{b}) = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 120^0 = 5\cdot 3\cdot(-\frac{1}{2}) = -\frac{15}{2}$, то

$$|2\vec{a}+3\vec{b}| = \sqrt{(2\vec{a}+3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^2 + 12(\vec{a}\vec{b}) + 9\vec{b}^2} = \sqrt{100-90+81} = \sqrt{91}$$

$$|2\vec{a}-3\vec{b}|=\sqrt{(2\vec{a}-3\vec{b})^2}=\sqrt{4\vec{a}^2-12(\vec{a}\vec{b})+9\vec{b}^2}=\sqrt{100+90+81}=\sqrt{271}$$

З а м е ч а н и е. Если на векторах $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$ построить параллелограмм, то вектора $\vec{d}_1=2\vec{a}+3\vec{b}$ и $\vec{d}_2=2\vec{a}-3\vec{b}$ будут являться его диагоналями, а модули векторов $|2\vec{a}+3\vec{b}|$ и $|2\vec{a}-3\vec{b}|$ будут являться длинами диагоналей параллелограмма.

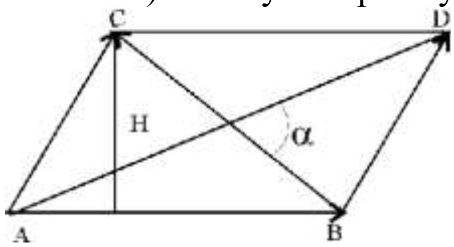


Задача 4. Даны три вершины параллелограмма $ABDC$: $A(-3;1;-4)$, $B(-2;4;3)$, $D(0;3;-4)$. Определить:

a) координаты четвертой вершины D,

b) длину высоты, опущенной из вершины C на сторону AB,

c) косинус острого угла между диагоналями AD и BC.



Р е ш е н и е

a) Координаты вершины C можно найти из условия равенства векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$. Как известно, равные векторы имеют одинаковые координаты. Координаты вектора $\overrightarrow{BD}=\{2;-1;-7\}$. Координаты вектора $\overrightarrow{AC}=\{x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A\}=\{x_C+3;y_C-1;z_C+4\}$

Таким образом,: $\{x_C+3;y_C-1;z_C+4\}=\{2;-1;-7\}\Rightarrow C(-1;0;-11)$.

b) длину высоты найдем через площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=\{1;3;7\}$ и $\overrightarrow{AC}=\{2;-1;-7\}$;

с одной стороны

$$S_{\text{паралл.}}=|[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]|=\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 3 & 7\\ 2 & -1 & -7\end{matrix}\right\|=|\{-14;21;-7\}|=7\cdot|\{-2;3;-1\}|=7\sqrt{4+9+1}=7\sqrt{14}.$$

С другой стороны $S_{\text{паралл}}=|AB|\cdot H=H\cdot\sqrt{1+9+49}=H\cdot\sqrt{59}$.

Таким образом: $h\cdot\sqrt{59}=7\sqrt{14}\;\Rightarrow\; H=\dfrac{7\sqrt{14}}{\sqrt{59}}$.

с) Для нахождения косинуса угла между диагоналями воспользуемся формулой косинуса угла между векторами $\overleftarrow{AD}$ и $\overleftarrow{BC}$

$\overleftarrow{AD}=\{3;2;0\}$, $\overleftarrow{BC}=\{1;-4;-14\}$, $|\overleftarrow{AD}|=\sqrt{13}$, $|\overleftarrow{BC}|=\sqrt{213}$,

Скалярное произведение векторов диагоналей $(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC})=3\cdot 1+2\cdot(-4)+0\cdot(-14)=3-8=-5$

$$\cos\alpha=\pm\frac{(\overleftarrow{AD}\cdot\overleftarrow{BC})}{|\overleftarrow{AD}||\overleftarrow{BC}|}\pm\frac{-5}{\sqrt{13}\sqrt{213}}.$$

Так как требуется определить косинус острого угла (косинус острого угла больше нуля), то $\cos\alpha=\dfrac{5}{\sqrt{13}\sqrt{213}}$

Задача 5. Даны векторы $\vec{a}=\{5;2;-3\}$ и $\vec{b}=\{3;0;-4\}$.

Найти вектор $\vec{x}$, если известно, что $\vec{x}\parallel a$ и $(\vec{x},\vec{b})=9$.

Р е ш е н и е

Из условия $\vec{x}\parallel\vec{a}$ следует,что

$$\vec{x}=k\vec{a}=k\{5;2;-3\}=\{5k;2k;-3k\}.$$

Из условия $(\vec{x},\vec{b})=9$ следует, что

$\{5k;2k;-3k\}\cdot\{3;0;-4\}=9\Rightarrow`15k+0+12k=9\Rightarrow 27k=9\Rightarrow k=3.$

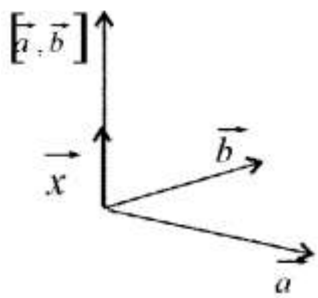
Таким образом: $\vec{x}=3\{5;2;-3\}=\{15;6;-9\}$.

Задача 6. Найти единичный вектор $\vec{x}$, который одновременно перпендикулярен векторам $\vec{a}=\{-1;5;3\}$ и $\vec{b}=\{4;-2;2\}$, если $(\vec{x}\,\hat{}\,\vec{j})>90^0$.

Р е ш е н и е

$$\begin{cases}\vec{x}\perp\vec{a}=\{-1;5;3\}\\ \vec{x}\perp\vec{b}=\{4;-2;2\}\end{cases}\Rightarrow\vec{x}=k[\vec{a},\vec{b}]=$$

$$=k\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 5 & 3\\ 4 & -2 & 2\end{vmatrix}=\{15k;14k;-18k\}.$$



Вектор $\vec{x}$ по условию единичный, т.е.

$$|\vec{x}|=\sqrt{225k^2+196k^2+324k^2}=\pm\sqrt{745}k\approx\pm 27k=1\Rightarrow k_{1,2}=\pm\frac{1}{27}.$$

Получаем два варианта ответа

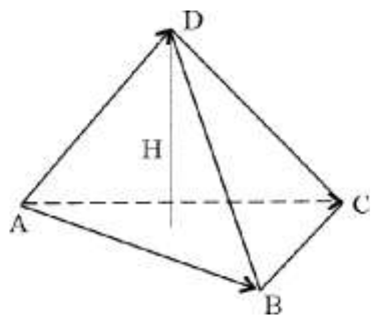
$$\vec{x}_1 = \{15k_1;14k_1;-18k_1\} = \left\{\frac{15}{27};\frac{14}{27};-\frac{18}{27}\right\},$$

$$\vec{x}_2 = \{15k_2;14k_2;-18k_2\} = \left\{-\frac{15}{27};-\frac{14}{27};\frac{18}{27}\right\}.$$

Согласно последнему условию $(\vec{x} \wedge \vec{j}) > 90^0$, которое означает, что угол между искомым вектором и осью OY тупой, то есть вторая координата вектора должна быть отрицательной, поэтому окончательным вариантом ответа есть вектор

$$\vec{x} = \left\{-\frac{15}{27};-\frac{14}{27};\frac{18}{27}\right\}.$$

Задача 7. В пирамиде $ABCD$ с вершинами в точках
$A(-3;2;-1),\ B(1;-2;4),\ C(4;1;-3),\ D(-3;4;1)$



найти объем пирамиды и длину ее высоты, опущенной на грань ABC.

Решение

Найдем векторы трех ребер пирамиды

$$\overleftarrow{AB} = \{4;-4;5\},\ \overleftarrow{AC} = \{7;-1;-2\},$$

$$\overleftarrow{AD} = \{0;2;2\}$$

Объем пирамиды можно найти как шестая часть модуля смешанного произведения векторов ее сторон

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 4 & -4 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6}|8+56+60| = \frac{124}{6} = \frac{62}{3}$$

Длину высоты пирамиды, опущенной на грань ABC, можно найти через полученное значение объема.

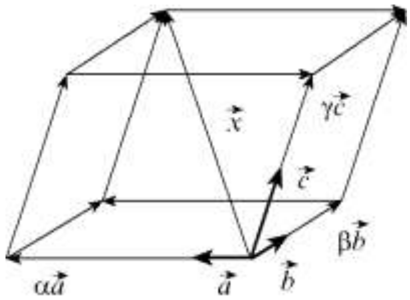
Зная, что $V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot H$, имеем $\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot H = \frac{62}{3}$.

Площадь основания найдем с помощью векторного произведения

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -4 & 5 \\ 7 & -1 & -2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}|\{13;43;24\}| = \frac{\sqrt{2594}}{2} \approx 25{,}5.$$

Таким образом: $\frac{1}{3}\cdot 25{,}5\cdot H=\frac{62}{3}\quad\Rightarrow\quad H=\frac{62}{25{,}5}\approx 2{,}4.$

Задача 8. Доказать, что векторы $\vec{a}=\{4;–2;1\}$, $\vec{b}=\{2;–1;1\}$, $\vec{c}=\{3;–3;–2\}$ образуют базис и найти разложение вектора $\vec{x}=\{5;–4;–3\}$ в этом базисе.



Р е ш е н и е

Для того, чтобы доказать, что три вектора в пространстве образуют базис, достаточно установить, что они некомпланарны, т.е. их смешанное произведение не равно нулю. Проверим это

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix}4 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 3 & -3 & -2\end{vmatrix}=20-14-3=3\neq 0.$$

Таким образом, вектор $\vec{x}$ можно разложить в этом базисе

$\vec{x}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\Rightarrow\{5;–4;–3\}=\alpha\{4;–2;1\}+\beta\{2;–1;1\}+\gamma\{3;–3;–2\}$.

Уравнивая одноименные координаты векторов, получаем систему уравнений для нахождения коэффициентов разложения

$\begin{cases}5=4\alpha+2\beta+3\gamma\\ -4=-2\alpha-\beta-3\gamma\\ -3=\alpha+\beta-2\gamma\end{cases}\Rightarrow$ Решаем систему методом Гаусса (или другими методами)

$$\begin{pmatrix}4 & 2 & 3 & 5\\ -2 & -1 & -3 & -4\\ 1 & 1 & -2 & -3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\ -2 & -1 & -3 & -4\\ 4 & 2 & 3 & 5\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -7 & -10\\ 0 & -2 & 11 & 17\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -7 & -10\\ 0 & 0 & -3 & -3\end{pmatrix}$$

Эквивалентная система и ее решение

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 2\gamma = -3 \\ \beta - 7\gamma = -10 \\ -3\gamma = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -3 - \beta + 2\gamma \\ \beta = -10 + 7\gamma \\ \gamma = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -3 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Подставляем полученные знвчения в выражение $\vec{x} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$

$$\vec{x} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$$

4.2.5. Индивидуальное задание № 3

Аналитическая геометрия на плоскости

Вариант № 1

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-3;2)$

a) параллельно прямой $2x + 5y + 4 = 0$;

b) перпендикулярно прямой $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+3}{-1}$;

c) под углом 45° к прямой $y - 2 = 0$;

d) через две точки: $A(-3;2)$ и $B(7;-5)$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

2. Даны две прямые $l_1 : y = 2x - 4,\quad l_2 : \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = -2t + 4 \end{cases}$

Найти: a) точку пересечения прямых,

b) косинус угла между прямыми,

c) расстояния от точки $M(6;-4)$ до прямой l_1 и до прямой l_2.

3. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$ 2) $4x^2 + 8x + y^2 - 4y - 1 = 0$

3) $y = 9 + \sqrt{x^2 + 9}$ 4) $x = 5y - y^2$

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = \cos(\varphi - \pi/4)$, 2) $\rho = 3 + 2\varphi$.

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = e^{-t} \end{cases}$

6. Построить фигуры, заданные неравенствами

$$1)\ \begin{cases} y \le 1 - x^2, \\ x + y \ge 1. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} 2x - y \ge -4, \\ 2x - 5y \le 10 \\ x \le 7. \end{cases}$$

Вариант № 2

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(5;-4)$

a) параллельно прямой $\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -4 \end{cases}$

b) перпендикулярно прямой $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 1$;

c) под углом 45^o к прямой $x + 3 = 0$;

d) через две точки: $A(5;-4)$ и $B(-3;7)$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

2. Даны две прямые $l_1:\ 6x + 8y + 6 = 0$, $l_2:\ \begin{cases} x = 3t - 5 \\ y = -4t - 4 \end{cases}$

Найти: a) точку пересечения прямых,

b) косинус угла между прямыми,

c) расстояния от точки $M(1;-5)$ до прямой l_1 и до прямой l_2.

3. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 9 = 0$ 2) $x^2 + 2x + 2y^2 - 4y - 5 = 0$

3) $x^2 - 9y^2 = 36y$ 4) $x = 3 + 2\sqrt{1 - y}$

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = \varphi^2$, 2) $\rho = 6\cos\varphi$.

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

$$1)\ \begin{cases} x = 5\cos t \\ y = -4 \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x = 1 - \sin 2t \\ y = 2 + \cos 2t \end{cases}$$

6. Построить фигуру, заданную неравенствами

$$1)\ \begin{cases} x \le 5 - y^2, \\ x + 4y \ge 0. \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} -x + y \le 3, \\ 5x + 3y \le 97 \\ x + 7y \ge 77. \end{cases}$$

Вариант № 3

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-1;2)$

a) параллельно прямой $\frac{x}{10}-\frac{y}{2}=1$;

b) перпендикулярно прямой $\frac{x+6}{2}=\frac{y-4}{5}$;

c) под углом 45° к прямой $y-x=0$;

d) через две точки: $A(-1;2)$ и $B(5;-3)$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

2. Даны две прямые $l_1:\ 2x-3y=8,\quad l_2:\ \begin{cases} x=-6t-8 \\ y=9t+5 \end{cases}$

Найти: a) точку пересечения прямых,

b) косинус угла между прямыми,

c) расстояния от точки $M(4;-2)$ до прямой l_1 и до прямой l_2.

3. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $6x^2+4y^2-12x=0$ 2) $x^2+8x-y^2-4y+3=0$

3) $y=1+\sqrt{9-x^2}$ 4) $x=2y^2-2y+3$

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho=1-\cos\varphi$, 2) $\rho=2\sin\varphi$.

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=3 \\ y=2\sin^2 t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=2t+1 \\ y=1-t^2 \end{cases}$

6. Построить фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} \frac{3}{2x}\le y\le \frac{3}{2}\sqrt{x}, \\ x\le 9. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+4y\le 53, \\ x-y\le 3 \\ 7x+3y\ge 71. \end{cases}$

Вариант № 4

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(4;-7)$

a) параллельно прямой $x = 4t + 7;\ y = 3t - 1$;

b) перпендикулярно прямой $y = 6x + 8$;

c) под углом 45° к прямой $y + x = 0$;

d) через две точки: $A(4;-7)$ и $B(0;3)$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

2. Даны две прямые $l_1: \dfrac{x}{3} + y = 1, \quad l_2: \begin{cases} x = t - 1 \\ y = -3t - 4 \end{cases}$

Найти: a) точку пересечения прямых,

b) косинус угла между прямыми,

c) расстояния от точки $M(5;-3)$ до прямой l_1 и до прямой l_2.

3. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $3x^2 + 4y^2 + 16y = 36$ 2) $x^2 + y^2 = 4x$

3) $x = 5 - \sqrt{y^2 + 4}$ 4) $x^2 + 10x + 8y + 41 = 0$

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = \sin 3\varphi$, 2) $\rho = \dfrac{1}{\varphi}$.

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 2(t + \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t + 3 \end{cases}$

6. Построить фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 12, \\ x\sqrt{6} \ge y^2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y \ge 9, \\ 2x + 8y \le 50 \\ -x + 4y \ge 49. \end{cases}$

Вариант № 5

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(4;-3)$

a) параллельно прямой $2y-7x=8$;

b) перпендикулярно прямой $\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1$;

c) под углом 45^o к прямой $y=-3$;

d) через две точки: $A(4;-3)$ и $B(-2;-1)$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

2. Даны две прямые $l_1:\ y=5x+6,\quad l_2:\ \frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{1}$.

Найти: a) точку пересечения прямых,

b) косинус острого угла между прямыми,

c) расстояния от точки $M(-4;3)$ до прямой l_1 и до прямой l_2.

3. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2+y^2-2x-3y=0$ 2) $16y^2-9x^2-32y-72x=272$

3) $y=2+4\sqrt{1-x^2}$ 4) $2x=8-y^2$

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho=\dfrac{1}{\sin\varphi+\cos\varphi}$, 2) $\rho=-5\cos\varphi$.

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=3\sin t+2\cos t \\ y=3\cos t+2\sin t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=2t \end{cases}$

6. Построить фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} x^2+y^2\le 6y, \\ y\ge x,\quad y\ge -x. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x-5y\ge 17, \\ x+2y\le 34 \\ -4x+9y\ge 17. \end{cases}$

Вариант № 6

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-2;4)$

a) параллельно прямой $3x+8y=12$;

b) перпендикулярно прямой $x=5t-1;\ y=6t+3$;

c) под углом 45^o к прямой $x+5=0$;

d) через две точки: $A(-2;4)$ и $B(-3;1)$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

2. Даны две прямые $l_1:\ 7x-2y+51=0,\quad l_2:\ \begin{cases} x=7t+2 \\ y=6-2t \end{cases}$

Найти: a) точку пересечения прямых,

b) косинус угла между прямыми,

c) расстояния от точки $M(-5;-2)$ до прямой l_1 и до прямой l_2.

3. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2+y^2-5x+6y=0$ 2) $2x^2-12x+5y^2+10y+13=0$

3) $y=2-\sqrt{3x-7}$ 4) $9x^2-36x=16y^2$

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho=\cos(\varphi-\pi/3)$, 2) $\rho=\dfrac{5}{\sin\varphi}$.

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=2\cos^2 t \\ y=5\sin^2 t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=\sin(t/2) \\ y=\cos t \end{cases}$

6. Построить фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} y^2\le 2x, \\ y+x\ge 4. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -3x+14y\le 78, \\ 5x-6y\le 26 \\ x+4y\ge 26. \end{cases}$

Вариант № 7

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-3;-1)$

a) параллельно прямой $y = 4x - 6$;

b) перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{7} = \dfrac{y+3}{-2}$;

c) под углом 45^o к прямой $y = x$;

d) через две точки: $A(-3;-1)$ и $B(-2;2)$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

2. Даны две прямые $l_1: 3x + 4y + 2 = 0$, $l_2: \dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y+2}{3}$.

Найти: a) точку пересечения прямых,

b) косинус острого угла между прямыми,

c) расстояния от точки $M(7;-5)$ до прямой l_1 и до прямой l_2.

3. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ 2) $16x^2 + 32x + 25y^2 - 100y + 16 = 0$

3) $y = 4 - 3\sqrt{x+5}$ 4) $x^2 = 2y^2 + 8x + 1$

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho = 4(1 - \sin\varphi)$, 2) $\rho = -3\varphi$.

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x = 2 \\ y = -7\sin t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = \sqrt{t+1} \\ y = 2t \end{cases}$

6. Построить фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} x \ge y^2, \\ y^2 \le 2 - x, \\ y \ge 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 11x - 3y \ge 24, \\ 9x + 4y \le 110, \\ -2x + 7y \ge 15. \end{cases}$

Вариант № 8

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(2;6)$

a) параллельно прямой $\frac{x+4}{-6}=\frac{y-8}{5}$;

b) перпендикулярно прямой $4x+y+10=0$;

c) под углом 45° к прямой $y=2x$;

d) через две точки: $A(2;6)$ и $B(-5;4)$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

2. Даны две прямые $l_1:\ x-3y=0,\quad l_2:\ \begin{cases} x=3t \\ y=-9t+10 \end{cases}$

Найти: a) точку пересечения прямых,
b) косинус угла между прямыми,
c) расстояния от точки $M(-4;-6)$ до прямой l_1 и до прямой l_2.

3. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $3x^2-4y^2-12x+24=0$ 2) $6x^2+4y^2-6y+9=0$

3) $y=-3+\sqrt{16-x^2}$ 4) $y=3+4\sqrt{x+1}$

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho=\frac{2}{\cos\varphi}$, 2) $\rho=4(1+\cos\varphi)$.

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=2\cos^3 t \\ y=2\sin^3 t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=3t \\ y=\sqrt{1-t} \end{cases}$

6. Построить фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} x^2+y^2\le 8x, \\ -x\le y\le x. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} -4x+5y\le 29, \\ 3x-y\le 14 \\ 5x+2y\ge 38. \end{cases}$

Вариант № 9

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(-3;-7)$

a) параллельно прямой $x=2t+8;\ \ y=-3t+4$;

b) перпендикулярно прямой $y=3x-5$;

c) под углом 45° к прямой $x=2y$;

d) через две точки: $A(-3;-7)$ и $B(-7;2)$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

2. Даны две прямые $l_1:\ 5x-4y+4=0,\quad l_2:\ \begin{cases} x=5t-1 \\ y=4t+2 \end{cases}$

Найти: a) точку пересечения прямых,

b) косинус острого угла между прямыми,

c) расстояния от точки $M(3;-6)$ до прямой l_1 и до прямой l_2.

3. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2-y^2-x-y=0$ 2) $3x^2-6x+2y^2+4y=0$

3) $y=3+\sqrt{9-x^2}$ 4) $x^2+16x-18y+100=0$

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho=2(1+\sin\varphi)$, 2) $\rho=\pi/3-\varphi$.

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=\cos t \\ y=2\sin t/2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=t+3 \\ y=1/t \end{cases}$

6. Построить фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} x^2+y^2\le 25, \\ 3y-4x\le 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x-y\ge 4, \\ x+3y\le 37 \\ -4x+9y\ge 20. \end{cases}$

Вариант № 10

1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(0;-6)$

a) параллельно прямой $y=-6x-5$;

b) перпендикулярно прямой $\frac{x}{4}-\frac{y}{9}=1$;

c) под углом 45° к прямой $x+y=1$;

d) через две точки: $A(0;-6)$ и $B(9;3)$.

Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

2. Даны две прямые $l_1:\ 8x-7y+19=0,\quad l_2:\ \begin{cases} x=8t-6 \\ y=7t-2 \end{cases}$

Найти: a) точку пересечения прямых,

b) косинус острого угла между прямыми,

c) расстояния от точки $M(7;-3)$ до прямой l_1 и до прямой l_2.

3. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $2x^2+y^2+4x-4=0$ 2) $y^2-4y-20x+24=0$

3) $x=-5-2\sqrt{y^2+9}$ 4) $x^2+y^2=6x+8y$

4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

1) $\rho=\sin^2\varphi,$ 2) $\rho=\dfrac{3}{2\sin\varphi-3\cos\varphi}.$

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=2-\cos t \\ y=-4+\sin t \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{1}{1+t^2} \end{cases}$

6. Построить фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} x^2-y^2\le 2, \\ y^2+x\le 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 10x-y\ge 57, \\ 2x+3y\le 53 \\ 5x-7y\le 15. \end{cases}$

Вариант № 11

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-5;1)$

а) параллельно прямой $2x+3y+1=0$;

б) перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}$;

в) под углом 30° к прямой $y+7=0$;

г) и точку $B(2;3)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k.

2. Даны две прямые $l_1: y=5-2x$ и $l_2: \begin{cases} x=3t+2 \\ y=2t+1 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-5;1)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2+y^2-12x+2y+12=0$;

в) $5y^2-4x^2+16x-36=0$;

б) $x=-2-3\sqrt{-5-6y-y^2}$;

г) $y=2y^2+8x+1$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах:

а) $\rho=\cos(\varphi+\pi/3)$;

б) $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y=2\sin t, \\ x=3\cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{3}(t^3-3t), \\ x=t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x\le 1, \\ x^2+y^2\le 4, \\ y-x\le 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y\ge 1-x, \\ y\le 3-x, \\ x-y+1\ge 0 \end{cases}$

Вариант № 12

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;1)$

а) параллельно прямой $2x+y-2=0$;

б) перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y-2}{1}$;

в) под углом 60° к прямой $y-5=0$;

г) и точку $B(-2;3)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k.

2. Даны две прямые $l_1: y=4-2x$ и $l_2: \begin{cases} x=4t-2 \\ y=t+2 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(2;2)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2+y^2+2x-4y-20=0$;

б) $x^2-y^2+12x-14y+85=0$;

в) $x=-2-2\sqrt{4-y^2}$;

г) $2y^2+8y-x+1=0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho=\cos(\varphi-\pi/3)$;

б) $\rho=2(1-\cos\varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y=2\cos t, \\ x=3\sin t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{3}(t^3+3t), \\ x=t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x\le -1, \\ x^2+y^2\le 4, \\ y-x\ge 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y\ge 2x-2, \\ y\le 2x+1, \\ x+y-2\le 0 \end{cases}$

Вариант № 13

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;0)$

а) параллельно прямой $3x-2y+4=0$;

б) перпендикулярно прямой $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{-3}$;

в) под углом 45° к прямой $y-3=0$;

г) и точку $B(-1;1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k.

2. Даны две прямые $l_1: y=2x-5$ и $l_2:\begin{cases} x=3-2t \\ y=5t+1 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-1;2)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2+y^2+8x-4y+16=0$;

б) $4x^2-24x+3y^2+24=0$;

в) $y=-3+\sqrt{5x-2}$;

г) $9x^2-16y^2-36x+32y-5=0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho=\cos(\varphi+\pi/6)$;

б) $\rho=2(1+\sin\varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y=2\sin t, \\ x=4\cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{3}(t^3+3t), \\ x=-t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x\le 1, \\ x^2+y^2\le 4, \\ y+x\ge 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y\ge x+1, \\ y\le x+3, \\ x+y-2\ge 0 \end{cases}$

Вариант № 14

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-2)$

а) параллельно прямой $-x+3y+2=0$;

б) перпендикулярно прямой $\dfrac{x+1}{-2}=\dfrac{y+1}{5}$;

в) под углом 120° к прямой $y+12=0$;

г) и точку $B(5;-1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k.

2. Даны две прямые $l_1: y=3x-1$ и $l_2: \begin{cases} x=3t-1 \\ y=5-2t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-2;-1)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2+y^2+6x+10y+18=0$;

б) $x^2-y^2-6x+4y-4=0$;

в) $x=-4-3\sqrt{y+5}$;

г) $16y^2+9x^2-18x=0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho=\cos(\varphi-\pi/6)$;

б) $\rho=2(1-\sin\varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y=3\sin t, \\ x=4\cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=\dfrac{1}{3}(t^3-3t), \\ x=-t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x\ge 1, \\ x^2+y^2\le 4, \\ y+x\ge 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2y\ge -3x, \\ 2y\le 6-3x, \\ x-y-1\le 0 \end{cases}$

Вариант № 15

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-4;3)$

а) параллельно прямой $3x+y-8=0$;

б) перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{7}=\dfrac{y-3}{1}$;

в) под углом 135° к прямой $y-7=0$;

г) и точку $B(4;-1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k.

2. Даны две прямые $l_1: y=-5x+7$ и $l_2: \begin{cases} x=2t-3 \\ y=2-3t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(2;3)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2+y^2+12x-4y+24=0$;

б) $3x^2+6x+4y^2-8y+3=0$;

в) $y=1-\sqrt{7-3x}$;

г) $y^2-x^2-x-y-1=0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho=\sin(\varphi-\pi/6)$;

б) $\rho=3(1-\sin\varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y=4\sin t, \\ x=2\cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=t^3-t, \\ x=t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} y\ge 1, \\ x^2+y^2\le 4, \\ x-y\ge 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3y\ge -2x, \\ 3y\le 6-2x, \\ x-y-2\le 0 \end{cases}$

Вариант № 16

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;-2)$

а) параллельно прямой $3x-y-2=0$;

б) перпендикулярно прямой $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+3}{1}$;

в) под углом 30° к прямой $y-4=0$;

г) и точку $B(2;5)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k.

2. Даны две прямые $l_1: y=4-5x$ и $l_2: \begin{cases} x=3t-7 \\ y=-5t+8 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-1;5)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2+y^2-2x-4y+1=0$;

б) $x=3+\sqrt{-6(y-2)}$;

в) $4y^2-9x^2+18x+16y+43=0$;

г) $9y^2+4x^2-18y-27=0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах:

а) $\rho=\sin(\varphi+\pi/3)$;

б) $\rho=3(1+\sin\varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y=3\sin t, \\ x=2\cos t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=t^3+t, \\ x=-t^2. \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} y\le 1, \\ x^2+y^2\le 4, \\ y+x\ge 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\ge 2y-2, \\ x\le 2y+1, \\ x+y-2\le 0 \end{cases}$

Вариант № 17

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;-1)$

а) параллельно прямой $5x-y-2=0$;

б) перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{-3}=\dfrac{y+4}{4}$;

в) под углом 150° к прямой $y+5=0$;

г) и точку $B(-1;2)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k.

2. Даны две прямые $l_1: y=-1-2x$ и $l_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-4t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(2;-2)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2+y^2+4x-12=0$;

б) $x^2-y^2+12x-14y+85=0$;

в) $x=-2-\sqrt{16-y^2}$;

г) $y=2x^2+8x+1$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho=\cos(\varphi+\pi/4)$;

б) $\rho=3(1-\cos\varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y=3\cos t, \\ x=2\sin t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=t^2, \\ x=\dfrac{1}{3}(t^3+3t). \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x\ge 1, \\ x^2+y^2\le 9, \\ y+x\ge 2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\ge 2y-2, \\ x\le 2y+1, \\ x+y-2\ge 0 \end{cases}$

Вариант № 18

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(1;5)$

а) параллельно прямой $4x-y+1=0$;

б) перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-1}{-5}$;

в) под углом 45° к прямой $y+6=0$;

г) и точку $B(2;2)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k.

2. Даны две прямые $l_1: y=2x+5$ и $l_2: \begin{cases} x=-3+2t \\ y=1-5t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-3;2)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$;

б) $4x^2-6x+3y^2=0$;

в) $y=-3+\sqrt{5x-2}$;

г) $9x^2-16y^2-36x+32y+20=0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho=\sin(\varphi+\pi/6)$;

б) $\rho=3(1-\cos\varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y=2\cos t, \\ x=4\sin t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=-t^2, \\ x=\dfrac{1}{3}(t^3+3t). \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} x\le 1, \\ x^2+y^2\le 9, \\ y+x\ge 2 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y\ge 1-2x, \\ y\le 5-2x, \\ y-x-1\le 0 \end{cases}$

Вариант № 19

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;3)$

а) параллельно прямой $2x-3y+2=0$;

б) перпендикулярно прямой $\dfrac{x+4}{-1}=\dfrac{y-2}{5}$;

в) под углом 120° к прямой $y+1=0$;

г) и точку $B(3;-1)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k.

2. Даны две прямые $l_1: y=1-3x$ и $l_2: \begin{cases} x=3t-1 \\ y=5-2t \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(5;2)$ до каждой прямой.

3. Приведите уравнения линий к каноническому виду, назовите и постройте кривые:

а) $x^2+y^2+8x-2y+8=0$;

б) $x^2-y^2-6x+4y-4=0$;

в) $x=-4-3\sqrt{y+5}$;

г) $16y^2+9x^2-18x=0$.

4. Постройте линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho=\cos(\varphi-\pi/4)$;

б) $\rho=4(1-\sin\varphi)$.

5. Постройте линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y=3\cos t, \\ x=4\sin t, \end{cases}$

б) $\begin{cases} y=-t^2, \\ x=\dfrac{1}{3}(t^3-3t). \end{cases}$

6. Постройте фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} y\ge 1, \\ x^2+y^2\le 9, \\ y+x\ge 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} y\ge 1-2x, \\ y\le 5-2x, \\ y-x-1\ge 0 \end{cases}$

Вариант № 20

1. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(-2;5)$

а) параллельно прямой $x+2y-4=0$;

б) перпендикулярно прямой $\dfrac{x-4}{-2}=\dfrac{y+1}{3}$;

в) под углом 150° к прямой $y-2=0$;

г) и точку $B(6;-2)$.

Постройте все прямые. Для каждой прямой запишите вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k.

2. Даны две прямые $l_1: y=7x-5$ и $l_2: \begin{cases} x=t+4 \\ y=-2t-1 \end{cases}$

Найдите:

а) точку пересечения прямых;

б) косинус угла между прямыми;

в) расстояние от точки $M_0(-1;3)$ до каждой прямой.

3. Привести уравнения линий к каноническому виду, назвать и построить кривые:

а) $x^2+y^2+4x+2y+4=0$;

в) $y=-4-\sqrt{5x-10}$;

б) $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$;

г) $5x^2-4y^2+16y-36=0$.

4. Построить линии, заданные в полярных координатах

а) $\rho=\sin(\varphi-\pi/4)$;

б) $\rho=4(1+\sin\varphi)$.

5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

а) $\begin{cases} y=\cos t, \\ x=2\sin t, \end{cases}$

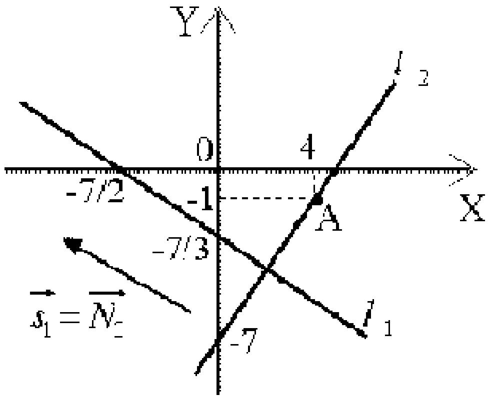
б) $\begin{cases} y=t^2, \\ x=t^3-t. \end{cases}$

6. Построить фигуру, заданную неравенствами:

а) $\begin{cases} y\le 1, \\ x^2+y^2\le 9, \\ y+x\ge 1 \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\ge -1-2y, \\ x\le -1-2y, \\ x-y-2\le 0 \end{cases}$

4.2.6. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 3



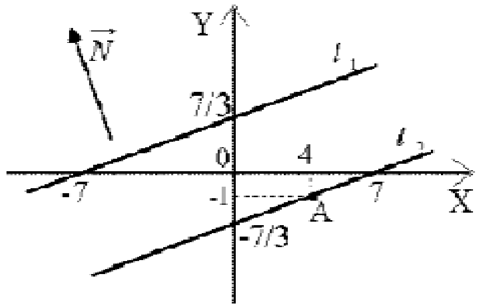
Аналитическая геометрия на плоскости

Задача 1. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $A(4;-1)$

a) параллельно прямой $x-3y+7=0$;

b) перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{-3}=\dfrac{y+1}{2}$;

c) под углом 45^o к прямой $3y-2=0$.



Построить эти прямые в системе координат. Записать вектор нормали $\vec{N}$, направляющий вектор $\vec{s}$ и угловой коэффициент k для каждой прямой.

Р е ш е н и е

а) Вектор нормали данной прямой $x-3y+7=0$, $\vec{N}=\{1;-3\}$. Так как искомая прямая параллельна данной, то вектор нормали данной может служить и вектором нормали искомой прямой $\vec{N}=\{A;B\}=\{1;-3\}$. Фиксированная точка на искомой прямой дана $M_0(x_0;y_0)=A(4;-1)$.

Воспользуемся уравнением прямой через точку $M_0(x_0;y_0)$ с нормальным вектором $\vec{N}=\{A;B\}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)=0 \Rightarrow 1\cdot(x-4)-3\cdot(y+1)=0 \Rightarrow x-3y-7=0.$$

Для полученной прямой: вектор нормали $\vec{N}=\{1;-3\}$,

направляющий вектор (надо поменять местами координаты вектора нормали и у одной сменить знак) $\vec{s}=\{3;1\}$,

угловой коэффициент (надо записать уравнение в виде $y=kx+b$):

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{7}{3}, \quad \Rightarrow \quad k=\frac{1}{3}.$$

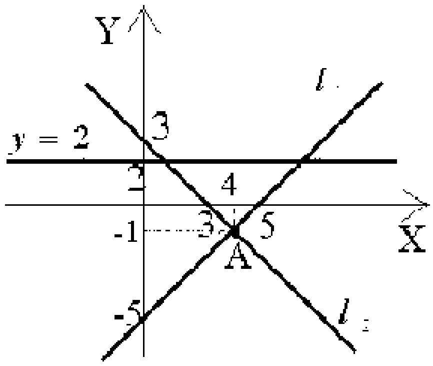
b) Прямая задана в канонической форме и ее направляющий вектор $\vec{s}_1 = \{-3;2\}$. Он может служить вектором нормали искомой прямой, т.к. прямые перпендикулярны. Таким образом, имея точку $(4;-1)$ и вектор нормали $\vec{N}_2 = \{-3;2\}$, записываем уравнение прямой

$$-3(x-4)+2(y+1)=0, \ \Rightarrow 3x-2y-14=0 \ \ \Rightarrow \ y=\frac{3}{2}x-7$$

Вектор нормали прямой $\vec{N} = \{-3;2\}$,

направляющий вектор $\vec{s} = \{2;3\}$,

угловой коэффициент $k = 3/2$.



c) Данная прямая $y-2=0$ является горизонтальной и составляет с осью OX угол 0^0. Под углом 45^o к ней через заданную точку можно провести две прямые, одна прямая будет составлять с осью OX угол 45^0 и, следовательно, ее угловой коэффициент $k = \mathrm{tg}\,45^0 = 1$, а другая прямая будет составлять с осью OX угол 135^0 и, следовательно, ее угловой коэффициент $k = \mathrm{tg}\,135^0 = -1$. Используем уравнение прямой через точку с угловым коэффициентом

$$l_1: \quad y-y_0 = k(x-x_0) \ \Rightarrow \ y+1 = 1\cdot(x-4) \Rightarrow \ x-y-5=0$$

$$l_2: \quad y-y_0 = k(x-x_0) \ \Rightarrow \ y+1 = -1\cdot(x-4) \Rightarrow \ x+y-3=0$$

Вектор нормали прямой $\vec{N} = \{1;-1\}$,

направляющий вектор $\vec{s} = \{1;1\}$,

угловой коэффициент $k = \pm 1$.

Для построения прямых в системе координат можно найти точки пересечения с осями координат, взяв сначала $x=0$ и по уравнению вычислить y, а затем взять $y=0$ и вычислить соответствующее значение x.

Задача 2. Даны две прямые $l_1: 3x-y-4=0, \quad l_2: \begin{cases} x=-t+5 \\ y=2t-3 \end{cases}$

Найти: a) точку пересечения прямых,

b) косинус угла между прямыми,

c) расстояния от точки $M(5;-7)$ до прямой l_1 и до прямой l_2.

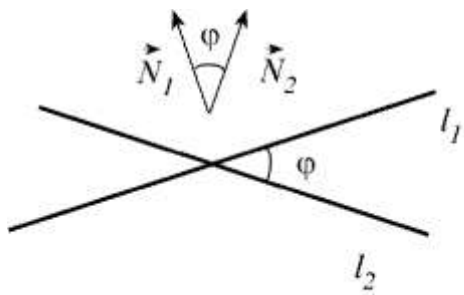
Р е ш е н и е

а) Точкой пересечения прямых является решение системы

$$\begin{cases} 3x - y - 4 = 0 \\ x = -t + 5 \\ y = 2t - 3 \end{cases} \Rightarrow 3(-t+5) - (2t-3) - 4 = 0 \Rightarrow -5t + 14 = 0 \Rightarrow t = \frac{14}{5}$$

$$x = -\frac{14}{5} + 5 = \frac{21}{5} = 4{,}2 \quad y = \frac{28}{5} - 3 = \frac{13}{5} = 2{,}6 \qquad M(4{,}2; 2{,}6)$$

b) Косинус угла между прямыми найдем как косинус угла между их нормальными векторами:



Для l_1: $\vec{N}_1 = \{3; -1\}$.

Для l_2 известен направляющий вектор

$\vec{s} = \{-1; 2\} \Rightarrow \vec{N}_2 = \{2; 1\}$.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{N}_1 \vec{N}_2}{|\vec{N}_1||\vec{N}_2|} =$$

$$= \frac{6-1}{\sqrt{9+1}\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^0$$

с) Для вычисления расстояния от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ воспользуемся формулой:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Расстояние до первой прямой

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 5 + (-1) \cdot (-7) - 4|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{|18|}{\sqrt{10}} = \frac{18}{\sqrt{10}} =$$

Для нахождения расстояния до второй прямой необходимо сначала приевести уравнение l_2 к общему виду

$$\begin{cases} x = -t + 5 \\ y = 2t - 3 \end{cases} \Rightarrow t = 5 - x \Rightarrow y = 2(5 - x) - 3 \Rightarrow 2x + y - 7 = 0$$

Вновь использем формулу расстояния от точки до прямой

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|2 \cdot 5 + 1 \cdot (-7) - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|10|}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

Задача 3. Привести уравнения линий к каноническому виду и построить:

1) $x^2+y^2-3x+7y+1=0$ 2) $2x^2+6x+y^2-3y-3=0$

3) $x=9+\sqrt{y^2+4}$ 4) $x=2y-y^2+4$

Решение

1) $x^2+y^2-3x+7y+1=0$

$$x^2-3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+y^2+7y+\frac{49}{4}-\frac{49}{4}+1=0,$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{27}{2}$$

Полученное уравнение определяет окружность с центром $O_1(1.5;-3,5)$

и радиусом $R=\sqrt{13,5}\approx 3,7$

2) $2x^2+6x+y^2-3y-3=0$

$$2(x^2+3x)+(y^2-3y)-3=0$$

$$2\left(x^2+3x+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)+\left(y^2+3y+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}\right)-3=0$$

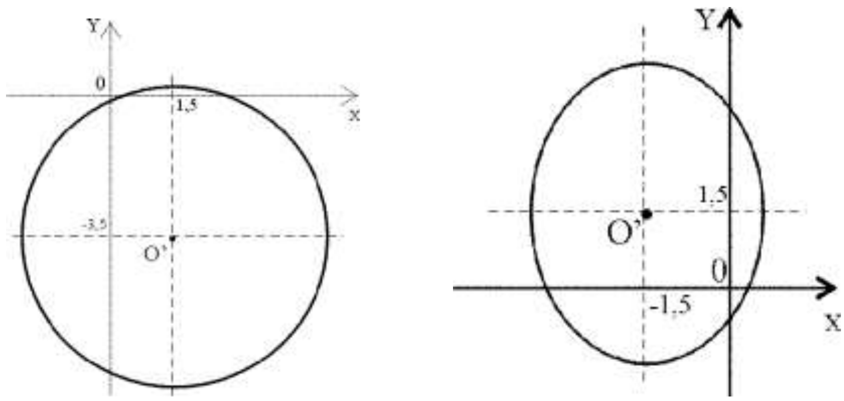
$$2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{27}{4}-3=0$$

$$2\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{39}{4}$$

$$\frac{(x+1,5)^2}{39/8}+\frac{(y-1,5)^2}{39/4}=1$$

Полученное уравнение определяет эллипс с центром $O_1(-1.5;1,5)$ и полуосями

$a=\sqrt{39/8}\approx 2,2$, $b=\sqrt{39/4}\approx 3,12$

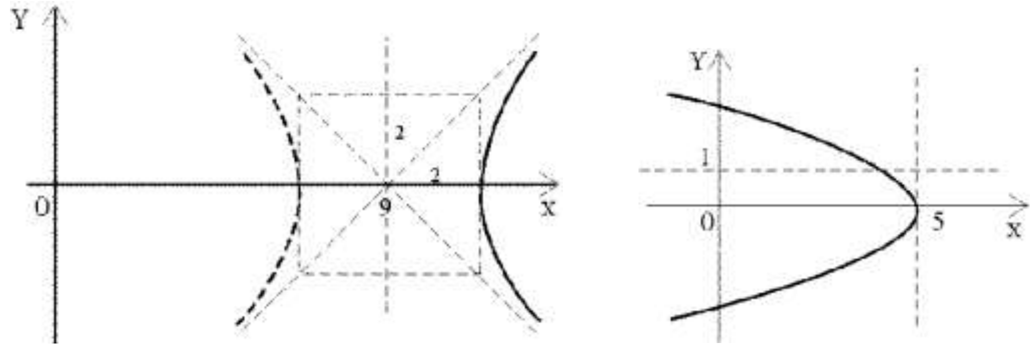


3) $x = 9 + \sqrt{y^2 + 4}$

Выполняем следующие преобразования: $x - 9 = \sqrt{y^2 + 4}$

$$(x-9)^2 = y^2 + 4, \quad (x-9)^2 - y^2 = 4 \qquad \frac{(x-9)^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$$

Полученное уравнение определяет гиперболу с центром $O_1(9;0)$, действительной полуосью $a = 2$ и мнимой $b = 2$. Однако, исходное уравнение ($x \geq 9$) определяет только правую ветвь этой гиперболы (Рис. а)).



а) b)

4) $x = 2y - y^2 + 4$

$x = -(y^2 - 2y + 1 - 1) + 4, \; x = -(y-1)^2 + 5$

$(y-1)^2 = -(x-5)$

это уравнение определяет параболу с вершиной $O_1(5;1)$, ось которой параллельна оси OX и, ветви которой направлены влево (Рис. b)).

Задача 4. Построить линии, заданные уравнениями в полярных координатах:

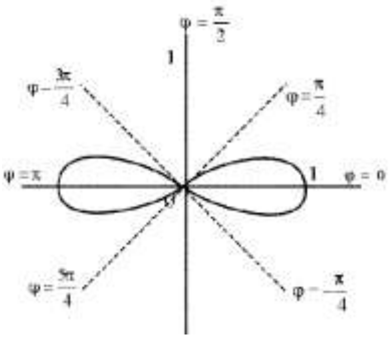
$$1)\ \rho = \cos 2\varphi, \qquad 2)\ \rho = \frac{1}{\sqrt{3} + 2\sin\varphi}.$$

Решение

1) $\rho = \cos 2\varphi$

Данная функция четна, имеет период $T = \pi$ и область определения

$$\cos 2\varphi \ge 0 \Rightarrow -\pi/4 + k\pi \le \pi/4 + k\pi.$$



Это значит, что график функции симметричен относительно горизонтальной оси и повторяет себя при изменении $\pi \le \varphi \le 2\pi$ два раза (две петли).

Находим несколько значений функции в интервале $0 \le \varphi \le \pi/4$

φ	0	$\pi/3$	$\pi/4$
ρ	1	$\sqrt{0{,}5}$	0

и достраиваем функцию полностью с учетом свойств симметрии.

2) $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{3} + 2\sin\varphi}$.

Это уравнение является полярным уравнением одной (в данном случае нижней) ветви гиперболы.

Выполним переход к декартовым координатам по формулам

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \sqrt{x^2 + y^2} = \rho$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\rho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{3} + \dfrac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}} \qquad \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{3}\sqrt{x^2 + y^2} + 2y}$$

$$1=\frac{1}{\sqrt{3(x^2+y^2)}+2y}\qquad \sqrt{3(x^2+y^2)}+2y=1,\qquad \sqrt{3(x^2+y^2)}=1-2y,$$

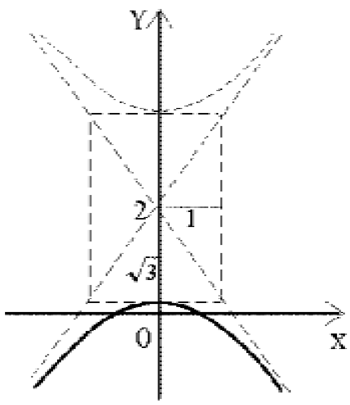
Отсюда видно, что кривая существует только для $y\le 1/2$, т.е. мы получим только половину линии

$$3(x^2+y^2)=(1-2y)^2,\qquad 3x^2+3y^2=1-4y+4y^2,$$

$$y^2-4y-3x^2=1,\quad (y-2)^2-3x^2=3,\qquad \frac{(y-2)^2}{3}-\frac{x^2}{1}=1$$

Строим гиперболу с центром в точке $O'(0;2)$, действительной осью $b=\sqrt{3}$ на оси OY и мнимой $a=1$ параллельной оси OX, а затем, учитывая, что

$y\le 1/2$, оставляем только нижнюю ветвь.



Эту же кривую можно было построить и с учетом периода $T=2\pi$ и области определения функции $\sqrt{3}+2\sin\varphi>0\Rightarrow -\pi/3<\varphi<4\pi/3$.

Затем с учетом ОДЗ вычислим ряд значений функции

φ	$-\pi/3$	0	$\pi/2$	π	$4\pi/3$
ρ	∞	$1/\sqrt{3}$	$1/(\sqrt{3}+2)$	$1/\sqrt{3}$	∞
	∞	0,59	0,17	0,59	∞

Задача 5. Построить линии, заданные параметрическими уравнениями:

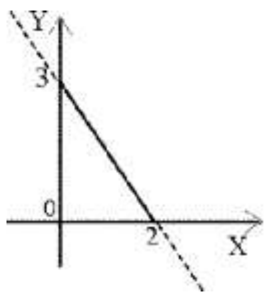
$$1)\ \begin{cases} x=2\cos^2 t\\ y=3\sin^2 t\end{cases}\qquad 2)\ \begin{cases} x=t^2+1\\ y=e^{-2t}\end{cases}$$

Р е ш е н и е

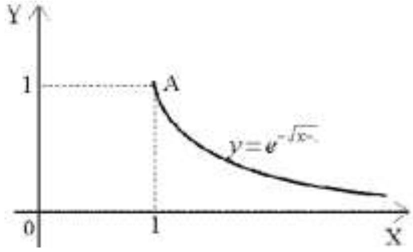
$$1)\ \begin{cases} x=2\cos^2 t\\ y=3\sin^2 t\end{cases}$$

Исключим параметр t, для чего разделим 1-е уравнение на 2, второе на 3 и сложим ($\cos^2 t+\sin^2 t=1$)

$$x/2+y/3=1,\quad 3x+2y-6=0$$



Полученное уравнение определяет прямую, однако исходная параметрическая зависимость, согласно которой $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 3$, определяет лишь часть этой прямой (отрезок).



2) $\begin{cases} x = t^2 + 1 \\ y = e^{-2t} \end{cases}$

Также исключим параметр t:

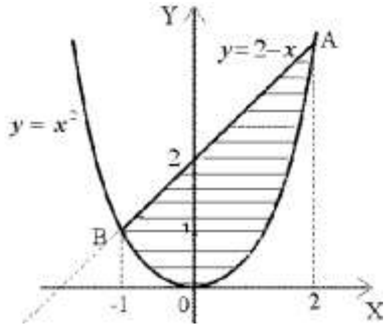
$t = \sqrt{x-1} \Rightarrow y = e^{-2\sqrt{x-1}}$

Строим график полученной зависимости с учетом $x \ge 1$

Задача 6. Построить фигуру, заданную неравенствами

1) $\begin{cases} y \ge x^2, \\ y - x \le 2. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y \le 1 - x, \\ y \le 1 + x \\ x \le 3y. \end{cases}$

Р е ш е н и е

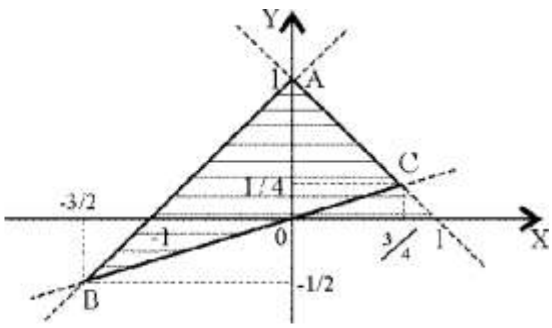


1) Строим границы области: параболу $y = x^2$ и прямую $y = x + 2$

Точки пересечения $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ находим, приравнивая левые части этих уравнений $x^2 = x + 2$, $x^2 - x - 2 = 0$.

Искомая область расположена выше параболы, т.к. $y \ge x^2$ и ниже прямой, т.к. $y \le x + 2$.

2) Строим три прямые, являющиеся границами области:
$y = 1 - x$, $y = 1 + x$, $y = x/3$.



Находим точки пересечения каждой из трех пар прямых и затем, выделяем треугольную область, ограниченную всеми прямыми, учитывая, что она должна лежать выше прямой $y = x/3$, но ниже прямых $y = 1 - x$, $y = 1 + x$ в соответствие со знаками неравенств в условии задачи.

Нахождение точек пересечения пар прямых:

1) $y = 1 - x, \quad y = 1 + x \Rightarrow 1 - x = 1 + x \Rightarrow 2x = 0, \quad (x = 0, \ y = 1)$

2) $y = 1 - x, \quad y = x/3 \Rightarrow 1 - x = x/3 \Rightarrow (4x)/3 = 1, \quad (x = 3/4, \ y = 1/4)$

3) $y = 1 + x, \ y = x/3 \Rightarrow 1 + x = x/3 \Rightarrow (2x)/3 = -1, \ (x = -3/2, \ y = -1/2)$

4.2.7. Индивидуальное задание № 4

Аналитическая геометрия в пространстве

Вариант № 1

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

a) через точку $M_0(3;-2;4)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1 = \{-3;7;1\}, \vec{a}_2 = \{2;-3;4\}$;

b) через три точки $A(1;1;2), B(2;-1;2), C(4;1;4)$;

c) через точку $A(1;-5;2)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z+3}{-4}$;

d) через точку $M_0(2;-1;3)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

a) через точку $M_0(2;4;-5)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{3;2;-2\}$;

b) через две точки $A(1;-5;2), \ B(-5;1;0)$;

c) через точку $M_0(2;3;-4)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OY углы 120^0 и 45^0 соответственно;

d) через точку $M_0(1;-3;-1)$ перпендикулярно плоскости $x - 5y + 2z - 1 = 0$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} x + 3y + 5z + 1 = 0 \\ 2x - y - 3z + 4 = 0 \end{cases}$

получить ее канонические и параметрические уравнения.

4. Найти точку пересечения и угол между прямой $x = 2t + 3, y = t - 2, z = t + 3$ и плоскостью $2x - 6y + 14z - 1 = 0.$

5. Определить расстояния от точки $M_1(5;–1;0)$ до плоскости $3y-2z+4=0$ и до прямой $x=3, y=2t+4, z=t-2$

6. Построить поверхности

$a)\ x^2-3z^2+4y^2+6=0$ $b)\ x^2+y^2=3-4z$

$c)\ y^2=2x^2+z^2$ $d)\ x^2-4x+z^2+2z-3=0$

$e)\ x=y^2-5y$ $f)\ 3y+2\sqrt{4+z}=0$

7. Построить области, ограниченные поверхностями

$a)\ z=4-y^2,\quad y=x^2/2,\quad z=0$

$b)\ 10x=y^2+z^2,\quad x=10.$

Вариант № 2

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

a) через точку $M_0(-3;-1;7)$ и прямую $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-2}=\dfrac{z-2}{1}$;

b) через три точки $A(1;-1;3), B(2;-5;1), C(-1;4;-1)$;

c) через точку $A(2;-3;-7)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{2}$;

d) через точку $M_0(3;7;6)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

a) через точку $M_0(1;-2;7)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{5;1;-3\}$;

b) через две точки $A(-2;5;-3), B(3;-1;4)$;

c) через точку $M_0(1;-2;7)$ в направлении, которое составляет с осями координат OY и OZ углы 60^0 и 30^0 соответственно;

d) через точку $M_0(3;-2;4)$ перпендикулярно плоскости $3x-2y-z-12=0$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} x-2y+z-4=0 \\ 2x+2y-z-8=0 \end{cases}$

получить ее канонические и параметрические уравнения.

4. Найти точку пересечения и угол между прямой $x=t+2, y=-2t+1, z=3t+1$ и плоскостью $x-4y+2z+14=0.$

5. Определить расстояния от точки $M_1(0;-5;-4)$ до плоскости
$x+4y+3z+4=0$ и до прямой $x=5t-3,\ y=t+2,\ z=1$

6. Построить поверхности

$a)\ 2x^2=y^2+z^2$ $\quad b)\ x^2-y^2=8$

$c)\ \dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}-z^2=1$ $\quad d)\ 2z+1=x^2$

$e)\ z=3x^2+2y^2$ $\quad f)\ 2x-5+\sqrt{y}=0$

7. Построить области, ограниченные поверхностями

$a)\quad x^2+y^2+z^2=2z,\quad \sqrt{x^2+y^2}=z$

$b)\quad 2y+z=2,\quad x^2=y,\quad z=0.$

Вариант № 3

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

a) через точку $M_0(0;2;-6)$ перпендикулярно двум плоскостям
$x-y+2z-1=0,\ -x+y-z-3=0$;

b) через три точки $A(-1;3;5), B(2;-3;-7), C(2;-3;-5)$;

c) через точку $A(7;-2;4)$ перпендикулярно прямой
$\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-3}{-4}=\dfrac{z-5}{2}$;

d) через точку $M_0(1;-2;4)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

a) через точку $M_0(-6;1;3)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{-2;8;0\}$;

b) через две точки $A(9;1;-4), B(6;-4;-9)$;

c) через точку $M_0(-6;1;3)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OZ углы 120^0 и 60^0 соответственно;

d) через точку $M_0(5;0;-2)$ перпендикулярно плоскости
$4x+y+7z-2=0$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} x-y-z-2=0 \\ x-2y+z+4=0 \end{cases}$

получить ее канонические и параметрические уравнения.

4. Найти точку пересечения и угол между прямой
$x=-4t+1,\ y=3t-1,\ z=2t$ и плоскостью $4x+2y-3z-18=0.$

5. Определить расстояния от точки $M_1(2;–2;–3)$ до плоскости $y+z+2=0$ и до прямой $x=t+1,\ y=-t+5,\ z=t$

6. Построить поверхности

$a)\ y^2-4y=3x$

$b)\ x^2-z^2=9$

$c)\ x^2+y^2-4z^2=4$

$d)\ z=9-x^2-y^2$

$e)\ y^2=3(y^2+z^2)$

$f)\ x+3=\sqrt{3-z}$

7. Построить области, ограниченные поверхностями

$a)$ $z=x^2+y^2,\quad x+y=1,\quad x=y=z=0$

$b)$ $y=\sqrt{x},\quad y=2\sqrt{x},\quad x+y+z=6,\quad z=0.$

Вариант № 4

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

a) через точку $M_0(2;3;–5)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1=\{-3;1;-1\}, \vec{a}_2=\{7;2;-3\}$;

b) через три точки $A(-1;2;4), B(-3;2;1), C(4;6;3)$;

c) через точку $A(4;0;2)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-3}{-5}=\dfrac{z-1}{3}$;

d) через точку $M_0(7;–3;0)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

a) через точку $M_0(4;0;3)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{7;-1;-4\}$;

b) через две точки $A(1;-2;-3), B(7;3;1)$;

c) через точку $M_0(4;2;–1)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OY углы 30^0 и 45^0 соответственно;

d) через точку $M_0(5;–2;1)$ перпендикулярно плоскости $y+2z-11=0$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} 3x+y-z-6=0 \\ 3x-y+z=0 \end{cases}$

получить ее канонические и параметрические уравнения.

4. Найти точку пересечения и угол между прямой
$x=3t+5,\, y=-t-3,\, z=-5t+1$ и плоскостью $x-y+4z+4=0.$

5. Определить расстояния от точки $M_1(0;2;1)$ до плоскости
$4x-5y-z-7=0$ и до прямой $x=3t-2,\, y=t+4,\, z=5t-5$

6. Построить поверхности

$a)\ x^2+y^2=4x \qquad b)\ 3z=16-x^2$

$c)\ \frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1 \qquad d)\ z+1=-(x^2+2y^2)$

$e)\ (z-2)^2=x^2+y^2 \qquad f)\ x=2-\sqrt{y}$

7. Построить области, ограниченные поверхностями

$a)\ 2z=x^2+y^2,\quad z=\sqrt{1-x^2-y^2},\ z=0$

$b)\ x=0,\ \ y=2x,\ \ y=1,\ x+y+z=3,\ z\ge 0.$

Вариант № 5

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

а) через две параллельные прямые
$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{-4}$ и $\frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+5}{-4}$;

b) через три точки $A(4;1;5), B(1;-3;5), C(0;-5;8)$;

c) через точку $A(-1;4;2)$ перпендикулярно прямой
$x=5t+9;\ \ y=3t;\ \ z=-2t+6$;

d) через точку $M_0(2;-1;5)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

а) через точку $M_0(3;-5;6)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{1;-7;-4\}$;

b) через две точки $A(-4;-1;2), B(1;7;5)$;

c) через точку $M_0(-5;2;-4)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OZ углы 30^0 и 60^0 соответственно;

d) через точку $M_0(5;-1;-6)$ перпендикулярно плоскости

$4x-6y+z-7=0$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} 4x+y+z+2=0 \\ 2x+y-3z-8=0 \end{cases}$

получить ее канонические и параметрические уравнения.

4. Найти точку пересечения и угол между прямой
$x=-4t-1,\ y=6t-3,\ z=-5t+1$ и плоскостью $3x-2y-5z=0.$

5. Определить расстояния от точки $M_1(2;-1;1)$ до плоскости
$2x+10y-1=0$ и до прямой $x=2,\ y=-t+2,\ z=t+3$

6. Построить поверхности

$a)\ z^2+y^2=9x$ $\quad b)\ y^2=9-x$

$c)\ \dfrac{x^2}{9}+y^2+z^2=1$ $\quad d)\ y^2+z^2-2z=0$

$e)\ 2x^2-z^2=y$ $\quad f)\ z=-\sqrt{2-y}$

7. Построить области, ограниченные поверхностями

$a)\ z^2=x^2+y^2,\ 5x+y=5,\ x=0,\ y=0,\ z\ge 0.$

$b)\ 3x^2+3y^2+1=z,\ z=5-3x^2-3y^2.$

Вариант № 6

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

a) через точку $M_0(6;-2;1)$ параллельно двум векторам $\vec a_1=\{4;1;-2\}, \vec a_2=\{5;-5;-1\}$;

b) через три точки $A(1;1;1), B(2;3;-4), C(1;-1;2)$;

c) через точку $A(-3;5;8)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-4}{7}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z}{1}$;

d) через точку $M_0(4;-1;7)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

a) через точку $M_0(3;7;-9)$ параллельно вектору $\vec a=\{0;1;-8\}$;

b) через две точки $A(3;-2;1), B(4;-3;-2)$;

c) через точку $M_0(1;5;-7)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OY углы 45^0 и 60^0 соответственно;

d) через точку $M_0(0;-2;-6)$ перпендикулярно плоскости $7x+z+2=0$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} 2x+y+z-2=0 \\ 2x-y-3z+6=0 \end{cases}$

получить ее канонические и параметрические уравнения.

4. Найти точку пересечения и угол между прямой $x=7t+2,\ y=-2t-4,\ z=3t+6$ и плоскостью $-x-y+2z-17=0$.

5. Определить расстояния от точки $M_1(3;-3;-1)$ до плоскости $2x+4y-3=0$ и до прямой $x=2t-3,\ y=t+1,\ z=6t-1$

6. Построить поверхности

$a)\ x^2+y^2=4y-x$ $\qquad b)\ x^2=y^2+z^2$

$c)\ y=9-z^2$ $\qquad d)\ x^2+y^2+z^2=8z$

$e)\ x=3-2(y^2+z^2)$ $\qquad f)\ y-4-2\sqrt{z-1}=0$

7. Построить области, ограниченные поверхностями

$a)\quad x^2+y^2=2x,\ x+z=2,\ z=0,\quad (z\ge 0).$

$b)\quad x=\sqrt{1-y^2-z^2},\ x=\sqrt{y^2+z^2},\quad y\ge 0.$

Вариант № 7

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

a) через точку $M_0(-4;-2;5)$ перпендикулярно двум плоскостям $2x-2y+z-1=0,\quad 4x-3y+2z=0$;

b) через три точки $A(3;4;1), B(-1;1;0), C(-2;0;1)$;

c) через точку $A(4;-3;2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+5}{-2}=\frac{y}{4}=\frac{z+1}{9}$;

d) через точку $M_0(6;-3;9)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

a) через точку $M_0(1;-3;8)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{5;0;-7\}$;

b) через две точки $A(-3;5;1), B(2;1;4)$;

c) через точку $M_0(1;-3;-7)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OY углы 120^0 и 60^0 соответственно;

d) через точку $M_0(5;-2;4)$ перпендикулярно плоскости $x-y+3z-4=0$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} x+5y-z-5=0 \\ 2x-5y+2z+5=0 \end{cases}$

получить ее канонические и параметрические уравнения.

4. Найти точку пересечения и угол между прямой $x=8t+2,\ y=3t-1,\ z=6t$ и плоскостью $4x-2y+z+10=0.$

5. Определить расстояния от точки $M_1(1;2;-3)$ до плоскости $3x-y+2z+1=0$ и до прямой $x=t-3,\ y=2,\ z=-5t-7$

6. Построить поверхности

$a)\ x^2+9y^2=9z$ $\qquad b)\ 3z=4-y^2$

$c)\ x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=1$ $\qquad d)\ x^2-z^2=4$

$e)\ x^2=z^2+y^2$ $\qquad f)\ y=-\sqrt{3-x^2-z^2}$

7. Построить области, ограниченные поверхностями

$a)\ \ z=x^2,\ x+y=6,\ y=2x\ \ z=0.$

$b)\ \ x^2+y^2=4z^2,\ x^2+y^2=2z,\ x=0,\ y=0,\ (x>0,\ \ y>0)$

Вариант № 8

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

a) через точку $M_0(2;-1;9)$ и прямую $x=4t+3;\ \ y=-2t+2;\ \ 5t$;

b) через три точки $A(1;2;-3), B(1;0;1), C(-2;-1;6)$;

c) через точку $A(3;-2;-9)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-7}{4}=\frac{y+1}{5}=\frac{z+2}{-1}$;

d) через точку $M_0(-5;4;6)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

a) через точку $M_0(4;-6;5)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{1;-5;0\}$;

b) через две точки $A(2;-7;1), B(3;-4;2)$;

c) через точку $M_0(1;-4;6)$ в направлении, которое составляет с осями координат OY и OZ углы 45^0 и 120^0 соответственно;

d) через точку $M_0(3;-2;1)$ перпендикулярно плоскости $5x-3y+4z+2=0$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} 6x-5y-4z-2=0 \\ x+7y-z-5=0 \end{cases}$

получить ее канонические и параметрические уравнения.

4. Найти точку пересечения и угол между прямой $x=4t+2, y=-t-5, z=5t+1$ и плоскостью $3x-2y+2z+6=0$.

5. Определить расстояния от точки $M_1(7;-4;2)$ до плоскости $x+5y+2z+6=0$ и до прямой $x=2t-3, y=-3t+1, z=-2$

6. Построить поверхности

$a)\ x^2+z^2=y^2$ $\qquad b)\ x^2+y^2=8-2z$

$c)\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{6}+z^2=12$ $\qquad d)\ x-4=y^2$

$e)\ 6=3x^2+2z^2$ $\qquad f)\ z=3\sqrt{y}-3$

7. Построить области, ограниченные поверхностями

$a)\ \ x=\sqrt{y/2},\ \ x+y=3,\ \ z=0,\ \ z=2,\ \ x=0.$

$b)\ \ x^2+y^2+z^2=4,\ \ z=\sqrt{x^2+y^2}$

Вариант № 9

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

a) через точку $M_0(-7;1;-4)$ параллельно двум векторам $\vec{a}_1=\{5;6;-3\}, \vec{a}_2=\{3;-5;-1\}$;

b) через три точки $A(1;2;0), B(3;0;-3), C(5;2;6)$;

c) через точку $A(-5;4;-8)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{-1}=\dfrac{y+3}{6}=\dfrac{z-2}{3}$;

d) через точку $M_0(12;-7;-1)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

a) через точку $M_0(-2;3;-4)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{1;-5;-8\}$;

b) через две точки $A(7;-1;3), B(4;1;-2)$;

c) через точку $M_0(3;-1;0)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OZ углы 30^0 и 60^0 соответственно;

d) через точку $M_0(2;-6;4)$ перпендикулярно плоскости $2x+3y+5z-3=0$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} 8x-y-3z-1=0 \\ x+y+z+10=0 \end{cases}$

получить ее канонические и параметрические уравнения.

4. Найти точку пересечения и угол между прямой $x=t+5, y=3t-6, z=t+2$ и плоскостью $5x-4y-5z-3=0.$

5. Определить расстояния от точки $M_1(4;-1;2)$ до плоскости $x-3y-3z+4=0$ и до прямой $x=-t-2, y=t+5, z=2t+3$

6. Построить поверхности

$a)$ $x^2-4x+y^2-6y+z^2-2z=0$ $\quad b)$ $x^2+2y^2=z^2$

$c)$ $1-y=x^2/2+z^2/4$ $\quad d)$ $z^2=4-2x$

$e)$ $y^2+z^2=6z$ $\quad f)$ $2z-1+3\sqrt{x+4}=0$

7. Построить области, ограниченные поверхностями

$a)$ $z=16-x^2-y^2,\ x+y=4,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0$

$b)$ $x^2+y^2-z^2=-1,\quad x^2+y^2=1.$

Вариант № 10

1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

a) через две параллельные прямые $x=t-1;\ y=2t+5;\ z=3t+2$ и $x=t+3;\ y=2t-2;\ z=3t+6$;

b) через три точки $A(1;5;-7), B(-3;6;3), C(-2;7;3)$;

c) через точку $A(1;-1;2)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-4}{5}$;

d) через точку $M_0(5;-3;2)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

a) через точку $M_0(3;-5;6)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{2;1;-7\}$;

b) через две точки $A(-1;3;4), B(2;-4;3)$;

c) через точку $M_0(5;0;-1)$ в направлении, которое составляет с осями координат OY и OZ углы 60^0 и 135^0 соответственно;

d) через точку $M_0(-1;5;-3)$ перпендикулярно плоскости $7-y+4z+4=0$

3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases} x+5y+2z+11=0 \\ x-y-z-1=0 \end{cases}$

получить ее канонические и параметрические уравнения.

4. Найти точку пересечения и угол между прямой $x=-5t+2, y=7t-4, z=2t+6$ и плоскостью $x-2y+4z-1=0.$

5. Определить расстояния от точки $M_1(-5;-3;2)$ до плоскости $x+y-2z+2=0$ и до прямой $x=1, y=-3t+5, z=2t-7$

6. Построить поверхности

$a)\ x^2+z^2=2z$ $\qquad b)\ x^2+y^2=(z-2)^2$

$c)\ z=-(\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4})$ $\qquad d)\ y^2-4y+z=0$

$e)\ x^2+y^2+z^2+2x=0$ $\qquad f)\ z=3+\sqrt{2-x}$

7. Построить области, ограниченные поверхностями

$a)\quad z=4-y^2,\ \ z=2+y^2,\ \ x=-1,\ \ x=2.$

$b)\quad x^2+y^2+z^2=9,\ \ x^2+y^2=4,\ \ y\geq 0.$

Вариант № 11

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(3;-2;0)$ параллельно двум векторам $\bar{a}_1=\{3;2;-4\}$ и $\bar{a}_2=\{4;-1;-2\}$;

б) через три точки $A(0;2;1)$, $B(1;-1;3)$, $C(3;-2;0)$;

в) через точку $A(4;4;2)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-2}{-3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{1}$;

г) через точку $M_0(2;3;-3)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:
а) точку $M_0(4;-4;0)$ параллельно вектору $\bar{a}=\{0;2;3\}$;
б) две точки $A(-1;2;3)$ и $B(2;-1;1)$;
в) точку $M_0(2;1;-3)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oy углы $\alpha=60^\circ$ и $\beta=45^\circ$, соответственно;
г) точку $M_0(-1;-2;3)$ перпендикулярно плоскости $x+3y-4z-9=0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} x-2y+z-1=0, \\ x-3y+z+3=0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x=6t+9 \\ y=-2t \\ z=-t+2 \end{cases}$$

и плоскостью $x+3y-z+1=0$.

5. Определите расстояния от точки $M(1;-4;1)$ до плоскости $x-z+5=0$ и до прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-2}{3}$.

6. Определите тип и постройте поверхности
а) $x^2-6x+y^2-4y+z^2+10z+2=0$;
б) $x^2+y^2=4$;
в) $x^2=9-3y$;
г) $x=-\sqrt{z-y^2}$;
д) $2-x=y^2+z^2$;
е) $x^2-y^2+z^2-1=0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:
а) $z=x^2+y^2+1$, $3y+2z-4=0$;
б) $x^2+y^2=4x$, $z=12-y^2$, $z=0$.

Вариант № 12

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:
а) через точку $M_0(1;0;-2)$ параллельно двум векторам $\bar{a}_1=\{7;4;6\}$ и $\bar{a}_2=\{2;1;1\}$;
б) через три точки $A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$, $C(1;-5;-9)$;
в) через точку $A(5;-1;2)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y+3}{3}=\dfrac{z-1}{0}$;
г) через точку $M_0(2;3;8)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:
а) точку $M_0(1;2;-1)$ параллельно вектору $\bar{a}=\{1;-3;0\}$;
б) две точки $A(13;14;1)$ и $B(14;15;2)$;
в) точку $M_0(-1;2;-2)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oz углы $\alpha=60^\circ$ и $\gamma=45^\circ$, соответственно;
г) точку $M_0(-2;1;1)$ перпендикулярно плоскости $2x-y+5z-15=0$.

3. Из общих уравнений прямой
$$\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0 \end{cases}$$
получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой
$$\begin{cases} x=4t+3 \\ y=-4t+1 \\ z=t-3 \end{cases}$$
и плоскостью $x+2y-4z-1=0$.

5. Определите расстояния от точки $M(2;1;0)$ до плоскости $y+z+2=0$ и до прямой $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{2}$.

6. Определите тип и постройте поверхности
а) $x^2+y^2+z^2=8y-12$;
б) $x^2+z^2=4$;
г) $9x^2-4y^2-36z^2=0$;
д) $x^2+y^2=3z+6$;

в) $x^2 = 4 + z$; *е*) $x^2 + y^2 - z^2 - 1 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:
а) $z = x^2 + 4y^2$, $y = x$, $y = -2x$, $y = 1$, $z = 0$;
б) $y^2 = x^2 + z^2$, $x^2 + z^2 = 1$, ($y \geq 0$).

Вариант № 13

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:
а) через точку $M_0(-1;1;1)$ параллельно двум векторам $\bar{a}_1 = \{1;-2;3\}$ и $\bar{a}_2 = \{3;0;-1\}$;
б) через три точки $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$;
в) через точку $A(-4;6;-3)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-5}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z+3}{-2}$;
г) через точку $M_0(5;-3;1)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:
а) точку $M_0(-4;2;6)$ параллельно вектору $\bar{a} = \{2;5;0\}$;
б) две точки $A(-4;2;6)$ и $B(2;-3;0)$;
в) точку $M_0(-4;2;1)$ в направлении, которое составляет с осями координат Oy и Oz углы $\beta = 45^\circ$ и $\gamma = 60^\circ$, соответственно;
г) точку $M_0(5;0;-6)$ перпендикулярно плоскости $2x - 5y + z - 1 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 3x + 4y - 2z + 1 = 0, \\ 2x - 4y + 3z + 4 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2t \\ z = -3t + 3 \end{cases}$$

и плоскостью $2x + y + z - 11 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(5;1;4)$ до плоскости $x+y+z+10=0$ и до прямой $\dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-5}{1}$.

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2+2x+y^2-6y+z^2+1=0$;

б) $y^2+z^2=4$;

в) $8-y^2=2z$;

г) $x^2-2y^2+2z^2=0$;

д) $x^2+2z^2=y$;

е) $-x^2+y^2+z^2-1=0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $3z=x^2+y^2$, $x^2+y^2+z^2=4$;

б) $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x+z=6$, $z=0$.

Вариант № 14

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(-2;4;1)$ параллельно двум векторам $\bar{a}_1=\{1;2;-3\}$ и $\bar{a}_2=\{2;-1;-1\}$;

б) через три точки $A(1;5;-4)$, $B(-5;-2;0)$, $C(-12;7;-1)$;

в) через точку $A(1;2;-3)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+2}{-5}$;

г) через точку $M_0(-3;4;-7)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(0;-4;-2)$ параллельно вектору $\bar{a}=\{3;-5;6\}$;

б) две точки $A(1;3;6)$ и $B(2;2;1)$;

в) точку $M_0(-4;6;3)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oy углы $\alpha=45^\circ$ и $\beta=120^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(-1;0;1)$ перпендикулярно плоскости $6x+5y-4z+4=0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases}2x-6y+14z-1=0,\\5x-15y+35z-3=0\end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 3 \\ z = t + 4 \end{cases}$$

и плоскостью $5x + y - 3z + 2 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(0;4;1)$ до плоскости $2x - 4y + 3z + 4 = 0$ и до прямой $\frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+5}{0}$.

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2$;

б) $x^2 + y^2 = 16$;

в) $z^2 = 4 - y$;

г) $x^2 - 3y^2 - 9z^2 = 0$;

д) $x^2 + z^2 = 3y + 6$;

е) $x^2 - y^2 + z^2 - 4 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$;

б) $x^2 + y^2 = z$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.

Вариант № 15

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(-3;-5;6)$ параллельно двум векторам $\bar{a}_1 = \{3;4;-1\}$ и $\bar{a}_2 = \{2;-1;1\}$;

б) через три точки $A(-1;-2;-4)$, $B(3;0;-1)$, $C(-2;3;5)$;

в) через точку $A(2;1;-4)$ перпендикулярно прямой $\frac{x+2}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{1}$;

г) через точку $M_0(-1;2;4)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:

а) точку $M_0(-4;0;5)$ параллельно вектору $\bar{a} = \{1;3;5\}$;

б) две точки $A(1;-1;1)$ и $B(-2;0;3)$;

в) точку $M_0(-2;4;2)$ в направлении, которое составляет с осями координат *Ox* и *Oz* углы $\alpha = 120^\circ$ и $\gamma = 45^\circ$, соответственно;

г) точку $M_0(-2;0;3)$ перпендикулярно плоскости $3x + 4y + 3z + 1 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 4x + y + z + 2 = 0, \\ 2x - y - 3z - 8 = 0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = -t - 3 \\ y = -3t - 1 \\ z = 2t - 10 \end{cases}$$

и плоскостью $x - y + z + 4 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(2;5;4)$ до плоскости $2x + y - z - 8 = 0$ и до прямой $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$.

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2 + y^2 - 4y + z^2 + 2z + 1 = 0$;

б) $x^2 + z^2 = 16$;

в) $y^2 = x - 4$;

г) $x^2 - 4y^2 + 16z^2 = 0$;

д) $x^2 + y^2 = 3z + 6$;

е) $x^2 + y^2 - z^2 - 4 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $z + x^2 + y^2 = 2$, $y = 2$, $y = -2$, $z = 0$;

б) $z^2 = 4x$, $y^2 = 4x$, $x = 1$.

Вариант № 16

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(1;-3;-2)$ параллельно двум векторам $\bar{a}_1 = \{3;-5;-6\}$ и $\bar{a}_2 = \{1;0;1\}$;

б) через три точки $A(0;-1;-1)$, $B(-2;3;5)$, $C(1;-5;-9)$;

в) через точку $A(-1;-1;2)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x+2}{-3} = \dfrac{y+3}{0} = \dfrac{z-1}{1}$;

г) через точку $M_0(7;-5;1)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:
а) точку $M_0(1;-2;3)$ параллельно вектору $\bar{a}=\{4;-1;5\}$;
б) две точки $A(-2;2;-1)$ и $B(0;3;2)$;
в) точку $M_0(3;1;-4)$ в направлении, которое составляет с осями координат *Oy* и *Oz* углы $\beta=60^\circ$ и $\gamma=120^\circ$, соответственно;
г) точку $M_0(1;8;-5)$ перпендикулярно плоскости $x-y+2z-20=0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases}2x-2y+z-6=0,\\3x-2y+2z-7=0\end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases}x=-2t-1\\y=4t+3\\z=3t\end{cases}$$

и плоскостью $3x+2y-z-2=0$.

5. Определите расстояния от точки $M(5;4;0)$ до плоскости $4x-y+3z-6=0$ и до прямой $\dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z-1}{1}$.

6. Определите тип и постройте поверхности
а) $x^2+2x+y^2+z^2-6z+6=0$;
г) $4x^2+y^2-z^2=0$;
б) $y^2+z^2=16$;
д) $x^2+y^2=3-z$;
в) $z^2=x-3$;
е) $-x^2+y^2+z^2-4=0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:
а) $(x-1)^2+y^2=z$, $2x+z-2=0$;
б) $z=4-y^2$, $z=2+y^2$, $x=-1$, $x=2$.

Вариант № 17

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:
а) через точку $M_0(-1;-5;1)$ параллельно двум векторам $\bar{a}_1=\{0;-1;3\}$ и $\bar{a}_2=\{3;2;-2\}$;
б) через три точки $A(-3;4;-7)$, $B(1;5;-4)$, $C(-5;-2;0)$;
в) через точку $A(-3;5;-2)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-5}{-3}=\dfrac{y+6}{-2}=\dfrac{z-2}{2}$;
г) через точку $M_0(2;3;4)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:
а) точку $M_0(5;0;-3)$ параллельно вектору $\bar{a}=\{1;-2;0\}$;
б) две точки $A(1;3;5)$ и $B(0;2;1)$;
в) точку $M_0(0;3;-5)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oy углы $\alpha=120^\circ$ и $\beta=60^\circ$, соответственно;
г) точку $M_0(3;-2;5)$ перпендикулярно плоскости $x-y-3z+2=0$.

3. Из общих уравнений прямой
$$\begin{cases}4x+y+z+2=0,\\2x-y-3z-8=0\end{cases}$$
получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой
$$\begin{cases}x=3t+4\\y=2t+1\\z=-2t\end{cases}$$
и плоскостью $2x-y-3z-8=0$.

5. Определите расстояния от точки $M(2;0;7)$ до плоскости $3x+y-5z-12=0$ и до прямой $\dfrac{x-5}{1}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z-2}{2}$.

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2+y^2+z^2=4z+20$;
б) $x^2+y^2=9$;
в) $x^2=-2+y$;
г) $-9x^2+y^2+z^2=0$;
д) $z^2+y^2=9x$;
е) $x^2-y^2+z^2-16=0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:
а) $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2+(z-2)^2=4$;
б) $x^2+y^2=2x$, $x^2+y^2=2y$, $z=x+2y$, $z=0$.

Вариант № 18

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:
а) через точку $M_0(2;-1;3)$ параллельно двум векторам $\bar{a}_1=\{-3;1;4\}$ и $\bar{a}_2=\{2;4;-2\}$;
б) через три точки $A(0;1;2)$, $B(-2;3;4)$, $C(5;1;5)$;
в) через точку $A(1;2;1)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y+1}{5}=\dfrac{z}{-4}$;
г) через точку $M_0(-2;0;1)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:
а) точку $M_0(2;-1;0)$ параллельно вектору $\bar{a}=\{-3;2;1\}$;
б) две точки $A(-2;0;1)$ и $B(1;2;3)$;
в) точку $M_0(-3;6;-13)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oz углы $\alpha=120^\circ$ и $\beta=60^\circ$, соответственно;
г) точку $M_0(2;-1;5)$ перпендикулярно плоскости $2x-y+3z+23=0$.

3. Из общих уравнений прямой
$$\begin{cases}6x-5y+3z+8=0,\\6x+5y-4z+4=0\end{cases}$$
получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x = 2t+1 \\ y = t \\ z = -1 \end{cases}$$

и плоскостью $3x - y + 4z - 2 = 0$.

5. Определите расстояния от точки $M(7; 9; 7)$ до плоскости $x - 2z + 4 = 0$ и до прямой $\dfrac{x-2}{4} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z}{2}$.

6. Определите тип и постройте поверхности
а) $x^2 - 2x + y^2 + 2y + z^2 + 4z - 43 = 0$;
б) $x^2 + z^2 = 9$;
в) $x^2 = -1 - z$;
г) $x^2 - 4y^2 + z^2 = 0$;
д) $1 - x^2 - y^2 = z$;
е) $x^2 + y^2 - z^2 - 16 = 0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:
а) $2z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 0$;
б) $x^2 + y^2 = 4x$, $z = 12 - y^2$, $z = 0$.

Вариант № 19

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:
а) через точку $M_0(0; 3; 2)$ параллельно двум векторам $\overline{a}_1 = \{-1; 3; 2\}$ и $\overline{a}_2 = \{-2; 2; -1\}$;
б) через три точки $A(-3; 4; -2)$, $B(1; -3; -1)$, $C(-1; -2; -4)$;
в) через точку $A(4; -2; 6)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-1}{4} = \dfrac{z-3}{2}$;
г) через точку $M_0(-1; -2; 4)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:
а) точку $M_0(1; 2; 4)$ параллельно вектору $\overline{a} = \{2; 0; 4\}$;
б) две точки $A(1; 1; 3)$ и $B(-5; 3; -7)$;
в) точку $M_0(1; 1; 0)$ в направлении, которое составляет с осями координат *Oy* и *Oz* углы $\beta = 120^\circ$ и $\gamma = 135^\circ$, соответственно;
г) точку $M_0(1; -1; 1)$ перпендикулярно плоскости $2x + y - 2z - 1 = 0$.

3. Из общих уравнений прямой

$$\begin{cases} 3x+4y+3z+1=0, \\ 2x-4y+2z-4=0 \end{cases}$$

получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой

$$\begin{cases} x=2t+5 \\ y=-2t+3 \\ z=2t+2 \end{cases}$$

и плоскостью $3x+y-5z-2=0$.

5. Определите расстояния от точки $M(8;4;-9)$ до плоскости $2y-3z+4=0$ и до прямой $\dfrac{x-5}{8}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-7}{3}$.

6. Определите тип и постройте поверхности

а) $x^2+y^2+z^2=8x-12$;

б) $y^2+z^2=9$;

в) $y^2=-4+z$;

г) $x^2+y^2-36z^2=0$;

д) $1-z^2-y^2=x$;

е) $-x^2+y^2+z^2-9=0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:

а) $z=1+x^2+y^2$, $x=2$, $y=2$, $z=15$;

б) $z=4-y^2$, $z=0$, $x=3$, $x=0$, $y=0$.

Вариант № 20

1. Составьте уравнение плоскости, которая проходит:

а) через точку $M_0(1;5;-3)$ параллельно двум векторам $\bar{a}_1=\{-3;2;1\}$ и $\bar{a}_2=\{2;0;4\}$;

б) через три точки $A(1;3;6)$, $B(2;2;1)$, $C(-1;0;1)$;

в) через точку $A(-4;6;-3)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z+1}{3}$;

г) через точку $M_0(-5;-3;2)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

2. Составьте канонические уравнения прямой, проходящей через:
а) точку $M_0(1;3;-2)$ параллельно вектору $\overline{a}=\{1;-4;3\}$;
б) две точки $A(1;3;0)$ и $B(4;-1;2)$;
в) точку $M_0(-6;0;3)$ в направлении, которое составляет с осями координат Ox и Oy углы $\alpha=60^\circ$ и $\beta=135^\circ$, соответственно;
г) точку $M_0(-2;1;3)$ перпендикулярно плоскости $x-5y+6z+8=0$.

3. Из общих уравнений прямой
$$\begin{cases}5x+2y-2z-4=0,\\ x+2y+2=0\end{cases}$$
получите её канонические и параметрические уравнения.

4. Найдите точку пересечения и угол между прямой
$$\begin{cases}x=2t-1\\ y=-t+1\\ z=t+2\end{cases}$$
и плоскостью $x+2y-3z-4=0$.

5. Определите расстояния от точки $M(2;0;6)$ до плоскости $6x+5y-4z+4=0$ и до прямой $\dfrac{x+3}{6}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{z+10}{0}$.

6. Определите тип и постройте поверхности
а) $x^2+y^2+z^2=-8y-12$;
б) $x^2+y^2=1$;
в) $z^2=y-3$;
г) $-9x^2+y^2+z^2=0$;
д) $1-x^2-z^2=y$;
е) $x^2-y^2+z^2-16=0$.

7. Постройте области, ограниченные поверхностями:
а) $z=4-x^2-y^2$, $x=1$, $x=-1$, $y=1$, $y=-1$, $z=0$;
б) $x^2+y^2=4x$, $z=12-y^2$, $z=0$.

4.2.8. Решение типового варианта и образец оформления индивидуального задания № 4

Аналитическая геометрия в пространстве

Задача 1. Составить уравнения плоскостей, которые проходят:

a_1) через точку $M(0;2;–4)$ параллельно двум векторам

$\vec{a}=\{-2;1;-3\}, \vec{b}=\{4;3;-1\}$

a_2) через точку $M(0;2;–4)$ перпендикулярно двум плоскостям

$$3x-5y+2z-4=0, \quad x+2y-z+3=0;$$

a_3) через точку $M(0;2;–4)$ и прямую

$$\frac{x}{-1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z-5}{7};$$

a_4) через две параллельные прямые

$$x=2t-1,\ y=t+3,\ z=3t-2 \text{ è } x=2t-5,\ y=t,\ z=3t+2;$$

b) через три точки $M_1(3;-1;4), M_2(-2;1;3), M(5;-1;-3)$;

c) через точку $M_1(2;-3;-2)$ перпендикулярно прямой l

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-5}$$

e) через точку $A(-3;1;4)$ и отсекает на координатных осях равные положительные отрезки.

Р е ш е н и е

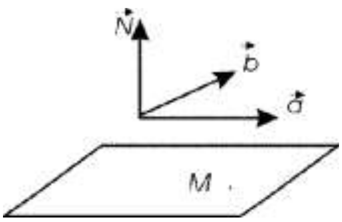
a_1) через точку $M(0;2;–4)$ параллельно двум векторам

$\vec{a}=\{-2;1;-3\}, \vec{b}=\{4;3;-1\}$

Используем уравнение плоскости через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$ с нормальным вектором $\vec{N}=\{A;B;C\}$

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Точка дана по условию $M(0;2;–4)$, а в качестве вектора нормали можно использовать векторное произведение векторов



$$\vec{N}=[\vec{a}\times\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -2 & 1 & -3\\ 4 & 3 & -1\end{vmatrix}=\{8;-14;-10\}$$

Уравнение плоскости:

$$8(x-0)-14(y-2)-10(z+4)=0, \Rightarrow 8x-14y-10z+12=0$$

a_2) через точку $M(0;2;–4)$ перпендикулярно двум плоскостям

$$3x-5y+2z-4=0,\quad x+2y-z+3=0.$$

Решение

Используем то же уравнение плоскости, что и в предыдущем случае. Вектор нормали искомой плоскости найдется как векторное произведение векторов нормалей данных двух плоскостей. Из уравнение плоскостей имеем:

$\vec{N}_1=\{3;–5;2\}$, $\vec{N}_2=\{1;2;–1\}$

$$\vec{N}=[\vec{N}_1\times\vec{N}_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -5 & 2\\ 1 & 2 & -1\end{vmatrix}=\{1;5;11\}$$

Уравнение плоскости:

$$1(x-0)+5(y-2)+11(z+4)=0,\Rightarrow\ x+5y+11z+34=0$$

a_3) через точку $M(0;2;–4)$ и прямую

$$\frac{x-2}{-1}=\frac{y+4}{2}=\frac{z}{-3}.$$

Решение

Используем то же уравнение плоскости, что и в предыдущем случае. Для получения вектора нормали необходимо иметь два известных вектора, перпендикулярных вектору нормали искомой плоскости. Один вектор – направляющий вектор прямой $\vec{s}=\{–1;2;–3\}$. Второй вектор можно образовать, соединив точку $M(0;2;–4)$ с известной точкой прямой $M_0(2;–4;0)$. Итак, вектор $\vec{M_0M}=\{–2;6;–4\}$. Составляем их векторное произведение

$$\vec{N}=[\vec{s}\times\vec{M_0M}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 2 & -3\\ -2 & 6 & -4\end{vmatrix}=\{10;2;–2\}$$

Уравнение плоскости:

$$10(x-0)+2(y-2)-2(z+4)=0,\Rightarrow\ 10x+2y-2z-12=0.$$

a_4) через две параллельные прямые

$$x=2t-1,\ y=t+3,\ z=3t-2\ \text{è}\ x=2t-5,\ y=t,\ z=3t+2.$$

Решение

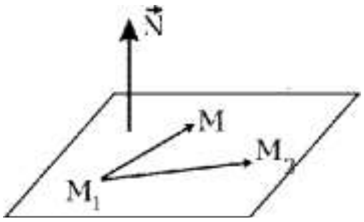
Используем то же уравнение плоскости, что и в предыдущем случае. Точку для составления уравнения плоскости можно взять любую из точек прямых, например $M_1(-1;3;-2)$. Для получения вектора нормали необходимо иметь два известных вектора, перпендикулярных вектору нормали искомой плоскости. Так как прямые параллельны, то они характеризуются одним направляющим вектором $\vec{s}=\{2;1;3\}$. Второй вектор можно образовать, соединив известные точки прямых $M_1(-1;3;-2)$ и $M_2(-5;0;2)$. Итак, получаем вектор $\vec{M}_1M_2=\{-4;-3;4\}$. Составляем векторное произведение

$$\vec{N}=[\vec{s}\times\vec{M}_1M_2]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 1 & 3\\ -4 & -3 & 4\end{vmatrix}=\{13;-20;2\}$$

Уравнение плоскости:

$$13(x+1)-20(y-3)+2(z+2)=0,\Rightarrow 13x-20y+2z+77=0.$$

b) через три точки $M_1(3;-1;4), M_2(-2;1;3), M(5;-1;-3)$



В качестве фиксированной точки берем любую из трех, например $M_0(x_0;y_0;z_0)=M_1(3;-1;4)$, а в качестве вектора нормали – результат векторного умножения

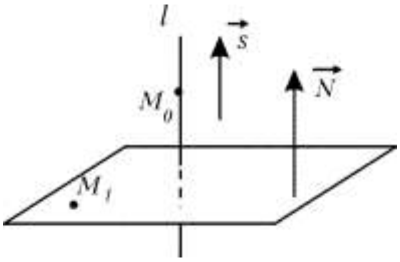
$$\vec{N}=[\overleftarrow{M_1M_2}\times\overleftarrow{M_1M}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -5 & 2 & -1\\ 2 & 0 & -7\end{vmatrix}=\{-14;-37;-4\},\ \text{èëè}\ \vec{N}=\{14;37;4\}$$

Уравнение плоскости:

$$14(x-3)+37(y+1)+4(z-4)=0,\Rightarrow 14x+37y+4z-21=0$$

c) через точку $M_1(2;-3;-2)$ перпендикулярно прямой l

$$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+2}{3}=\frac{z}{-5}$$



Фиксированная точка плоскости $M_1(2;-3;-2)$. Вектором нормали может служить направляющий вектор прямой $\vec{N}=\vec{s}=\{-4;3;-5\}$

Уравнение искомой плоскости

$$-4(x-2)+3(y+3)-5(z+2))=0,\Rightarrow 4x-3y+5z-7=0$$

d) через точку $A(-3;1;4)$ и отсекает на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки.

Для того, чтобы плоскость отсекала на координатных осях равные по величине и по знаку отрезки достаточно, чтобы ее вектор нормали имел равные по знаку и величине координаты, например $\vec{N}=\{1;1;1\}$

Уравнение искомой плоскости будет

$$1(x+3)+1(y-1)+1(z-4)=0 \Rightarrow x+y+z-2=0$$

Задача 2. Составить канонические уравнения прямых, которые проходят:

a) через точку $M_0(-2;1;3)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{2;-3;-4\}$;

b) через две точки $A(0;-1;-2)$, $B(4;3;-1)$;

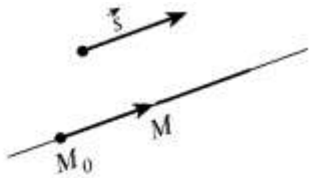
c) через точку $M_0(5;-3;1)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OZ углы 60^0 и 135^0 соответственно;

d) через точку $M_0(3;-2;-4)$ перпендикулярно плоскости $3y-4z-7=0$

Р е ш е н и е

a) через точку $M_0(-2;1;3)$ параллельно вектору $\vec{a}=\{2;-3;-4\}$

Используя каноническое уравнение прямой $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$, где $M_0(x_0;y_0;z_0)$ – фиксированная точка прямой, а $\vec{s}=\{m;n;p\}$ – ее направляющий вектор, которым в данной ситуации служит вектор $\vec{a}=\{2;-3;-4\}$,



получаем уравнение искомой прямой

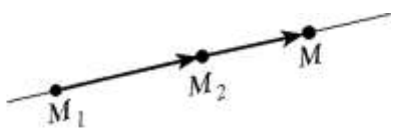
$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-3}{-4}$$

b) через две точки $A(0;-1;-2)$, $B(4;3;-1)$

Используем уравнение

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

и, приняв в качестве первой точки точку A, получаем



$$\frac{x}{4-0}=\frac{y+1}{3+1}=\frac{z+2}{-1+2}\Rightarrow\frac{x}{4}=\frac{y+1}{4}=\frac{z+2}{1}$$

c) через точку $M_0(5;-3;1)$ в направлении, которое составляет с осями координат OX и OZ углы 60^0 и 135^0 соответственно

Найдем сначала третий угол, который данное направление составляет с осью OY. Направляющие косинусы указанного направления, которые являются координатами единичного вектора направления, удовлетворяют условию

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

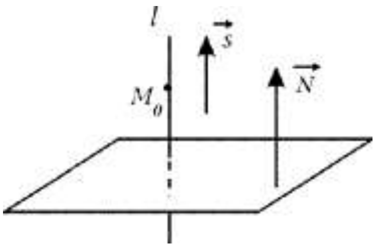
$$\cos^2 60^0+\cos^2\beta+\cos^2 135^0=1\Rightarrow\cos^2\beta=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}\Rightarrow\cos\beta=\pm\frac{1}{2}$$

Таким образом, единичный вектор направления, который одновременно может служить и направляющим вектором прямой

$$\vec{a}^0=\{\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma\}=\left\{\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$$

Получаем две прямые (в качестве направляющего вектора прямой возьмем удвоенный вектор

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{1}=\frac{z-1}{\sqrt{2}},\qquad\frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z-1}{\sqrt{2}}$$



d) через точку $M_0(3;-2;-4)$ перпендикулярно плоскости

$$3y-4z-7=0$$

В этом случае нормальный вектор плоскости служит направляющим вектором прямой $\vec{s}=\vec{N}=\{0;3;-4\}$ и уравнение прямой

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+2}{3}=\frac{z+4}{-4}$$

Задача 3. Из общих уравнений прямой $\begin{cases}5x+y+2z+4=0\\x-3y-3z+2=0\end{cases}$

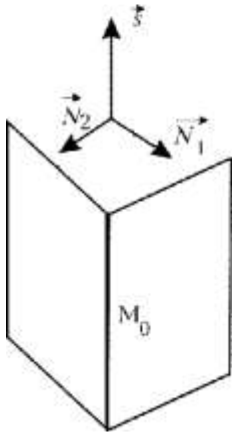
получить ее канонические и параметрические уравнения.

Р е ш е н и е

Найдем на прямой конкретную точку, для чего возьмем, к примеру $z=0$, и найдем остальные координаты из системы

$$\begin{cases} 5x+y+4=0 \\ x-3y+2=0 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{5}{8},\ y=-\frac{7}{8}$$

В качестве направляющего вектора берем вектор векторного произведения нормалей плоскостей, данных в общих уравнениях прямой



$$\vec{s}=[\vec{N}_1,\vec{N}_2]=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}=\{3;17;-16\}$$

Уравнение искомой прямой

$$\frac{x+5/8}{3}=\frac{y+7/8}{17}=\frac{z}{-16}$$

Задача 4. Найти точку пересечения и угол между прямой
$x=-2t-3,\ y=2t-4,\ z=t-3$ и плоскостью $5x-2y-4z+5=0.$

Р е ш е н и е

Для нахождения точки пересечения решим систему

$$\begin{cases} 5x-2y-4z+5=0 \\ x=-2t-3 \\ y=2t-4 \\ z=t-3 \end{cases} \quad 5(-2t-3)-2(2t-4)-4((t-3)=0 \Rightarrow -18t+5=0,$$

$$t=\frac{5}{18}, \Rightarrow x=-\frac{32}{9},\ y=-\frac{31}{9},\ z=-\frac{49}{9}$$

Косинус угла между прямой и плоскостью равен синусу угла между направляющим вектором прямой $\vec{s}=\{-2;2'1\}$ и нормальным вектором плоскости $\vec{N}=\{5;-2;-4\}$.

$$\sin\varphi=\frac{|\vec{s}\cdot\vec{N}|}{|\vec{s}||\vec{N}|}=\frac{|\{-2;2;1\}\{5;-2;-4\}|}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{25+4+16}}=\frac{18}{9\sqrt{5}}$$

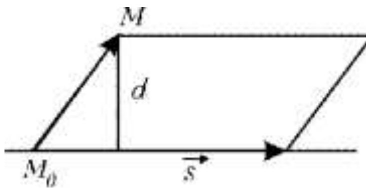
Задача 5. Определить расстояния от точки $M(3;4;–2)$ до плоскости

$3x-2z+7=0$ и до прямой $x=-2,\ y=3t-4,\ z=2t+3$

Р е ш е н и е

Расстояние от точки до плоскости определим по формуле

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\cdot3+0\cdot4-2\cdot(-2)+7|}{\sqrt{3^2+0^2+(-2)^2}}=\frac{20}{\sqrt{13}}$$



На данной прямой известна точка $M_0(-2;-4;3)$ и ее направляющий вектор $\vec{s}=\{0;3;2\}$. Расстояние d от точки M до прямой будем рассматривать как длину высоты параллелограмма, построенного на векторах $\overleftarrow{M_0M}$ и $\vec{s}$ и найдем по формуле (площадь параллелограмма делится на длину основания, а площадь находим, используя векторное произведение)

$$d=\frac{|\overleftarrow{M_0M}\times\vec{s}\,|}{|\vec{s}\,|}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{0^2+3^2+2^2}}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 5 & 8 & -5\\ 0 & 3 & 2\end{matrix}\right\|= \quad =\frac{1}{\sqrt{13}}|\{31;-10;15\}|=\frac{\sqrt{1286}}{\sqrt{13}}\approx 9{,}95$$

Задача 6. Построить поверхности

$a)\ z^2-x^2+4y^2+16=0$ $\qquad b)\ x^2+z^2=2-5y$

$c)\ x^2=y^2+z^2$ $\qquad d)\ y^2-4y+z^2+2z+1=0$

$e)\ y=x^2-3x$ $\qquad f)\ 3x+2\sqrt{3-z}=0$

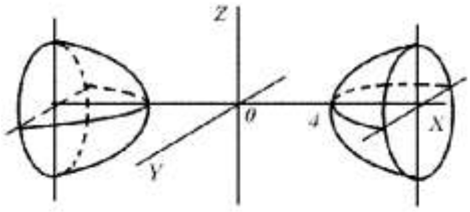
Р е ш е н и е

$a)\ z^2-x^2+4y^2+16=0$

Преобразование уравнения состоит в переносе свободного члена 16 в правую часть уравнения, затем обе части уравнения делим на это число, чтобы получить единицу (или -1).

$$-x^2+4y^2+z^2=-16,\qquad -\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{16}=-1$$

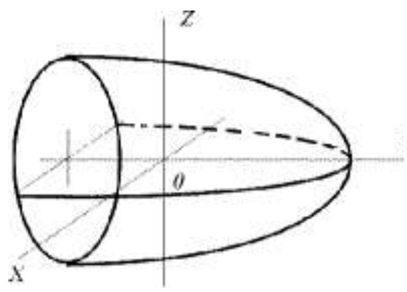
Получили каноническое уравнение двухполостного гиперболоида, осью симметрии которого служит ось OX, так как знак «минус» в левой части уравнения стоит перед x^2



$b)$ $x^2 + z^2 = 2 - 5y$

Выносим коэффициент -5 перед y за скобку, получаем

$$x^2 + z^2 = -5(y - 2/5)$$



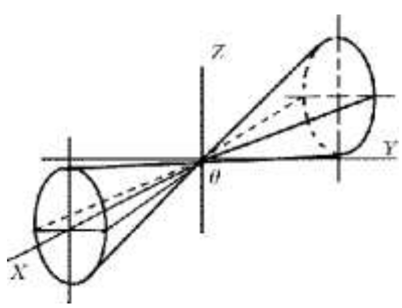
В уравнение переменная z входит только в первой степени (отсутствует z^2), поэтому оно определяет параболоид с вершиной в точке $O_1(0;2/5;0)$ и осью симметрии OY, а направлен раболоид влево, так как перед переменной y в уравнении знак «минус».

$c)$ $x^2 = y^2 + z^2$

Переносим x^2 в правую часть уравнения и запишем его в виде:

$$y^2 + z^2 - x^2 = 0$$

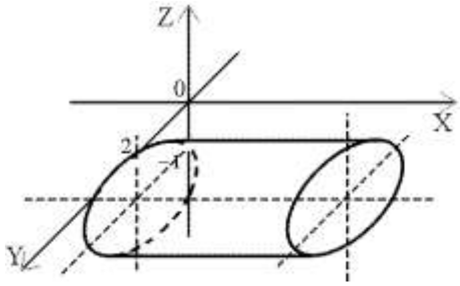
Это уравнение определяет коническую поверхность. Осью конуса служит ось OX , так как знак «минус» стоит перед x^2.



$d)\ y^2 - 4y + z^2 + 2z + 1 = 0$

$(y^2 - 4y + 4) - 4 + (z^2 + 2z + 1) = 0$

$(y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$

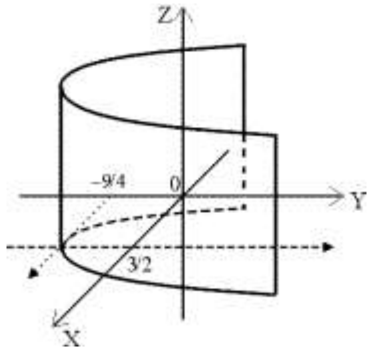


Преобразование уравнения состоит в выделении полных квадратов для y и z. В уравнении отсутствует переменная x, ппоэтому оно определяет круговой цилиндр, с образующей параллельной оси OX, а направляющей является окружность со смещенным по осям OY и OZ центром

$e)\ y = x^2 - 3x$

$y = x^2 - 3x + (1{,}5)^2 - (1{,}5)^2$

$y + 2{,}25 = (x - 1{,}5)^2$



В уравнении отсутствует переменная z, поэтому оно определяет параболический цилиндр, образующая которого параллельна оси OZ, а направляющей является парабола со смещенной по осям OX и OY вершиной

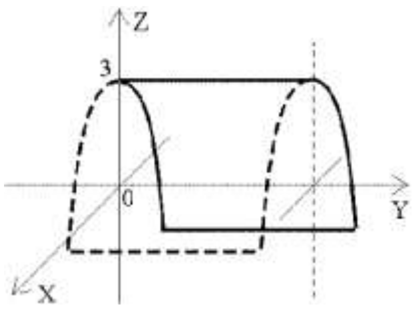
$f)\ 3x + 2\sqrt{3-z} = 0$

$3x = -2\sqrt{3-z}, \qquad 9x^2 = 4(3-z),$

$9x^2 = -4(z-3)$

Преобразованное уравнение определяет параболический цилиндр с образующей параллельной оси OY, так как в уравнении нет переменной y и вершиной смещенной на 3 единицы вверх по оси OZ.

Но по виду исходного уравнения, в котором $x \le 0,\ z \le 3$. заключаем, что оно определяет полуцилиндр (на рисунке выделен сплошной линией).



Задача 7. Построить области, заданные условиями

$a)\quad x^2+y^2+z^2 \le 6z,\quad z \ge 2+x^2+y^2$

Решение

Построим сначала на отдельных рисунках поверхности

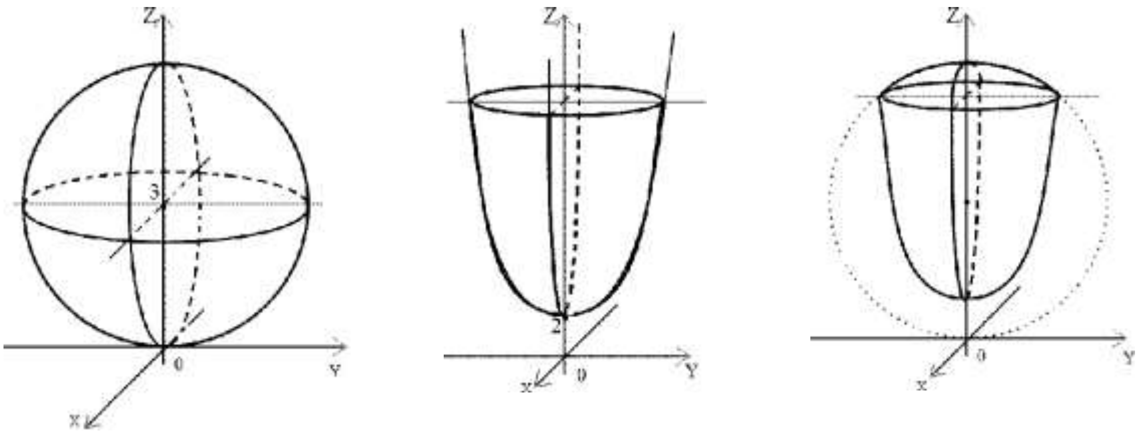
$x^2+y^2+z^2=6z$ и $z=2+x^2+y^2$

Первое уравнение определяет сферу со смещенным центром

$x^2+y^2+(z^2-6z+9)-9=0,\quad x^2+y^2+(z-3)^2=9$ (рис. a))

Второе уравнение определяет параболоид $(z-2)=x^2+y^2$ с вершиной в точке $z=2$ на оси OZ и направленный чашей вверх (рис.b))

Затем совмещаем все на одном рисунке (рис. c)) и получаем тело, ограниченное, ограничено снизу параболоидом, а сверху -- сферой в соответствие со знаками неравенств в условии задачи (точки области должны лежать внутри сферы и внутри параболоида).



a) b) c)

$b)\quad z=\sqrt{1-y},\quad y=x^2,\quad z\ge 0.$

Решение

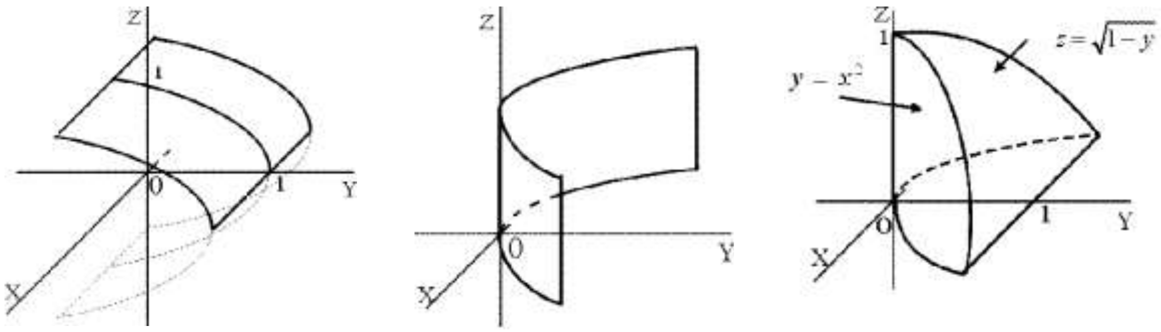
Первое уравнение можно сначала записать в виде

$$z^2=1-y,\quad z^2=-(y-1).$$

Оно не содержит переменной x, значит это уравнение цилиндрической поверхности, с образующей, параллельной оси OX, а направляющей цилиндра является парабола в плоскости YOZ, ось симметрии которой параллельна оси OZ, вершина смещена на единицу по оси OY, а ветви направлены в отрицательном направлении оси OY. Кроме этого, условие $z \geq 0$ означает, что от цилиндра нужно взять только часть над плоскостью XOY, соответствующую положительным значениям z (рис. a)).

Уравнение $y = x^2$ является уравнением параболического цилиндра, вытянутого вдоль оси OZ, так как отсутствует в уравнении переменная z, направляющей является парабола в плоскости XOY с вершиной в начале координат, осью симметрии OY и ветвями, направленными в положительном направлении оси (рис. b)).

Тело, ограниченное указанными поверхностями, показано на рис. c). Сверху оно ограничено поверхностью цилиндра $z = \sqrt{1-y}$, снизу плоскостью XOY, а сбоку цилиндрической поверхностью $y = x^2$.



a) b) c)

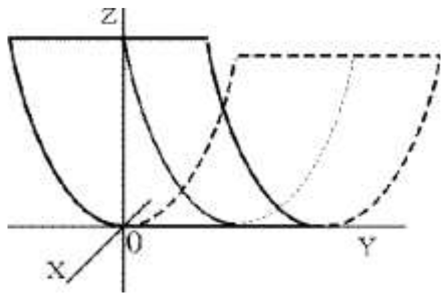
$c)\quad z = x^2, \quad x + y = 1, \quad y = x, \quad x \geq 0, \quad y > 0, \quad z \geq 0.$

Р е ш е н и е

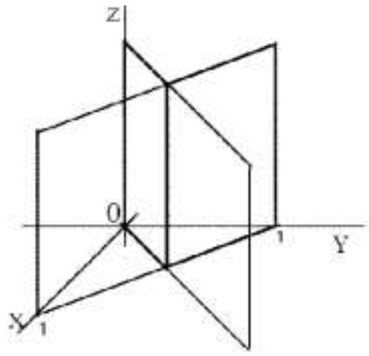
Первое уравнение параболического цилиндра, с образующей, параллельной оси OY, а направляющей цилиндра является парабола в плоскости XOZ. Кроме этого, условия $x, y, z > 0$ означают, что от цилиндра нужно взять только половину, соответствующую положительным значениям x, y, z. Данная часть цилиндра представлена на рис.a).

Уравнения $x + y = 1$, $y = x$ являются уравнениями плоскостей, проходящих параллельно оси OZ. Кроме этого, наше тело будет ограничено плоскостями координат YOZ, XOY, так как есть условия $x = 0$, $z = 0$. Система плоскостей изображена на рис b).

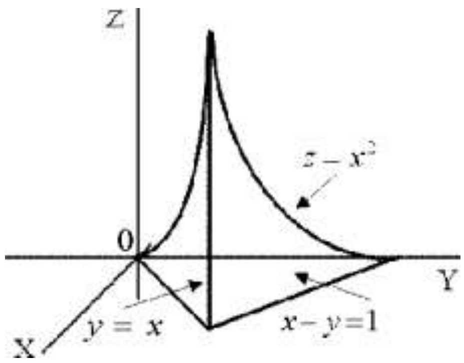
Наконец, совмещаем все на одном рисунке и получаем тело, ограниченное снизу плоскостью XOY, с боков плоскостями $x+y=1$, $y=x$ и сверху цилиндрической поверхностью $z=x^2$ (рис. c)).



a)



b)



c)

5. ИТОГОВЫЙ КОНТРОЛЬ

5.1. Требования для сдачи экзамена

К экзамену допускаются только те студенты, у которых зачтены все индивидуальные задания.

Студенты, обучающиеся по классической заочной форме (КЗФ), сдают экзамен во время зимней экзаменационной сессии по билетам (в устной или письменной форме). Каждый билет содержит пять задач. Экзамен считается сданным, если решены 3 задачи и более. Преподаватель может задать вопросы по теории изучаемого материала.

Студенты, обучающиеся с использованием дистанционных образовательных технологий (ДОТ), сдают экзамен в тестовой форме (on-line режим).

5.2. Вопросы для подготовки к экзамену

Линейная алгебра

1. Что такое определитель? Какие его основные свойства? Дайте определения минора и алгебраического дополнения. Сформулируйте основное правило вычисления определителей.

2. Что такое матрица, отличие матрицы от определителя. Какие Вы можете назвать виды матриц? Как осуществляются линейные операции над матрицами?

3. Как перемножить две матрицы? Сформулируйте правило умножения матрицы на матрицу. Свойства произведения матриц.

4. Изложите схему нахождения обратной матрицы. Любая ли матрица имеет обратную? Что такое вырожденная матрица? Расскажите об основных типах матричных уравнений и схемах их решения.

5. Дать определение решения системы линейных уравнений. Расшифруйте понятия "совместная," "несовместная, "определённая", "неопределённая" системы.

6. Что называется рангом матрицы? Как он находится? Сформулируйте теорему Кронеккера – Капелли. При каких условиях система линейных уравнений имеет единственное и множество решений ?

7. В чем заключается матричный метод и Крамера решения систем. В каких случаях они применимы?

8. Опишите метод Гаусса решения систем линейных уравнений. Какие неизвестные и в каком случае называются базисными, какие свободными? Что такое общее и частное решения неопределенной системы?

9. Какие особенности имеет система однородных линейных уравнений? В каких случаях она имеет ненулевые решения?

Векторная алгебра

1. Что называется вектором, модулем вектора?

2. Дайте понятия коллинеарных, компланарных, свободных, равных векторов. Сформулируйте условие равенства векторов.

3. Как выполняются линейные операции над векторами? Каковы свойства этих операций?

4. Какие векторы называются линейно зависимыми и независимыми?

5. Дайте понятие базиса на прямой, плоскости и в пространстве. Что такое координаты вектора.

6. Какой базис называется декартовым? Как осуществляются линейные операции над векторами в координатной форме?

7. Модуль вектора. Координаты вектора, заданного координатами начальной и конечной точек. Расстояние между двумя точками.

8. Дать понятие орта вектора. Направляющие косинусы вектора.

9. Что называется скалярным произведением двух векторов? Каковы его свойства? Как выражается скалярное произведение через координаты перемножаемых векторов? Для решения каких задач и как может быть использовано скалярное произведение ?

10. Что называется векторным произведением двух векторов? Каковы его свойства? Как выражается векторное произведение через координаты перемножаемых векторов? Для решения каких задач и как может быть использовано векторное произведение?

11. Что называется смешанным произведением трех векторов? Каковы его свойства? Как выражается смешанное произведение через координаты перемножаемых векторов? Для решения каких задач и как может быть использовано смешанное произведение?

12. Запишите в векторной и координатной формах условия коллинеарности, перпендикулярности и компланарности векторов.

Аналитическая геометрия на плоскости

1. Прямая линия на плоскости, её общее уравнение.

2. Дайте понятие нормального и направляющего векторов прямой, углового коэффициента.

3. Запишите различные виды уравнений прямой на плоскости и укажите геометрический смысл параметров уравнений.

4. Как определяется взаимное расположение прямых на плоскости. Запишите формулы для определения угла между прямыми, условия параллельности и перпендикулярности в случае различных видов уравнений прямых. Как найти точку пересечения прямых?

5. Выведите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой. Как определить расстояние между параллельными прямыми?

6. Какая линия на плоскости называется окружностью? Запишите каноническое уравнение и поясните схему построения окружности.

7. Дайте определение эллипса. Запишите каноническое уравнение и поясните схему построения эллипса.

8. Какая линия на плоскости называется гиперболой? Запишите каноническое уравнение и поясните схему построения гиперболы.

9. Какая линия на плоскости называется параболой? Запишите каноническое уравнение параболы. Поясните схему построения параболы.

10. Изложите схему приведения общего уравнения кривой к каноническому виду.

11. Дайте понятие полярной системы координат. Уравнения линий в полярной системе координат. Приведите примеры. Как связаны декартовые и полярные координаты точки на плоскости? Как построить кривую в полярной системе координат?

12. Опишите параметрический способ задания и построения линий на плоскости. Приведите примеры.

Аналитическая геометрия в пространстве

1. Плоскость, её общее уравнение.

2. Как определяется взаимное расположение плоскостей ? Запишите формулы для определения угла между плоскостями, условия параллельности и перпендикулярности плоскостей.

3. Выведите формулу для вычисления расстояния от точки до плоскости. Как определить расстояние между параллельными плоскостями?

4. Запишите различные уравнения прямой в пространстве и поясните смысл параметров, входящих в уравнения.

5. Изложите схему приведения общего уравнения прямой в пространстве к каноническому виду.

6. Как определяется взаимное расположение прямых в пространстве? Запишите формулы для определения угла между прямыми в пространстве, условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве.

7. Выведите формулу для вычисления расстояния от точки до прямой в пространстве. Как определить расстояние между параллельными прямыми в пространстве?

8. Как определяется взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве ? Запишите формулы для определения угла между прямой и плоскостью, условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.

9. Как найти точку пересечения прямой и плоскости в пространстве?

10. Назовите поверхности 2-го порядка и напишите их канонические уравнения.

5.3. Образцы билетов к экзамену для КЗФ

Экзаменационный билет № 0

1. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 5 \\ -2 & 7 & 11 \\ -1 & -6 & 4 \end{vmatrix}$$

2. Найти косинус угла при вершине A и площадь треугольника с вершинами в точках $A(3;-4;1)$, $B(-2;8;0)$, $C(-1;5;-2)$.

3. Записать уравнение прямой, проходящей через точку $M(-9;4)$ перпендикулярно прямой $\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{-7}$.

4. Найти координаты точки пересечения прямой

$$\begin{cases} x=2t+7 \\ y=-t+4 \\ z=5t-2 \end{cases}$$ и плоскости $3x+9y-3z+1=0$

5. Построить

a) кривую $x=-2-\sqrt{2-3y}$;

b) поверхность $2x^2+4y^2-3z+1=0$.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Литература обязательная

1. Ильин В.А. Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – М.: 1981.
2. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Н.В. Ефимов. – М.: Наука, 1969.
3. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. Часть 1/ П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова.– М., 1986.

6.3. Учебно-методические пособия

4. Терехина Л.И. Высшая математика. Часть 1. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия: учебное пособие / Л.И. Терехина, И.И. Фикс. –Томск: Изд-во ТПУ, 2008. –168 с.

6.4. Internet-ресурсы

5. Сайт ТПУ.– Режим доступа: http://www.tpu.ru, вход свободный.

Учебное издание

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Методические указания и индивидуальные задания

Составители

ТЕРЕХИНА Людмила Ивановна
ФИКС Иван Иванович

Рецензент
кандидат технических наук,
доцент кафедры ВММФ ФТИ

И.А. Цехановский

Редактор *С.В. Ульянова*

Компьютерная верстка *Т.И. Тарасенко*

Отпечатано в Издательстве ТПУ в полном соответствии с качеством предоставленного оригинал-макета

Подписано к печати . Формат 60×84/16. Бумага «Снегурочка».
Печать Xerox. Усл.печ.л. 7,5. Уч.-изд.л. 6,79.
Заказ . Тираж экз.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет
Система менеджмента качества
Издательства Томского политехнического университета сертифицирована
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту BS EN ISO 9001:2008

ИЗДАТЕЛЬСТВО ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.
Тел./факс: 8(3822)56-35-35, www.tpu.ru