ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ, ЭЛЕКТРОНИКИ И АВТОМАТИКИ (ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

ПО КУРСУ
“МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ”

СОСТАВИТЕЛЬ ШАТИНА А.В.

МОСКВА 2004

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

ТИПОВОЙ РАСЧЕТ

ЗАДАЧА 1. Решить задачу выпуклого программирования.

1. $x^2 - xy + y^2 + 2x - 5y \to \min, \quad 2x + y - 3 \le 0, \quad x - y - 1 \le 0$
2. $x^2 + y^2 - 10x - 15y \to \min, \quad 2x + 3y - 5 \le 0, \quad 2x + y - 1 \le 0$
3. $2x^2 - xy + y^2 + 3x - y \to \min, \quad -2x + y - 1 \le 0, \quad -5x - y - 1 \le 0$
4. $3x^2 + xy + y^2 - 5x - 5y \to \min, \quad x + 3y - 5 \le 0, \quad x - y - 3 \le 0$
5. $x^2 - xy + 5y^2 - 3x + 4y \to \min, \quad x + y - 1 \le 0, \quad x - 2y - 2 \le 0$
6. $x^2 - 2xy + 4y^2 - 2x + 4y \to \min, \quad -x + 2y - 3 \le 0, \quad 5x + y - 1 \le 0$
7. $x^2 - 2xy + 2y^2 - x - 2y \to \min, \quad -x + 3y \le 0, \quad x + y - 2 \le 0$
8. $2x^2 + xy + y^2 - x - 3y \to \min, \quad x + 4y \le 0, \quad -x - y - 2 \le 0$
9. $x^2 + xy + y^2 - x - 2y \to \min, \quad x + 3y + 7 \le 0, \quad x - y + 5 \le 0$
10. $x^2 - xy + 2y^2 - 3x + y \to \min, \quad x + y + 1 \le 0, \quad 3x + 2y - 1 \le 0$
11. $2x^2 + xy + y^2 - 8x + 10y \to \min, \quad x + 3y \le 0, \quad 2x + y - 10 \le 0$
12. $x^2 - xy + 3y^2 + 3x - y \to \min, \quad -2x + y \le 0, \quad x - 2y - 10 \le 0$
13. $2x^2 - xy + 3y^2 + x - y \to \min, \quad -x + y - 1 \le 0, \quad 2x - y - 2 \le 0$
14. $x^2 + xy + 3y^2 - x + y \to \min, \quad x + 2y \le 0, \quad x - 2y - 2 \le 0$
15. $x^2 - 2xy + 5y^2 - x + 2y \to \min, \quad x - y + 2 \le 0, \quad 2x + y - 4 \le 0$
16. $x^2 + xy + y^2 - x - y \to \min, \quad 2x + 5y \le 0, \quad x + 2y - 1 \le 0$
17. $x^2 - xy + 2y^2 + 2x + y \to \min, \quad -x + y + 2 \le 0, \quad 2x + y - 4 \le 0$
18. $2x^2 + xy + y^2 - x - 3y \to \min, \quad x + 2y + 3 \le 0, \quad x - 5y - 7 \le 0$
19. $2x^2 + xy + 2y^2 + 5x - 5y \to \min, \quad x + 2y + 3 \le 0, \quad 2x + 3y + 6 \le 0$
20. $x^2 + xy + y^2 + 5x - 5y \to \min, \quad x + 2y + 5 \le 0, \quad -x + 3y - 4 \le 0$

ЗАДАЧА 2. Решить задачу линейного программирования графическим методом. Во всех вариантах $x_k \ge 0,\ k = 1,\dots,5$.

1	$2x_1 + x_2 - 4x_3 \to \max,$ $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 1 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = -1 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$	2	$2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 \to \min,$ $\begin{cases} -x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 1 \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_4 + 3x_5 = 7 \end{cases}$

3	$x_1+2x_2-2x_4+3x_5 \to \min,$ $\begin{cases} -x_1+4x_2-x_3+x_4+2x_5=4 \\ 7x_1-2x_2+3x_3+x_5=5 \\ 5x_1-3x_2+2x_3-x_4=1 \end{cases}$	4	$5x_1-x_2-x_4+2x_5 \to \max,$ $\begin{cases} 8x_1-3x_2+3x_3-x_4+x_5=4 \\ 5x_1-x_2+2x_3+x_5=4 \\ -4x_1-2x_2+x_4-3x_5=-5 \end{cases}$
5	$3x_1-x_2-2x_3+x_5 \to \min,$ $\begin{cases} 7x_1-3x_2+2x_3-2x_4+x_5=2 \\ 8x_1-5x_2+3x_3-2x_4=1 \\ 2x_2+x_4+x_5=3 \end{cases}$	6	$x_1-3x_2+3x_3-x_4+2x_5 \to \min,$ $\begin{cases} -3x_1+x_3+3x_4-2x_5=0 \\ -5x_1+4x_2-x_3+3x_4=2 \\ 3x_1-3x_2+2x_3-x_5=0 \end{cases}$
7	$4x_1+x_2-3x_4-x_5 \to \max,$ $\begin{cases} 8x_1-3x_2+x_3-4x_4+2x_5=1 \\ 5x_1-4x_2+x_3-3x_4=-2 \\ 5x_1+x_2-2x_4+3x_5=4 \end{cases}$	8	$3x_1+2x_2-3x_4+x_5 \to \max,$ $\begin{cases} 8x_1-4x_2+2x_3-3x_4+x_5=1 \\ 9x_1-5x_2+4x_3-x_4=3 \\ 5x_1-x_2-3x_4+2x_5=1 \end{cases}$
9	$2x_1+5x_2-x_4+4x_5 \to \min,$ $\begin{cases} 9x_1-4x_2+x_3-5x_4+2x_5=0 \\ 7x_1-5x_2+2x_3-3x_4=-1 \\ 6x_1+3x_2+x_3+4x_5=9 \end{cases}$	10	$x_1+x_2-4x_3+5x_5 \to \min,$ $\begin{cases} 6x_1-2x_2+2x_3-x_4+x_5=3 \\ 5x_1-4x_2+x_3-3x_4=-2 \\ 5x_1-x_2+2x_3+x_5=4 \end{cases}$
11	$x_1+2x_2-x_4+x_5 \to \max,$ $\begin{cases} 5x_1+2x_3+x_4-x_5=4 \\ 3x_1-6x_2-x_3+2x_4=0 \\ 5x_1-6x_2+2x_4-x_5=1 \end{cases}$	12	$2x_1+2x_2-3x_4+x_5 \to \max,$ $\begin{cases} 6x_1-4x_2+x_3+2x_4-x_5=3 \\ 6x_2+2x_3-x_4=3 \\ x_1-4x_2-x_4-3x_5=-4 \end{cases}$
13	$2x_1-x_2+2x_3+3x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 2x_1+10x_2+4x_3-x_4=7 \\ 8x_1-10x_2+3x_4-2x_5=1 \\ 5x_1-12x_2-2x_3+3x_4-x_5=-2 \end{cases}$	14	$3x_1-5x_2+2x_4-x_5 \to \min,$ $\begin{cases} 10x_2+3x_3-x_4+x_5=6 \\ x_1+6x_2+2x_3+x_5=5 \\ 5x_1-8x_2+x_4-3x_5=-2 \end{cases}$
15	$4x_1-3x_2+x_3+2x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 3x_1-10x_2-2x_3+2x_4-x_5=-3 \\ x_1-10x_2-3x_3+2x_4=-4 \\ x_1+x_4+x_5=2 \end{cases}$	16	$5x_1-7x_2-3x_3+2x_4 \to \min,$ $\begin{cases} 9x_1-8x_2+x_3+3x_4-2x_5=3 \\ 5x_1-8x_2-x_3+3x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+2x_3-x_5=3 \end{cases}$

17	$5x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_5 \to \min,$ $\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ 9x_1 - 14x_2 - x_3 + 4x_4 - 2x_5 = 0 \\ 7x_1 - 10x_2 + 2x_4 - 3x_5 = -1 \end{cases}$	18	$x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_5 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 + 8x_2 + 3x_3 + x_5 = 7 \\ 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \end{cases}$
19	$4x_1 - 5x_2 + 3x_4 - x_5 \to \max,$ $\begin{cases} 11x_1 - 16x_2 - x_3 + 5x_4 - 2x_5 = 1 \\ 4x_1 - 10x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \\ 3x_1 - 10x_2 - x_3 - 4x_5 = -6 \end{cases}$	20	$5x_1 - 4x_2 + x_4 + 2x_5 \to \min,$ $\begin{cases} x_1 - 8x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -4 \\ 5x_1 - 8x_2 - x_3 + 3x_4 = 1 \\ x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_5 = 5 \end{cases}$

ЗАДАЧА 3. Решить задачу № 2 симплекс-методом, используя x_0 в качестве первоначальной крайней точки.

1	$x_0 = (0,0,1,1,2)$	11	$x_0 = (0,0,2,1,1)$
2	$x_0 = (0,1,2,0,1)$	12	$x_0 = (0,0,2,1,1)$
3	$x_0 = (0,0,1,1,2)$	13	$x_0 = (0,0,2,1,1)$
4	$x_0 = (0,1,2,0,1)$	14	$x_0 = (0,0,2,1,1)$
5	$x_0 = (1/2,0,0,3/2,3/2)$	15	$x_0 = (0,0,2,1,1)$
6	$x_0 = (0,0,1,1,2)$	16	$x_0 = (1,1/2,0,0,1)$
7	$x_0 = (0,0,1,1,2)$	17	$x_0 = (0,0,2,1,1)$
8	$x_0 = (0,0,1,1,2)$	18	$x_0 = (0,0,2,1,1)$
9	$x_0 = (0,1,2,0,1)$	19	$x_0 = (1/2,0,3/2,0,3/2)$
10	$x_0 = (0,0,1,1,2)$	20	$x_0 = (1/2,0,3/2,0,3/2)$

ЗАДАЧА 4. Решить простейшую задачу классического вариационного исчисления.

1. $\int_2^3 (t^2 - 1)\dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(2) = 0, \ x(3) = 1$

2. $\int_1^e (2x - t^2\dot{x}^2)dt \to extr; \quad x(1) = e, \ x(e) = 0$

3. $\int_0^1 e^x \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0) = 0, \ x(1) = \ln 4$

4. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x\dot{x} + 12tx)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(1) = 0$

5. $\int_1^e (t\dot{x}^2 + x\dot{x})dt \to extr; \quad x(1) = 0, \; x(e) = 1$

6. $\int_0^1 (t^2\dot{x}^2 + 12x^2)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(1) = 1$

7. $\int_{-1}^1 (\dot{x}^2 + x^2)dt \to extr; \quad x(-1) = 1, \; x(1) = 1$

8. $\int_{-1}^1 (\dot{x}^2 + 4x^2)dt \to extr; \quad x(-1) = -1, \; x(1) = 1$

9. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 2x)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(1) = 0$

10. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + tx)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(1) = 0$

11. $\int_0^1 (4x\sin t - \dot{x}^2 - x^2)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(1) = 0$

12. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 6x\, sh2t)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(1) = 0$

13. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\, sh\,t)dt \to extr; \quad x(0) = -1, \; x(1) = 0$

14. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\, ch\,t)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(1) = 0$

15. $\int_0^{\pi/6} (\dot{x}^2 + x^2 - 4x\sin t)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(\pi/6) = 1$

16. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + x^2 + 6x\, sh2t)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(2) = 1$

17. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\, sh\,t)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(1) = 2$

18. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + x^2 + 4x\, ch\,t)dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(2) = 1$

19. $\int\limits_0^{\pi/2}(\dot{x}^2+x^2-4x\sin t)dt\to extr;\;\; x(0)=0,\; x(\pi/2)=2$

20. $\int\limits_0^{1}(\dot{x}^2+x^2+6x\,sh2t)dt\to extr;\;\; x(0)=0,\; x(1)=2$

ЗАДАЧА 5. Решить задачу Больца.

1. $\int\limits_0^{2}(\dot{x}^2-x)dt+x^2(2)\to extr$

2. $\int\limits_0^{1}(\dot{x}^2+2xt)dt+x^2(1)-2x(0)\to extr$

3. $\int\limits_0^{1}(\dot{x}^2+4xt)dt+2x^2(1)+2x(0)\to extr$

4. $\int\limits_0^{1}(\dot{x}^2-2xt)dt+x^2(1)+2x(0)\to extr$

5. $\int\limits_0^{1}(\dot{x}^2-4xt)dt+2x^2(1)-2x(0)\to extr$

6. $\int\limits_0^{1}(\dot{x}^2+6xt)dt+x^2(1)+4x(0)\to extr$

7. $\int\limits_0^{1}(\dot{x}^2-6xt)dt+x^2(1)-4x(0)\to extr$

8. $\int\limits_0^{1}(xt-\dot{x}^2)dt-x^2(0)+2x(1)\to extr$

9. $\int\limits_0^{1}(2xt-\dot{x}^2)dt-x^2(0)+3x(1)\to extr$

10. $\int\limits_0^{1}(12xt-\dot{x}^2)dt-x^2(0)+4x(1)\to extr$

11. $\int\limits_0^{1}(12xt-\dot{x}^2)dt-x^2(0)+6x(1)\to extr$

12. $\int\limits_0^{1}(12xt-\dot{x}^2)dt-x^2(0)-6x(1)\to extr$

13. $\int_0^1 (12xt - \dot{x}^2)dt - x^2(0) - 4x(1) \to extr$

14. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + x(t^2 - 1))dt + x^2(0) + 2x(2) \to extr$

15. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + x(t^2 - 2))dt + x^2(0) + 2x(2) \to extr$

16. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + x(6t^2 + 4))dt + x^2(0) + 2x(2) \to extr$

17. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + x(12t^2 - 8))dt + x^2(0) + 4x(2) \to extr$

18. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + x(-t^2 + 1))dt + x^2(0) - 4x(2) \to extr$

19. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + x(-t^2 + 2))dt + x^2(0) + 6x(2) \to extr$

20. $\int_0^2 (\dot{x}^2 + x(-12t^2 + 4))dt + x^2(0) + 2x(2) \to extr$

ЗАДАЧА 6. Решить изопериметрическую задачу.

1. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + x)dt \to extr; \quad \int_0^1 xtdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$

2. $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt \to extr; \quad \int_0^1 xtdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$

3. $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt \to extr; \quad \int_0^1 xtdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1/16$

4. $\int_0^1 (\dot{x}^2 - x)dt \to extr; \quad \int_0^1 xtdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1/4$

5. $\int_0^1 (\dot{x}^2 - 8x)dt \to extr; \quad \int_0^1 xtdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$

6. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 8x)dt \to extr; \quad \int_0^1 xtdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = -1$

7. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 4x)dt \to extr; \quad \int_0^1 xtdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = -1/4$

8. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 4x)dt \to extr; \quad \int_0^1 xtdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 2$

9. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 4x)dt \to extr; \quad \int_0^1 xtdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 4$

10. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 4x)dt \to extr; \quad \int_0^1 xtdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$

11. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + xt)dt \to extr; \quad \int_0^1 xdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$

12. $\int_0^1 (\dot{x}^2 - 4xt)dt \to extr; \quad \int_0^1 xdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$

13. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 4xt)dt \to extr; \quad \int_0^1 xdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 2$

14. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 6xt)dt \to extr; \quad \int_0^1 xdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$

15. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 6xt)dt \to extr; \quad \int_0^1 xdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1/4$

16. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 6xt)dt \to extr; \quad \int_0^1 xdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = -1/4$

17. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 12xt)dt \to extr; \quad \int_0^1 xdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 2$

18. $\int_0^1 (\dot{x}^2 - 12xt)dt \to extr; \quad \int_0^1 xdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1$

19. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 12xt)dt \to extr; \quad \int_0^1 xdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1/2$

20. $\int_0^1 (\dot{x}^2 + 24xt)dt \to extr; \quad \int_0^1 xdt = 0; \quad x(0) = 0, \quad x(1) = 1/2$

ЗАДАЧА 7. Решить задачу с подвижными концами.

1. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=1, \quad x(T)+T+1=0$

2. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=1, \quad x(T)+2T+3=0$

3. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=-1, \quad x(T)+T+3=0$

4. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=3, \quad x(T)+2T+1=0$

5. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=5, \quad x(T)+T-3=0$

6. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=5, \quad x(T)+2T-1=0$

7. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=-3, \quad x(T)-T-1=0$

8. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=-2, \quad x(T)-T-3=0$

9. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=2, \quad x(T)-3T-5=0$

10. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=3, \quad x(T)+4T+5=0$

11. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=-3, \quad x(T)-4T-5=0$

12. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=3, \quad x(T)+T+1=0$

13. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=-7, \quad x(T)-3T-2=0$

14. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0)=7, \quad x(T)+3T+2=0$

15. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0) = 7, \quad x(T) + 2T - 3 = 0$

16. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0) = 6, \quad x(T) + T - 3 = 0$

17. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0) = -6, \quad x(T) - 3T - 3 = 0$

18. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0) = 4, \quad x(T) + 3T + 2 = 0$

19. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0) = -4, \quad x(T) - 3T - 2 = 0$

20. $\int_0^T \dot{x}^2 dt \to extr; \quad x(0) = 8, \quad x(T) + 2T - 4 = 0$

ЗАДАЧА 8. Решить задачу Лагранжа.

1. $\int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x) dt \to extr; \quad x(0) = x(1) = 0$

2. $\int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x) dt \to extr; \quad x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = 0$

3. $\int_0^1 (\ddot{x}^2 - 48x) dt \to extr; \quad x(0) = \dot{x}(0) = x(1) = \dot{x}(1) = 0$

4. $\int_0^1 (\ddot{x}^2 + 48x) dt \to extr; \quad x(0) = 0, \; x(1) = 1$

5. $\int_1^e t\ddot{x}^2 dt \to extr; \quad x(1) = e + 1/2, \; x(e) = e^2/2, \; \dot{x}(1) = 1$

6. $\int_1^e t\ddot{x}^2 dt \to extr; \quad x(1) = 0, \; \dot{x}(1) = 1, \; \dot{x}(e) = 2$

7. $\int_1^e t\ddot{x}^2 dt \to extr; \quad x(1) = 0, \; \dot{x}(1) = 1, \; x(e) = e, \dot{x}(e) = 2$

8. $\int_1^e t^2\ddot{x}^2 dt \to extr; \quad x(1) = -1, \; \dot{x}(1) = e, \; x(e) = e$

9. $\int_1^e t^2\ddot{x}^2dt \to extr;\quad x(1)=0,\ \dot{x}(1)=1,\ \dot{x}(e)=1/e$

10. $\int_1^e t^2\ddot{x}^2dt \to extr;\quad x(1)=0,\ \dot{x}(1)=1,\ x(e)=1,\ \dot{x}(e)=1/e$

11. $\int_1^e t^3\ddot{x}^2dt \to extr;\quad x(1)=e/2,\quad x(e)=3/2,\quad \dot{x}(1)=(2-e)/2$

12. $\int_1^e t^3\ddot{x}^2dt \to extr;\quad x(1)=1,\quad \dot{x}(1)=-1,\quad \dot{x}(e)=-e^{-2}$

13. $\int_1^e t^3\ddot{x}^2dt \to extr;\quad x(1)=1,\quad \dot{x}(1)=-1,\quad x(e)=e^{-1},\quad \dot{x}(e)=-e^{-2}$

14. $\int_0^1(\ddot{x}^2-48x)dt \to extr;\quad x(0)=2,\ x(1)=1,\ \dot{x}(0)=0$

15. $\int_0^1(\ddot{x}^2-48x)dt \to extr;\quad x(0)=1,\ x(1)=2,\ \dot{x}(0)=0$

16. $\int_0^1(\ddot{x}^2-48x)dt \to extr;\quad x(0)=2,\ x(1)=-1,\ \dot{x}(0)=0$

17. $\int_0^1(\ddot{x}^2-48x)dt \to extr;\quad x(0)=-2,\ x(1)=1,\ \dot{x}(0)=0$

18. $\int_0^1(\ddot{x}^2-48x)dt \to extr;\quad x(0)=-1,\ x(1)=2,\ \dot{x}(0)=0$

19. $\int_0^1(\ddot{x}^2-48x)dt \to extr;\quad x(0)=1,\ x(1)=-2,\ \dot{x}(0)=0$

20. $\int_0^1(\ddot{x}^2-48x)dt \to extr;\quad x(0)=5,\ x(1)=-2,\ \dot{x}(0)=0$

Задачи к экзамену по курсу “Методы оптимизации”
для студентов IV курса групп ИП (7-ой семестр)

1) Найти расстояние от точки $\xi \in \mathbf{R}^n$ до гиперплоскости $(\mathbf{a},\mathbf{x}) = b$; $\mathbf{a} \in \mathbf{R}^n$, $b \in \mathbf{R}$.

2) Найти расстояние от точки $\xi \in \mathbf{R}^n$ до прямой $\mathbf{x} = \mathbf{a}t + \mathbf{b}$; $\mathbf{a},\mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$, $t \in \mathbf{R}$.

3) Найти расстояние от точки $M(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ до конуса $x_3 \ge \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

4) Пусть $\hat{x}$ - точка локального экстремума в конечномерной гладкой экстремальной задаче с равенствами $f_0(x) \to extr$; $f_1(x) = 0, \dots, f_m(x) = 0$. Линейно зависима или линейно независима система векторов $f_0'(\hat{x}), \dots, f_m'(\hat{x})$?

5) Сколько нормалей можно провести из точки $M(\xi_1,\xi_2)$ к эллипсу $\dfrac{x_1^2}{a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{a_2^2} = 1$?

6) Докажите, что собственная функция выпукла тогда и только тогда, когда она удовлетворяет неравенству Иенсена.

7) Выяснить, являются ли выпуклыми функции одной переменной:

а) $f(x) = \max\{e^x, 1 - x\}$,

б) $f(x) = \begin{cases} x \ln x + (1-x)\ln(1-x), & x \in (0,1), \\ +\infty, & x \notin (0,1) \end{cases}$

в) $f(x) = \big||x| - 2\big|$,

г) $f(x) = |x| + 1$.

8) Является ли выпуклой функция двух переменных
$f(x_1,x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + \sin(x_1 + x_2)$?

9) Доказать выпуклость следующих функций нескольких переменных и найти субдифференциалы этих функций:

а) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x) = f(x_1,x_2) = |x_1 + x_2 - a|$,

б) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x) = f(x_1,x_2) = \max\{x_1, x_2\}$,

в) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x) = f(x_1,x_2) = |2x_1 + x_2 + 4|$,

г) $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, $f(x) = \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$.

10) Доказать, что если собственная выпуклая функция $f(x)$ дифференцируема в точке $\hat{x}$, то $\partial f(\hat{x}) = f'(\hat{x})$.

11) Найти субдифференциалы выпуклых функций одной переменной:

а) $f(x) = \max\{-x; 0\}$,

б) $f(x) = \max\{e^x; 1 - x\}$,

в) $f(x) = |x| + 1$.

12) Решить выпуклые задачи без ограничений:

а) $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + 3|x_1 + x_2 - 1| \to \min$,

б) $x_1^2 + x_2^2 + 4\max\{2x_1, x_2\} \to \min$, в) $x_1^2+x_2^2+2\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}\to\min$.

13) Доказать, что в выпуклой задаче локальный минимум является глобальным.

14) Применяя метод искусственного базиса, решить задачу линейного программирования в канонической форме:

$x_1+4x_2-10x_3\to\max;\quad x_i\ge 0,\ i=1,2,3,$

$2x_1+3x_2+4x_3=18,$

$3x_1+9x_2+x_3=54.$

15) Решить транспортную задачу с заданной платежной матрицей:

	$b_1=11$	$b_2=2$	$b_3=6$	$b_4=7$
$a_1=7$	2	3	4	1
$a_2=8$	3	4	2	5
$a_3=5$	1	7	5	7
$a_4=6$	5	2	8	2

16) Найдите производные Фреше следующих отображений:

а) $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R},\quad f(x)=\|x\|=\sqrt{(x,x)}$,

б) $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R},\quad f(x)=(x,x)^{5/2}$,

в) $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R},\quad f(x)=(x,x)+2(a,x),\ a\in\mathbf{R}^n$,

г) $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,\quad f(x)=x\|x\|,\qquad \|x\|=\sqrt{(x,x)}$,

д) $f:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n,\quad f(x)=\dfrac{x}{\|x\|},\qquad \|x\|=\sqrt{(x,x)},\ x\ne 0$,

е) $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2,\quad f(x_1,x_2)=\left(x_1^2,\ 3x_1x_2+x_2^2\right),\quad \hat{x}=(1,1)$,

ж) $f:C([0,1])\to\mathbf{R},\ f(x(\cdot))=\int\limits_0^1 x^2(t)dt$,

з) $f:C([0,1])\to\mathbf{R},\ f(x(\cdot))=\left(\int\limits_0^1 x(t)dt\right)^2$,

и) $f:C([0,1])\to\mathbf{R},\ f(x(\cdot))=\left(\int\limits_0^1 x^3(t)dt\right)^2$,

к) $f:C([0,1])\to\mathbf{R},\ f(x(\cdot))=\sin x(1)\cos x(0)$.

17) Решить задачу классического вариационного исчисления, сведя ее к задаче оптимального управления:

а) $\int\limits_0^4\left(\dot{x}^2+x\right)dt\to\inf;\ |\dot{x}|\le 1,\ x(4)=0$,

б) $T\to\inf;\ |\ddot{x}|\le 2,\ x(-1)=-1,\ x(T)=1,\ \dot{x}(-1)=\dot{x}(T)=0$.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО КУРСУ “МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ”

для студентов IV курса групп ИП

1) Гладкие задачи без ограничений. Необходимые условия локального экстремума функций нескольких переменных.

2) Гладкие задачи без ограничений. Достаточные условия локального экстремума функций нескольких переменных.

3) Конечномерная гладкая экстремальная задача с равенствами. Постановка задачи. Правило множителей Лагранжа.

4) Конечномерная гладкая экстремальная задача с равенствами. Необходимые и достаточные условия второго порядка существования локального экстремума.

5) Задача Аполлония.

6) Конечномерная гладкая экстремальная задача с равенствами и неравенствами. Постановка задачи. Правило множителей Лагранжа (без доказательства).

7) Элементы выпуклого анализа. Выпуклые множества и выпуклые функции. Неравенство Иенсена.

8) Элементы выпуклого анализа. Примеры выпуклых функций одной и нескольких переменных.

9) Субдифференциал выпуклой функции, его геометрический смысл и основные свойства. Примеры субдифференциалов выпуклых функций.

10) Выпуклые задачи без ограничений. Теорема Ферма. Теорема Моро-Рокафеллара (без доказательства).

11) Выпуклые задачи с ограничением. Теорема о локальном минимуме.

12) Задача выпуклого программирования. Постановка задачи. Выпуклость множества допустимых элементов.

13) Теорема Куна—Таккера.

14) Задачи линейного программирования. Симплекс-метод решения задач линейного программирования.

15) Свойства множества допустимых точек в задаче линейного программирования в канонической форме.

16) Двойственная задача к задаче линейного программирования в канонической форме. Критерий решения (без доказательства).

17) Метод искусственного базиса нахождения начальной крайней точки в задаче линейного программирования.

18) Транспортная задача. Постановка задачи и ее особенности.

19) Методы нахождения начальной крайней точки в транспортной задаче.

20) Метод потенциалов решения транспортной задачи.

21) Производная по Фреше. Определение, примеры.

22) Простейшая задача классического вариационного исчисления. Вывод уравнения Эйлера с помощью основной леммы классического вариационного исчисления.

23) Простейшая задача классического вариационного исчисления. Вывод уравнения Эйлера с помощью леммы Дюбуа-Реймона.

24) Простейшая задача классического вариационного исчисления. Интегралы уравнения Эйлера. Задача о брахистохроне.

25) Задача Больца. Постановка задачи. Необходимые условия экстремума.

26) Изопериметрическая задача классического вариационного исчисления. Постановка задачи. Необходимые условия экстремума.

27) Задача Дидоны.

28) Задача с подвижными концами. Постановка задачи. Необходимые условия экстремума (без доказательства).

29) Задача Лагранжа. Постановка задачи. Необходимые условия экстремума (без доказательства).

30) Задача оптимального управления. Постановка задачи. Необходимые условия оптимального в сильном смысле процесса (без доказательства).

31) Простейшая задача о быстродействии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. Москва : Наука, 1979.
2. Алексеев В.М., Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Сборник задач по оптимизации. Москва : Наука, 1984.
3. Галеев Э.М., Тихомиров В.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. Москва.: Эдиториал УРСС, 2000.
4. Галеев Э.М. Оптимизация: теория, примеры, задачи. Москва : УРСС, 2002.
5. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. Москва.: Эдиториал УРСС, 2000.