Министерство образования и науки РФ
Иркутский государственный технический университет

Теоретическая механика

Примеры решения задач, методические указания и контрольные задания для студентов-заочников всех инженерных специальностей

Издательство
Иркутского государственного технического университета

2010 г.

Рецензент: канд. техн. наук, доцент кафедры машиностроения ИрГТУ В.Н. Москвитин

Теоретическая механика. Примеры решения задач, методические указания и контрольные задания для студентов-заочников всех инженерных специальностей ИрГТУ. / сост. С.В. Быков. Иркутск: Изд-во ИрГТУ, 2010. 76 с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения, примеры решения задач и контрольные задания. Предназначены для студентов, обучающихся по заочной форме.

Оглавление

Введение

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной формы обучения всех инженерных специальностей ИрГТУ.

Основной целью данной работы является оказание помощи студентам-заочникам в выполнении контрольных заданий (контрольных работ)

В каждом из трех разделов пособия даются программные вопросы и основные формулы, необходимые для решения задач. Сначала следуют примеры решения простых задач, затем более и более сложных, постепенно подводящих студента к решению контрольной задачи.

В конце каждого раздела даны собственно контрольные задания С-1; С-2; К-1; К-2; Д-1; Д-2; Д-3 достаточных для выполнения контрольных работ в соответствии с учебным планом по каждой конкретной инженерной специальности.

Порядок выбора заданий индивидуальный и приводится (или напоминается) в каждом соответствующем разделе пособия.

Каждое задание (контрольная работа) выполняется в отдельной тетради. На обложке указывается: название дисциплины, номер работы, фамилия и инициалы студента, учебный шифр, факультет, специальность.

Решение каждой задачи студент начинает со второй страницы. Сначала сверху указывается номер задачи, затем делается чертеж и записываются условия (т.е. что дано в задаче). Тексты задач не переписываются. Чертежи выполняются тщательно с соблюдением пропорций и заданных углов. Пояснения должны быть краткими, вычисления последовательными и подробными. Единицы измерения указывать обязательно. В конце решения должен быть дан ответ.

1. Статика твердого тела

1.1. Программные вопросы

Основные понятия и аксиомы статики

1. Абсолютно твердое тело. Равновесие тела. Сила.
2. Уравновешенная система сил. Равнодействующая система сил. Аксиомы статики.
3. Связи и реакции связей. Принцип освобождаемости от связей. Различные виды связей и их определение.

Система сходящихся сил

1. Геометрический способ сложения сил с.с.с. Силовой многоугольник.
2. Условие равновесия с.с.с. Аналитические условия равновесия с.с.с.

Момент силы. Пара сил

1. Алгебраический момент силы относительно точки (центра) вращения. Векторный момент силы относительно точки. Момент силы относительно оси.
2. Пара сил. Момент пары сил. Векторный момент пары сил. Свойства пары сил.

Произвольная пространственная система сил

1. Теорема о параллельном переносе силы.
2. Теорема Пуансо. Главный вектор и главный момент системы сил. Теорема Вариньона.
3. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил. Аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил.
4. Аналитические условия равновесия плоской системы сил.
5. Статически определимые и статически неопределимые системы.

Центр тяжести твердого тела

Координаты центра тяжести. Способы определения центра тяжести объемных, плоских, линейных твердых тел.

Трение

Трение скольжения. Трения качения.

1.2. Основные формулы

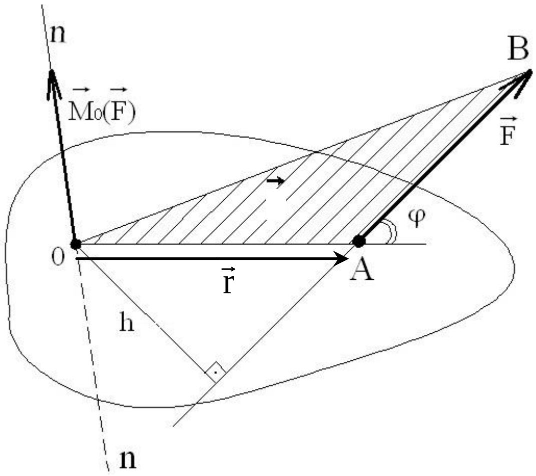


Рис. 1.1

Из курса физики известно, что момент силы относительно точки (центра) есть векторная величина. Т.е. (на рис. 1.1) векторным моментом силы относительно точки (т.0) называется вектор $\vec{M}_0(\vec{F})$, приложенный в этой точке (т.0) и равны по величине произведению модуля силы $\vec{F}$на плечо h силы $\vec{F}$ относительно этой точки (т.0). Направлен вектор $\vec{M}_0(\vec{F})$ перпендикулярно плоскости, в которой лежат сила $\vec{F}$ и точка *0* (плоскости треугольника *0AB*, причем вращение тела силой $\vec{F}$ будет происходить против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\vec{M}_0(\vec{F})$.

$$\vec{M}_0(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

где $\vec{r}$ – радиус-вектор точки *A*, проведенный из центра (т.0).

Величина (модуль) $\vec{M}_0(\vec{F})$ определяется: $|\vec{M}_0(\vec{F})| = |\vec{r} \times \vec{F}| =$ $= F \cdot r \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между направлениями радиус-вектора $\vec{r}$ и вектором силы $\vec{F}$, а т.к. $h = r \cdot \sin\varphi$, то $|\vec{M}_0(\vec{F})| = |\vec{r} \times \vec{F}| = F \cdot h$.

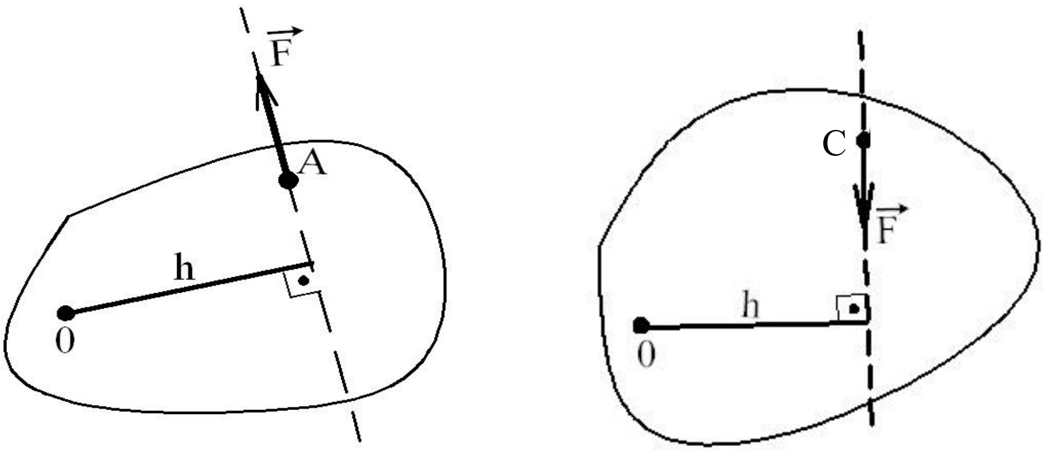
При решении задач по статике твердого тела нас будет интересовать плоское вращение тела, например, в трех плоскостях (или в одной плоскости). Поэтому введем понятие алгебраического момента силы.

1. Алгебраический момент силы $\vec{F}$ относительно точки (центра 0):

$$M_0(\vec{F}) = \pm F \cdot h,$$

где *h* – плечо силы, кратчайшее расстояние от точки (центра) вращения до линии действия силы $\vec{F}$. Знак «+» соответствует вращению тела силой $\vec{F}$ против часовой стрелки (рис. 1.2*а*), знак «-» – по часовой стрелке (рис. 1.2*б*).

Размерность алгебраического момента: $[M_0(\vec{F})] = [Н \cdot м]$.



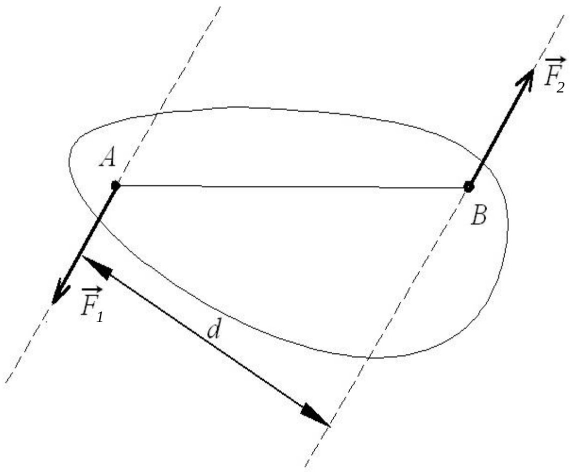
а ***б***

Рис. 1.2.

2. Момент пары сил (алгебраический момент пары):

$$M = \pm F \cdot d,$$

где $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$; *d* –плечо пары – расстояние между линиями действия (параллельные линии) сил пары. Знак «+» соответствует вращению тела парой против часовой стрелки (рис. 1. 3*а*), знак «-» – по часовой стрелке (рис 1.3*б*). Размерность момента пары: $[M] = [Н \cdot м]$.



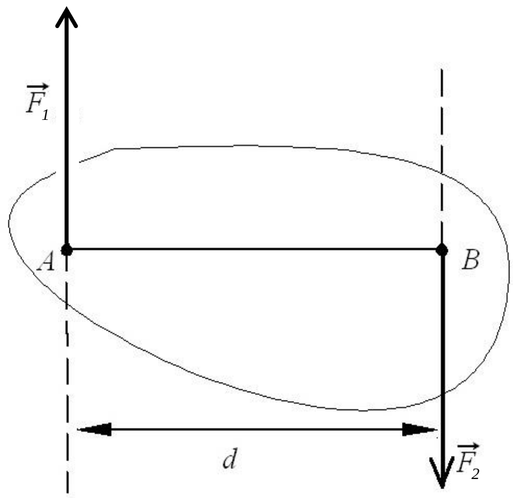


Рис. 1.3а ***Рис.1.3б***

3. Момент силы относительно оси:

$$M_Z(\vec{F}) = \pm F_П \cdot h,$$

где $F_П$ – проекция силы $\vec{F}$ на плоскость перпендикулярную оси вращения;

h – плечо проекции $F_П$, т.е. кратчайшее расстояние от точки пересечения оси с плоскостью до линии действия $F_П$. Размерность: $[M_Z(\vec{F})] = [Н \cdot м]$.

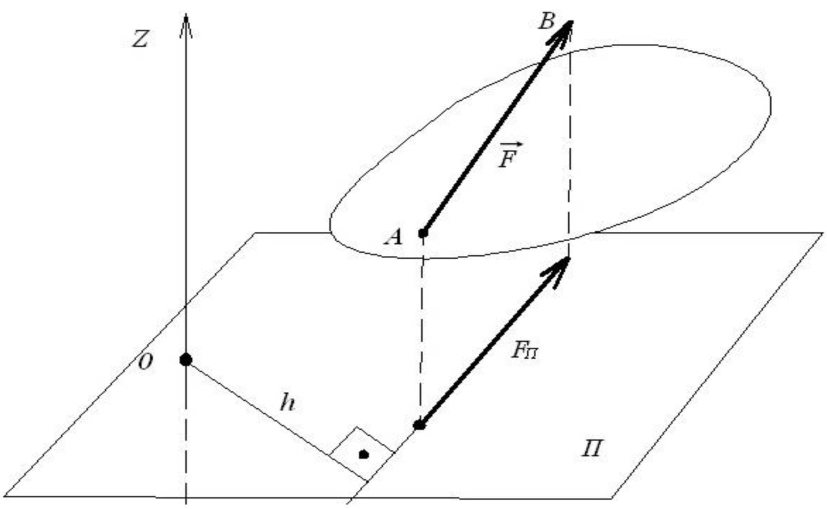


Рис. 1.4

4. Главный вектор. Главный момент системы сил:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i; \qquad \vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i(\vec{F}_i),$$

где F_i – силы (активные и реакции связей), оказывающие действие на твердое тело.

5. Условия равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\vec{R} = 0; \ \vec{L}_0 = 0.$$

6. Аналитические условия равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i) = 0\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i) = 0\,;$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i) = 0\,.$$

7. Общие условия равновесия для плоской системы:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} M_0(\vec{F}_i) = 0\,.$$

8. Главный вектор системы сходящихся сил:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\ .$$

9. Условие равновесия пространственной системы сходящихся сил:

$$\vec{R} = 0.$$

10. Аналитические условия равновесия с.с.с.:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,;\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,;\sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0\,.$$

11. Аналитические условия равновесия плоской с.с.с.:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0\,;\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0\,.$$

12. Теорема Вариньона (относительно точки) о моменте равнодействующей:

$$\vec{M}_0(\vec{R}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_i(\vec{F}_i),\ \text{где}\ \ \vec{R} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\ .$$

13. Теорема Вариньона (относительно оси) о моменте равнодействующей:

$$\vec{\mathrm{M}}_z(\vec{\mathrm{R}}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathrm{M}}_z(\vec{\mathrm{F}}_i).$$

1.3. Примеры решения задач

1.3.1. Плоская система сходящихся сил

Задача №1. Груз подвешен на кронштейне *ABC.* Стержни шарнирно соединены в точках *A; B; C.* Вес груза *G* =10Н, угол $\alpha = 30°$ (рис. 1.5).

Определить усилия в стержнях *AB* и *BC.*

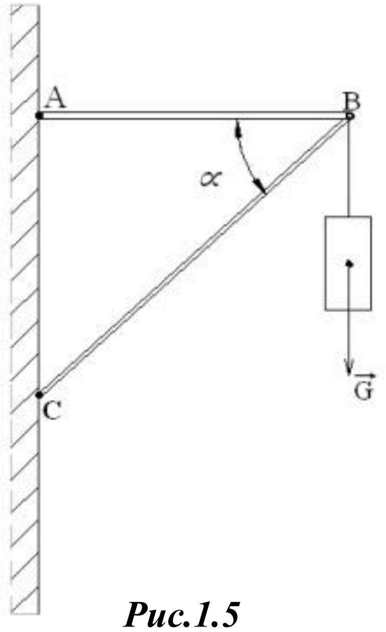


Рис.1.5

Решение:

Так как концы стержней соединены плоскими шарнирами, то эти стержни могут быть только сжатыми или растянутыми, т.е. усилия (реакции) в стержнях направлены по осям их симметрии.

Предположим что стержень АВ растянут, а стержень CB сжат. Соответственно обозначим усилия в стержнях $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ и перенесем их по линиям действия в общий шарнир т. B (рис. 1.6)

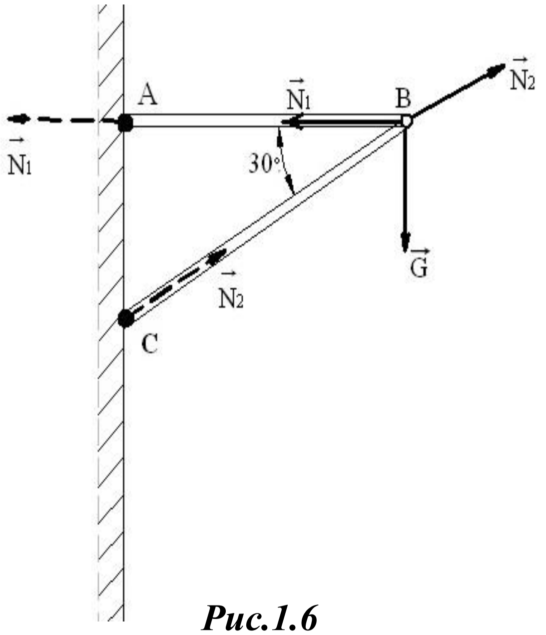


Рис.1.6

Полученная система сил: $\vec{N}_1, \vec{N}_2, \vec{G}$ - это плоская система сходящихся сил, которая, естественно, находится в равновесии (т.к. кронштейн и груз находятся в состоянии покоя).

Воспользуемся условиями равновесия с.с.с.: $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$; $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0$, согласно которым суммы проекций всех действующих сил (известных и неизвестных) на каждую из осей координат равны нулю.

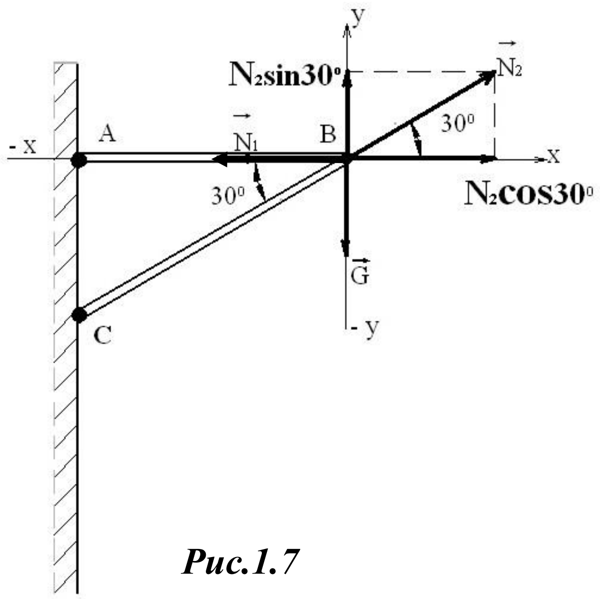


Рис.1.7

Обозначим систему координат xBy и спроектируем все силы с.с.с. на эти оси:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0,$$

$$-N_1 + N_2 \cos 30^0 = 0; \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0,$$

$$N_2 \sin 30^0 - G = 0 \qquad (2)$$

Из (2) получим:

$$N_2 = \frac{G}{\sin 30^0}; \; N_2 = \frac{10н}{0{,}5} = 20 \text{ Н}.$$

Далее, по известному значению N_2 = 20 Н., подставляя в выражение (1), получим :

$$N_1 = N_2 \cos 30^0; \qquad N_1 = 20 \cdot 0{,}876 = 17{,}3 \text{ Н}.$$

Ответ: Усилия в стержнях N_1=17,3н; N_2 = 20 Н.

Заметим, что положительные цифровые значения N_1 и N_2, полученные в результате говорят о том, что AB на самом деле растянут, а стержень BC – сжат.

__Задача №2__

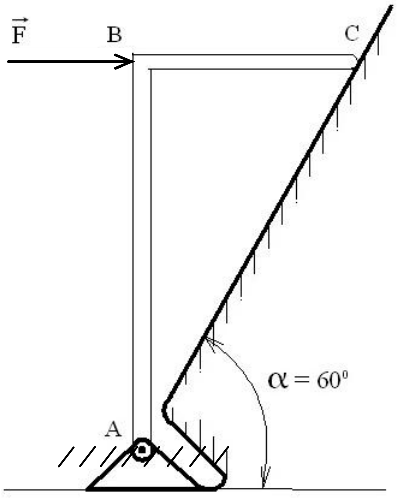


Рис.1.8

Жёсткий изогнутый стержень закреплён на основании конструкции с помощью плоского неподвижного шарнира A. Свободный конец C стержня опирается на гладкую наклонную поверхность с углом наклона α=60^0. В точке B на стержень действует горизонтальная сила F=25Н. Считая стержень невесомым определите R_A – реакцию в шарнире A.

Решение

Реакция наклонной поверхности (связи) на действие стержня в т. С, по определению, будет направлена перпендикулярно данной поверхности (изобразим на чертеже $\vec{N}_c \perp AC$).

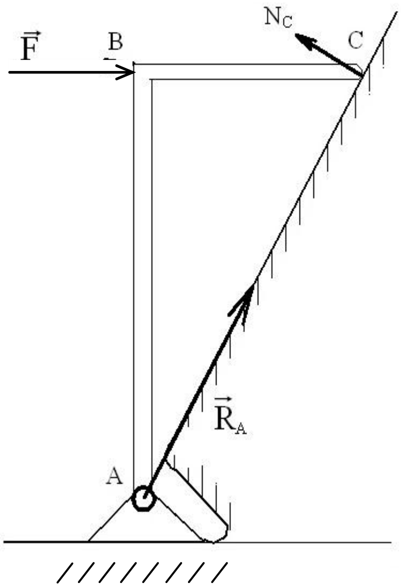


Рис.1.9

Поскольку стержень находится в равновесии, а линии действия $\vec{F}$ и $\vec{N}_C$ пересекаются в т. C, то линия действия $\vec{R}_A$ также проходит через т. C (обозначим $\vec{R}_A$ по направлению AC).

Перенесем все действующие силы в точку С. Получим с.с.с. Далее воспользуемся условиями равновесия плоской с.с.с.:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0.$$

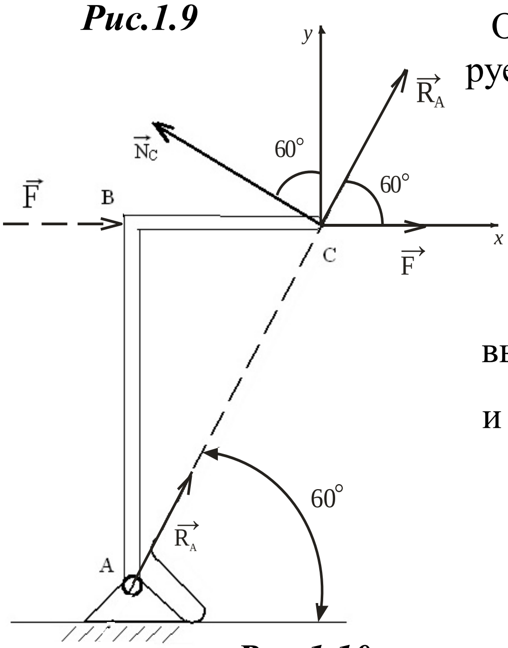


Рис.1.10

Обозначим систему координат xCy и спроектируем все силы на оси:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \ -N_c \sin 60^0 + F + R_A \cos 60^0 = 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \ N_c \cos 60^0 + R_A \sin 60^0 = 0 \quad (2)$$

выразим $N_c = -R_A \dfrac{\sin 60^0}{\cos 60^0}$

и подставим в (1) выражение

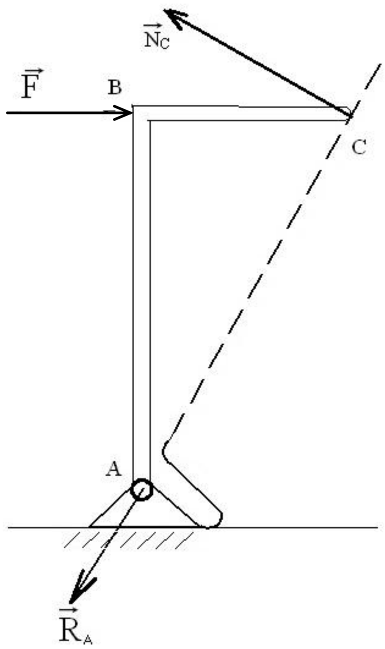


Рис.1.11

$$R_A \frac{\sin 60^0}{\cos 60^0} + \mathrm{F} + \mathrm{R}_A \cos 60^0 = 0$$

$$\mathrm{R} = -\frac{F}{\left(\frac{\sin^2 60^0}{\cos 60^0} + \cos 60^0\right)} =$$

$$= -\frac{25}{\frac{0{,}87^2}{0{,}5} + 0{,}5.} = -12{,}4\text{Н}$$

Знак минус обозначает, что истинное направление R_A будет противоположным указанному ранее. Ответ: $\mathrm{R}_A = 12{,}4$Н

Задача №3

Два груза весом $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_2$ находятся в равновесии. Определить N- натяжение веревки ВС и вес G_1, если G_2 = 50н; угол $\alpha = 60^{\mathrm{o}}$, $\beta = 30^0$

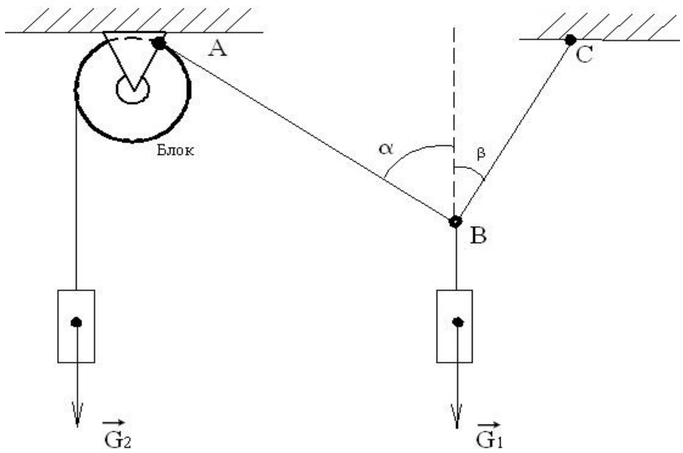
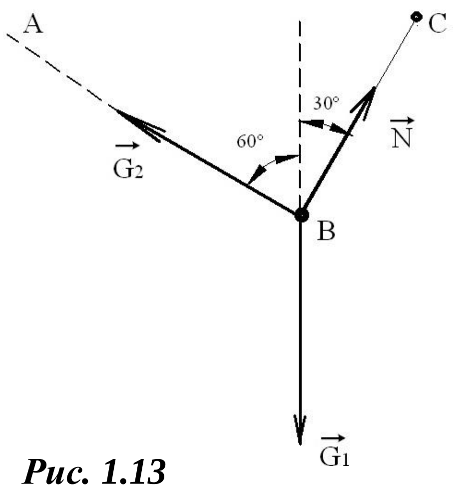


Рис.1. 12

Решение

Т.к. связь (веревка) – гибкая, следовательно на участке AB веревка растянута усилием $\vec{G}_2$. Перенесем в точку В $\vec{G}_1$ и усилие $\vec{G}_2$ по направлению BA (т.е заменим действие связи вектором реакции $\vec{G}_2$) Получим с.с.с.; значит реакция $\vec{N}$ пройдет также через т.В. Изобразим систему сил, где направления $\vec{G}_2$ и $\vec{N}$ показывают, что обе веревки растянуты. Далее обозначим систему координат xBy и спроектируем все действующие силы на оси x и y:



$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0 ;- G_2 \sin 60^{\mathrm{o}} + \mathrm{N}\sin 30^{\mathrm{o}} = 0 \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \ - G_1 + G_2 \cos 60^{\mathrm{o}} + \mathrm{N}\cos 30^{\mathrm{o}} = 0 \ (2)$$

Рис. 1.13

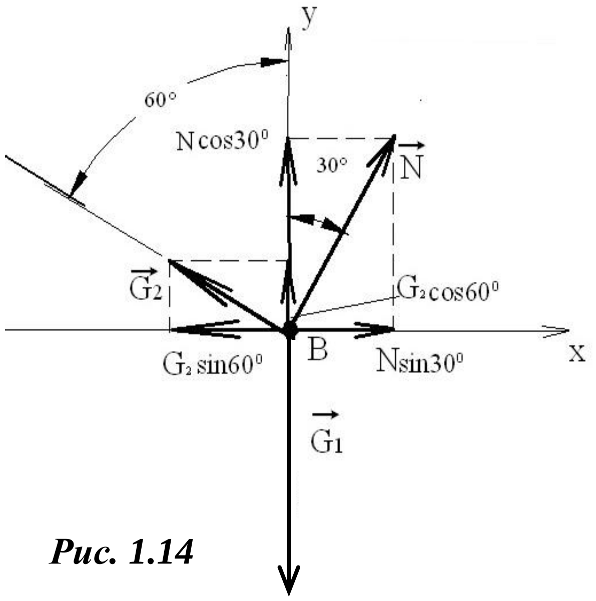


Рис. 1.14

Из (1): N = $G_2 \dfrac{\sin 60^0}{\sin 60^0}$;

$N = 50 \cdot \dfrac{0{,}87}{0{,}5} = 87Н$

$G_1 = G_2 \cos 60^{\,o} + N \cos 30^{\,o}$

$G_1 = 50 \cdot 0{,}5 + 87 \cdot 0{,}87 = 100{,}7Н$

Ответ: N=87н; G_1=100,7Н

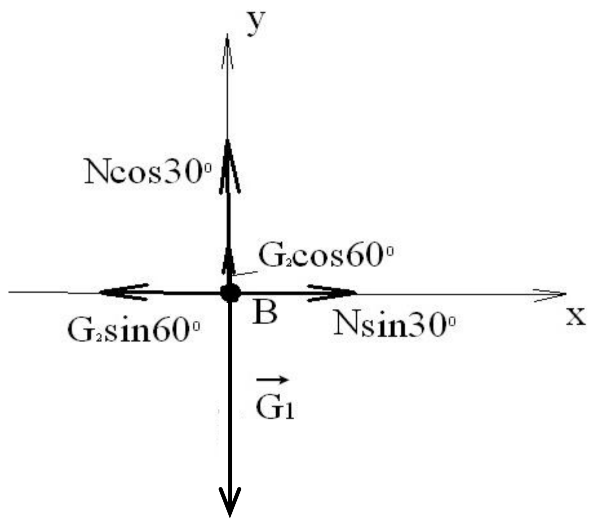


Рис. 1.15

1.3.2. Произвольная плоская система параллельных сил

Задача №1

Двухопорная балка нагружена параллельными силами $\vec{P}$ и $\vec{F}$, а также равномерно распределенной нагрузкой $\vec{q}$.

P=150Н, F=80Н,

q=50 Н/м, ℓ=2м.

Определить реакции опор A и B.

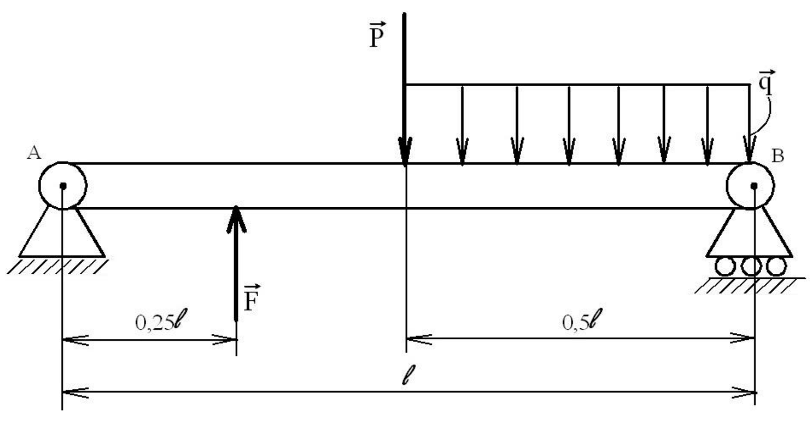


Рис. 1.16

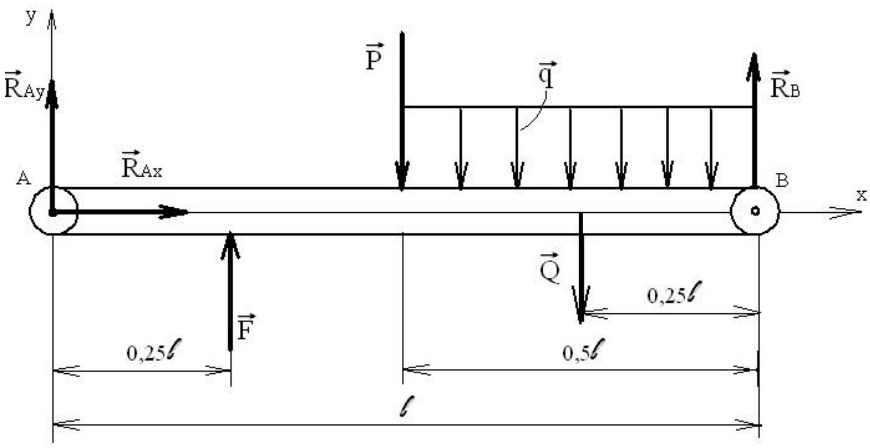


Рис. 1.17

Решение

Обозначим систему координат xAy. Обозначим неизвестные реакции или их составляющие. Одновременно освободимся от связей. В неподвижном шарнире A величина и направления реакции $\vec{R}_A$ не определены. Предположим, например, что реакция $\vec{R}_A$ направлена вверх и вправо. Поэтому на схеме изобразим $\vec{R}_A$ в виде составляющих $\vec{R}_{Ax}$ и $\vec{R}_{Ay}$, т.е. в виде проекций $\vec{R}_A$ на ось Ax и на ось Ay соответственно.

Реакция $\vec{R}_{\text{в}}$ направлена предположительно вверх, но вертикальное направление $\vec{R}_{\text{в}}$ в данном случае конкретно, т.к. катки подложенные под опору В обеспечивают свободное перемещение балки по оси Ax. Следовательно, сопротивление – реакция $\vec{R}_{\text{Вх}}$ в этом конструктивном узле отсутствует.

Для решения воспользуемся условиями равновесия плоской системы сил:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_0(\vec{F}_i) = 0.$$

Кроме предполагаемой проекции $\vec{R}_{Ax}$ все остальные силы(известные и неизвестные) на ось Ax проекцию не дают, т.к. они параллельны оси Ay

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \ \vec{R}_{Ax} = 0. \qquad (1)$$

То есть выражение (1) подтверждает, что реакции даже в неподвижном шарнире по оси Ax не будет ($\vec{R}_{Ax} = 0$). Причина в том, что все внешние силы : $\vec{P}$, $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и реакции $\vec{R}_{Ay}$ и $\vec{R}_B$ параллельны оси Ay. Для решения задачи используем только два уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0.$$

Выбор т.A в качестве центра, вокруг которого все силы будут вращать свободную балку(уравнение моментов) необязателен. В качестве центра можно выбрать т.В. В обоих случаях через точку вращения проходят неизвестные соответственно $\vec{R}_{Ay}$ и $\vec{R}_B$, которые автоматически исключаются из вариантов уравнения равновесия. Равномерно распределенную силу $\vec{q}$ удобно представить в

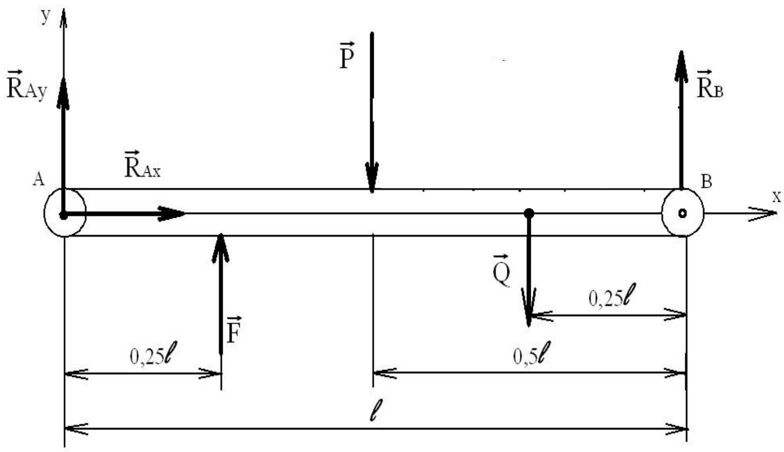


Рис.1. 18

виде сосредоточенной силы $\vec{Q}$ приложенной в середине участка распределения. Q=q·0,5ℓ; Q=50·0,5·2=50Н

Окончательно силовая схема выглядит так (рис. 1.18):

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;$$

$$R_{Ay} + F - P - q \cdot 0{,}5\ell + R_B = 0 \quad (2)$$

В данном уравнении две неизвестные величины R_{Ay} и R_B.

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0;\ F \cdot 0{,}25\ell - P \cdot 0{,}5\ \ell - q \cdot 0{,}5\ \ell \cdot 0{,}75\ \ell + R_B \cdot \ell = 0 \qquad (3)$$

Напомним, что R_{Ax} = 0 (см. (1)), а R_{Ay} проходит через центр – т.A и, следовательно, вращения относительно т.А не производит. Из (3) определяем:

$$R_B = \frac{-F \cdot 0{,}25l + P \cdot 0{,}5l + q \cdot 0{,}5l \cdot 0{,}75l}{l};$$

$$R_B = \frac{-80 \cdot 0{,}25 \cdot 2 + 150 \cdot 0{,}5 \cdot 2 + 50 \cdot 0{,}5 \cdot 2 \cdot 0{,}75 \cdot 2}{2} = 92{,}5\text{Н}$$

Положительное значение $\vec{R}_в$ означает, что на схеме направление $\vec{R}_в$ указано верно.

Подставим далее значение R_B = 92,5Н в выражение (2), получим:

$$R_{Ay} = -F + P + q \cdot 0{,}5\ell - R_B;$$

$$R_{Ay} = -80 + 150 + 50 \cdot 0{,}5 \cdot 2 - 92{,}5 = 27{,}5\ \text{Н};$$

Т.к. $R_A = \sqrt{R^2{}_{Ax} + R^2{}_{Ay}}$, а R_{Ax} = 0, то $R_A = R_{Ay}$ = 27,5Н.

Ответ: R_A =27,5Н; R_B = 92,5Н.

1.3.3. Произвольная плоская система сил

Задача №1

Двухопорная балка с консольными участками *СК* и *ДЕ* нагружены внешними силами и моментом:

- равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью $\vec{q}_1$ на участке *АВ*;

- неравномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью от 0 до $\vec{q}_2$ на участке *ДЕ*;

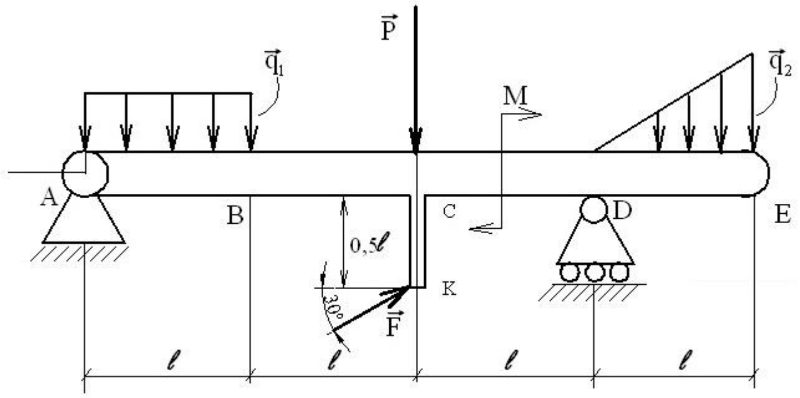


Рис.1.19

- сосредоточенными силами $\vec{P}$ и $\vec{F}$;
- моментом М пары сил.

Дано: P=200Н; F=100Н; M=150Нм; q_1=25 Н/м; q_2=50 Н/м; ℓ=1м.

Считая балку невесомой определить реакции R_A; R_D опор A и D.

Решение

Обозначим систему координат xAy и неизвестные реакции (или их составляющие). Одновременно освободимся от связей. Получим систему сил, находящихся в равновесии на плоскости.

Неизвестную реакцию $\vec{R}_A$ представим в виде двух неизвестных составляющих R_{Ax} и R_{Ay}, т.к. конструктивно опора А представляет собой неподвижный плоский шарнир. (В плоском шарнире величина и направление реакции не определены, поэтому предполагаем, что $\vec{R}_A$ направлена вверх и вправо, т.е. на оси координат $\vec{R}_A$ отображается двумя проекциями R_{Ax} и R_{Ay}).

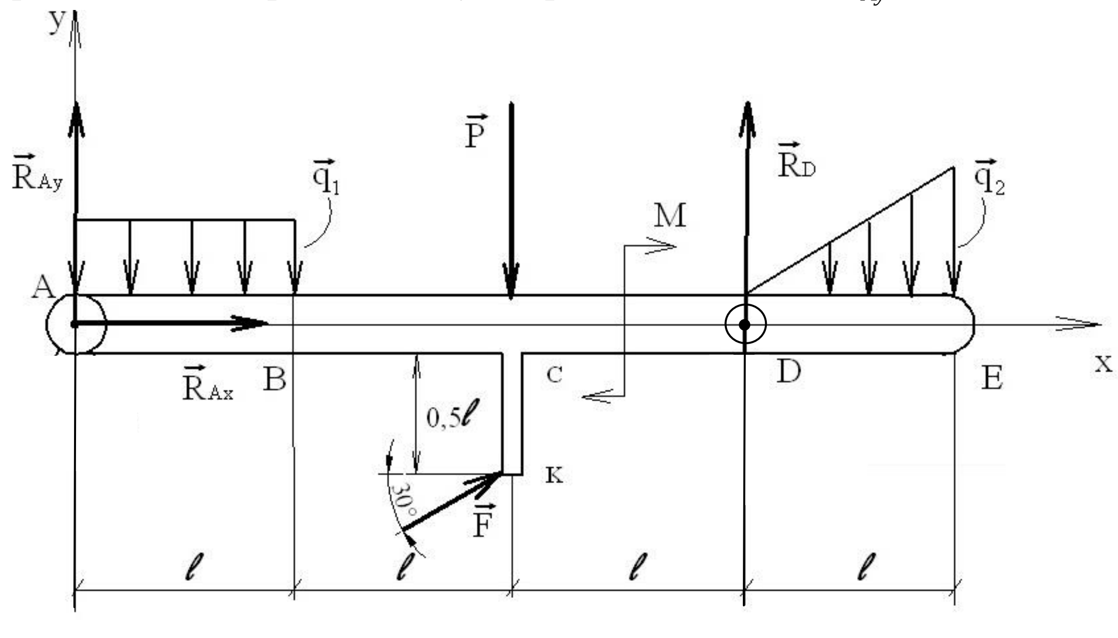


Рис.1.20

Неизвестные реакцию $\vec{R}_D$ изображаем вертикально, например, вверх. Направление реакции в этом случае конкретно определено, т.к. конструктивно опора *D* представляет собой подвижный шарнир. Катки подложенные под опору шарнира *D* позволяют свободное перемещение тела(балки) по оси *Ax*, т.е. сопротивления – реакции по направлению *Ax* не будет.

Распределенные нагрузки $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$ удобнее представить в виде сосредоточенных $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$; где $\vec{Q}_1 = q_1 \cdot \ell$; $\vec{Q}_1$=25·1=25Н

$$\vec{Q}_2 = \frac{q_2 \cdot l}{2}; \ \vec{Q}_2 = \frac{50 \cdot 1}{2} = 25\text{Н}$$

Точка приложения силы $\vec{Q}_1$ находится в середине участка *AB*, а точка приложения $\vec{Q}_2$ находится на расстоянии $\frac{1}{3}\ell$ от конца балки т. E (или на $\frac{2}{3}\ell$ от т. *D*), т.е. линии действия $\vec{Q}_1$ и $\vec{Q}_2$ проходят через центры тяжести плоских фигур соответственно – прямоугольника и треугольника сил.

Силу $\vec{F}$ также удобно разложить на две составляющие, т.е. на проекцию $F \cdot \cos 30^0$ на ось *x* и на проекцию $F \cdot \sin 30^0$ – на *y*.

При вычислении момента силы $\vec{F}$ для этих проекций легко определяются плечи (см. теорему Вариньона). Окончательно равновесная система сил, приложенная к балке будет иметь вид:

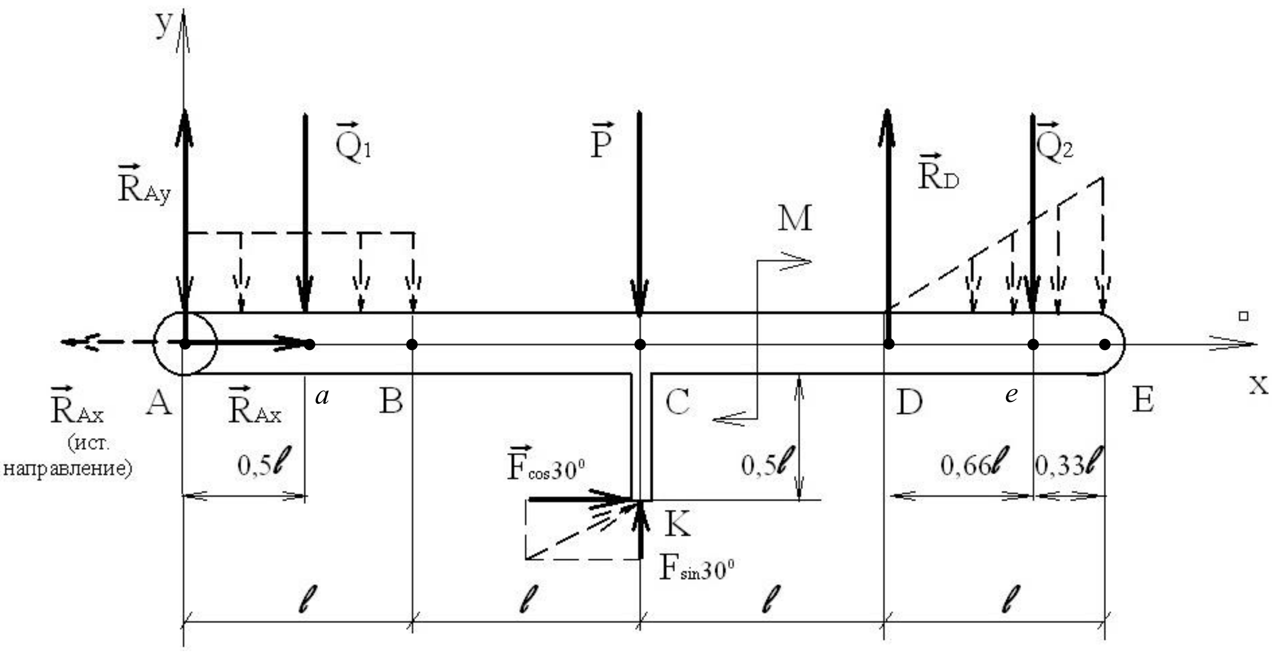


Рис.1.21

Условия равновесия в этом случае:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0.$$

Выбор точки А в качестве центра- точки вращения обусловлен тем, что неизвестные R_{Ax} и R_{Ay} относительно т.*A* дадут моменты равные нулю. Т.к. линии действия их проходят через этот центр. (Иными словами относительно т.*A* плечи R_{Ax} и R_{Ay} равны нулю).

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} + F\cdot\cos30^0=0 \qquad (1)$$

$$R_{Ax} = -F\cdot\cos30^0$$

Знак минус показывает, что истинное направление R_{Ax} противоположно указанному на чертеже.

$$R_{Ax} = -100\cdot0{,}87 = -87Н.$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad R_{Ay} - \vec{Q}_1 - P + F\bullet\sin30^0 + R_D - \vec{Q}_2 = 0. \qquad (2)$$

В выражении (2) две неизвестные величины : R_D и R_{Ay}.

Прежде чем составить третье уравнение, напомним, что балка вращается силами $\vec{Q}_1$; $\vec{P}$; $\vec{F}\sin30^0$; $\vec{F}\cos30^0$; $\vec{R}_D$ и $\vec{Q}_2$ и моментом M относительно неподвижной точки A.

Определим плечи этих сил: $Aa=0{,}5\ell$ для силы $\vec{Q}_1$ (вращение по ч.с.);

$AC=2\ell$ для силы $\vec{P}$ (вращение по ч.с.); $AC=2\ell$ для силы $\vec{F}\sin30^0$ (вращение против ч.с.); $KC=0{,}5\ell$ для силы $\vec{F}\cos30^0$ (вращение против ч.с.); $AD=3\ell$ для силы $\vec{R}_D$ (вращение против ч.с.); $AE=3{,}66\ell$ для силы $\vec{Q}_2$ (вращение по ч.с.).

Пары сил с моментом M вращает свободную балку по часовой стрелке.

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\vec{F}_i) = 0$$

$$-Q_1\cdot0{,}5l - P\cdot2l + F\sin30^\circ\cdot2l - F\cos30^\circ\cdot0{,}5l - M + R_D\cdot3l - Q_2\cdot3{,}66l = 0 \qquad (3)$$

В выражении (3) неизвестная одна $-R_D$

$$R_D = \frac{Q_1\cdot0{,}5l + P\cdot2l - F\sin30^\circ\cdot2l - F\cos30^\circ\cdot0{,}5l + M + Q_2\cdot3{,}66l}{3l}$$

$$R_D = \frac{25\cdot0{,}51 + 200\cdot2\cdot1 - 100\cdot0{,}5\cdot2\cdot1 - 100\cdot0{,}87\cdot0{,}5\cdot1 + 150 + 25\cdot3{,}66\cdot1}{3\cdot1} = 170{,}2H$$

$R_D = 170{,}2Н$. Положительное значение свидетельствует о правильности выбора направления реакции $\vec{R}_D$. Далее, по известному значению R_D=170,2 Н, подставим его в выражение (2) и определим $\vec{R}_{Ay}$.

$$R_{Ay} = Q_1 + P - F\sin30^\circ - R_D + Q_2$$

$$R_{Ay} = 25 + 200 - 100\cdot0{,}5 - 170{,}2 + 25 = 28{,}8\ H$$

R_{Ay}=28,8 Н. Направление $\vec{R}_{Ay}$ на чертеже было выбрано верно. Полную реакцию $\vec{R}_A$ (модуль $\vec{R}_A$) определим по теореме Пифагора:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}{}^2 + R_{Ay}{}^2} = \sqrt{87^2 + 28{,}8^2} = 91{,}6\ H$$

Ответ: R_A=91,6 Н; R_A=170,2 Н

Для сведения: (Угол $\alpha = arctg\frac{R_{Ay}}{R_{Ax}} = arctg3{,}02 = 71^{\circ}40'$)

Для сведения: окончательная схема нагружения балки AE

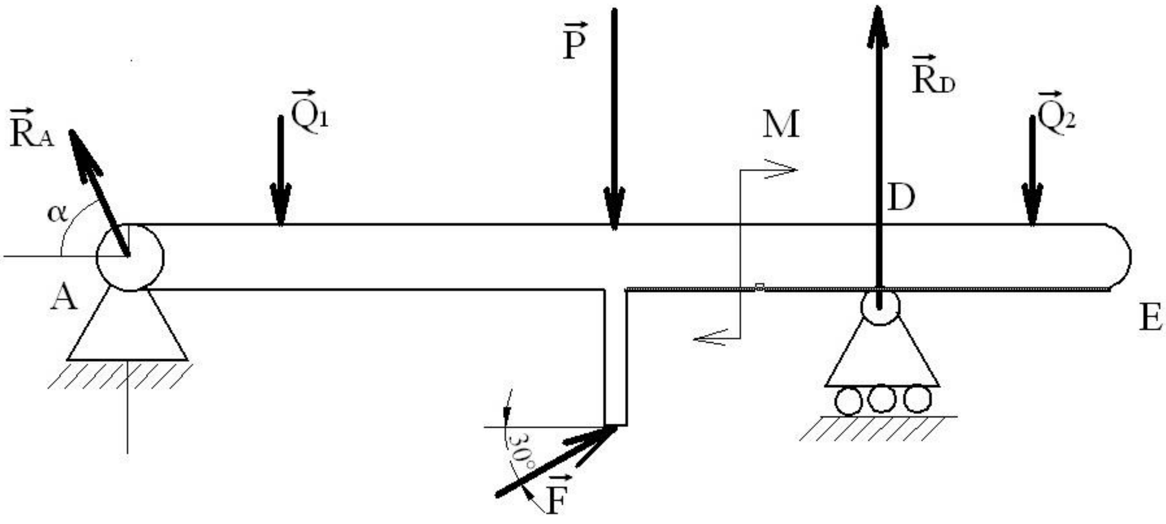


Рис.1.22

Указания по выбору контрольных заданий

Студент во всех задачах своей контрольной работы выбирает номер рисунка по предпоследней цифре своего учебного шифра, указанного в зачетной книжке, а номер условия – по последней; например шифр заканчивается цифрами … 79, значит, все задачи выполняются по рисункам №7, а условия берутся из таблиц за №9.

Контрольное задание С-1

Жесткая изогнутая балка с консольным участком установлена на двух опорах *A* и *B*. Опора *A* – это неподвижный шарнир; Опора *B* – или подвижный шарнир на катках, или стержень BB', прикрепленный неподвижными шарнирами к балке и к основанию – неподвижной опоре.

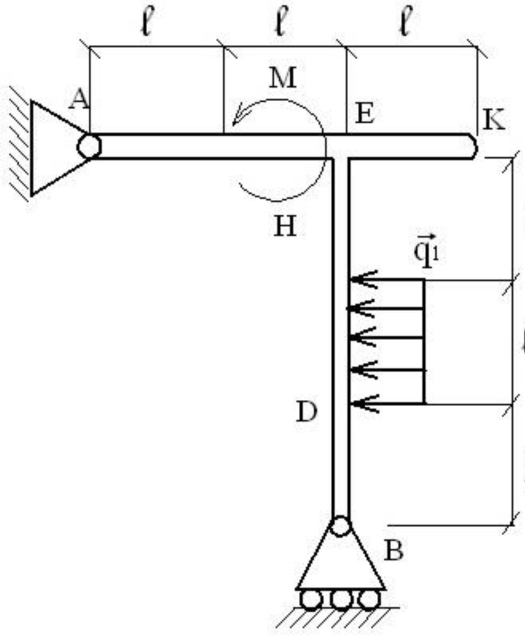


Рис.С-1.0

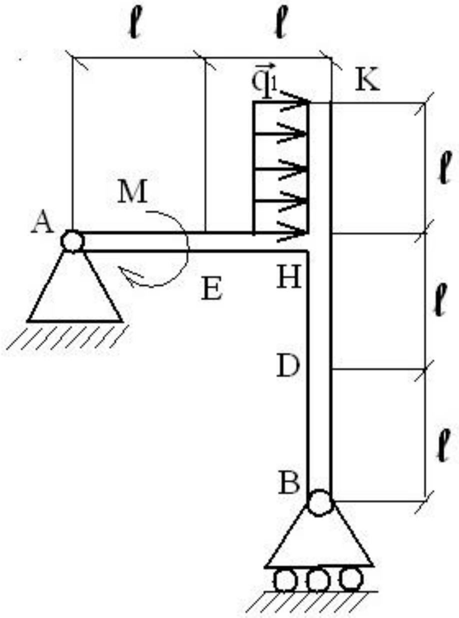


Рис.С-1.1

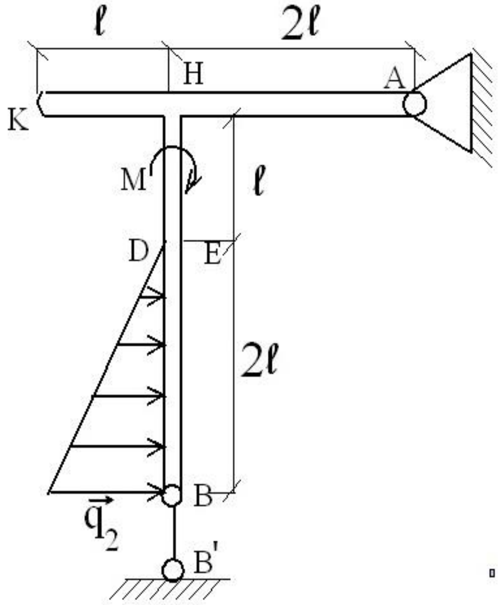


Рис.С-1.2

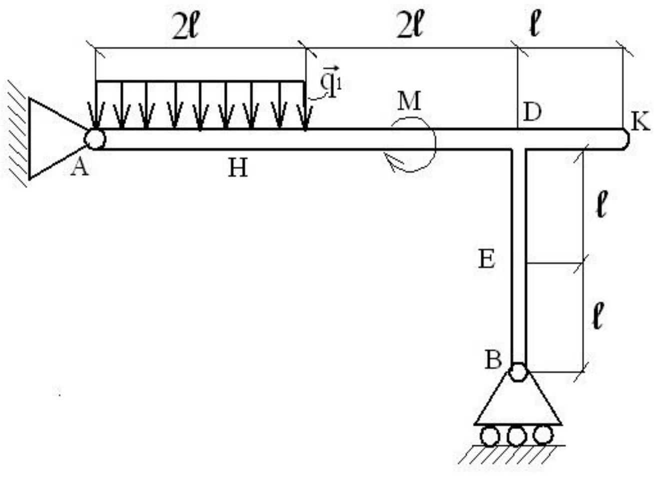


Рис.С-1.3

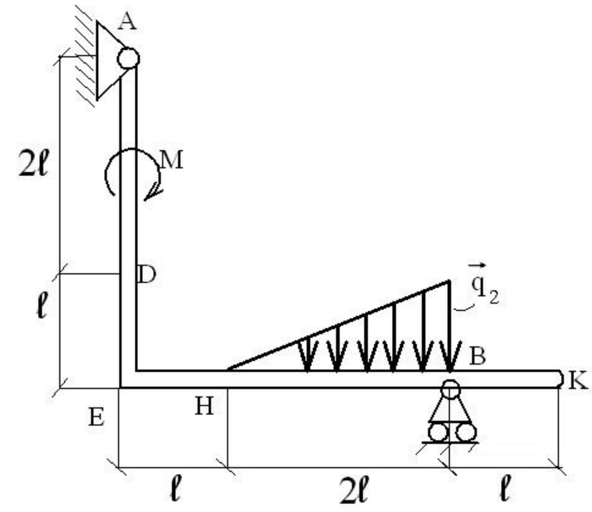


Рис.С-1.4

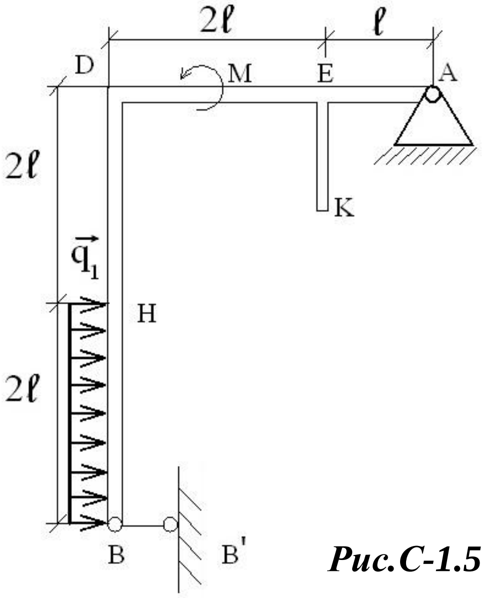


Рис.С-1.5

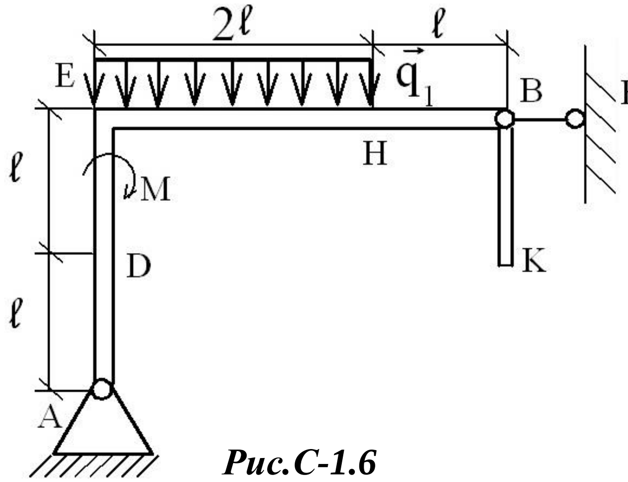


Рис.С-1.6

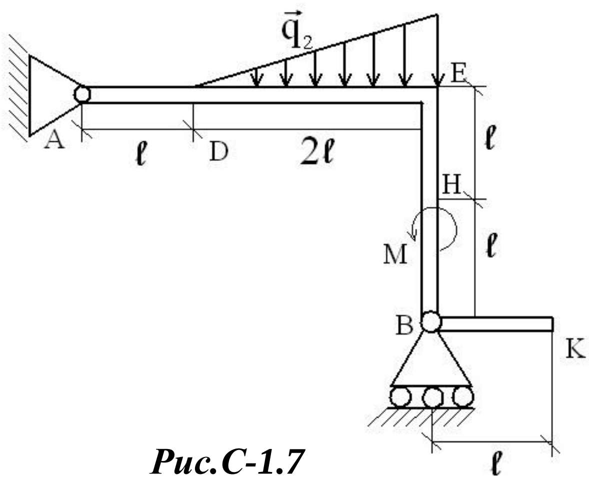


Рис.С-1.7

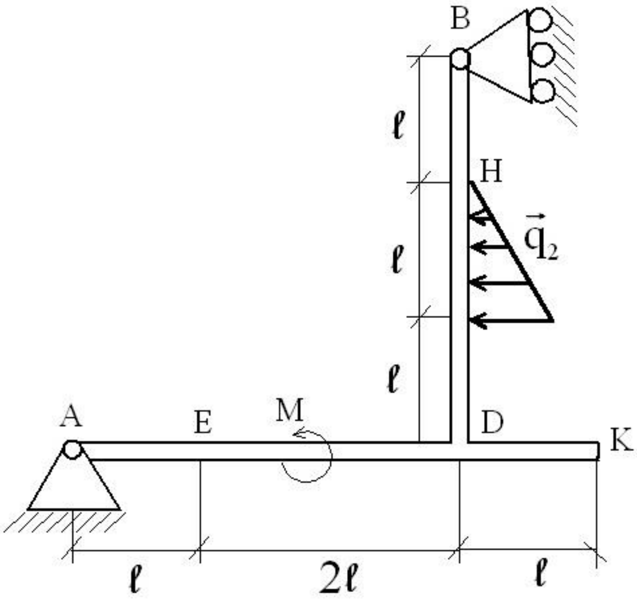


Рис.С-1.8

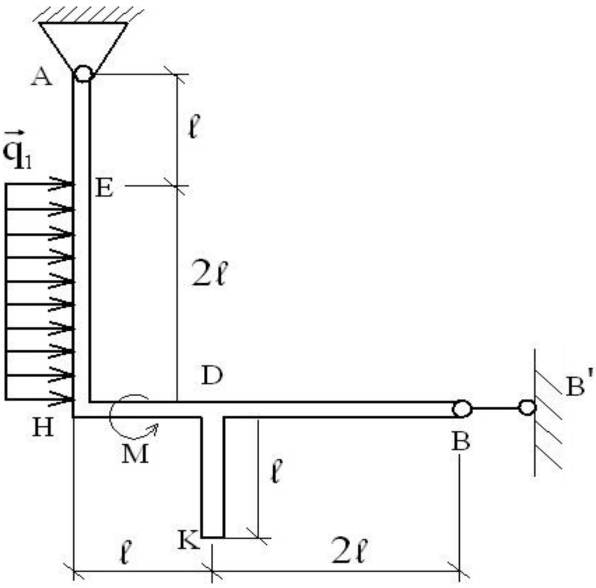
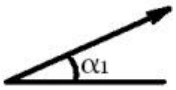
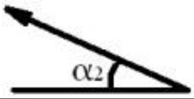
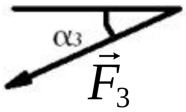
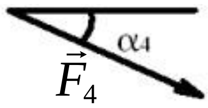


Рис.С-1.9

Таблица С-1

Сила / № условия	$\vec{F}_1$ 		$\vec{F}_2$ 		$\vec{F}_3$ 		$\vec{F}_4$ 	
	F_1=10н		F_2=20н		F_3=30н		F_4=40н	
	Точка Прило-жения	$\alpha_1{}^\circ$	точка приложения	$\alpha_2{}^\circ$	точка приложения	$\alpha_3{}^\circ$	Точка при-ложения	$\alpha_4{}^\circ$
0			D	60	K	45		
1	K	30					H	60
2			H	45	K	30		
3	D	60					K	60
4			K	30	E	60		
5	H	60			K	30		
6			E	30			K	45
7	D	45			K	60		
8			H	60			K	30
9	E	30					K	60

На балку действует пара сил с моментом M=100 Н•м; равномерно распределенная нагрузка $q_1 = 15\frac{\text{н}}{\text{м}}$ или неравномерно распределенная нагрузка $q_2 = 25\frac{\text{н}}{\text{м}}$; сила, приложенная в точке K на конце консоли и сила в любой из трех точек D, E, H (в зависимости от номера условия). Во всех задачах l=0,5 м. Определить реакции в опорах A и B.

1.3.4. Произвольная пространственная система сил

Задача №1

Изогнутая плита закреплена сферически шарниром в т. A; цилиндрическим (плоским) шарниром – в т. В и невесомым стержнем CC' в т. C.

Размеры большей части плиты: длина $3l$, ширина $2l$.

Размеры меньшей части плиты: длина $2l$, ширина $0,5l$.

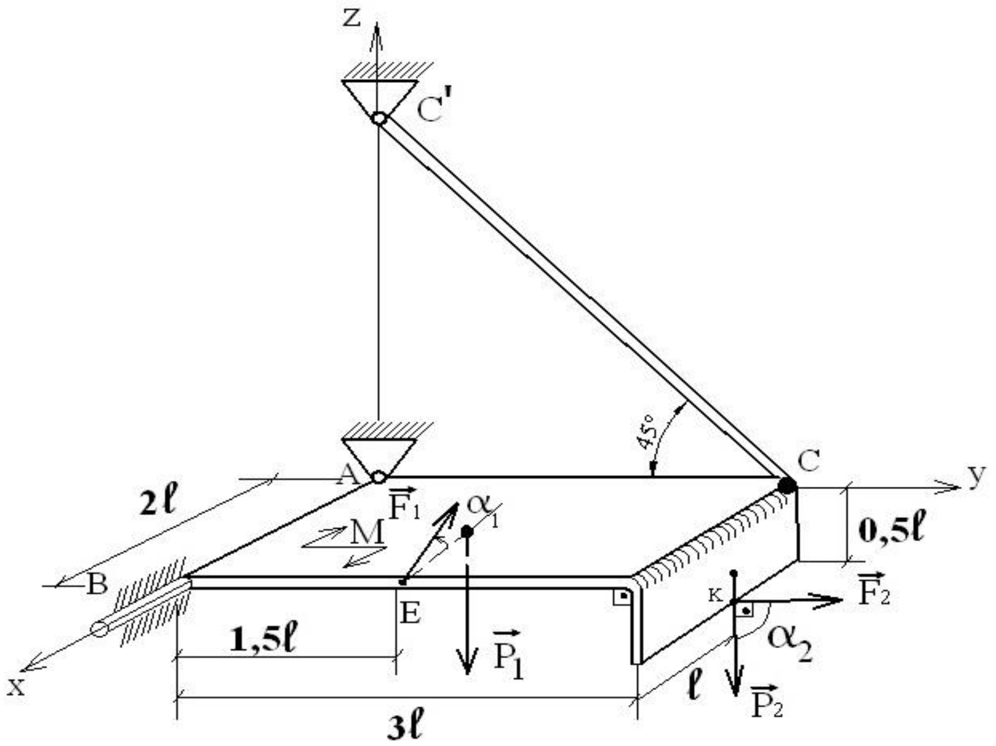


Рис.1.23

В т. E приложена сила $F_1 = 5кН$ в плоскости параллельной плоскости ZAx под углом $\alpha_1 = 30°$;

В т. K приложена сила $F_2 = 3кН$ в плоскости параллельной плоскости ZAy под углом $\alpha_2 = 90°$.

Точки E и K лежат в серединах длин соответствующих сторон плиты.

На плите действует пара сил с моментом М=8 кН•м. Размер l=1 м. Вес плиты большей части P_1=6 кН, меньшей части P_2=1 кН. Определить реакции связей в шарнирах A, B, и в стержне CC'.

Решение

В заданной задаче система координат обозначена. Обозначим неизвестные реакции или их составляющие. В неподвижном сферическом шарнире А обозначим три составляющие $\vec{R}_{Ax}$, $\vec{R}_{Ay}$ и R_{Az}, по осям в положительных направлениях. Цилиндрический подшипник (т. B) – это плоский шарнир.

Так же по осям в положительных направлениях проведем (из т. B) векторы $\vec{R}_{By}$ и R_{Bz}.

Стержень CC' - условно невесомый, жесткий, работает либо на растяжение либо на сжатие. Обозначим реакцию в стержне $\overline{N}_c$ и направим ее по оси стержня от т. C к т. C', считая, что стержень растянут.

Полезно также разложить внешнюю силу $\vec{F}_1$ на составляющие: $\vec{F}_1 \cos 30°$ по оси x и на $\vec{F}_1 \sin 30°$ по оси z, что даст готовые проекции силы $\vec{F}_1$ на оси (A_x и A_z) (смотри теорему Вариньона). Окончательно получим схему:

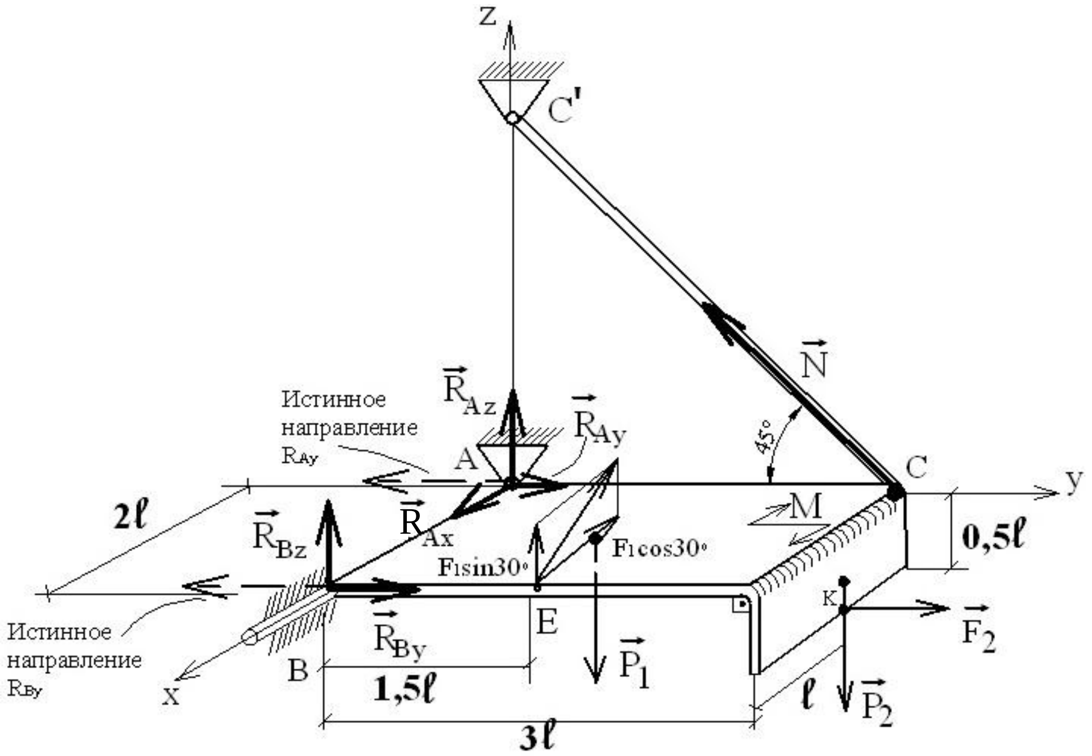


Рис.1.24

Количество неизвестных реакций – шесть ($\vec{R}_{Ax}, \vec{R}_{Ay}, \vec{R}_{Az}, \vec{R}_{By}, \vec{R}_{Bz}, \vec{N}$). Система находится в равновесии. Задача статистически определимая, т.е. может быть решена при помощи шести уравнений равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^{n} F_{iz} = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_X(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^{n} M_Y(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^{n} M_Z(\vec{F}_i) = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \quad R_{Ax} - F_1 \cdot \cos 30° = 0 \qquad (1)$$

Из (1) определим $R_{Ax} = F_1 \cdot \cos 30°; R_{Ax} = 5 \cdot 0{,}87 = 4{,}35\text{кН}$. Численное значение положительное, значит направление $\vec{R}_{Ax}$ на схеме выбрано правильно.

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ij} = 0; \quad R_{Ay} + R_{By} + F_2 - N \cos 45° = 0 \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iz}=0;\quad R_{Az}+R_{Bz}-P_1-P_2+F_1\cdot\sin30^\circ+N\cdot\sin45^\circ=0 \qquad (3)$$

Пока два выражения (2) и (3) содержат пять оставшихся неизвестных.

$$\sum_{i=1}^{n} M_x(\vec{F}_i)=0;\quad F_1\sin30^\circ\cdot1{,}5l+F_2\cdot0{,}5l-P_1\cdot1{,}5l-P_2\cdot3l+N\sin45^\circ\cdot3l=0$$

(4)

Силы $\vec{R}_{Ay};\vec{R}_{Az};\vec{R}_{By};\vec{R}_{Bz};\vec{N}\cos45^\circ$ ось x пересекают (плечи равны нулю), а силы $\vec{R}_{Ax};F_1\cos30^\circ$ параллельны или совпадают с осью x, поэтому все они вращающего действия не создают). Из (4) определим:

$$N=\frac{-F_1\sin30^\circ\cdot1{,}5l-F_2\cdot0{,}5l+P_1\cdot1{,}5l+P_2\cdot3l}{\sin45^\circ\cdot3l};$$

$$N=\frac{-5\cdot0{,}5\cdot1{,}5\cdot1-3\cdot0{,}5\cdot1+6\cdot1{,}5\cdot1+1\cdot3\cdot1}{0{,}71\cdot3\cdot1}=3{,}2\text{ęÍ}$$

Направление $\vec{N}$ соответствует ранее указанному на схеме.

$$\sum_{i=1}^{n} M_y(\vec{F}_i)=0;\quad P_1\cdot l+P_2\cdot l-F_1\cdot\sin30^\circ\cdot2l-R_{Bz}\cdot2l=0 \qquad (5)$$

Из (5) определим $R_{Bz}=\dfrac{+P_1\cdot l+P_2\cdot l-F_1\cdot\sin30^\circ\cdot2l}{2l};$

$$R_{Bz}=\frac{6\cdot1+1\cdot1-5\cdot0{,}5\cdot2\cdot1}{2\cdot1}=1\text{кН};\quad R_{Bz}=1\text{кН}$$

Направление $\vec{R}_{Bz}$ соответствует ранее указанному на схеме.

$$\sum_{i=1}^{n} M_z(\vec{F}_i)=0;\quad -M+R_{By}\cdot2l+F_1\cdot\cos30^\circ\cdot1{,}5l+F_2\cdot l=0 \qquad (6)$$

Из (6) определим $R_{By}=\dfrac{M-F_1\cdot\cos30^\circ\cdot1{,}5l-F_2\cdot l}{2l};$

$$R_{By}=\frac{8-5\cdot0{,}87\cdot1{,}5\cdot1-3\cdot1}{2\cdot1}=-0{,}76\text{кН}.\qquad R_{By}=-0{,}76\text{кН}.$$

Направление $\vec{R}_{By}$ противоположно указанному на схеме. По известным $\vec{R}_{By}$, $\vec{R}_{Bz}$, $\vec{N}$ подставляем их значения во (2) и (3) выражения получим: (из (2))

$$R_{Ay}=-R_{By}-F_2+N\cdot\cos45^\circ;\quad R_{Ay}=-(-0{,}76)-3+3{,}2\cdot0{,}71=-0{,}06\text{ęÍ}$$

$$R_{Ay}=-0{,}06\text{ęÍ}$$

Истинные направления R_{Ay} противоположно указанному. Из (3) определим:

$$R_{Az}=-R_{Bz}+P_1+P_2-F_1\sin30^\circ-N\sin45^\circ$$

$$R_{Az}=-1+6+1-5\cdot0{,}5-3{,}2\cdot0{,}71=-1{,}23\text{ęÍ};\quad R_{Az}=-1{,}23\text{ęÍ}$$

Направление $\vec{R}_{Az}$ соответствует указанному на схеме.

По величине полную реакцию $\vec{R}_A$ определим:

$$R_A = \sqrt{R_{Ax}^2 + R_{Ay}^2 + R_{Az}^2} = \sqrt{4{,}35^2 + (-0{,}06)^2 + 1{,}23^2} = 4{,}52\text{ęÍ}$$

Полную реакцию $\vec{R}_B$ определим:

$$R_B = \sqrt{R_{By}^2 + R_{Bz}^2} = \sqrt{(-0{,}06)^2 + 1^2} = 1{,}002\text{ęÍ}$$

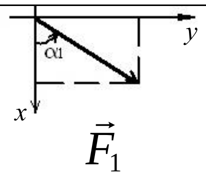
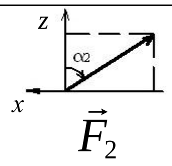
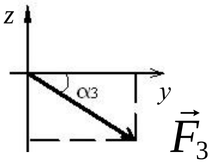
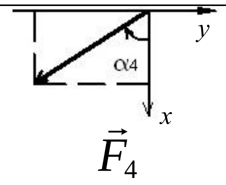
Ответ: $\mathrm{R_A} = 4{,}52\text{ęÍ}$; $\mathrm{R_B} = 1{,}002\text{ęÍ}$; $N = 3{,}2\text{ęÍ}$.

Контрольное задание С-2

Массивная однородная прямоугольная плита весом $\vec{P}$ закреплена в трех точках: в т. A – сферическим шарниром; в т. B цилиндрическим шарниром; невесомым стержнем CC' в т. C. Размеры плиты: длина – $2l$, ширина $-\ l$, толщина – $0{,}2l$.

В точках D, E, H, K приложены силы $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$. Точки находятся в углах или серединах соответствующих сторон плиты. На плиту действуют пара сил с моментом M. Момент M=8 кН•м; P=20кН; l=1м. Определить реакции в шарнирах А, В и в стержне CC' .

Таблица С-2

сила / № условия								
	F_1=10Н		F_2=20Н		F_3=30Н		F_4=40Н	
	точка приложения	$\alpha_1{}^\circ$	точка приложения	$\alpha_2{}^\circ$	точка приложения	$\alpha_3{}^\circ$	точка приложения	$\alpha_4{}^\circ$
0	D	60			K	0		
1	K	90	D	30				
2			E	60			K	90
3					E	30	K	0
4	K	0			H	60		
5			D	60	K	0		
6			H	30			K	0
7	E	30	K	90				
8					K	0	E	60
9			K	90	D	30		

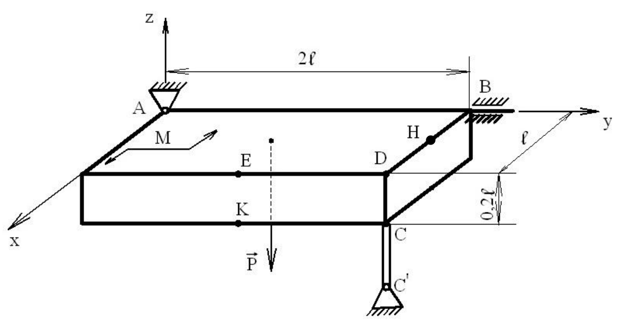


Рис.С-2.0

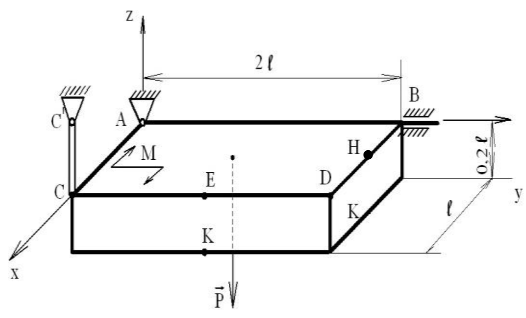


Рис.С-2.1

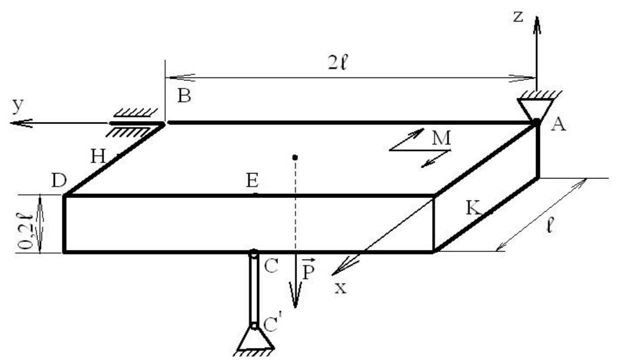


Рис. С-2.2

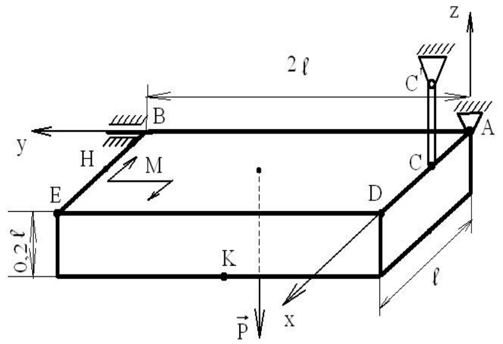


Рис. С-2.3

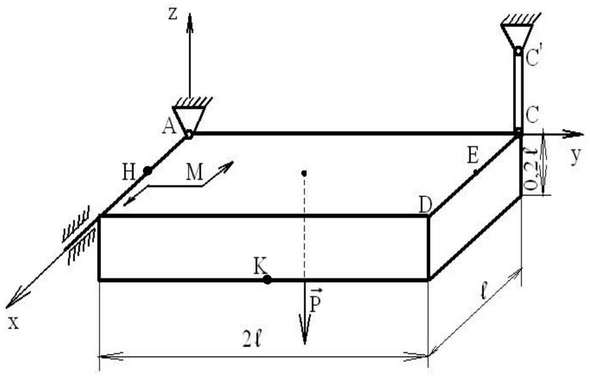


Рис. С-2.4

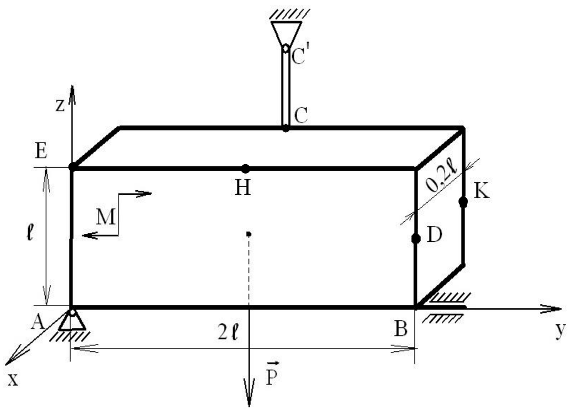


Рис. С-2.5

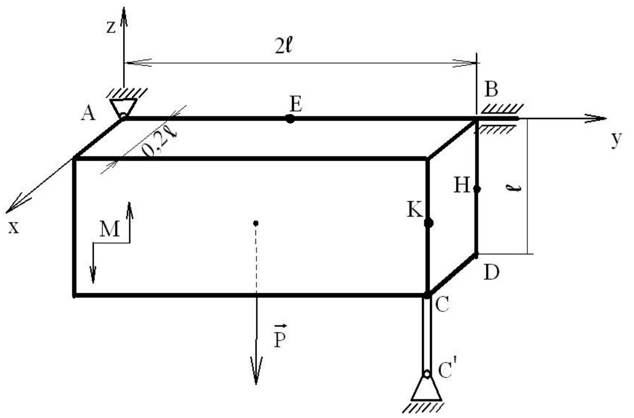


Рис. С-2.6

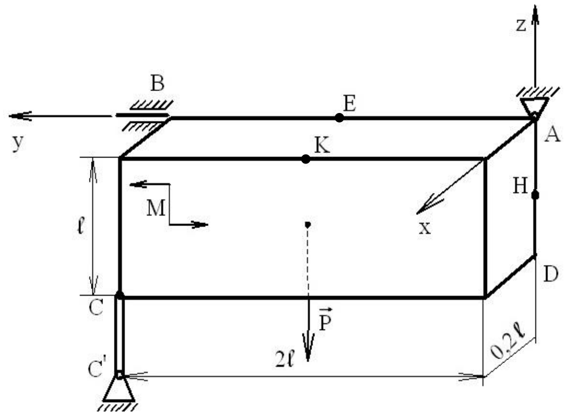


Рис. С-2.7

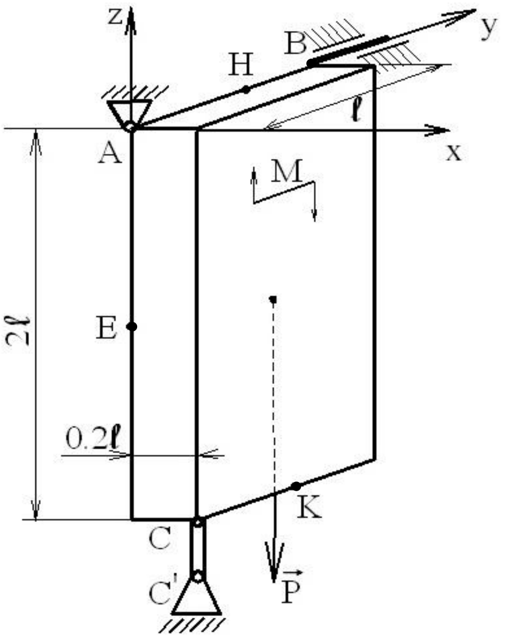


Рис. С-2.8

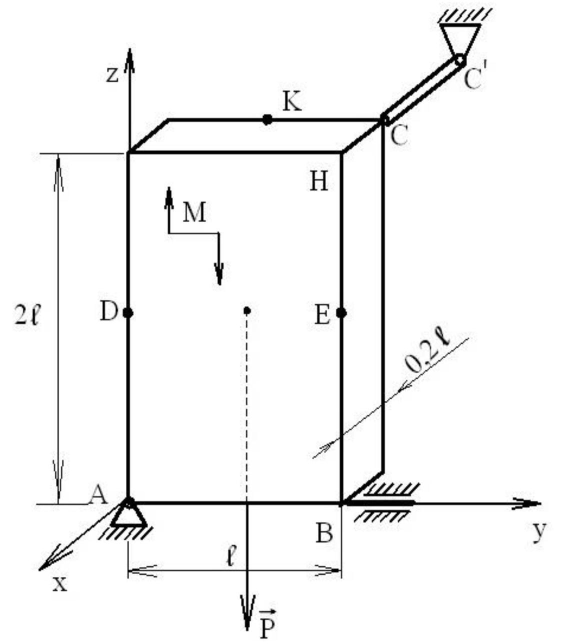


Рис. С-2.9

2. Кинематика

2.1. Программные вопросы

Введение в кинематику

1. Предмет кинематики. Пространство и время. Система отсчета. Относительность движения. Основная задача кинематики.

Кинематика точки

1.Три способа задания движения материальной точки: естественный, координатный, векторный.

2.Скорость движения точки. Ускорение точки.

3.Определение касательного и нормального ускорений материальной точки.

4.Определение скорости и ускорения материальной точки при движении ее по окружности.

Кинематика тела

1.Поступательное движение твердого тела. Закон поступательного движения твердого тела.

2.Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси. Закон вращательного движения. Угловая скорость и угловое ускорение твердого тела.

3.Случаи (2) вращательного движения твердого тела.

Плоское движение твердого тела

1.Плоское движение твердого тела. Уравнения движения плоской фигуры.

2.Разложение плоского движения на поступательное и вращательное.

3.Определение скорости произвольной точки плоской фигуры (как геометрической суммы скорости плюса и вращательной скорости точки относительно плюса).

4.Теорема о проекциях скоростей двух точек плоской фигуры.

5.Мгновенный центр скоростей.

Сложное движение точки

1.Абсолютное , переносное и относительное движение.

2.Теорема о сложении скоростей.

3.Теорема о сложении ускорений. Кориолисово ускорение.

2.2.Основные формулы

1.Скорость движения точки $\vec{V} = \dfrac{d\,\vec{r}}{dt}$.

Вектор скорости точки $\vec{V}$ направлен в сторону движения по касательной к траектории в данной точке. Размерность скорости: $[\vec{V}] = [м/с]$

Скалярный вариант: $V = \dfrac{d\,s}{dt}$.

Случай движения, например по оси x: $V_x = \dfrac{dx}{dt}$.

2.Ускорение точки: $\vec{a} = \dfrac{d\vec{V}}{dt} = \dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$.

Вектор ускорения точки $\vec{a}$ направлен внутрь криволинейной траектории движения точки. Размерность ускорения: $[a] = [м/с^2]$.

Скалярный вариант: $a = S'' = \dfrac{d^2 S}{dt^2}$.

3.Естественные оси

Касательное ускорение: $a_\tau = \dfrac{dV}{dt}$

Нормальное ускорение: $a_n = \dfrac{V^2}{\rho}$

Полное ускорение $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$.

4.Движение точки по окружности

Линейная (окружная) скорость $V = \omega R$, где ω - угловая скорость.

$\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, где φ – угол поворота; R – радиус окружности. Размерность угловой скорости: $[\omega] = [рад/с] = [1/с] = [с^{-1}]$.

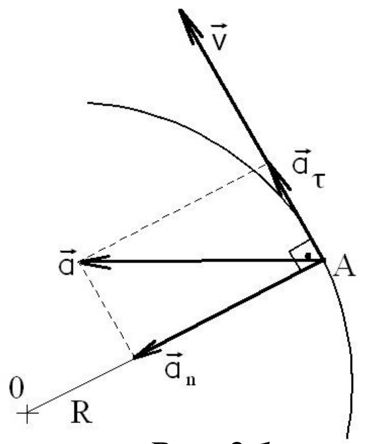


Рис. 2.1

Касательное ускорение: $a_\tau = \varepsilon R$, где $\varepsilon = \dfrac{d\omega}{dt}$ - угловое ускорение точки. Размерность: $[\varepsilon] = [рад/с] = [1/с] = [с^{-2}]$

Нормальное ускорение $a_n = \omega^2 R$

Полное ускорение

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^2}$$

5. Поступательное движение тела

Скорости всех точек тела равны $\vec{V_i} = const$ и ускорения всех точек тела равны: $\vec{a_i} = const$в конкретный момент времени t.

6. Закон вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$\varphi = f(t)$, где φ- угол поворота, t-время. Размерность: $[\varphi] = [рад]$.

Угловая скорость $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$.

Угловое ускорение $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$.

6а. Случай равномерного вращательного движения твердого тела.

$\varepsilon = 0$; $\omega = \frac{\varphi}{t}$, или $\omega = \frac{\pi n}{30}$, где n - число оборотов в минуту. Размерность: $[n] = [об/мин]$.

7. Плоское движение

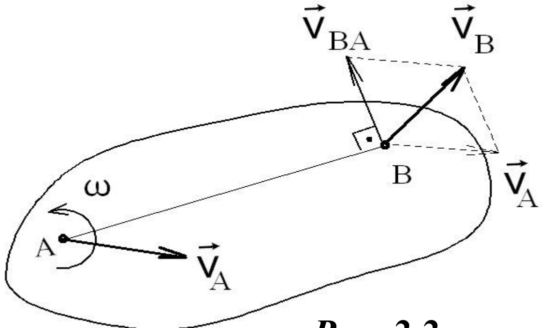


Рис. 2.2

Скорость точки тела, совершающего плоское движение – есть геометрическая сумма векторов скоростей переносного и относительного движения данной точки.

Например, скорость в т.В: $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$, где т.$A$ – полюс, а $V_{BA} = \omega \cdot AB$ - относительная скорость т.В при вращении ее с угловой скоростью ω относительно полюса А,

АВ – расстояние между точкой В и полюсом А.

Ускорение точки, например т.B

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA},$$

где $\vec{a}_A$ - ускорение полюса A;

$\vec{a}_{BA} = \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}$ – относительное ускорение т.В относительно полюса А

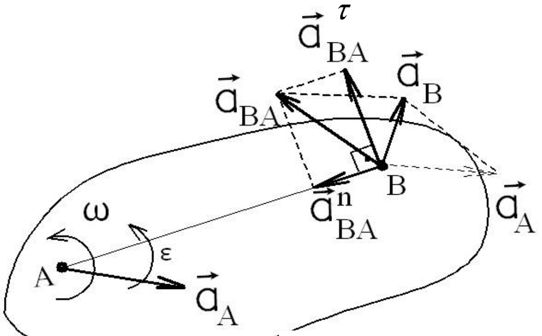


Рис. 2.3

$\vec{a}_{BA}^{\tau}$ и $\vec{a}_{BA}^{n}$ – касательная и нормальная составляющие

$$a_{BA}^{\tau} = \varepsilon \cdot AB, \quad a_{BA}^{n} = \omega^2 AB.$$

Т.е. $\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\tau} + \vec{a}_{BA}^{n}$

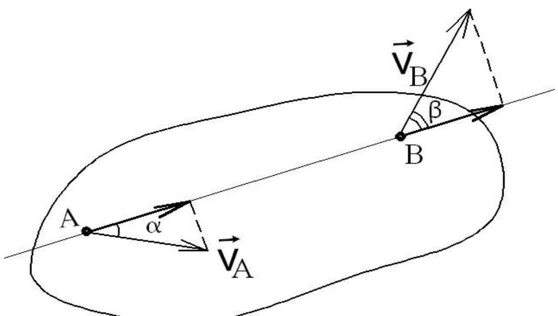


Рис. 2.4

Теорема о проекциях скоростей

Проекции скоростей двух точек плоской фигуры (т.е. тела участвующего в плоском движении) на прямую, соединяющую эти точки, равны и направлены в одну и ту же сторону.

Согласно теореме:

$$V_A \cdot \cos\alpha = V_B \cdot \cos\beta$$

Зная, например, углы α и β и V_A,определим $V_B = V_A \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$.

Мгновенный центр скоростей (м.ц.с.)

Единственная точка, в которой в данное мгновение скорость равна нулю(только для тела совершающего плоское движение)

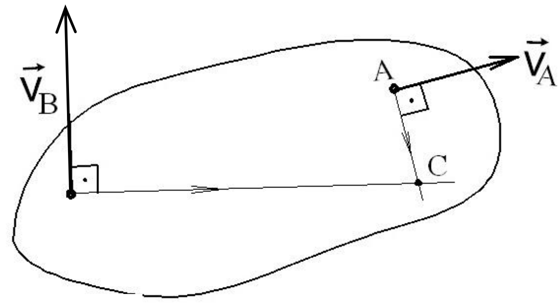


Рис. 2.5

а)Если известны две скорости двух точек плоской фигуры, то м.ц.с. – точка пересечения двух перпендикуляров к векторам скоростей.

т.C-м.ц.с.

б)Если известен м.ц.с., то скорость любой точки определяется, как в случае простого вращения вокруг м.ц.с. с угловой скоростью $\omega_{м.ц.с.} = \omega_C$; $\omega_C = \frac{V_A}{AC} = \frac{V_B}{BC}$.

Например, скорость точки K: $V_K = \omega_C \cdot KC$

Сложное движение точки. Случай переносного вращательного и относительного поступательного движения.

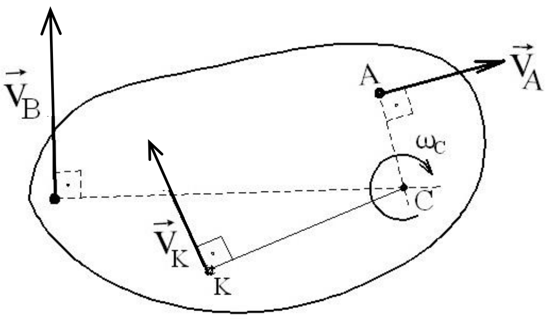


Рис. 2.6

Абсолютное ускорение точки: $\vec{a}_{абс} = \vec{a}_{пер} + \vec{a}_{отн} + \vec{a}_C$,

где $\vec{a}_C$ - ускорение Кориолиса.

$$\vec{a}_C = 2\left[\vec{\omega}_{пер} \times \vec{V}_{отн}\right],$$

$a_C = 2\omega_{пер} \cdot V_{отн} \cdot \sin\alpha$, где α – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{V}$.

2.3 Примеры решения задач

2.3.1 Координатный способ задания движения точки

В случае движения точки A по плоскости ее движение можно описать двумя уравнениями движения:

$x = f_1(t)$; $x = f_2(t)$.

Задача №1

Дано: уравнения движения точки А: $\begin{cases} x = -2 + 2\cos(\frac{\pi}{3}t) \\ y = 3 - 2\sin(\frac{\pi}{3}t) \end{cases}$ (1)

Определить: траекторию движения(закон движения) точки А, скорость и ускорение, а также касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны кривой в момент движения $t_1 = 1c$.

Решение

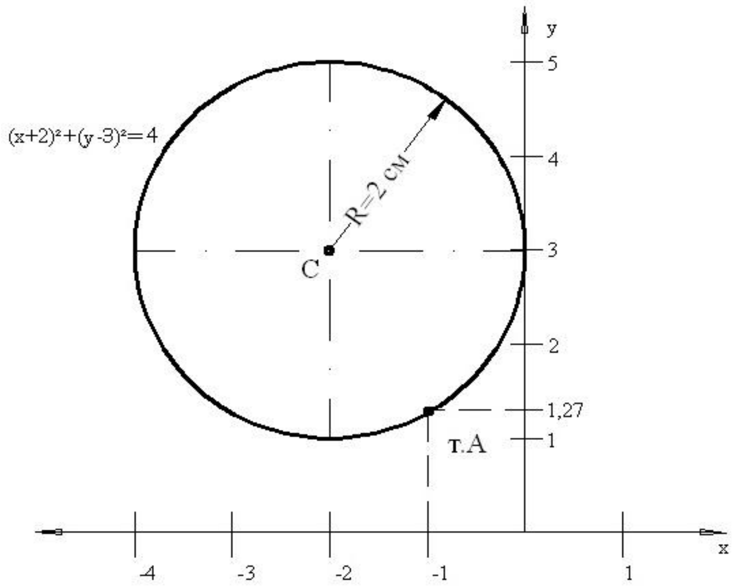


Рис. 2.7

В уравнениях(1) содержатся три переменных: x,y,t. Чтобы получить уравнение траектории, необходимо исключить из (1) параметр t. Воспользуемся для этого формулой преобразования тригонометрических функций:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad (2)$$

Из (1) получим $\sin(\frac{\pi}{3}t) = \frac{y-3}{-2}$; $\cos(\frac{\pi}{3}t) = \frac{x+2}{2}$ подставим в формулу (2),

считая $\alpha = (\frac{\pi}{3}t)$

$(\frac{y-3}{-2})^2 + (\frac{x+2}{2})^2 = 1$ или $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 4$ – уравнение окружности.

Центр окружности имеет координаты: -2;3.

Радиус окружности R=2. В качестве единицы измерения длины примем 1см, это удобно при выполнении контрольной работы в ученической тетради.

Т.о. центр С(-2;3); R=2см.

Построим траекторию движения. Далее определим положение т.A на траектории в момент времени $t_1 = 1c$.

Для этого в уравнения (1) подставим значение t=1c.

Получим:

$$x_A = -2 + 2\cos(\frac{\pi}{3}\cdot 1) = -2 + 2\cos 60^\circ = -2 + 2\cdot 0.5 = -1\text{cě}$$

$$y_A = 3 - 2\cdot\sin(\frac{\pi}{3}\cdot 1) = 3 - 2\sin 60^\circ = 3 - 2\cdot 0.87 = 1{,}27\text{ńě}$$

Обозначим т.A на траектории, т.е. A(-1;1,27)

Далее определим две составляющие скорости т.А по осям х,у.

$$V_x = x' = \frac{dx}{dt} = \left(-2 + 2\cos(\frac{\pi}{3}t)\right)' = 2\cdot\left(-\sin(\frac{\pi}{3}t)\right)\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}t) \text{ при } t_1 = 1c.$$

$$V_{xA} = -\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}\cdot 1) = -2\cdot\frac{3.14}{3}\sin 60^\circ = -\frac{2\cdot 3.14}{3}\cdot 0.87 = -1.82\ см/с$$

$$V_y = y' = \frac{dy}{dt} = \left(3 - 2\sin(\frac{\pi}{3}t)\right)' = -2\cdot\left(\cos(\frac{\pi}{3}t)\right)\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{3}t) \text{ при } t_1 = 1c.$$

$$V_{yA} = -\frac{2\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{3}\cdot 1) = -2\cdot\frac{3.14}{3}\cos 60^\circ = -\frac{2\cdot 3.14}{3}\cdot 0.5 = -1.05\ см/с$$

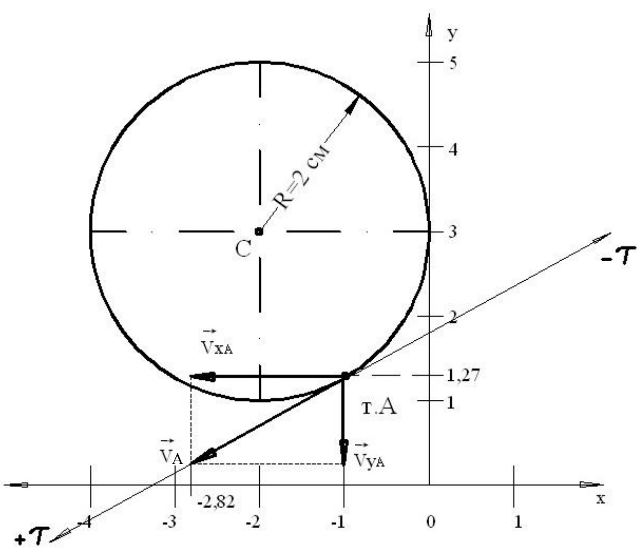


Рис. 2.8

Модуль скорости $V_A\sqrt{V_{xA}^2 + V_{yA}^2} = \sqrt{(-1{,}82)^2 + (-1{,}05)^2} = 2{,}01 см/с$.

Изобразим все три вектора на чертеже:

Векторы $\vec{V}_{XA}$ и $\vec{V}_{YA}$ проводим в направлениях противоположных положительным направлениям осей x и y, т.к. перед значениями $\vec{V}_{XA}$ и $\vec{V}_{YA}$ стоит знак (-) минус.

Примем масштаб: в 1 см содержится 1см/сек. $\vec{V}_A$ определим построением геометрической суммы $\vec{V}_A = \vec{V}_{XA} + \vec{V}_{YA}$

Из построения очевидно, что скорость $\vec{V}_A$ направлена по касательной к траектории в данной точке A. По вектору $\vec{V}_A$ проведем линию в обе стороны – получим касательную ось τ.

Аналогично определим составляющие ускорения т. A

a_{xA} и a_{yA}, а затем a_A и построим на чертеже $\vec{a}_A = \vec{a}_{xA} + \vec{a}_{yA}$ - вектор ускорения т. A.

$$a_x = V_x' = \frac{dV_x}{dt} = \left(-\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}\cdot t)\right)' = -\frac{2\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{3}t)\frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi^2}{9}\cos(\frac{\pi}{3}t).$$

при $t_1 = 1c$ $\quad a_{xA} = -\frac{2\pi^2}{9}\cdot\cos(\frac{\pi}{3}\cdot 1) = -\frac{2\cdot 3{,}14^2}{9}\cdot 0{,}5 = -1{,}1 см/с^2$

$$a_y = V_y{}' = \frac{dV_y}{dt} = \left[\frac{2\pi}{3}\cdot\cos(\frac{\pi}{3}\cdot t)\right]' = -\frac{2\pi}{3}\left[\sin(\frac{\pi}{3}t)\right]\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi^2}{9}\sin(\frac{\pi}{3}t) \text{ при } t_1 = 1c$$

$$a_{yA} = \frac{2\pi^2}{9}\cdot\sin\frac{\pi}{3}\cdot 1 = \frac{2\cdot 3{,}14^2}{9}\cdot 0{,}87 = 1{,}9\,см/c^2$$

$$a_A = \sqrt{a_{xA}^2 + a_{yA}^2} = \sqrt{(-1{,}1)^2 + 1{,}9^2} = 2{,}2\,см/c^2$$

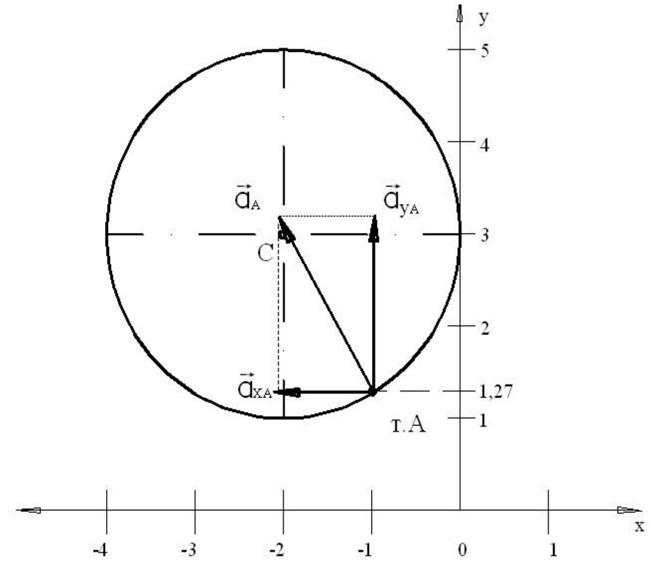


Рис. 2.9

Направляем $\vec{a}_{xA}$ противоположно положительному направлению оси х, т.к. $a_{xA} = -1{,}1\,см/c^2$ отрицательное значение;

$\vec{a}_{yA}$ - параллельно оси y, т.к. $a_{yA} = 1{,}9\,см/c^2$ - положительное значение.

Вектор $\vec{a}_A$ определяется на чертеже способом геометрического сложения.

Касательное ускорение определим по формуле:

$$a_\tau = \frac{V_x\cdot a_x + V_y\cdot a_y}{V} \qquad (3)$$

Для сведения: $V^2 = V_x^2 + V_y^2$.

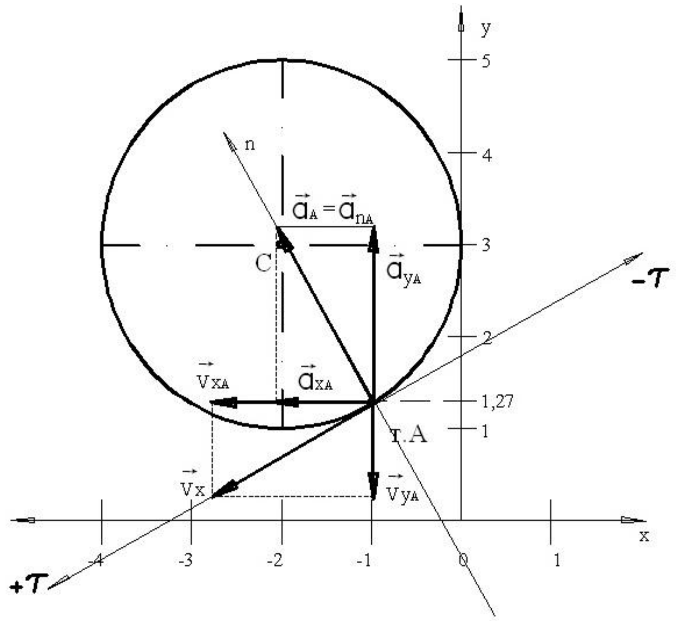


Рис. 2.10

Так как ускорение (вообще) есть производная V, то продифференцируем по времени, т.е. $(V^2)' = (V_x^2)' + (V_y^2)'$

$$2V\cdot\frac{dV}{dt} = 2V_x\,\frac{dV_x}{dt} + 2V_y\,\frac{dV_y}{dt}$$,

т.к. $\frac{dV}{dt} = a_\tau$; $\frac{dV_x}{dt} = a_x$; $\frac{dV_y}{dt} = a_y$,

то $V\cdot a_\tau = V_x\cdot a_x + V_y\cdot a_y$, откуда $a_\tau = \frac{V_x\cdot a_x + V_y\cdot a_y}{V}$.

$$a_{\tau A} = \frac{V_{xA}\cdot a_{xA} + V_{yA}\cdot a_{yA}}{V_A} = \frac{(-1{,}82)\cdot(-1{,}1) + (1{,}05)\cdot 1{,}9}{2{,}01} = 0\,см/c^2$$

Так как $a_{\tau A} = 0\,см/с^2$, это означает, что точка А в этот момент движется по окружности равномерно. Поэтому нормальное ускорение $\vec{a}_{nA}$ совпадает с полным ускорением, т.е. $\vec{a}_A = \vec{a}_{nA}$

$$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2, \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} \qquad a_{nA} = \sqrt{a_A^2 - a_{\tau A}^2} = \sqrt{2{,}2^2 - 0^2} = 2{,}2\,см/с^2$$

Радиус кривизны $\rho = \dfrac{V^2}{a_n}$; $\rho_A = \dfrac{V_A^{\ 2}}{a_{nA}}$; $\rho_A = \dfrac{2{,}1^2}{2{,}2} = 2см$

$\rho_A = R_{окр} = 2см$

Задача № 2. Уравнения движения точки B

$$\left.\begin{aligned} x &= 2\sin(\frac{\pi}{6}t) - 2 \\ y &= -2\cos(\frac{\pi}{3}t) + 5 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Определить: траекторию движения т.В, скорость, ускорение, а также касательное и нормальное ускорение и радиус кривизны кривой в т.В, когда время $t_1 = 1сек$.

Решение:

Для определения траектории необходимо избавиться от параметра t в уравнениях (1), т.е. получить выражение вида $x = f(y)$ или $y = f(x)$.

Воспользуемся формулой преобразования тригонометрических функций:

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \qquad (2)$$

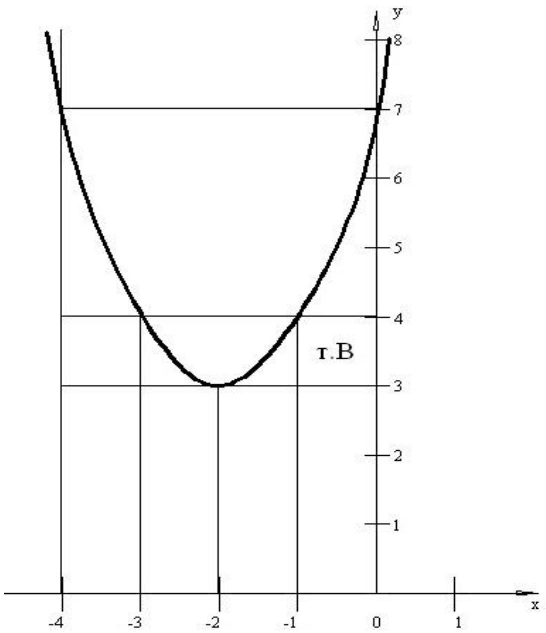


Рис. 2.11

Считая $\alpha = (\frac{\pi}{6}t)$; $2\alpha = (\frac{\pi}{3}t)$, получим $\sin(\frac{\pi}{6}t) = \frac{x+2}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{3}t) = \frac{y-5}{-2} = \frac{5-y}{2}$,

Затем подставим в (2): $\frac{5-y}{2} = 1 - 2(\frac{x+2}{2})^2$

умножим на 2 обе части

$5 - y = 2 - 2\cdot 2\frac{(x+2)^2}{4}$ умножим на -1 обе части и окончательно преобразуем:

$y = (x+2)^2 + 3$ – уравнение параболы.

Изобразим параболу на чертеже (можно по точкам):

x=0; y=7

x=-1;y=4

x=-2; y=3 – вершина параболы

x=-3; y=4
x=-4; y=7 ….. и т.д.)

Затем определим координаты точки B в момент $t_1 = 1c$.

$x_B = 2\sin(\frac{\pi}{6}\cdot 1) - 2 = 2\cdot 0{,}5 - 2 = -1 см$; $y_B = -2\cos(\frac{\pi}{3}\cdot 1) + 5 = -2\cdot 0{,}5 + 5 = 4 см$

Координаты т. B (-1;4) Из (1) определим составляющие скорости т.В ; полную скорость V_B и изобразим все три вектора на чертеже ($\vec{V_B} = \vec{V_{xB}} + \vec{V_{yB}}$)

$$V_x = x' = \frac{dx}{dt} = \left[2\sin(\frac{\pi}{6}t) - 2\right]' = 2\cos(\frac{\pi}{6}t)\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{6}t);$$

при $t_1 = 1c$

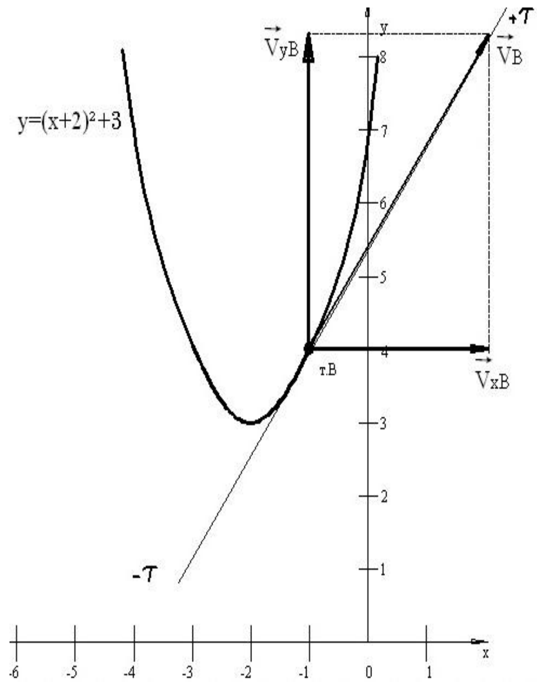


Рис. 2.12

$$V_{xB} = \frac{\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{6}\cdot 1) = \frac{3{,}14}{3}\cdot 0{,}87 = 0{,}91\frac{см}{c}$$

$$V_y = y' = \frac{dy}{dt} = \left[2\cos(\frac{\pi}{3}t) + 5\right]' =$$

$$-2(-\sin(\frac{\pi}{3}t))\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}t);\ \text{при}\ t_1 = 1c$$

$$V_{yB} = \frac{2\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}\cdot 1) = \frac{2\cdot 3{,}14}{3}\cdot 0{,}87 = 1{,}82\frac{см}{c}$$

$$V_B = \sqrt{V_{xB}^2 + V_{yB}^2} = \sqrt{0{,}91^2 + 1{,}82^2} = 2{,}03\frac{см}{c}.$$

Для улучшения наглядности изображения иногда полезно или уменьшить или увеличить(пропорционально) оба вектора исходя из численных значений.

В нашем случае: $V_{xB} = 0{,}91\frac{см}{c}$; $V_{yB} = 1{,}82\frac{см}{c}$

Увеличим численные значения V_{xB} и V_{yB}, например, в три раза. Т.е. примем масштабный коэффициент $k_V = 3$

На чертеже отложим $\begin{cases} V_{xB}\times k_V = 0{,}91\cdot 3 = 2{,}73 см \\ V_{yB}\times k_V = 1{,}82\cdot 3 = 5{,}46 см \end{cases}$

Определим составляющие ускорения т.В, полное ускорение $\vec{a_B}$ и изобразим на чертеже $\vec{a_B} = \vec{a_{xB}} + \vec{a_{yB}}$

$$a_x = V_x' = \frac{dV_x}{dt} = \left[\frac{\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{6}t)\right]' = \frac{\pi}{3}\left[-\sin(\frac{\pi}{6}t)\right]\cdot\frac{\pi}{6} = -\frac{\pi^2}{18}\sin(\frac{\pi}{6}t);$$

при $t_1 = 1c$ $a_{xB} = -\frac{\pi^2}{18}\cdot\sin(\frac{\pi}{6}\cdot 1) = -\frac{3{,}14^2}{18}\cdot 0{,}5 = -0{,}27\frac{см}{c^2}$.

$$a_y = V_y{}' = \frac{dV_y}{dt} = \left[\frac{2\pi}{3}\sin(\frac{\pi}{3}t)\right]' = \frac{2\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{3}t)\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi^2}{9}\cos(\frac{\pi}{3}t);$$

при $t_1 = 1c$ $a_{yB} = \frac{2\pi^2}{9}\cdot\cos(\frac{\pi}{3}\cdot 1) = \frac{2\cdot 3{,}14^2}{9}\cdot 0{,}5 = 1{,}10\frac{см}{c^2}$.

Полное ускорение $a_B = \sqrt{a_{xB}^2 + a_{yB}^2} = \sqrt{(-0{,}27)^2 + 1{,}1^2} = 1{,}13\frac{см}{c^2}$

Очевидно, что значение $a_{xB} = -0{,}27\frac{см}{c^2}$ численно очень мало и на чертеже его необходимо увеличить, например в 4 раза, т.е. примем масштабный коэффициент κ_a=4.

Отрезки на чертеже:

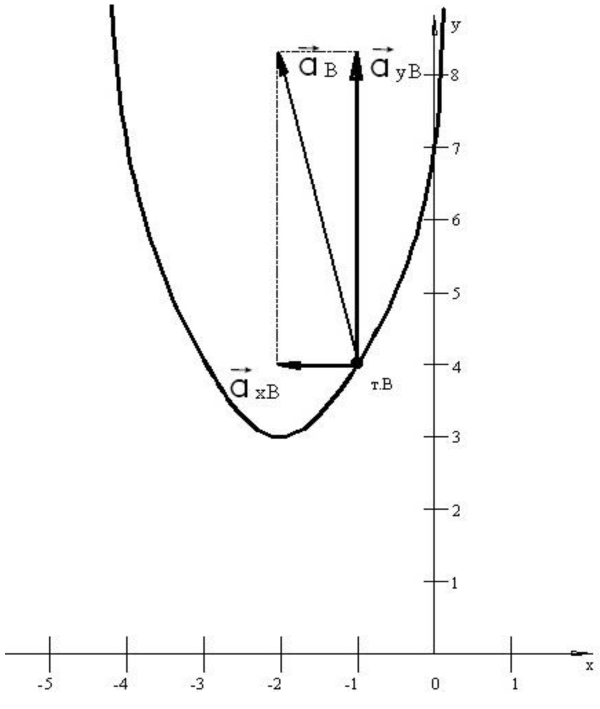


Рис. 2.13

$a_{xB}\times k_a = -0.27\times 4 = -1{,}08$ см.

$a_{yB}\times k_a = 1.1\times 4 = 4{,}4$ см.

Вектор $\overrightarrow{a_{xB}}$ откладываем от точки B на графике в сторону противоположную положительному направлению оси x. Вектор $\overrightarrow{a_{yB}}$ – вверх, т.е. параллельно оси y.

Заметим, что предыдущий план скоростей показывает, что вектор скорости точки $\overrightarrow{V_B}$ идет именно по касательной

из т. B, а вектор ускорения на плане ускорения направлен внутрь кривой, что не противоречит законам механики и лишь подтверждает их. Добавим, что, проведя по вектору $\overrightarrow{V_B}$ в обе стороны линию, получим касательную ось τ.

По формуле:

$$a_\tau = \frac{V_x a_x + V_y a_y}{V}$$

определим касательную составляющую $\overrightarrow{a_\tau}$:

$$a_{\tau B} = \frac{V_{xB}a_B + V_{yB}a_{yB}}{V_B} = \frac{0{,}91\cdot(-0{,}27) + 1{,}82\cdot 1{,}1}{2{,}03} = 0{,}87\frac{ńě}{ń^2}$$

Отрезок на чертеже:

$a_{\tau B}\cdot\kappa_a$=0,87·4 = 3,46 см

отложим на оси $+\tau$ от точки B.

Нормальную составляющую $\overrightarrow{a_{nB}}$ определим из выражения

$a^2 = a_\tau^2 + a_n^2$

$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$;

$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = a_n = \sqrt{a_в^2 - a_{\tau в}^2} = \sqrt{1{,}13^2 - 0{,}87^2} = 0{,}72 \frac{см}{см^2}$;

Отрезок на чертеже: $a_{nB} \cdot к_a = 0{,}72 \cdot 4 = 2{,}88$ см

Отложим от точки B по нормали $n - n$, проведенной через эту же точку B, внутри кривой. Нормаль $n - n$ легко провести как перпендикуляр к касательной оси τ в т. B, которую уже определил вектор $\overrightarrow{V_B}$ (см.выше).

Радиус кривизны ρ_B в данной точке траектории определим по формуле

$$\rho_B = \frac{V_B^2}{a_{nB}}; \quad \rho_B = \frac{2.03^2}{0.72} = 5.72 см$$

Центр C для радиуса кривизны $\rho_в$ находится на нормали $n - n$ на расстоянии 5,72 см от точки B внутри кривой. Итоговый чертеж:

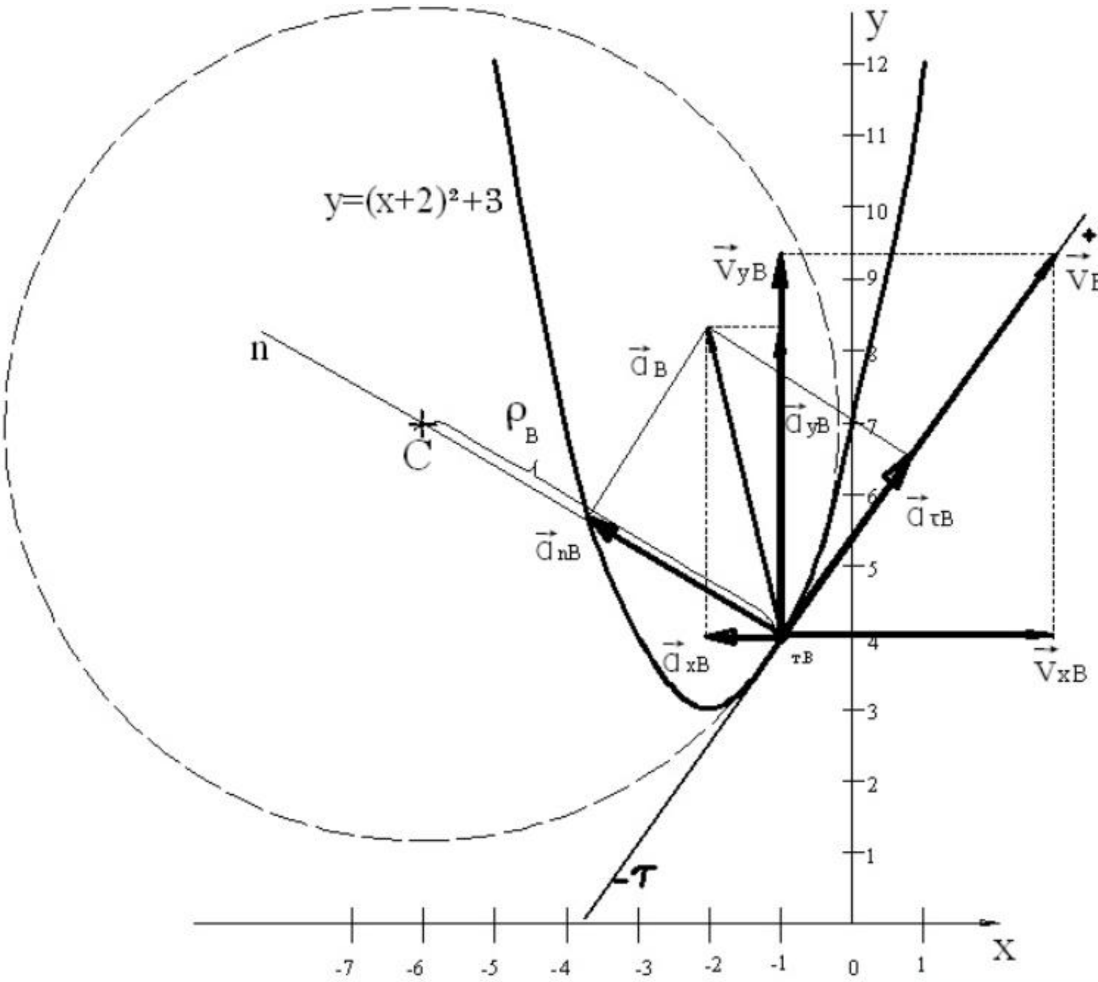


Рис. 2.14

На чертеже обозначена окружность, радиус которой $R_{окр} = \rho_в$, то есть в точке B кривизна параболы равна кривизне такой окружности.

Контрольное задание К-1

Точка С движется по плоскости *xOy*. Закон движения точки *C* задан двумя уравнениями (координатный способ задания движения точки):

$x = f_1(t) \cdot y = f_2(t),$

Где x и y выражены в сантиметрах, t – в секундах.

На рисунках 0-9 указана конкретно зависимость

$x = f_1(t)$

с кусочком траектории. Номер рисунка соответствует предпоследней цифре шифра в зачетной книжке студента. Номер условия выбирается из таблицы К-1 по последней цифре шифра в зачетной книжке.

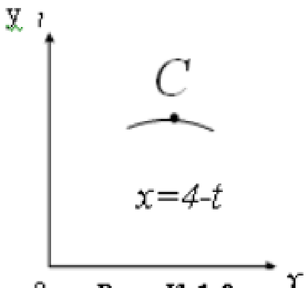


Рис. К-1.0

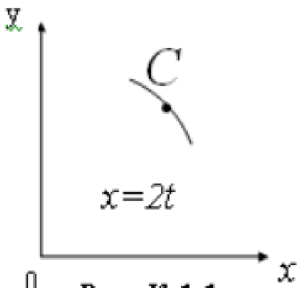


Рис. К-1.1

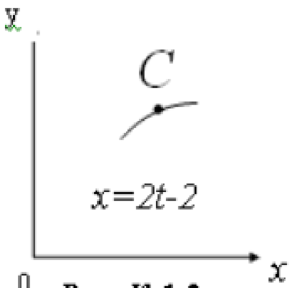


Рис. К-1.2

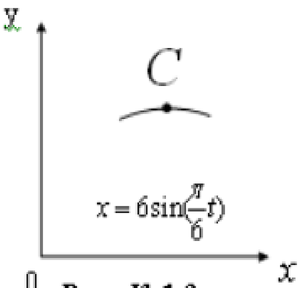


Рис. К-1.3

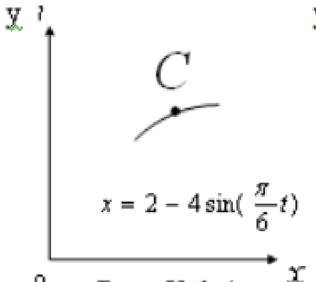


Рис. К-1.4

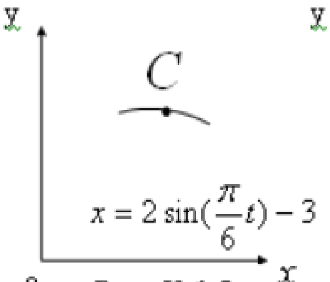


Рис. К-1.5

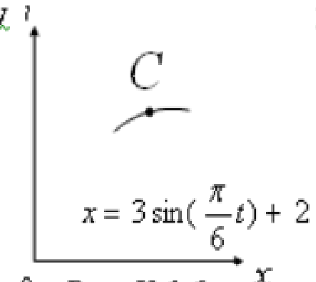


Рис. К-1.6

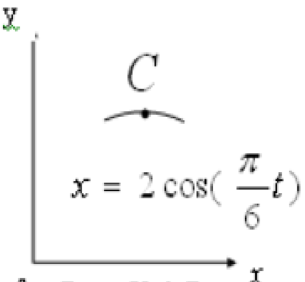


Рис. К-1.7

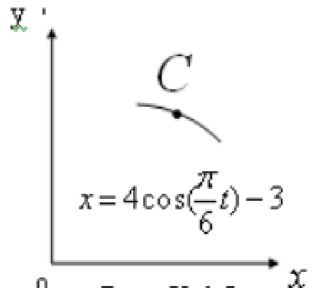


Рис. К-1.8

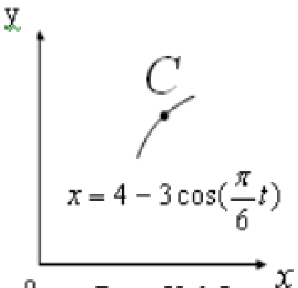


Рис. К-1.9

Таблица К-1

Номер условия	Для рис.0-рис.2	Для рис.3-рис.6	Для рис.7-рис.9
0	$y = 6\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$y = 4\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
1	$y = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$y = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 4 - 2\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
2	$y = 2t^2 + 3$	$y = 6\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 6$
3	$y = (t+1)^3$	$y = -8\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 6$
4	$y = 4\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right) + 3$	$y = 8\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 3$	$y = 8\sin^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
5	$y = (t+2)^2$	$y = 4\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) + 2$	$y = 10\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
6	$y = 2t^3$	$y = 9\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = 6\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$
7	$y = 2t^2 - 1$	$y = 2 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$	$y = 2 - 4\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
8	$y = 2 - t^3$	$y = 3\cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) - 2$	$y = 3\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$
9	$y = 2 - 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right)$	$y = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}t\right)$	$y = \cos\left(\frac{\pi}{3}t\right) - 4$

Определить уравнение траектории точки С, определить скорость, ускорение точки С, а также касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в точке С траектории для момента времени t_1 =1 с и всё изобразить графически.

2.3.2. ***Плоское движение тела*** – это движение, при котором все точки тела движутся в одной и той же плоскости. Плоское движение совершают, например, детали (тела) кривошипно-шатунного механизма.

Задача 1

На чертеже указана кинематическая схема кривошипно-шатунного механизма. Кривошип 1 вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω_1 = 4 1/с; длина кривошипа $\boldsymbol{l}_1$=0,25 м. Шатун 2 совершает плоское движение; длина шатуна $\boldsymbol{l}_2$=0,5 м. Поршень 3 совершает возвратно-поступательное движение по вертикальной оси. Углы α= 60°, β=120°.

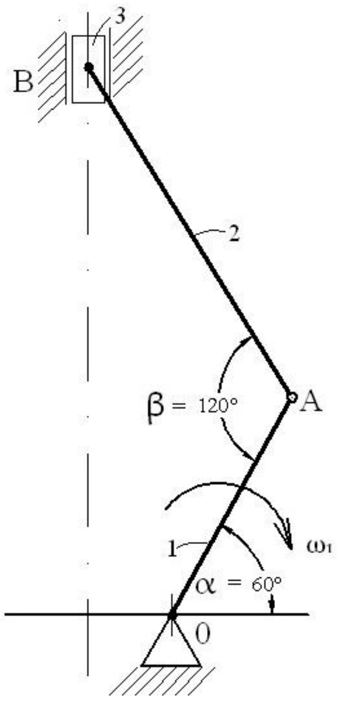


Рис. 2.15

Определить: скорости точек *A* и *B* и угловую скорость звена 2 (шатуна).

Решение

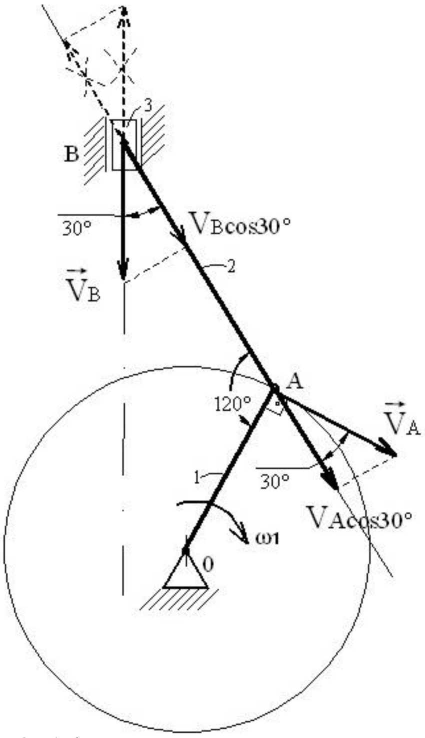


Рис. 2.16

Скорость точки А определим по формуле Эйлера V = ωR, так как точка А общий шарнир для тела 1 и для тела 2, то считаем, что точка А совершает вращение по круговой траектории. Вектор $\vec{V_A}$ направлен из точки А под углом 90^o к радиусу вращения ОА=l_1 в сторону вращения.

$$V_A = \omega_1 l_1 = 4\cdot 0{,}25\, м/с.$$

Обозначим вектор $\vec{V_A}$ на чертеже. Поршень 3 вместе с шарниром (точка В) движется либо только вверх, либо только вниз.

Поэтому обозначим на чертеже предположительные направления $\vec{V_B}$.

Так как точка В является общей точкой для поршня 1 и для шатуна 2, а шатун совершает только плоское движение, поэтому применим теорему о проекциях скоростей (см.выше). Для этого проведем прямую через точки В и А с продолжениями в обе стороны и спроектируем вектор $\vec{V_A}$ и предполагаемый вектор $\vec{V_B}$ на эту прямую. Согласно теореме: проекции векторов $\vec{V_A}$ и $\vec{V_B}$ на прямую *АВ* равны и направлены в одну сторону.

$V_A \cos 30^o = V_B \cos 30^o$, т.е. $V_A = V_A = 1\, м/с.$,

а вектор $\vec{V_B}$ направлен в данный момент вниз (так как вариант $\vec{V_B}$ направленный вверх дает проекцию, идущую в сторону противоположную направлению $V_A \cos 30^o$).

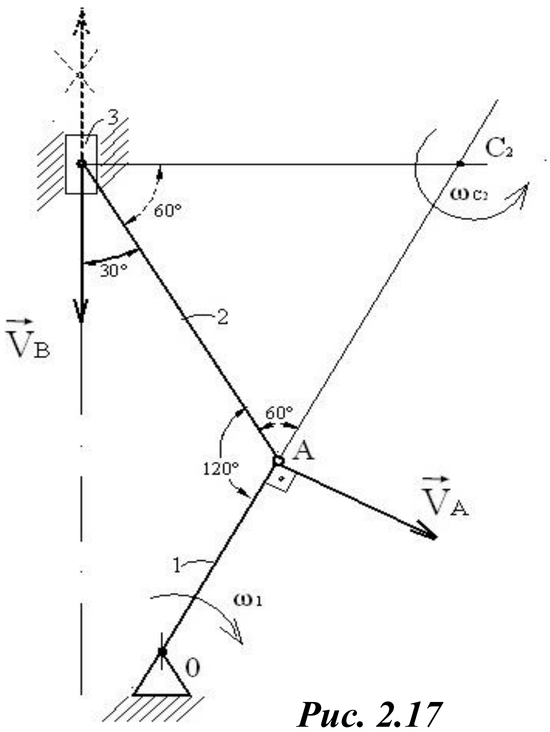


Рис. 2.17

Вторую половину задачи, то есть определение $\vec{V_B}$, можно решить с помощью м.с.ц. (мгновенного центра скоростей). Скорость точки А известна по величине и по направлению. $V_A = 1\, м/с.$ и $\vec{V_A}$ направлен под углом 90^o к кривошипу в сторону вращения. Тело 2 совершает плоское движение, следовательно, имеется C_2 – м.ц.с. тела. Проведем два перпендикуляра к вектору $\vec{V_A}$ и предполагаемым $\vec{V_B}$. Точка пересечения перпендикуляров и есть м.ц.с. и все точки шатуна 2 в это мгновение вращаются вокруг C_2

с угловой скоростью ω_{C2}. Так как направление $\overrightarrow{V_A}$ установлено конкретно, то ω_{C2} –положительна (обозначим на чертеже).

Из этих же соображений вектор $\overrightarrow{V_B}$ направлен вниз, а не вверх, так как точка B вращается так же, как все другие точки шатуна, против часовой стрелки (обозначим вектор $\overrightarrow{V_B}$).

$$\omega_{C2} = \frac{V_A}{C_2A} ;$$

Так как треугольник ΔAC_2B – равносторонний (из условия построения), то $C_2A = C_2B = BA = l_2 = 0{,}5$м

$$\omega_{C2} = \frac{V_A}{l_2} = \frac{1}{0.5} = 2[\frac{1}{c}]$$

Заметим, что угловая скорость вращения плоского тела – шатуна 2 в этот момент равна угловой скорости вращения относительно м.ц.с.

$$V_B = BC_2 = \omega_{C2} \cdot l_2 \qquad V_B = 2 \cdot 0{,}5 = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Ответ: $V_A = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\quad V_B = 1\frac{\text{м}}{\text{с}}$; $\quad \omega_2 = 2\frac{1}{\text{с}}$

Задача №2

На чертеже указана кинематическая схема двухпоршневого кривошипно-шатунного механизма. Направление вращения кривошипа указано.

Дано: $\omega_1 = 2$ 1/с; длина кривошипа l_1=0,1м; длина шатуна l_2=0,4м; l_3=0,3м.

Определить скорости поршней $\overrightarrow{V_B}$; $\overrightarrow{V_E}$; $\overrightarrow{\omega_3}$ - угловую скорость вращения звена 3 (то есть шатуна 3). Шарнир *D* находится на середине длины l_2.

Решение

Определение скорости поршня B аналогично (смотрите решение в предыдущей задаче). То есть

$$V_A = \omega_1 l_1 = 2 \cdot 0{,}1 = 0{,}2\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Вектор $\overrightarrow{V_A}$ направлен вверх под углом 90° к звену 1 из точки А. Изобразим на чертеже $\overrightarrow{V_A}$ (рис. 2.19).

Далее проводим прямую через точки А и В с продолжением и проектируем вектор $\overrightarrow{V_A}$ и предполагаемые $\overrightarrow{V_B}$ на эту прямую. Так как проекции

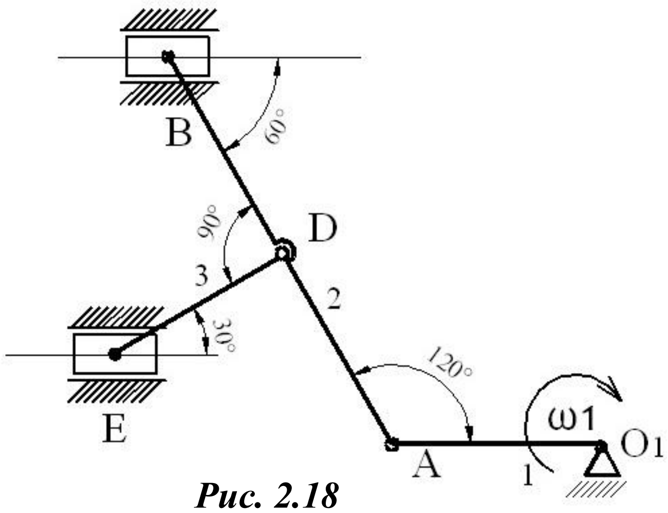


Рис. 2.18

$V_A \cos 30^o$ и $V_B \cos 60^o$ должны быть направлены в одну сторону, то принимаем вариант

$\overrightarrow{V_B}$, направленный влево (изобразим $\overrightarrow{V_B}$).

Из теоремы о проекциях:

$$V_A \cos 30^\circ = V_B \cos 60^\circ;$$

$$V_B = V_A \frac{\cos 30^\circ}{\cos 60^\circ}; \; V_B = 0{,}2 \frac{0{,}87}{0{,}5} = 0{,}35 \, м/с .$$

Для определения скорости поршня E необходимо определить направление и скорость точки D, которая находится на середине AB. Точка D – это врезанный плоский шарнир.

Определим м.ц.с. звена (шатуна) 2. Для этого проведем два перпендикуляра к известным векторам $\overrightarrow{V_A}$ и $\overrightarrow{V_B}$.

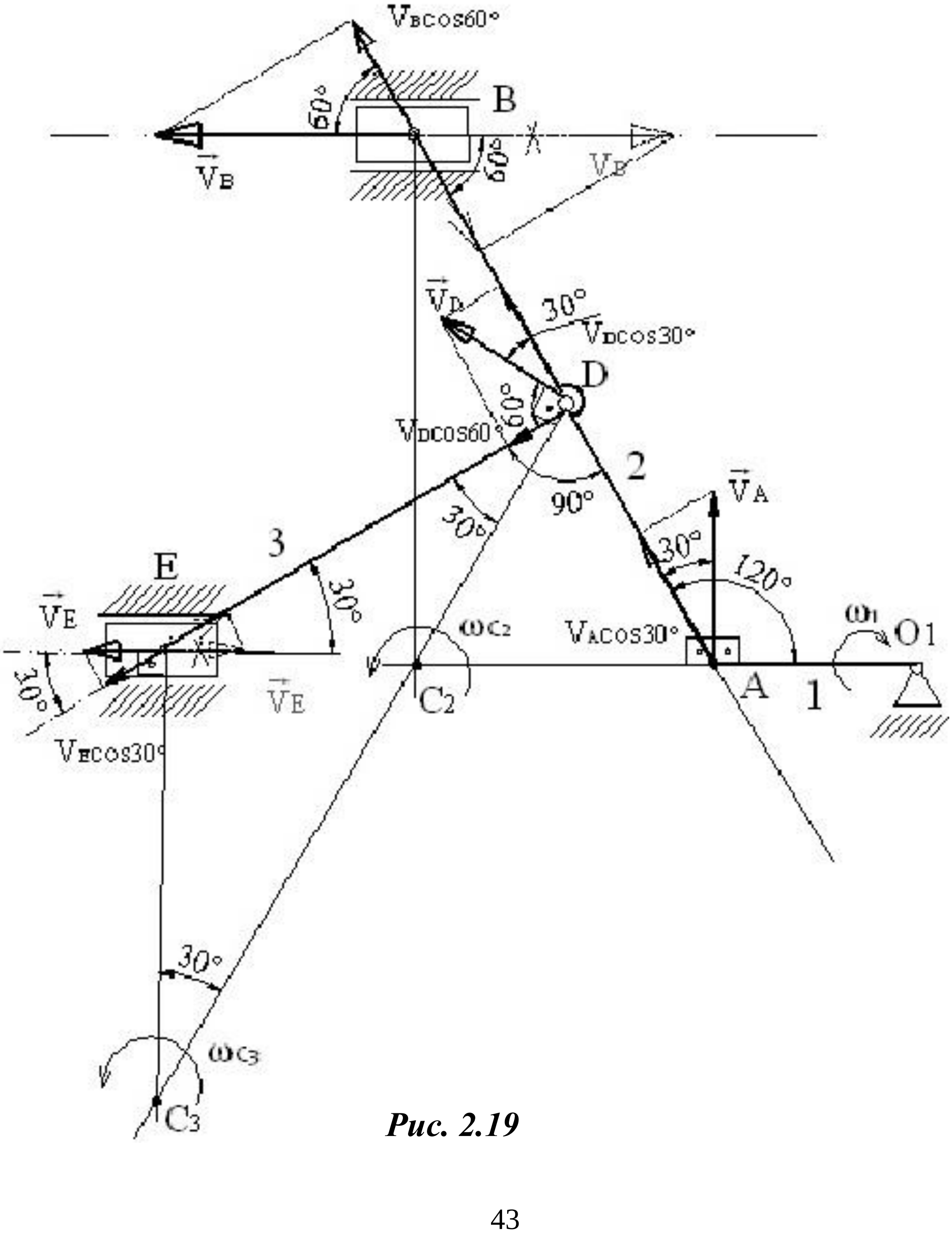


Рис. 2.19

Получим C_2 – м.ц.с. звена 2 и сразу обозначим направления ω_{C2} на чертеже – против часовой стрелки, так как точки A и B в это мгновение вращаются относительно C_2 каждая по своей воображаемой окружности с указанными линейными (окружными) скоростями $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$. Определим

$$\omega_{C2} = \frac{V_A}{C_2A} = \frac{V_A}{C_2B};$$

из ΔBC_2A: C_2A – катет, лежащий против угла, равного 30^o, равен половине гипотенузы AB, т.е.

$$C_2A = \frac{l_2}{2} \quad \text{или} \quad C_2A = 0{,}5 \cdot l_2$$

$$\omega_{C2} = \frac{V_A}{C_2A} = \frac{V_A}{0{,}5 \cdot l_2} = \frac{0{,}2}{0{,}5 \cdot 0{,}4} = 1\ 1/c$$

Из *C2* проведем C_2D и из точки *D* по углом 90^o вектор $\vec{V}_D$ в сторону вращения (все точки, в том числе *A, B* и *D* вращаются в это мгновение <u>против</u> часовой стрелки относительно точки C_2). Далее спроектируем $\vec{V}_2$ также на прямую *BD A* и определим величину V_D:

$$V_D \cos 30^\circ = V_A \cos 30^\circ; \quad V_D = V_A; \ V_D = 0{,}2\ \text{м/с}$$

Предполагаемое направление $\vec{V}_E$ известно: или вправо или влево по горизонтали. Соединяем точки *E* и *D* прямой с продолжениями и проектируем вектор $\vec{V}_D$ и предполагаемые $\vec{V}_E$ на эту прямую (тело 3 – тоже шатун и выполняет плоское движение).

$$V_D \cos 60^\circ = V_E \cos 30^\circ;$$

$$V_E = V_D \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$V_E = 0{,}2 \frac{0{,}5}{0{,}87} = 0{,}11\ \text{м/с};$$

И направление $\vec{V}_E$ влево по горизонтали (обозначим $\vec{V}_E$ на чертеже).

Угловую скорость шатуна 3 определим, построив м.ц.с. для этого тела. То есть к векторам $\vec{V}_D$ и $\vec{V}_E$ проведем перпендикуляры и получим точку их пересечения C_3. Обозначим направление ω_{C3} – против часовой стрелки.

В это мгновение $\omega_3 = \omega_{C3} = \dfrac{V_D}{C_3D} = \dfrac{V_E}{C_3E}$; так как ΔC_3ED – равнобедренный,

$$C_3E = DE = l_3 = 0{,}3\text{м}$$

$$\omega_3 = \frac{V_E}{C_3E} = \frac{E}{l_3} = \frac{0{,}11}{0{,}3} = 0{,}38\ 1/c$$

Ответ: $V_Б = 0{,}35\ \text{м}/c$; $V_E = 0{,}11\ \text{м/с}$; $\omega_3 = 0{,}38\ \text{м}/c$

Контрольное задание К-2

Плоский механизм состоит из четырех стержней 1, 2, 3, 4 и ползуна *B* или из трех стержней 1, 2, 3 и двух ползунов *B* и *E*. Все стержни и ползуны соединены с помощью плоских шарниров *A, B, D, E*, а стержни 1 и 4, называемые кривошипами, соединены с неподвижно закрепленными на основании конструкции плоскими шарнирами O_1 и O_2. Кривошипы 1 и 4 совершают вращательные движения вокруг шарниров O_1 и O_2 соответственно. Ползун – это тело, движущееся прямолинейно вперед и назад по направляющей – цилиндрической или профильной рейке. Функция ползуна аналогична функции поршня – тела, находящегося внутри направляющего канала, например, цилиндрического профиля. Шатуны 2 и 3 участвуют в плоском движении, то есть движутся поступательно и, одновременно, вращательно. Длины стержней: l_1 = 0,3м; l_2 = 1,2м; l_3 = 1,5м; l_4 = 0,5м. На чертежах кинематических схем рис.0 – рис.9 углы α, β, γ, φ, θ определяют конкретные положения механизмов для каждого задания. Построение механизма следует начинать со звена, определяемого углом α и далее в последовательности, указанной стрелками углов α, β, γ, φ, θ. Если угловые скорости ω_1 или ω_2 указаны со знаком минус (-), то вращение ведущего кривошипа 1 или 4 следует считать происходящим по часовой стрелке, и наоборот, если ω_1 или ω_2 со знаком плюс (+), то - против часовой стрелки. Если известна скорость ползуна *B*, то на схеме ее следует направить от точки В по направляющей к точке *b*.

Ниже приводятся десять чертежей кинематических схем. Выбор задания аналогичен ранее принятому. В таблице К-2 указаны все параметры, необходимые для построения и для решения задач. Врезанные шарниры *D* расположены строго в середине соответствующего стержня. Построение механизма рекомендуется выполнять в масштабе 1:200 (то есть на чертеже l_1=0,3м представлена отрезком 1,5 см: l_2=1,2м – 6 см и т.д.).

Таблица К-2

Номер условия	α^o	β^o	γ^o	φ^o	θ^o	ω_1[1/с]	ω_4[1/с]	V_B[м/с]	Найти
0	30	150	120	0	120	2			V_A, V_E, ω_3
1	60	60	60	90	60		-4		V_B, V_E, ω_2
2	0	120	90	0	60	-3			V_B, V_E, ω_3
3	90	120	120	90	60		2		V_B, V_E, ω_2
4	30	120	30	0	30	4			V_B, V_E, ω_3
5	0	150	120	90	30		-6		V_B, V_E, ω_2
6	90	150	60	0	30	-5			V_B, V_E, ω_3
7	30	120	120	90	120			8	$V_Д$, V_E, ω_3
8	60	150	30	0	120	6			V_B, V_E, ω_3
9	0	60	120	90	60			10	$V_Д$, V_E, ω_2

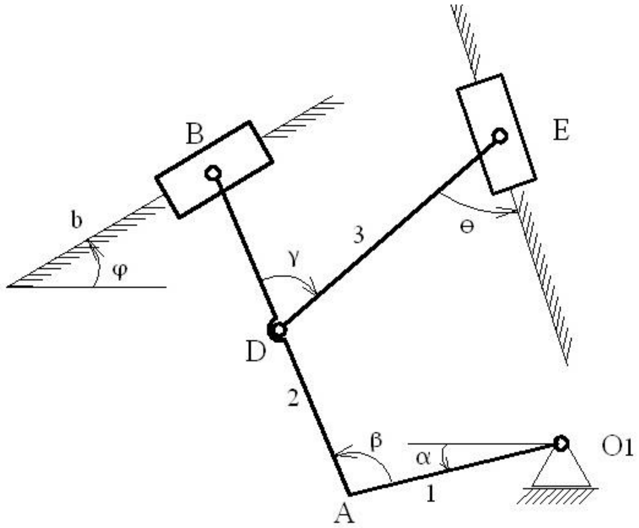


Рис. К-2.0

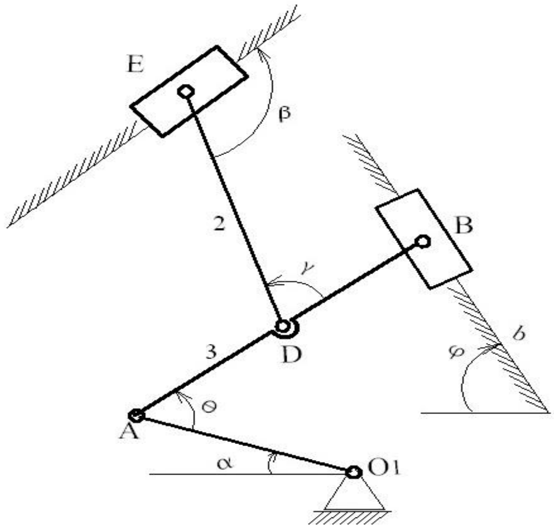


Рис. К-2.1

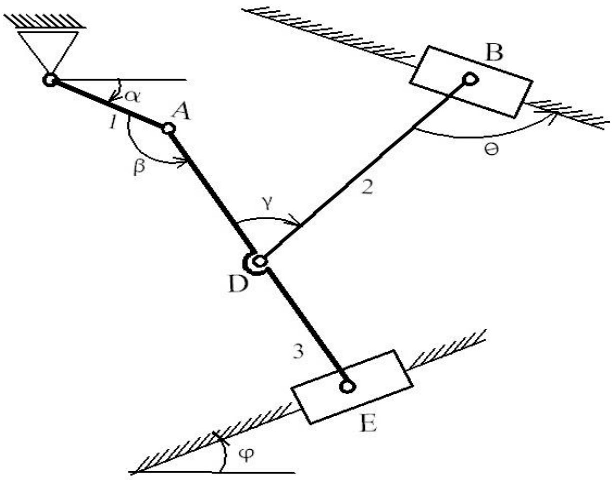


Рис. К-2.2

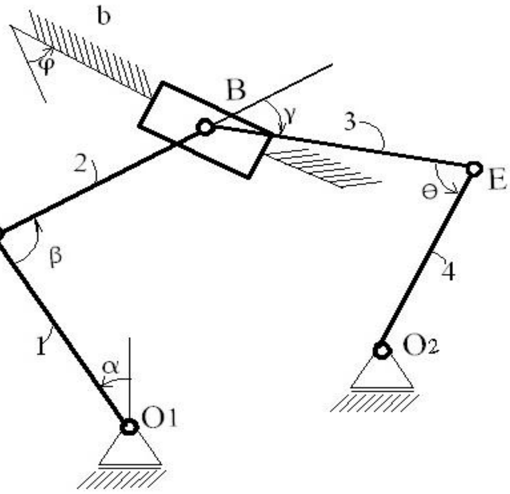


Рис. К-2.3

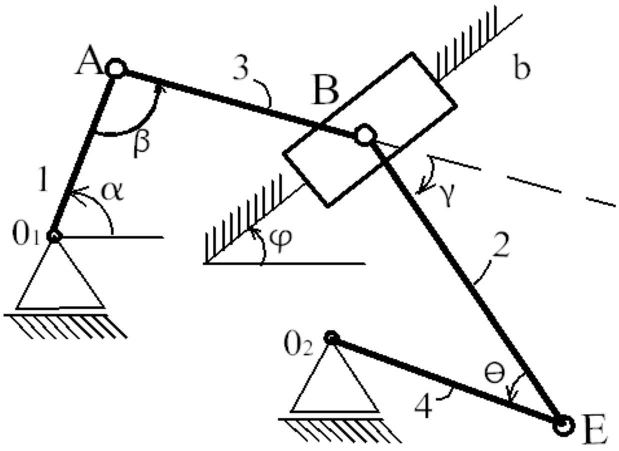


Рис. К-2.4

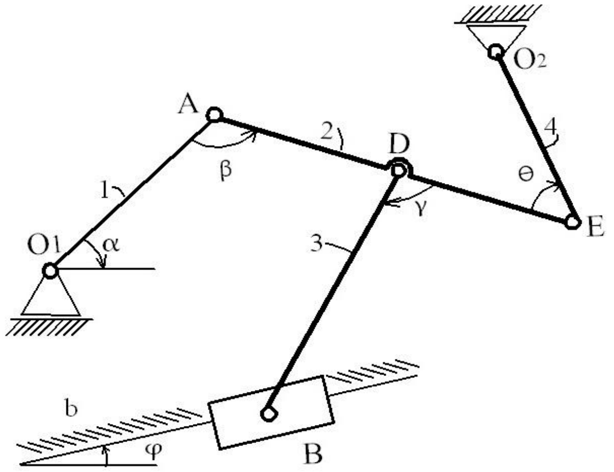


Рис. К-2.5

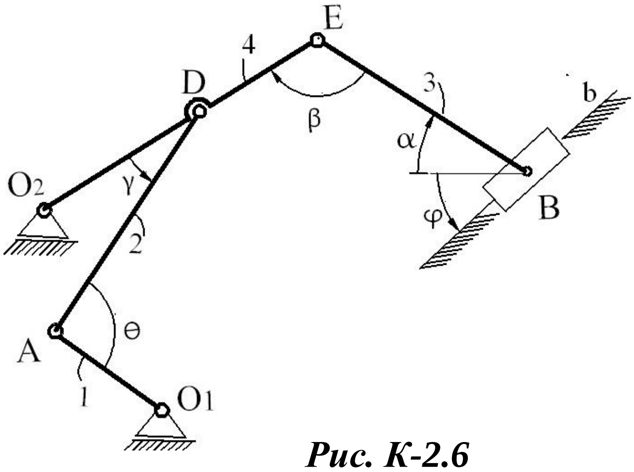


Рис. К-2.6

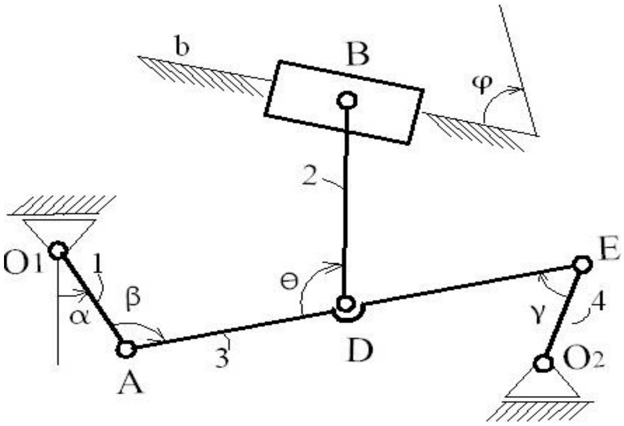


Рис. К-2.7

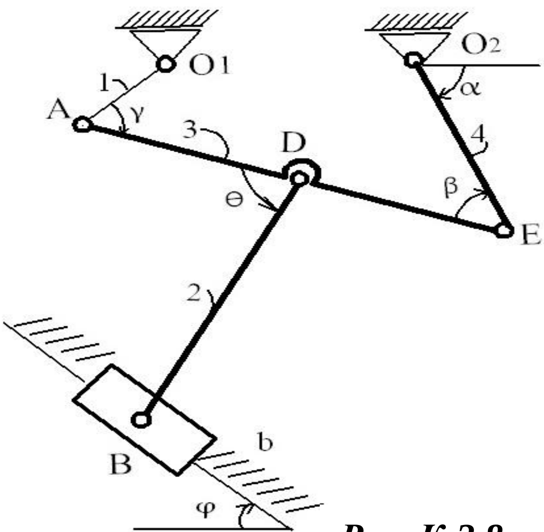


Рис. К-2.8

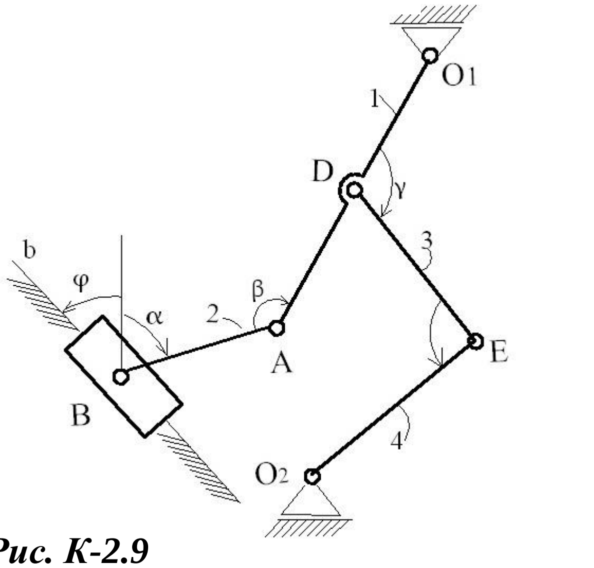


Рис. К-2.9

3. Динамика

3.1. Программные вопросы

Введение в динамику

1. Предмет динамики. Масса, материальная точка, сила.
2. Аксиомы динамики.

Динамика точки

1. Дифференциальные уравнения движения мат. точки в прямоугольных координатах.
2. Две основные задачи динамики мат. точки. Решение первой задачи динамики. Решение второй задачи динамики. Постоянные интегрирования. Начальные условия.

Относительное движение точки

1. Дифференциальные уравнения относительного движения мат. точки. Динамическая теорема Кориолиса**.**

Механическая система

1. Активные силы и реакции связей. Внешние и внутренние силы. Масса системы мат. точек. Центр масс системы.

Момент инерции

1. Момент инерции тела относительно оси.
2. Моменты инерции простейших однородных тел.

Общие теоремы динамики

Теорема о движении центра масс мех. системы

Теорема об изменении количества движения

1. Количество движения. Импульс силы.
2. Теорема об изменении количества движения мат.точки (дифференциальная и конечная форма).
3. Теорема об изменении количества движения системы мат. точек (дифференциальная форма, конечная форма).

Теорема об изменении момента количества движения

1. Момент количества движения мат. точки относительно точки. Теорема об изменении момента количества движения точки.
2. Кинетический момент системы относительно центра, относительно оси. Теорема об изменении кинетического момента системы. Закон сохранения кинетического момента системы.

Теорема об изменении кинетической энергии

1. Кинетическая энергия точки.
2. Работа силы. Мощность.
3. Теорема об изменении кинетической энергии точки.
4. Кинетическая энергия системы мат. точек при поступательном, вращательном и плоском движениях.
5. Теорема об изменении кинетической энергии системы мат. точек.

Принцип Даламбера. Принцип возможных перемещений

1. Сила инерции мат. точки. Принцип Даламбера для мат. точки и для системы мат. точек.
2. Принцип возможных перемещений. Общее уравнение динамики.

3.2. Основные формулы

1. Второй закон Ньютона (основное уравнение динамики точки):

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

где $\vec{F}$ - сила, действующая на мат. точку;

m - масса мат. точки;

$\vec{a}$ - ускорение движения мат. точки.

2. Третий закон Ньютона. (Закон действия и противодействия):

$$\vec{F}_{2,1} = -\vec{F}_{2,1}.$$

3. Четвертая аксиома динамики (основное уравнение динамики точки в случае действия на точку системы сил):

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i.$$

4. Дифференциальное уравнение движения мат. точки:

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F},$$

где $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$ – ускорение мат. точки.

Дифференциальные уравнения движения мат. точки в прямоугольных координатах:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z,$$

где $F_x; \ F_y; \ F_z$ – проекция вектора силы $\vec{F}$ на оси координат.

$\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dv_x}{dt} = a_x; \quad \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dv_y}{dt} = a_y; \quad \dfrac{d^2z}{dt^2} = \dfrac{dv_z}{dt} = a_z$ – проекции вектора ускорения $\vec{a}$ на оси координат *(x, y, z).*

5. Первая задача динамики.

По заданной массе *m* и уравнениям движения:

$x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$, определить действующую силу $\vec{F}$

Вторая задача динамики.

По заданной массе *m* и силам, действующим на эту точку определить уравнения движения.

6. Центр масс системы мат. точек (точка *C*). Координата точки *C*:

$$\boldsymbol{r_C} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot \vec{r_i}}{M},$$

где $M = \sum_{i=1}^{n} m_i$ –масса системы (т.е. тела),

$\vec{r_i}$ – расстояние i-той точки от начала координат.

В проекциях на оси координат:

$$x_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot x_i}{M};\; y_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot y_i}{M};\; z_c = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \cdot z_i}{M}$$

7. Момент инерции J.

Относительно точки: $J_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2$

Относительно оси:

(0z): $J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot z_i^2$ или $J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$;

(0y): $J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i^2$ или $J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2)$;

(0x): $J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i^2$ или $J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2)$.

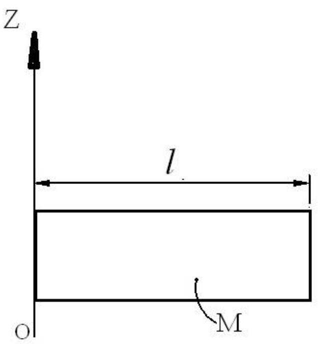
Для сведения: $2 \cdot J_0 = J_x + J_y + J_z$

Момент инерции относительно произвольной оси *(OZ)*, параллельной оси C_z, проходящей через центр масс т.*C*.

$$J_{0z} = J_{Cz} + Md^2,$$

где *d* – расстояние между осями *OZ* и *CZ*.

Моменты инерции:



1) стержня относительно оси, проходящей

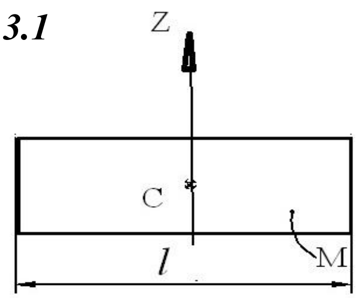
а) через край стержня:

$$J_{oz} = \frac{1}{3} M \cdot l^2,$$

где l – длина стержня;

M – масса стержня

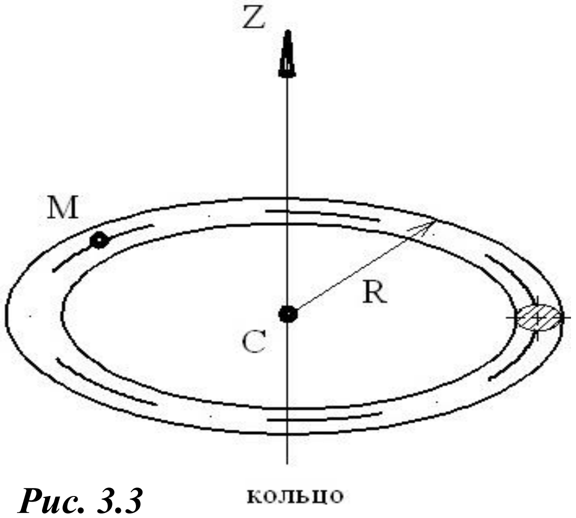
Рис. 3.1



б) через центр масс:

$$J_{Cz} = \frac{1}{12} M \cdot l^2$$

2) тонкого кольца или цилиндрической трубы радиуса R

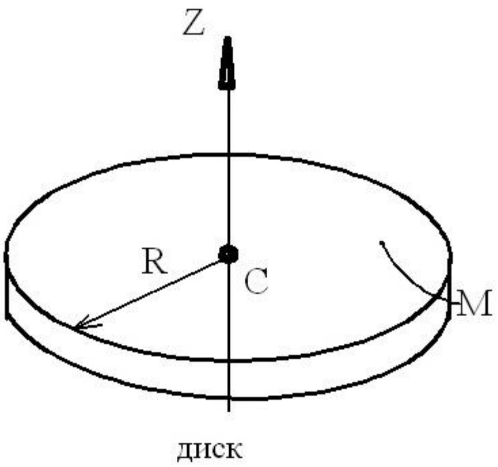


$$J_{Cz} = M \cdot R^2,$$

где *M* – масса кольца

Рис. 3.3

3) сплошного диска или цилиндра радиуса R



$$J_{Cz} = \frac{1}{2} M \cdot R^2,$$

где *M* – масса диска

Рис. 3.4

8. Количество движения мат. точки:

$$\vec{q} = m \cdot \vec{V}$$

Элементарный импульс силы $\vec{F}$: $d\vec{s} = \vec{F} \cdot dt$

Полный импульс силы $\vec{F}$:

$$\vec{S} = \int_0^t \vec{F} \cdot dt$$

Количество движения системы мат. точек:

$$\vec{Q} = M \cdot \vec{V}_C,$$

где *M* – масса системы (т.е. масса тела).

$\vec{V}_C$ – скорость центра масс.

Теорема об изменении количества движения мат. точки:
дифференциальная форма: $d(m\vec{V}) = \vec{F}dt$; конечная форма: $m\vec{V} - m\vec{V}_0 = \vec{S}$.

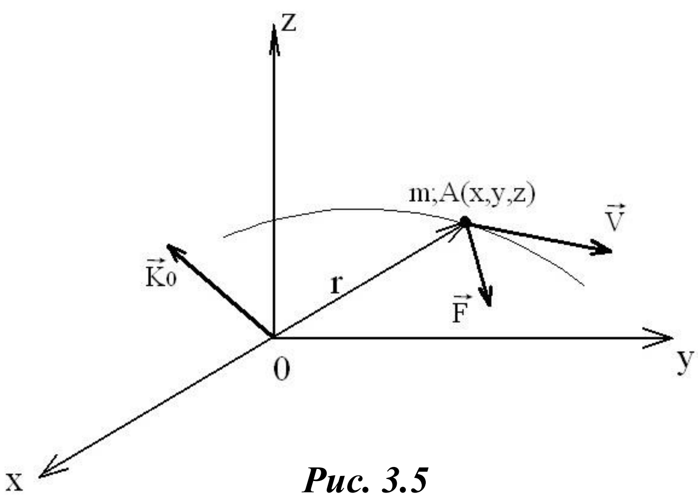


Рис. 3.5

9. Кинетический момент мат. точки относительно центра т. 0.

$$\vec{K}_0 = \vec{M}_0(m\vec{V}) = \vec{r} \times m\vec{V},$$

где m – масса мат. точки с координатами $A(x,y,z)$.

Теорема об изменении кинетического момента: $\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{M}_0(\vec{F})$ – производная по времени кинетического момента точки относительно центра т. *0* есть момент силы $\vec{F}$ относительно этого же центра.

Кинетический момент системы мат. точек:

$$\vec{K}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_0(m_i\vec{V}_i) = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i\vec{V}_i$$

Кинетический момент системы мат. точек тела относительно оси, например *0Z*.

$K_z = J_z \cdot \omega$,

где J_z – момент инерции тела относительно оси *0Z*.

ω – угловая скорость относительно этой же оси.

Теорема об изменении кинетического момента системы:

$\frac{d\vec{K}_0}{dt} = \vec{L}_0$,

где $\vec{L}_0$ – момент внешних сил относительно центра т. *0*.

Производная кинетического момента по времени относительно центра т.*0* есть момент внешних сил относительно этого же центра.

Закон сохранения кинетического момента системы:

$$\vec{K}_0 = const.$$

Если сумма моментов внешних сил относительно оси, например *0Z*, равна нулю, то $\vec{K}z = const$, т.е.

$$J_z \cdot \omega = const.$$

10.Кинетическая энергия мат. точки:

$$\frac{mV^2}{2}.$$

Кинетическая энергия системы мат. точек (тела):

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} m_i V_c^2.$$

Кинетическая энергия поступательного движения (тела)

$$T_{пост} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} MV_c^2 .$$

Кинетическая энергия вращательного движения (тела)

$$T_{вращ} = \frac{1}{2} J_z \cdot \omega^2 \text{ (относительно оси OZ).}$$

Кинетическая энергия плоского движения

$$T = T_{пост} + T_{вращ} = \frac{1}{2} MV_C^2 + \frac{1}{2} J \cdot \omega^2 ,$$

где J_C – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс т. C.

11. Элементарная работа силы – скалярная величина

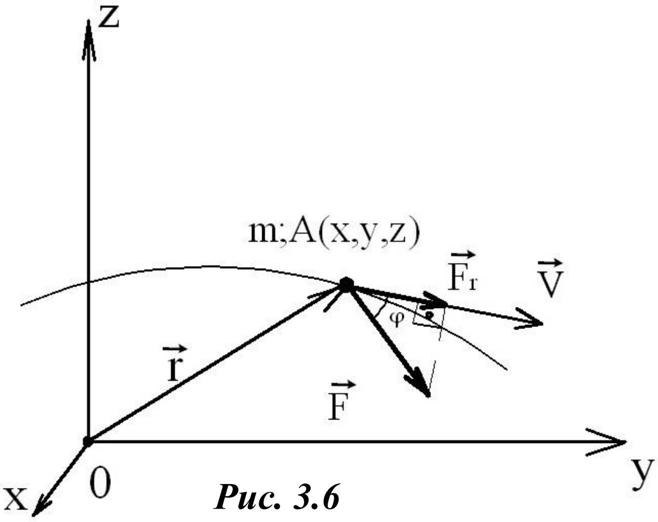


Рис. 3.6

$$dA = F_\tau \mathrm{ds} ,$$

где $F\tau$ – проекция силы $\vec{F}$ на направление вектора скорости $\vec{V}$;

ds – элементарное (бесконечно малое перемещение).

Полная работа силы при перемещении из положения M_0 в положение M

$$A = \int_{M_0}^{M} F\tau \cdot ds \text{ или } A = \int_0^t \vec{F} \cdot \vec{V} \cdot dt.$$

Мощность – работа в единицу времени:

$$N = \frac{dA}{dt} \text{ или } N = \vec{P} \cdot \vec{V} \cdot \cos\varphi .$$

Теорема об изменении кинетической энергии точки:

дифференциальная форма: $d(\frac{mV^2}{2}) = dA$;

конечная форма: $\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A$.

12. Принцип Даламбера для мат. точки:

$$\vec{F} + \vec{R} + \vec{\phi} = 0 ,$$

где $\vec{R}$ – суммарная реакция связей

$\vec{F}$ – суммарная активная сила

$\vec{\phi} = -m\vec{a}$ – сила инерции мат. точки.

Согласно принципу Даламбера: при движении мат. точки активные силы, силы реакций связей и сила инерции мат. точки образуют равновесную систему.

13. Принцип возможных перемещений:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^a = 0,$$

где δ − возможное перемещение,

A_i^a – работа активной силы, т.е. если

$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^a = 0$, то система находится в равновесии.

Для равновесия системы мат. точек с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на систему активных сил на любом возможном перемещении системы была равна нулю.

14. Общее уравнение динамики:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta A_i^a + \sum_{i=1}^{n} \delta A_i^u = 0,$$

где A_i^u – работа силы инерции.

В случае движения системы мат. точек с идеальными связями сумма работ всех приложенных к системе активных сил и сил инерции, условно приложенных ко всем точкам системы, на любом возможном перемещении равна нулю.

3.3 Примеры решения задач

3.3.1. Вторая задача динамики

В этой задаче необходимо определить закон движения мат. точки, зная её массу и силы , действующие на эту мат. точку. (В разделе кинематика была рассмотрена задача К-1, где по известным уравнениям движения точки: $x = f_1(t)$ č $y = f_2(t)$ мы определили вид плоской кривой, т.е. траекторию движения мат. точки, её скорость и ускорение. В определённом смысле вторая задача динамики – обратная задаче К-1.

Дано: $m; \vec{P}$

Определить: $x = f_1(t)$

$y = f_2(t)$

$z = f_3(t)$

Общие рекомендации по решению второй задачи динамики.

1. Выберем систему координат. Обычно начало координат совмещают с начальным положением точки, а положительные направления осей координат проводят в направлениях положительных проекций вектора скорости $\vec{V}$,т.е. в сторону движения мат. точки.

2. На рисунке изобразим мат. точку, находящуюся в промежуточном положении. Изобразим все действующие на точку силы и реакции связей.

3. Запишем начальные условия: $x_0; y_0; z_0$ и $V_{x0}; V_{y0}; V_{z0}$ когда t=0 .

4. Спроектируем силы, действующие на мат. точку, на оси координат и составим уравнения движения.

5. Проинтегрируем дважды уравнения движения, использовав начальные условия, определим постоянные интегрирования: $C_1; C_2; C_3; C_4; C_5; C_6$.

6. Получим закон движения мат. точки и определим заданные в условиях задачи величины.

Задача №1

Трамвай, идущий по горизонтальному пути со скоростью 10 м/с, останавливают аварийным тормозом (из-за неожиданно возникшего препятствия). При этом общее сопротивление движению, развиваемое при торможении, составляет 0,6 от веса трамвая. Определить, за какое время и на каком расстоянии трамвай остановится.

Решение

В этой задаче движение мат. точки (трамвая) происходит горизонтально и прямолинейно. Следовательно, направим ось x по направлению скорости $\vec{V}$ (вправо, например). За начало координат т.*0* примем положение трамвая в момент наступления торможения, а сам трамвай изобразим в некотором промежуточном положении между началом и концом торможения. Изобразим все действующие силы.

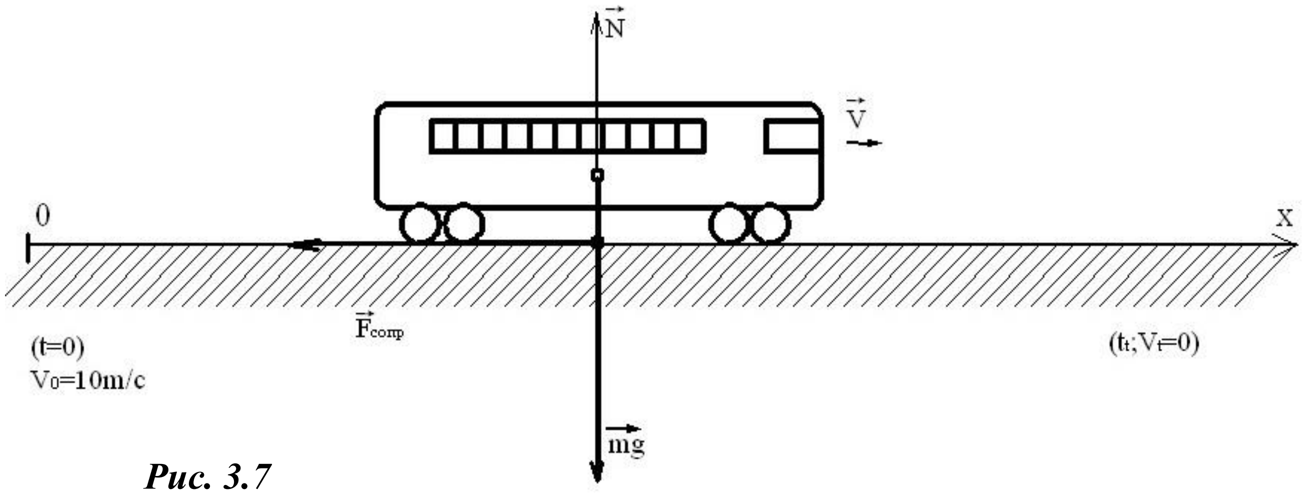


Рис. 3.7

Начальные условия в момент t=0: $V_0 = 10 м/с$, $x_0 = 0 м$. Сила веса трамвая $G = \vec{m}\vec{g}$ и реакция $\vec{N}$ проекций на ось x не дают. Следовательно, по направлению движения 0x действует одна отрицательная сила $F_{сопр.} = -0{,}6 \cdot mg$.

Запишем уравнение движения:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -0{,}6 \cdot mg .$$

Сократив m массу в обеих частях уравнения и обозначив $\frac{d^2x}{dt^2} = a_x$,

получим $a_x = -0{,}6g$.

Т.к. $a_x = \frac{dV_x}{dt}$ и приняв $g = 10\,\text{м/с}^2$, получим $\frac{dV_x}{dt} = -6$.

Разделим переменные: $dV_x = -6dt.$

Проинтегрируем выражение: $\int dV_x = -6\int dt,$ получим:

$$V_x = -6t + C_1 \qquad \text{(а)}$$

и определим C_1:

При $t = 0_c$, $V_x = V_{xo} = 10$ м/с.

Подставим в выражения (а) $t = 0_c$ и $V_{xo} = 10$м/с,

Получим: $10 = -6 \cdot 0 + C_1$; отсюда $C_1 = 10$ м/с,

Окончательно выражение (а) примет вид общего закона движения трамвая для скорости:

$$V_x = -6t + 10 \qquad (1)$$

Из выражения (1) можно сразу определить время торможения t_t (т.к. в конце торможения, т.е. в момент остановки трамвая $V_x = V_t = 0$ м/с) получим:

$0 = -6t_t + 10,$ или $6t_t = 10,$

$t_t = \frac{10}{6} = 1{,}66$ секунды.

Продолжим: в уравнении (1) $V_x = \frac{dx}{dt}$; подставим:

$$\frac{dx}{dt} = -6t + 10$$

Разделим переменные: $dx = -6tdt + 10dt$

Проинтегрируем: $\int dx = -6\int tdt + 10\int dt$

Получим: $x = -6\frac{t^2}{2} + 10 \cdot t + C_2,$ или $x = -3t^2 + 10 \cdot t + C_2$ (в)

определим C_2:

При $t = 0;$ $x_0 = 0$ м. Подставим эти значения в (в)

$0 = -3 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0 + C_2$, откуда $C_2 = 0$

Окончательно закон движения трамвая

$$x = -3t^2 + 10t \qquad (2)$$

Выражение (2) и есть конкретный закон движения $x = f_1(t)$ для случая торможения трамвая, движущегося по горизонтальному прямому пути.

Так, как время до остановки уже известно ($t_t = 1{,}66$ с), подставив это значение t_t в выражение (2), определим путь до остановки (тормозной путь трамвая) x_t;

$x_t = -3(1{,}66)^2 + 10 \cdot 1{,}66$;

$x_t = -8{,}30 + 16{,}6$; $x_t = 8{,}3$м.

Ответ: Трамвай остановится через 1,66 с после начала торможения на расстоянии 8,3 м. (закон движения в этом случае: $x = -3t^2 + 10t$).

Задача №2

Тяжелая материальная точка (граната) *M* брошена под углом $\alpha = 30^0$ к горизонту со скоростью $V_o = 20$м/с из положения M_0, находящеюся на высоте $h = 5$м над горизонтальной поверхностью. На протяжении всего полета гранаты в сторону движения действует горизонтальная постоянная сила $F = 7{,}5$Н. Вес гранаты $G = 15$Н

Определить: закон движения материальной точки (гранаты). Сопротивлением воздуха пренебречь, принять g = 10 м/с^2

Решение

Как и в предыдущей задаче выполним рекомендации:

1. Начало координат т.0 поместим на горизонтальной оси *OX*. Точка в начальном положении будет находиться на высоте h выше начала координат на оси *OY*.

2. Изобразим все действующие на точку в промежуточный момент времени силы ($\vec{F}$, $\vec{G}$).

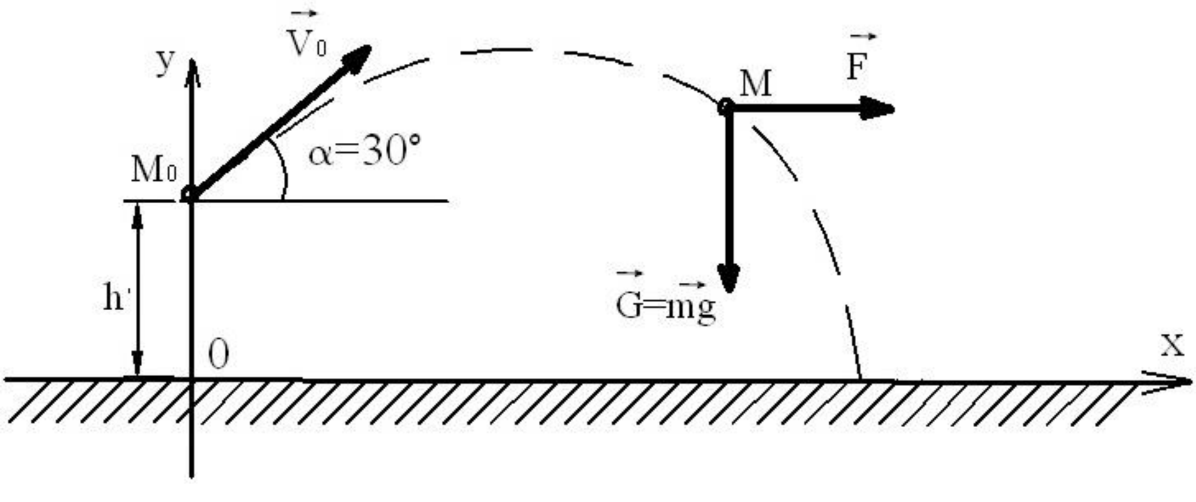


Рис. 3.8

3. Точка *M* движется в плоскости ход по двум направлениям, т.е. вдоль оси OX и OY. Начальные условия, следовательно при $t = 0$ (в момент бросания): $x_0 = 0$ м; $y_0 = h = 5$м; $V_{xo} = V_O \cos\alpha = V_O \cos 30^0 = 20 \cdot 0{,}87 = 17{,}4$м/с

$V_{yo} = V_O \sin\alpha = V_O \sin 30^0 = 20 \cdot 0{,}5 = 10$ м/с

4. Уравнения движения:

по оси $OX \rightarrow$ $m \cdot a_x = F$

по оси $OY \rightarrow$ $m \cdot a_y = -G$

Масса $m = \frac{G}{g} = \frac{15}{10} = 1{,}5$ *кг*; подставим числовые значения, получим:

по оси $OX \rightarrow$ $1{,}5 \cdot a_x = 7{,}5$; $a_x = 5$

по оси $OY \rightarrow$ $1{,}5 \cdot a_y = -15$; $a_y = -10$

а) Определяем закон движения вдоль оси OX:

a_x=5; т.к $\acute{r}_{\breve{o}} = \frac{dV_X}{dt}$, то $\frac{dV_X}{dt} = 5$; $dV_X = 5 \cdot dt$; $\int dV_X = 5 \cdot \int dt$

$$V_X = 5t + C_1 \qquad \text{(а)}$$

в момент $t = 0$ $V_{Xo} = 17.4$ м/с, подставим эти значения в выражение (а) $17{,}4 = 5 \cdot 0 + C_1$, тогда $C_1 = 17{,}4$ м/с

Закон движения для скорости вдоль оси OX

$$\underline{V_X = 5 \cdot t + 17{,}4} \qquad (1)$$

Подставим в (1) $V_X = \frac{dx}{dt}$; $\frac{dx}{dt} = 5t + 17{,}4$; $dx = 5t \cdot dt + 17{,}4dt$;

$\int dx = 5\int t \cdot dt + 17{,}4\int dt$;

$$x = 5\frac{t^2}{2} + 17{,}4 \cdot t + C_2 \qquad \text{(в)}$$

в момент $t = 0$, $x_o = 0$, подставим эти значения в выражения (в):

$0 = 2{,}5 \cdot 0^2 + 17.4 \cdot 0 + C_2$; $C_2 = 0$

Поэтому закон движения вдоль оси *OX:*

$$\underline{x = 2{,}5 \cdot t^2 + 17{,}4} \qquad (2)$$

б) Определим закон движения вдоль оси OY:

$a_y = -10$; т.к. $a_y = \frac{dV_y}{dt}$, то $\frac{dV_y}{dt} = -10$; $dV_y = -10dt$

$\int dV_y = -10\int dt$;

$$V_y = -10t + C_3 \qquad \text{(с)}$$

в момент $t = 0$; $v_{yo} = 10$ м/с подставим в выражение (с):

$$10 = -10 \cdot 0 + C_3;\ C_3 = 10$$

Таким образом, закон движения вдоль оси OY для скорости:

$$V_y = -10 \cdot t + 10 \qquad (3)$$

Т.к. $V_y = \frac{dy}{dt}$; подставим в выражения (3):

$\frac{dy}{dt} = -10t + 10$; $dy = -10 \cdot t \cdot dt + 10 \cdot dt$;

$\int dy = -10 \cdot \int t \cdot dt + 10 \cdot \int dt$;

$$y = -10 \cdot \frac{t^2}{2} + 10t + C_4 \qquad \text{(d)}$$

при $t = 0$; $y_o = 5$ м подставим в выражения (d):

$5 = -5 \cdot 0^2 + 10 \cdot 0 + C_4$; $C_4 = 5$ м

Закон движения по вертикали вдоль оси *OY*:

$y = -5t^2 + 10t + 5$ (4)

Ответ: законы движения $x = f_1(t)$ и $y = f_2(t)$, имеет вид:

$x = 2{,}5 \cdot t^2 + 17{,}4$; $y = -5t^2 + 10t + 5$.

Заметим, что с помощью выражений (1), (2), (3) и (4) можно определить время, дальность и высоту полета гранаты.

Задача №3

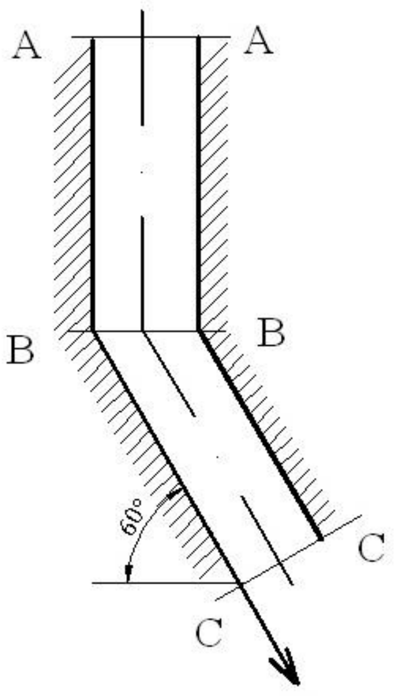


Рис. 3.9

Тело *D* массой *m* движется в течение времени t по вертикальному каналу *AB* вниз без начальной скорости. В канале движению тела *D* препятствует постоянная сила $\vec{Q}$. Достигнув точки B тело переходит на наклонный участок канала ВС и движется по направлению оси *X*. На участке *BC* на тело действует некоторая поперечная сила *F*, проекция которой на оси X равна $\vec{F_x}$,и сила трения $F_{тр}$.

Определить: закон движения тела *D* на участке *BC*, т.е. $x = f(t)$

($m = 5$ кг; $t = 1{,}2$ сек; $Q = 20$ Н; $F_x = 3\cos(t)$; $f_{тр} = 0{,}2$) ускорения свободного падения примем при расчетах равным $g = 10$ м/с

Решение

Предварительно необходимо определить начальные условия в момент прохождения телом положения *B*, т.е.: x_{OB} и V_{OB}. Для это нужно составить уравнения движения на участке *AB* и определить скорость тела в конце участка, т.е. в точке *B*.

Начальные условия в точке *A* (в момент начала движения):

$t = 0$, $x_{oA} = 0м$, $V_{oA} = 0$ м/с.

Изобразим на рисунке участок движения АВ и тело *D* в промежуточном положении. Затем приложим на схеме все действующие на тело силы: $\vec{Q}$ – заданная сила сопротивления; $\vec{G} = m\vec{g}$ – все тела ***D*.**

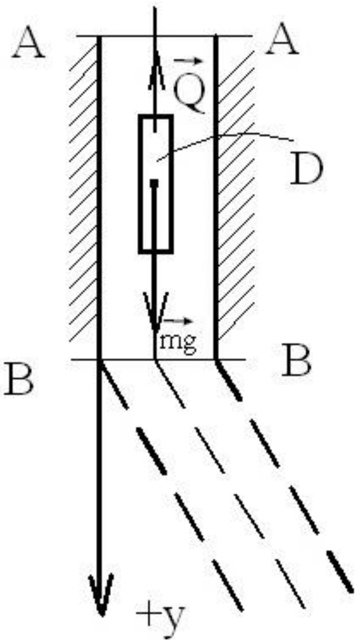


Рис. 3.10

Составим уравнение движения в проекциях на оси Ay: $\mathrm{ma_y = mg - Q}$

разделим на массу обе части уравнения и подставим значения: $a_y = g - \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{m}}$; $a_y = 10 - \frac{20}{5}$;

$a_y = 6.$

Т.к. $a_y = \frac{dV_y}{dt}$, то $\frac{dV_y}{dt} = 6.$ Разделим переменные

$dV_y = 6 \cdot dt$

Проинтегрируем выражение:

$$\int dV_y = 6 \cdot \int dt$$

$$V_y = 6 \cdot t + C_1 \qquad \text{(а)}$$

В момент старта: $t_o = 0$ $\quad V_{oA} = 0$. Подставим эти значения в выражения (а): $0 = 6 \cdot 0 + C_1$, откуда $\underline{C_1 = 0}$.

Получим: $V_y = 6t$ – уравнение движения на участке *АВ* (для скорости).

Таким образом может теперь определить скорость тела *D* в любой момент времени его движения по трубе *АВ*, в том числе и в конце движения, т.е. в точке *В*, подставим значение $t = 1{,}2$ сек:

$V_{yB} = 6 \cdot 1{,}2 = 7{,}2$ м/с

$V_{yB} = 7{,}2$ м/с – это и есть начальная скорость движения тела *D* на участке *ВС*, т.е. $V_{yB} = V_{oB} = 7{,}2$ м/с

Теперь можно составить уравнение движения на участке *ВС* (т.к. начальные условия известны :

$t_{oB} = 0$ сек; $x_{oB} = 0$ м; $V_{oB} = 7{,}2$ м/с.)

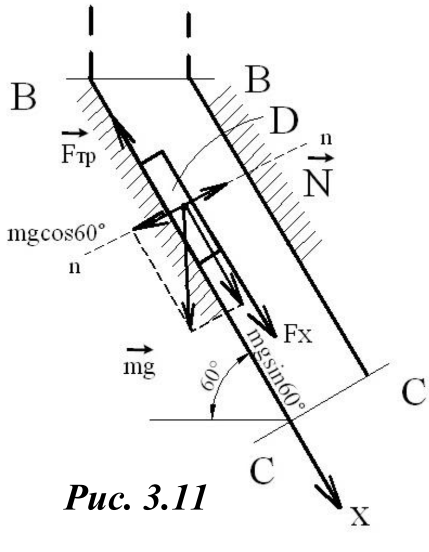


Рис. 3.11

Изобразим на рисунке наклонный канал и тело *D* в промежуточном положении и приложим к нему все действующие силы : $\overrightarrow{F_x}; \overrightarrow{F_{ňđ}}; \vec{G} = m\vec{g}$

Силу веса необходимо разложить на составляющие на ось *X* и нормаль *n-n*. От составляющей по нормали, т.е. $mg \cdot \cos 60^0$ возникнет реакция $\vec{N}$. Эти две силы, тем не менее, на ось *X* проекции не дают (т.е. они равны нулю). Составим динамическое уравнение движения тела *D* в проекциях на ось *X:*

$$ma_x = mg \cdot \sin 60^o - f_{тр} \cdot mg \cdot \cos 60^o + F_x.$$

$F_{тр} = f_{тр} N = f_{тр} \cdot mg \cdot \cos 60^o$ и сила трения всегда отрицательна. Сократим (разделим) на массу m; подставим также численные значения величин.

$a_x = 10 \cdot 0{,}87 - 0{,}2 \cdot 10 \cdot 0{,}5 + \frac{3}{5}\cos(5t)$

$a_x = 8{,}7 - 1 + 0{,}6\cos(t)$

Окончательно: $\underline{a_x = 7{,}7 + 0{,}6\cos(5t)}$

т.к. $a_x = \frac{dV_x}{dt}$; то $\frac{dV_x}{dt} = 7{,}7 + 0{,}6\cos(5t)$

разделим переменные: $dV_x = 7{,}7dt + 0{,}6\cos(5t)dt$

Проинтегрируем: $\int dV_x = 7{,}7\int dt + 0{,}6\int cos(5t)dt$

$V_x = 7.7t + 0{,}6\sin(5t) \cdot \frac{1}{5} + C_2$, или

$$V_x = 7{,}7t + 0{,}12\sin(5t) + C_2 \qquad \text{(a)}$$

В выражение (б), подставим значения (начальные условия) $t_{oB} = 0$; $V_{oB} = 7{,}2$

$7{,}2 = 7{,}7 \cdot 0 + 0{,}12\sin(5 \cdot 0) + C_2$, откуда $C_2 = 7{,}2$ м/с

Окончательно:

$\underline{V_x = 7{,}7t + 0{,}12\sin(5t) + 7{,}2}$ (1) – уравнения движения (для скорости) (1)

Далее: т.к. $V_x = \frac{dx}{dt}$; то

$\frac{dx}{dt} = 7{,}7t + 0{,}12\sin(5t) + 7{,}2$

Разделяем переменные:

$$dx = 7{,}7t \cdot dt + 0{,}12\sin(5t)dt + 7{,}2dt$$

Проинтегрируем выражения:

$$\int dx = 7{,}7\int t \cdot dt + 0{,}12\int \sin(5t)dt + 7{,}2\int dt$$

$$x = 7{,}7\frac{t^2}{2} + 0{,}12(-\cos(5t))\frac{1}{5} + 7{,}2t + C_2 \qquad \text{(c)}$$

Подставим начальные условия: $t_{oB} = 0$; $x_{oB} = 0$

$0 = 3{,}85 \cdot 0^2 - 0{,}024\cos(5 \cdot 0) + 7{,}2 \cdot 0 + C_2$

$0 = -0{,}024 \cdot 1 + C_2$ откуда $C_2 = 0{,}024$

Окончательно:

$$x = 3{,}85t^2 + 7{,}2t - 0{,}024\cos(5t) + 0{,}024 \qquad (2)$$

Ответ:

уравнение движения на участке BC, т.е. $x = f(t)$, имеет вид:

$$\underline{x = 3{,}85t^2 + 7{,}2t - 0{,}024\cos(5t) + 0{,}024}$$

Контрольное задание Д-1

Тело *D* массой m движется по изогнутой трубе *ABC*. Участок *AB* горизонтальный или наклонный ($\angle 60^{o}$); участок *BC* наклонен к горизонту под углом 30^{o}. В точке *A* тело *D* получает начальную скорость $V_O = V_{OA}$.

На участке *AB* на тело действуют кроме силы тяжести, постоянная сила $\vec{Q}$ и сила трения $\overrightarrow{F_{тр}}$. Далее тело Д переходит на участок ВС, где на него также действует сила трения $\overrightarrow{F_{тр}}$, сила тяжести $\vec{G} = m\vec{g}$; сила $\vec{F}$ – переменная сила, проекция которой на оси *x* F_x задана в таблице Д-1.

Считая тело *D* материальной точкой, определить закон движения тела *D* на участке *BC*, т.е. $x = f(t)$.

Ниже приводятся десять схем движения и таблица Д-1, в котором m – масса тела *D*; V_{OA} - начальная скорость тела *D* в точке *A* (в момент начала движения); $\vec{Q}$ – сила на участке *AB*; t – время прохождения телом *D* участка *AB*; F_x проекция силы $\vec{F}$ на ось *x* на участке *BC*.

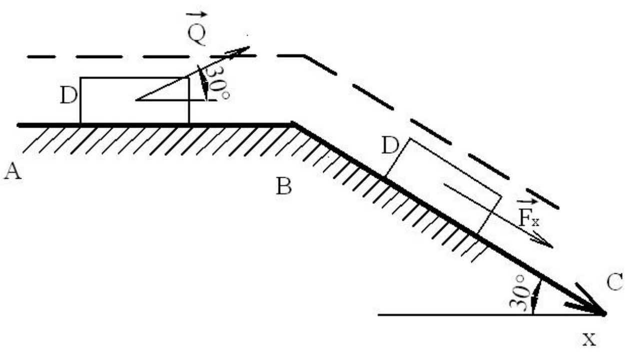


Рис. Д-1.0

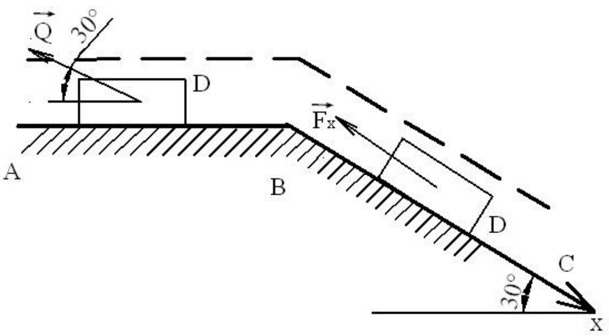


Рис. Д-1.1

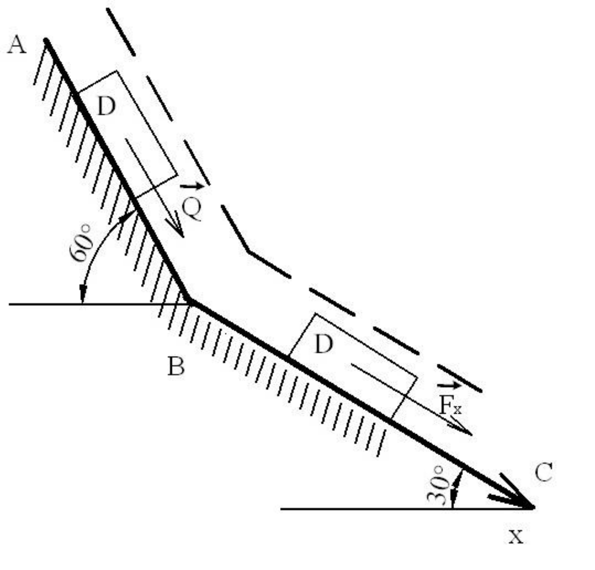


Рис. Д-1.2

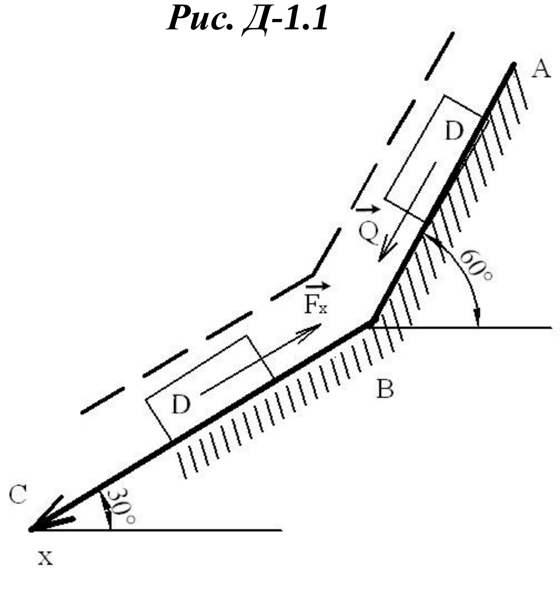


Рис. Д-1.3

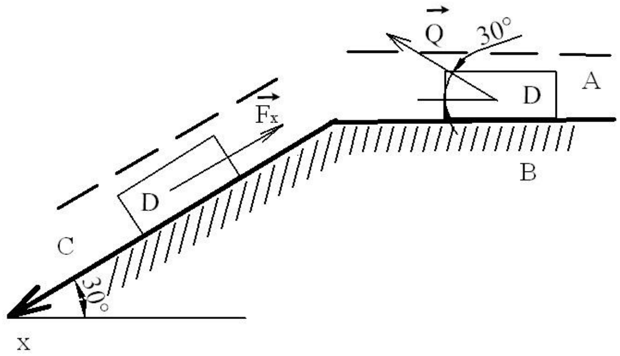


Рис. Д-1.4

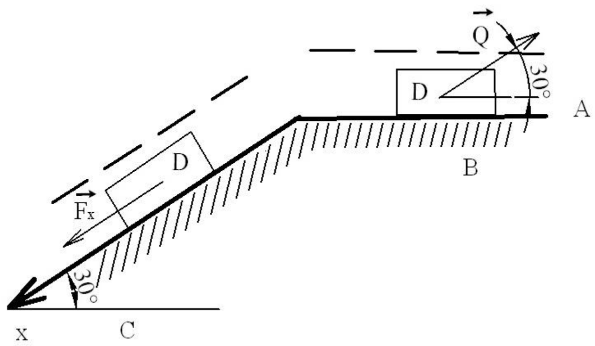


Рис. Д-1.5

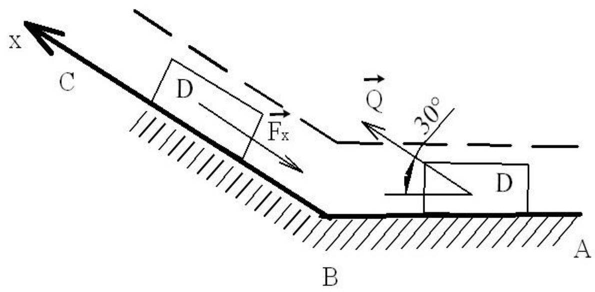


Рис. Д-1.6

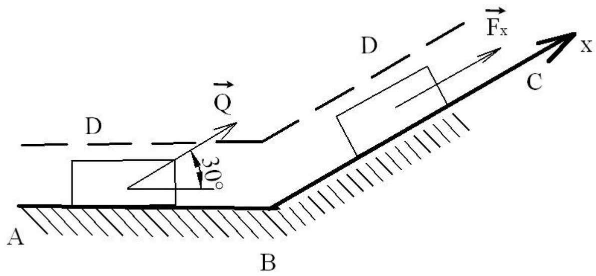


Рис. Д-1.7

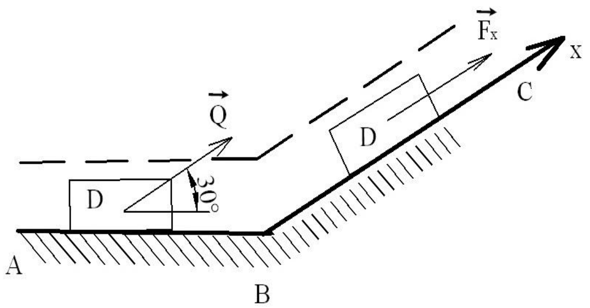


Рис. Д-1.8

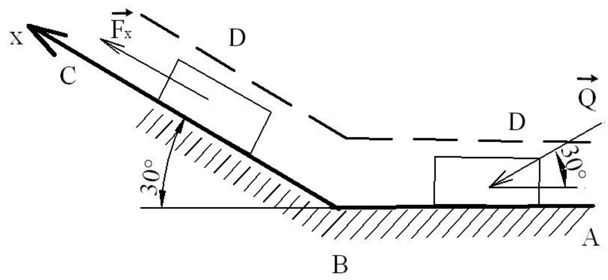


Рис. Д-1.9

Таблица Д - 1

Номер условия	m, кг	V_{oA}, м/с	Q, H	t, c	F_x, H
0	2	20	5	1	2sin(4t)
1	8	10	15	2	3cos(2t)
2	3	18	20	3	4sin(5t)
3	5	22	25	4	8cos(3t)
4	4	16	40	5	$9t^2$
5	7	14	10	6	6t
6	9	8	6	7	sin(4t)
7	1,5	5	8	8	2t
8	6	12	14	9	$3t^2$
9	9	15	18	10	cos(6t)

3.3.2. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Задача №2

Механическая система состоит из цилиндрического катка 1, ступенчатого шкива 2 и груза 3.

Под действием силы $F = f(S)$ (сила зависит от перемещения S-точки приложения силы $\vec{F}$) система приходит в действие из состояния покоя.

Тела 1 и 3 соединены через шкив двумя нитями, намотанными на шкив. Шкив ступенчатый. Масса шкива равномерно распределена на его внешнем ободе (R_2). Шкив создает постоянный момент (M_2) сопротивления вращения, коэффициент трении груза о поверхность, по которой он движется $f_{тр} = 0{,}2$

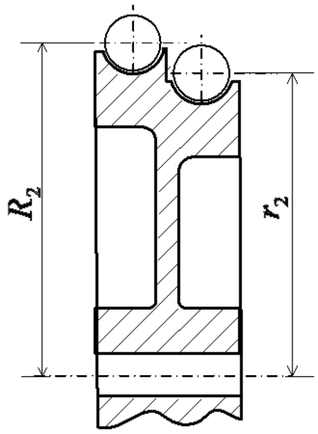


Рис. 3.12

Дано:

$m_1 = 12кг;\ m_2 = 2кг$

$m_3 = 8кг$

$R_2 = 0{,}3м; r_2 = 0{,}2м$

$M_2 = 0{,}5$

$F = 20(1 + 2S)$; $S_1 = 0{,}3м$

Определить скорость движения груза 3, т.е V_3

$$T - T_o = \sum_{i=1}^{n} A_i^e. \qquad (1)$$

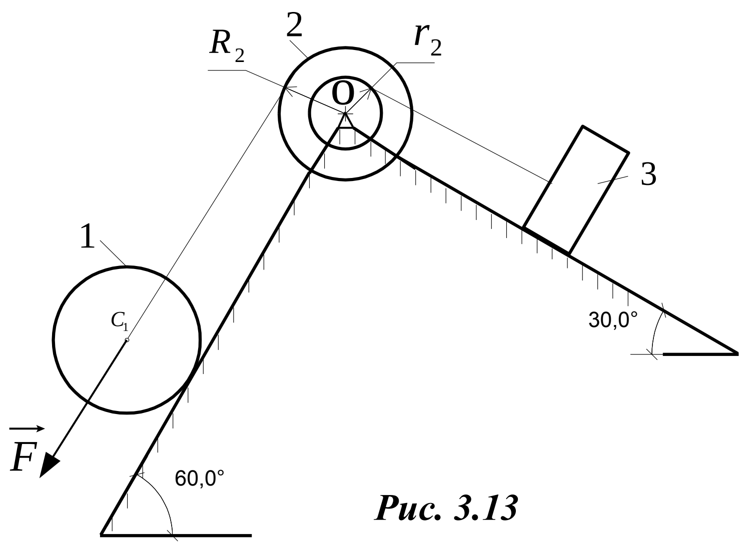


Рис. 3.13

Теорема в данном случае говорит о том, что сумма кинетических энергий всех тел перемещающейся системы равна сумме работ всех внешних, действующих на систему, сил на соответствующих перемещениях тел системы.

Тот параметр движения, который необходимо определить (например V_{c1}; $\omega_{c1}; \omega_2; V_{c3}$) нужно включить в левую часть формулы, выразив его через все остальные. В правой части необходимо выразить все перемещения через S_1.

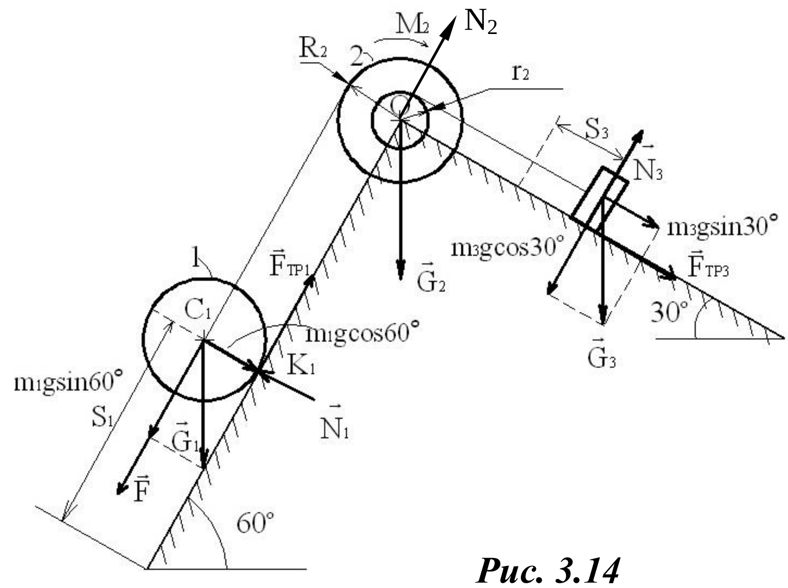


Рис. 3.14

Решение

Изобразим систему и приложим к ней все действующие внешние силы: активные силы $\vec{F}, \vec{G_1}, \vec{G_2}, \vec{G_3}$, постоянно действующий момент сопротивления (торможения M_2), реакции $\vec{N_1}, \vec{N_2}, \vec{N_3}$ и силы трения $\vec{F}_{ТР1}$, и $\vec{F}_{ТР3}$. Нити считаем невесомыми, нерастяжимыми, идеально гибкими и параллельными поверхностям движения. Силы тяжести $\vec{G}_1$ и $\vec{G}_3$ сразу разложим на нормальные и касательные составляющие (именно : $m_1 g \sin 60°$ и $m_3 g \sin 30°$ производят работу на своих перемещениях). В начальный момент система находится в покое, следовательно, её кинетическая энергия в этот момент равна нулю: $T_0 = 0$.

Кинетическая энергия движущейся системы равна сумме кинетических энергий всех тел этой системы:

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \qquad (2)$$

Тело 1 движется плоско (плоскопараллельно), то есть его кинетическая энергия: $T_1 = \frac{1}{2} m_1 \cdot V_{C1}^2 + \frac{1}{2} J_{C1} \cdot \omega_1^2$,

где V_{c1} – скорость центра момента цилиндрического катка;

J_{c1} – момент инерции катка относительно оси, проходящей через центр масс – т. С;

ω_1 – угловая скорость вращения катка относительно оси проходящей через т. C

Шкив 2 вращается постоянно относительно неподвижности в центре точки O, то есть кинетическая энергия : $T_2 = \frac{1}{2} \cdot J_2 \cdot \omega_2^2$,

где J_2 – момент инерции шкива относительно оси, проходящую через точку O,

ω_2 – угловая скорость шкива относительно оси, проходящая через точку O.

Груз 3 движется поступательно, то есть его кинетическая энергия: $T_3 = \frac{1}{2} m_3 \cdot V_3^2$,

где V_3- искомая скорость груза 3.

Все скорости выражаем через искомую V_3, то есть $V_3 = \omega_2 \cdot r_2$, следовательно: $\omega_2 = \frac{V_3}{r_2}$. Так как $V_{C1} = \omega_2 \cdot R_2 = V_3 \frac{R_2}{r_2}$, а точка K_1- мгновенный центр для тела 1, то $V_{C1} = \omega_1 \cdot K_1C_1 = \omega_1 \cdot r_1$, следовательно $\omega_1 = \dfrac{V_{C1}}{r_1} = \omega_2 \dfrac{R_2}{r_1} = \dfrac{V_3}{r_2} \cdot \dfrac{R_2}{r_1}$

Моменты инерции: сплошного цилиндрического катка: $J_{C1} = 0{,}5 m_1 \cdot r_1^2$ шкива с периферийной массой: $J_2 = m_2 \cdot R_2^2$. Все подставляем в выражение (2)

$$T = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot V_3^2 \cdot \frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot r_1^2 \cdot V_3^2 \cdot \frac{R_2^2}{r_1^2 \cdot r_2^2} + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot R_2^2 \cdot \frac{V_3^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} \cdot m_3 \cdot V_3^2 =$$

$$= \left(\frac{3}{4} \cdot m_1 \cdot \frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{R_2^2}{r_2^2} + \frac{1}{2} \cdot m_3 \right) \cdot V_3^2 = \left(\frac{3}{4} \cdot 12 \cdot \frac{0{,}3^2}{0{,}2^2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{0{,}3^2}{0{,}2^2} + \frac{1}{2} \cdot 8 \right) \cdot V_3^2 =$$

$$= (20{,}25 + 2{,}25 + 4) V_3^2 = 26{,}25 \cdot V_3^2$$

Далее определим сумму работ всех действующих внешних сил на соответствующих перемещениях тел системы.

Реакции $\overrightarrow{N_1}; \overrightarrow{N_2}; \overrightarrow{N_3}$, а также $m_1 \cdot g \cdot \cos 60°$; $G_2 = m_2 \cdot g$; $m_3 \cdot g \cdot \cos 30°$ на направлениях перемещений имеют проекции равные нулю, поэтому работ не совершают.

$\vec{F}_{\text{ТР}1}$ - приложенная точке K_1 не производит работы, так как точка K_1 мгновенный центр скоростей и тело 1 катится по наклонной плоскости без скольжения, то есть без сопротивления.

Положительные работы производит:

1) Сила $\vec{F}$ на перемещение S_1, то есть инициирующая движение всей системы сила:

$$A(\vec{F}) = \int_0^{S1} F \cdot ds = \int_0^{S1} 20(1 + 2S)\, ds = 20 \cdot S_1 + 20 \cdot S_1^2 = 20(S_1 + S_1^2) = 20(3 + 3^2) = 240 \text{Нм}$$, и

2) Сила $m_1 \cdot g \cdot \sin 60°$ (скатывающая составляющая $\overrightarrow{G_1}$) на перемещение S_1:

$$A(\vec{G}_1) = m_1 \cdot g \cdot \sin 60° \cdot S_1 = 12 \cdot 10 \cdot 0{,}87 \cdot 3 = 313{,}2 \text{Нм}.$$

Отрицательные работы производят:

3) Тормозной момент шкива 2 дает отрицательную работу:

$A(M_2) = -M_2 \cdot \varphi_2 = -M_2 \cdot \dfrac{S_1}{R_2} = -0{,}5 \cdot \dfrac{3}{0{,}3} = -0{,}5 \text{Нм}$ (по известной формуле : длинна дуги окружности S равна произведению $S = R\varphi$, где φ - угол в радианах, поэтому $S_1 = R_2 \cdot \varphi_2$, то есть $\varphi_2 = \dfrac{S_1}{R_2}$);

4) Сила $m_3 \cdot g \cdot \sin 30°$ (скатывающая составляющая $\overrightarrow{G_3}$) на перемещение S_3 дает отрицательную работу, так как направлена против движения системы :

$$A(\vec{G}_3) = -m_3 \cdot g \cdot \sin 30° \cdot S_3 = -m_3 \cdot g \cdot \sin 30° \cdot r_2 \cdot \varphi_2 = -m_3 \cdot g \cdot \sin 30° \cdot \frac{r_2}{R_2} \cdot S_1 =$$

$= -8 \cdot 10 \cdot 0{,}5 \cdot \dfrac{0{,}2}{0{,}3} \cdot 3 = -80\text{Нм}$ (так как $\varphi_2 = \dfrac{S_1}{R_2}$, а шкив – цельная деталь, то радиус r_2 повернется на тот же угол φ_2; следовательно дуга на радиусе r_2 равна $S_3 = r_2 \cdot \varphi_2 = \dfrac{r_2 \cdot S_1}{R_2}$);

5) Сила $\vec{F}_{\text{ТР3}}$ создает отрицательную работу (работу силы сопротивления) на том же перемещении S_3:

$$A(\vec{F}_{\text{ТР3}}) = -f_{\text{ТР}} \cdot m_3 \cdot g \cdot \cos 30° \cdot S_3 = -0{,}2 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 0{,}87 \cdot \frac{0{,}2}{0{,}3} \cdot 3 = -27{,}8\text{Нм}$$

Сумма работ всех сил : $\sum_{i=1}^{n} A_i^e = 240 + 313{,}2 - 5 - 80 - 27{,}8 = 440{,}4\text{Нм}$

Окончательно из выражения : $T = \sum_{i=1}^{n} A_i^e$, то есть $26{,}25 \cdot V_3^2 = 440{,}4$ определим искомый параметр V_3: $V_3 = \sqrt{\dfrac{440{,}4}{26{,}25}} = 4{,}1 м/с$ Ответ: скорость движения груза 3: $V_3 = 4{,}1 \text{м}/c$.

Контрольное задание Д-2

Механическая система состоит из сплошного катка, ступенчатого шкива 2 и груза соединенных в единую систему тел с помощью невесомых нитей, намотанных на ручьи шкива 2.

Из положения равновесия систему выводит сила $\vec{F}$. Определить один из кинетических параметров движения системы, когда система под действием силы $\vec{F}$ передвинулась на расстояние S_1 (соответствующую перемещению тела 1)

$f_{\text{ТР}} = 0{,}2$; $R_2 = 0{,}3\text{м}$; $r_2 = 0{,}2\text{м}$

Таблица Д-2

Номер условия	m_1 [кг]	m_2 [кг]	m_3 [кг]	M_2 [Нм]	$F = f(S)$	S_1 [м]	Найти
0	2	0.5	1.2	0.1	50(2+3S)	0.5	V_3
1	4	1.5	3.2	0.2	50(3+2S)	0.8	V_1
2	6	3	4.0	0.3	20(3+2S)	1.0	ω_2
3	8	2.5	5.0	0.4	20(2+3S)	1.2	ω_1
4	10	1.0	8.0	0.5	30(5+4S)	0.6	ω_2
5	3	0.25	2.0	0.6	30(4+5S)	0.7	V_3
6	5	0.75	3.0	0.7	15(1+3S)	0.9	V_1
7	9	0.8	6.0	0.8	15(3+S)	1.2	ω_2
8	12	2.4	7.5	0.9	40(4+6S)	2.0	V_3
9	15	1.8	10	1.0	40(6+5S)	2.5	V_1

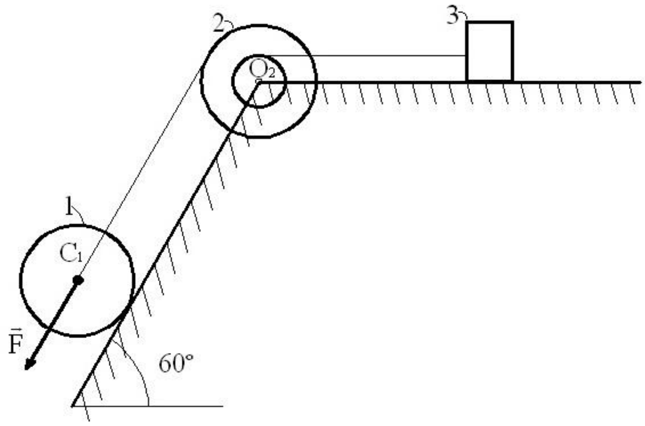


Рис. Д-2.0

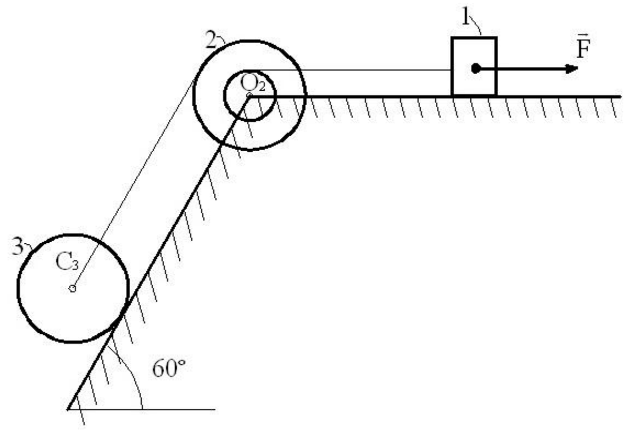


Рис. Д-2.1

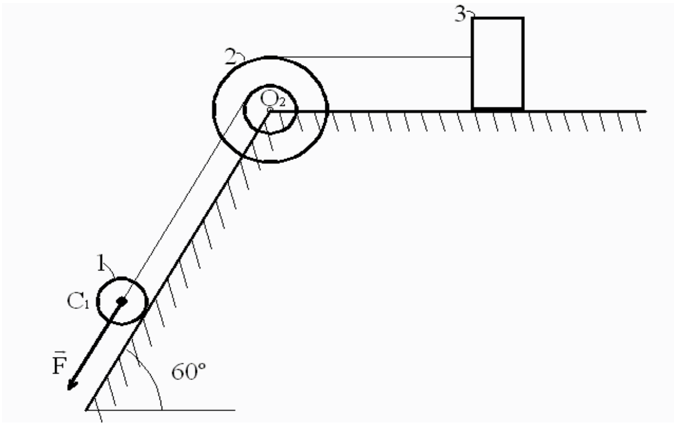


Рис. Д-2.2

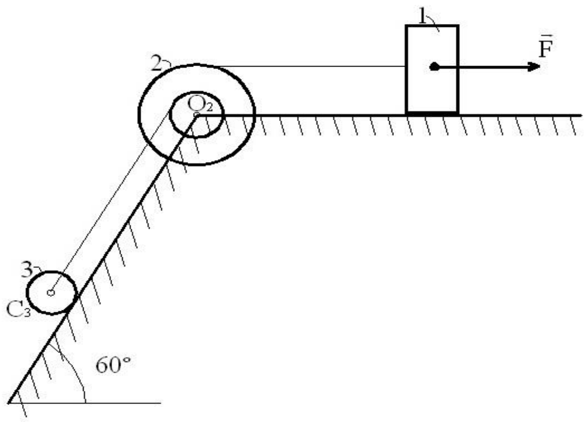


Рис. Д-2.3

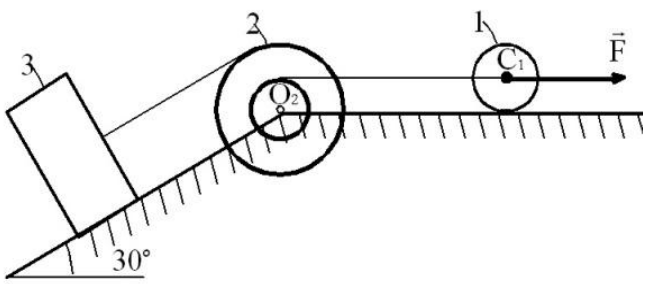


Рис. Д-2.4

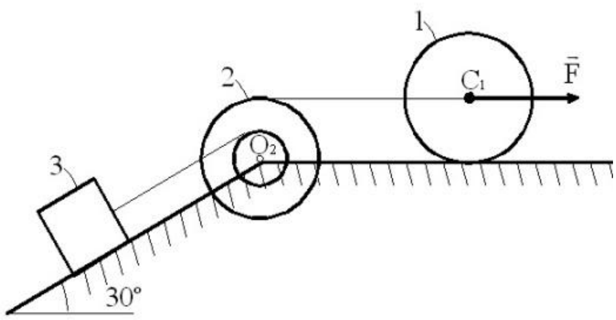
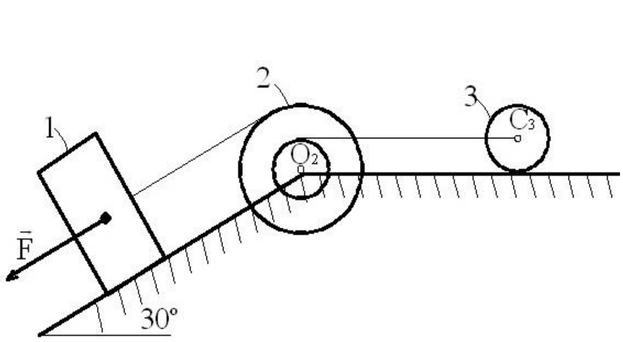
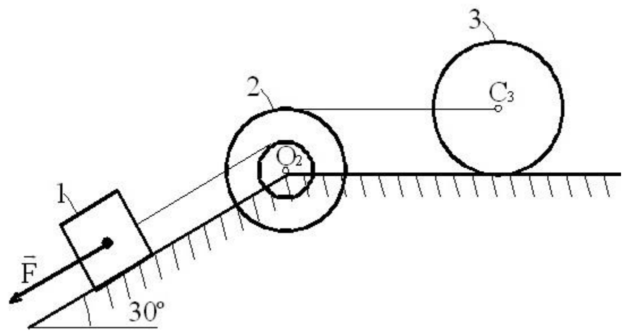


Рис. Д-2.5



Д-2.6



Д-2.7

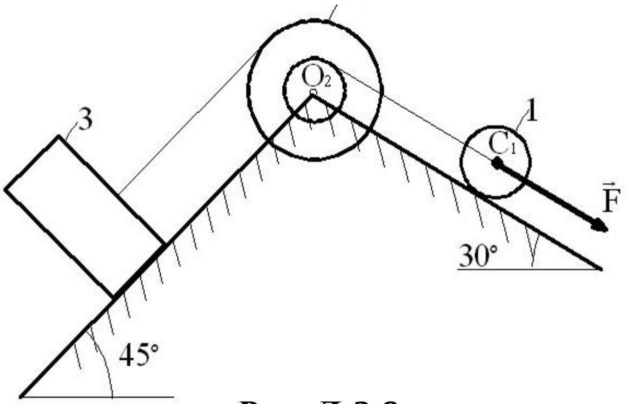


Рис. Д-2.8

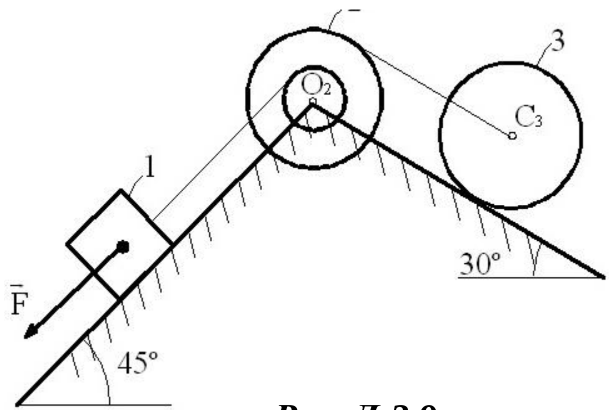


Рис. Д-2.9

3.3.3. Принцип Даламбера

Задача №3

Невесомый вал вращается с постоянной угловой скоростью ω. В точке О к валу прикреплен жестко стержень ОД длинной l_1 массой m_1, под углом $\alpha = 30°$ к оси вала. На расстоянии $ОК = 0{,}75l_1$ к стержню прикреплен груз К массой m_2.

Определить реакции подпятника А и подшипника В.

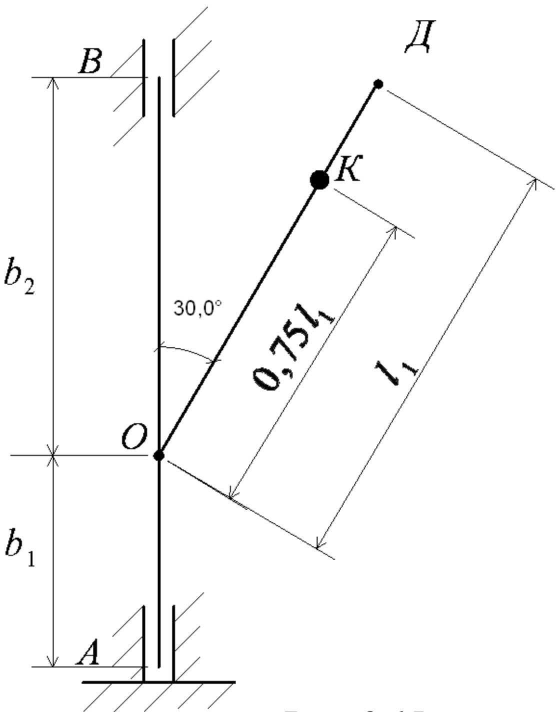


Рис. 3.15

Дано :

$b_1 = 0{,}5м$; $b_2 = 1м$;

$l_1 = 0{,}8м$; $\alpha = 30°$;

$m_1 = 2кг$; $m_2 = 5кг$;

$\omega = 8\ 1/c$ Определить R_A и R_B

Решение

К вращающейся системе (вал, стержень, груз) применим принцип Даламбера, согласно которому внешние силы, реакции и силы инерции образуют уравновешенную систему сил.

Рассмотрим систему тел в плоскости xAy (обозначим оси координат) и приложим (изобразим) все силы действующие на систему:

реакции $R_B; R_{Ax}; R_{Ay}$;

внешние силы :

$\overrightarrow{G_1} = m_1 \cdot \vec{g}$; $\overrightarrow{G_2} = m_2 \cdot \vec{g}$, и силы инерции стержня $\vec{F}_{и1}$ и груза $\vec{F}_{и2}$.

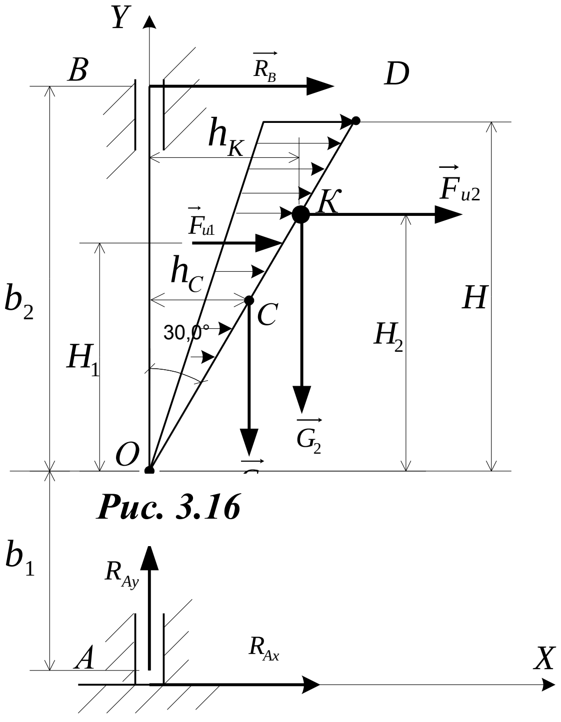


Рис. 3.16

Для определения сил инерции стержня и груза определим ускорения их центров масс точек С и К. Так как вращение вала равномерное ($\omega = const$), то ускорения равны центростремительным, то есть нормальным составляющим ускорения $a_{hc} = \omega^2 \cdot h_c$; $a_{hk} = \omega^2 \cdot h_k$, $h_c = 0{,}5 l_1 \cdot \sin 30° = 0{,}5 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}2$м (центр масс стержня лежит в середине его длинны l) $a_{hc} = \omega^2 \cdot h_c = 8^2 \cdot 0{,}2 = 12{,}8 \text{м}/c^2$

$$h_K = 0{,}75 \cdot l_1 \cdot \sin 30° = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}3\text{м};$$

$$a_{hk} = \omega^2 \cdot h_k = 8^2 \cdot 0{,}5 = 19{,}2 \,\text{м}/\text{с}^2$$

Векторы сил $\overrightarrow{F_{u1}}$ и $\overrightarrow{F_{u2}}$ направлены в противоположную сторону направлениям $\overrightarrow{a_{hc}}$ и $\overrightarrow{a_{hk}}$, то есть вправо от оси Ay (на чертеже).

Поскольку эпюра изменения $\overrightarrow{F_{u1}}$ изменится от нуля в точке O до *max* в точке $Д$ линейно (по треугольнику), то точка приложения силы $\overrightarrow{F_{u1}}$ находится на линии центра тяжести этой фигуры, то есть на расстоянии $H_1 = \frac{2}{3} H$;

$H = l_1 \cdot \cos 30° = 0{,}8 \cdot 0{,}87 = 0{,}696\text{м} \approx 0{,}7\text{м}$;

$H_1 = 0{,}66 \cdot 0{,}696 = 0{,}46\text{м}$

$H_2 = 0{,}75 \cdot l_1 \cdot \cos 30° = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}87 = 0{,}52\text{м}$

$F_{u1} = m_1 \cdot a_{hc} = 2 \cdot 12{,}8 = 25{,}6H$

$F_{u2} = m_2 \cdot a_{hk} = 5 \cdot 19{,}2 = 96H$

Для полученной плоской системы сил составим три уравнения равновесия:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0, \qquad R_B + R_{AX} + F_{u1} + F_{u2} = 0. \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \qquad R_{AY} - G_1 - G_2 = 0. \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_B(\vec{F_i}) = 0, \quad R_{AX}(b_1 + b_2) - G_1 \cdot h_C - G_2 \cdot h_K + F_{u1}(b_2 - H_1) + F_{u2}(b_2 - H_2) = 0. \qquad (3)$$

Из (2) уравнения получим : $R_{AY} = G_1 + G_2$; $R_{AY} = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 10 = 70H$,

так как $G_1 = m_1 \cdot g \approx 2 \cdot 10 = 20H$, $G_2 = m_2 \cdot g \approx 5 \cdot 10 = 50H$.

из (3) уравнения получим :

$$R_{AX} = \frac{G_1 \cdot h_C + G_2 \cdot h_K - F_{u1}(b_2 - H_1) - F_{u2}(b_2 - H_2)}{(b_1 + b_2)}$$

$$R_{AX} = \frac{20 \cdot 0{,}2 + 50 \cdot 0{,}3 - 25{,}6(-0{,}46) - 96(-0{,}52)}{0{,}5 + 1{,}0} = -27{,}3H$$

Подставив $R_{AX} = -27{,}3H$ в выражение (1), определим:

$R_B = -R_{AX} - F_{u1} - F_{u2}$

$R_B = 27{,}3 - 96 - 25{,}6 = -94{,}3H$.

Знак минус свидетельствует об обратном направлении вектора $\vec{R}_{AX}$ и $\overrightarrow{R_B}$, по сравнению с указанным на чертеже.

Ответ:
$R_B = -94{,}3H$;
$R_{AX} = 27{,}3H$;
$R_{AY} = 70H$.

Контрольное задание Д-3

Вертикальный невесомый вал вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 5 1/c$. Вал имеет две опоры: подпятник *A* и цилиндрический подшипник *B*. К валу жестко прикреплен невесомый стержень 1 длинной $l_1 = 0{,}6$м с сосредоточенной массой $m_1 = 6$кг на его конце, а так же однородный стержень 2 длинной $l_2 = 0{,}8$м с массой $m_2 = 8$кг. Пренебрегая весом вала и считая $b = 0{,}3$м, определить реакции опор: подпятника *A* и шарнира *B*.

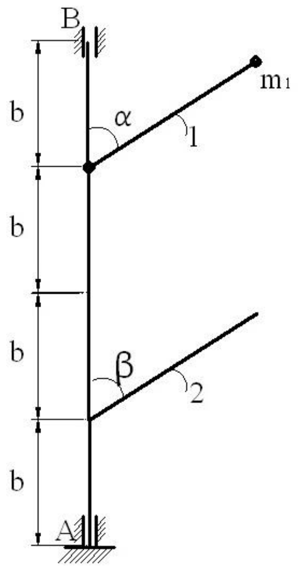


Рис. Д-3.0

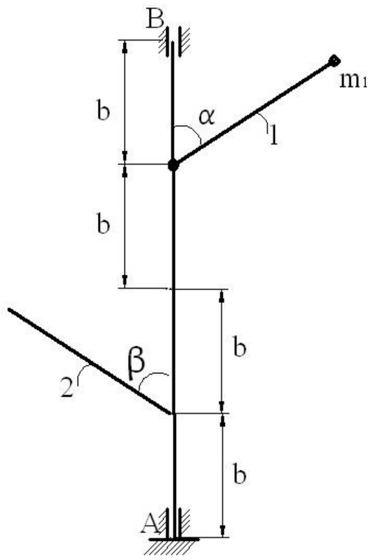


Рис. Д-3.1

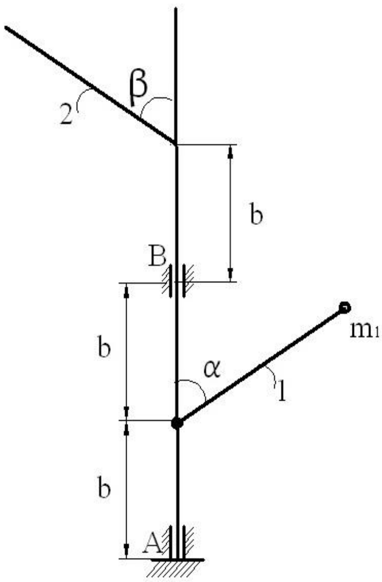


Рис. Д-3.2

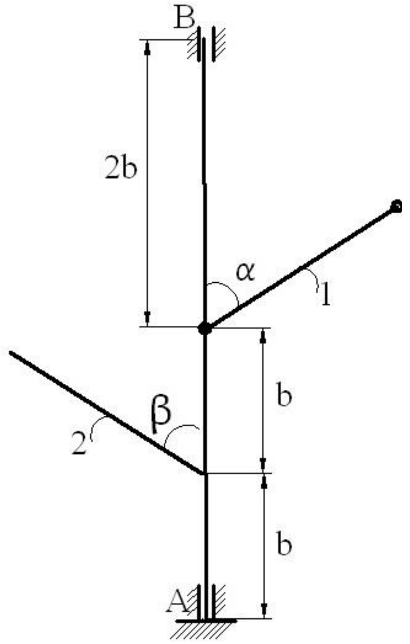


Рис. Д-3.3

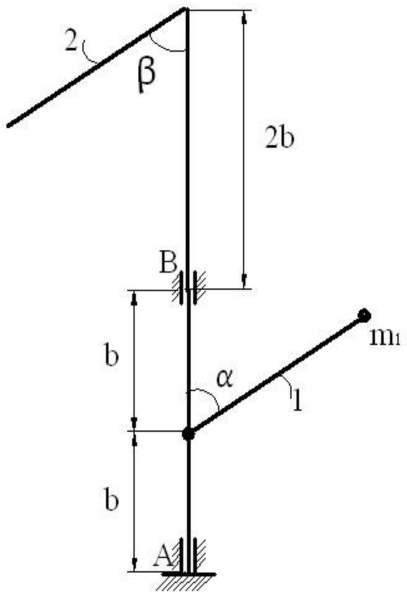


Рис. Д-3.4

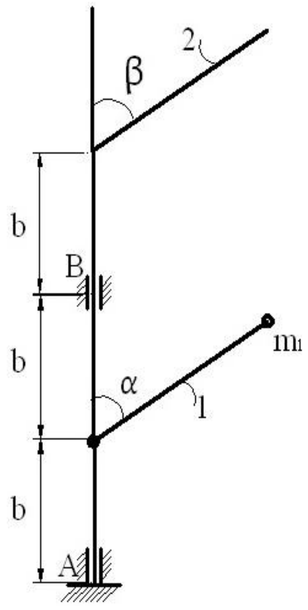


Рис. Д-3.5

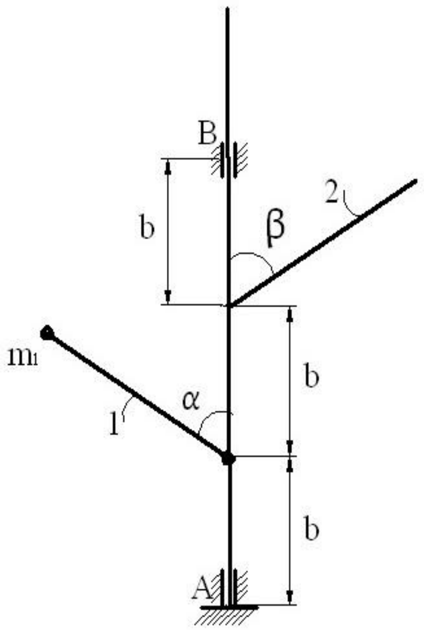


Рис. Д-3.6

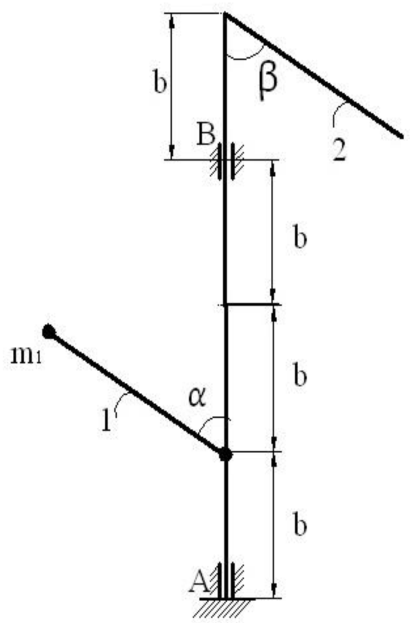


Рис. Д-3.7

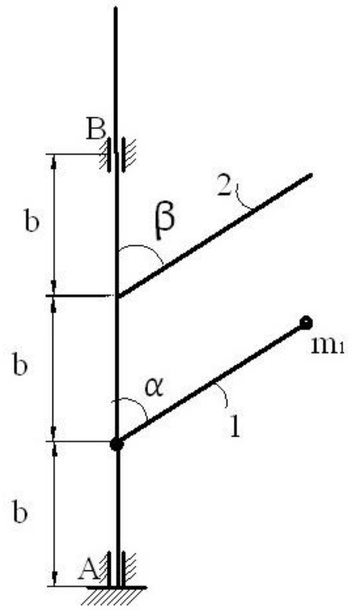


Рис. Д-3.8

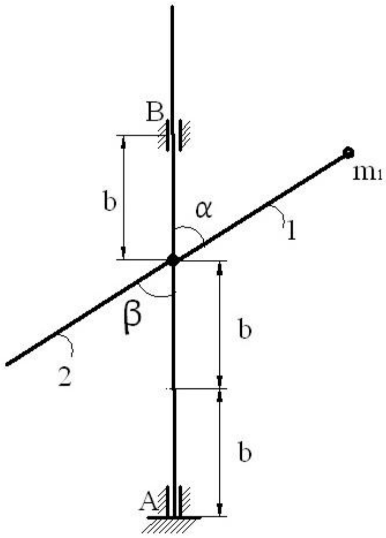


Рис. Д-3-9

Таблица Д-3

Номер условия	α	β	Номер условия	α	β
0	30°	30°	5	60°	60°
1	30°	45°	6	45°	45°
2	30°	60°	7	90°	60°
3	45°	90°	8	45°	30°
4	60°	45°	9	90°	30°

В заключение отметим, что данное методическое пособие разработано с целью оказании помощи студентам-заочникам при самостоятельном изучении теоретической механики. Предлагаемые примеры решения задач и семь контрольных заданий отражают только небольшую (необходимую) часть огромного разнообразия задач теоретической механики. Ознакомиться с более широким кругом этих задач можно, обратившись, например, к методическим указаниям для студентов-заочников под редакцией С.М. Тарга (1984; 1989 гг.) и к задачникам по теоретической механике.

Список литературы

1. Добронравов В.В. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. М.: Высш. шк. ,1983 (и последующие издания).

2. Никитин Е.М. Краткий курс теоретической механики для ВТУЗов. М.: Наука, 1971 (и последующие издания).

3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 2004 (и последующие издания).

4. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. М.: Высш. шк., 1973 (и последующие издания).

5. Мещерский И.В. Сборник задач по теоретической механики. М.: Высш. шк., 1985.

6. Теоретическая механика: Метод. указания и контрольные задания / под ред. С.М. Тарга. М., 1980 (1988, 1989).