# Задания .

**Задача 2**

Абсолютно жёсткий брус *АС* опирается на шарнирно – неподвижную опору *А* и прикреплён к стальному стержню *ВС* длиной *L* с помощью шарнира *С* (см. рис.3).

*Требуется*:

1. Определить реакции в опорах *А* и *В*.
2. Определить продольную силу *N* в стальном стержне и построить её эпюру.
3. Определить площадь поперечного сечения стержня.
4. Определить удлинение стержня *ВС* и величину вертикального перемещения точки *С*.

Общие данные: предел текучести материала (Ст.3) ; коэффициент запаса прочности ; модуль упругости (модуль Юнга) .

***Схема номер V***, ***а*, *м=1,9*** , ***в,м=1,4*** , ***L, м=2,4***  *,* ***F, кН=16***

*А*

*F*

*C*

# *B*

# 45˚

*а*

*в*

*А*

*F*

*C*

# *B*

# 45˚

*C*

# *B*

*F*

# 135˚

*F*

*F*

# *B*

# *B*

*А*

*А*

*А*

# 60˚

# 30˚

*C*

*C*

*I*

*II*

*III*

*IV*

*V*

*А*

*F*

*C*

# *B*

# 60˚

*а*

*в*

*C*

# *B*

*F*

# 45˚

*F*

# *B*

*А*

*А*

# 120˚

*C*

*F*

*А*

# 60˚

*C*

*VI*

*VII*

*VIII*

## IX

*X*

*А*

*F*

*C*

# 45˚

# Рис. 3

# *B*

# *B*

*B*

*B*

*B*

*B*

*B*

*B*

*B*

*B*

*B*

*B*

**Задача 3**

К стальному валу приложены три вращающих момента (рис.4).

*Требуется*:

1. Определить реактивный момент в заделке.
2. Построить эпюру крутящих моментов.
3. Определить диаметр вала (расчёты произвести из условия прочности и условия жёсткости).
4. Построить эпюру углов закручивания.

Общие данные: допускаемое касательное напряжение ; допускаемый относительный угол закручивания ; модуль сдвига .

Схема номер **V** ***а*, *м=1,9 в*, *м=1,4 с*, *м=0,5*** ***М1*, *кН·м=9 , М2*, *кН·м=5***

***М3, кН·м=4***

*М1*

*М3*

*М2*

*М1*

*М3*

*М2*

*М1*

*М3*

*М2*

*М1*

*М3*

*М2*

*М1*

*М3*

*М2*

*а*

*с*

*в*

*I*

*II*

*III*

*IV*

*V*

*М1*

*М3*

*М2*

*М1*

*М3*

*М2*

*М3*

*М1*

*М2*

*М3*

*М1*

*М2*

*М3*

*М1*

*М2*

*а*

*с*

*в*

*VI*

*VIII*

*IX*

*X*

# Рис. 4

Таблица 4

**Задача 4**

Даны две схемы стальных балок (рис.5).

*Требуется*:

Для схемы «*б*»:

1. Построить эпюры поперечной силы *Q* и изгибающего момента *M*.
2. Подобрать сечения следующей формы: прямоугольное (*h[b = k*); круглое; кольцевое (*α = d[D*); состоящее из двух швеллеров; двутавровое.
3. Оценить эффективность формы сечения.

Общие данные: предел текучести материала ; коэффициент запаса прочности ; модуль упругости (модуль Юнга) .

Схема "б" номер **V** ***а1, м=1,0 а2, м=1,4 q, кН/м=18 F, кН=25***

***М, кН·м=25 k=2,5 α=0,8***

*I*

*II*

*III*

*IV*

*V*

#### Рис. 5

*б)*

*q*

*M*

*q*

*F*

*q*

*M*

*q*

*F*

*a1*

*a2*

*q*

*M*

*a)*

*q*

*q*

*q*

*q*

*q*

*M*

*F*

*F*

*M*

*a1*

*a2*

*F*

**Задача 8**

Стальной стержень длиной *l* сжимается силой *F* (рис.9).

*Требуется*:

1. Найти размеры поперечного сечения стержня при допускаемом напряжении на центральное сжатие , пользуясь методом последовательных приближений.
2. Найти величину критической силы, если предельная гибкость .
3. Найти коэффициент запаса устойчивости.

***Схема номер I Форма сечения I F, кН=400 l, м=2,5***

*I*

*F*

*l*

*I*

*a*

*a*

*II*

*a*

*a*

*0.2a*

*II*

*F*

*l*

*III*

*1.5a*

*a*

*IV*

*1.5a*

*a*

*0.2a*

*III*

*F*

*l*

*IV*

*F*

*l*

*a*

*a*

*a*

*V*

*d*

*VI*

*2d*

*2d*

*d*

*VII*

*d*

*VIII*

*0.2d*

*IX*

*2a*

*a*

*2a*

*a*

*X*

*0.2a*

#### Рис. 9

# Примеры решения задач

**Задача 2 (рис.12)**

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 2).

*Исходные данные:*

Предел текучести материала стержня (Ст. 3) ; коэффициент запаса прочности ; модуль Юнга ; *a* = 1*м*; *b* = 2*м*; *L* = 2*м;* *F* = 20 *кН*.

*Решение:*

**I.** Определяем реакции в опорах ***D*** и ***В***.

Рассматриваемая система является статически определимой, поскольку число связей, накладываемых на систему, соответствует числу уравнений равновесия статики в плоскости. Последних всегда три. В нашем случае в опоре ***В*** возникает только одна реакция в направлении продольной оси стержня ***ВС*** (реакция ), в опоре ***D*** – две ( и ), так как она является шарнирно неподвижной опорой (см. рис. 12, *а*).

Составляем уравнения равновесия статики. Желательно каждое уравнение представить так, чтобы оно содержало только одну неизвестную.

.

.

Проверка правильности определения реакций:

.

***Проверка обязательна*.** Полученное тождество свидетельствует о правильности результатов.

**II.** Определяем продольную силу *N* в стальном стержне и строим её эпюру.

* Пользуясь методом сечения, *определяем значение продольной силы* *N* в сечении *m – n* стержня *ВС* (см. рис. 12, *б*): .
* *Строим эпюру продольной силы*. Поскольку при изменении значения координаты сечения *m – n* в пределах длины стержня продольная сила остаётся постоянной, эпюра продольной силы представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс (см. рис. 12, *б*).

*RB*

*B*

*N*

*n*

*m*

**×**

*RC*

*ЭN,кН*

69,3

*B*

*б*)

*ΔL*

*C1*

*C2*

*C*

*α*

*Δверт*

*а*)

*RB*

*Y*

*X*

*ΔL*

*L*

*α=60˚*

*RD*

*HD*

*B*

*D*

*C*

*C1*

*C2*

*a*

*b*

*F*

Рис.12

**III.** Определяем площадь поперечного сечения стержня *ВС*.

Условие прочности при растяжении для пластичных материалов:

, где ;

 - наибольшее по абсолютной величине расчётное растягивающее напряжение, возникающее в сечении с продольной силой *Nmax* и с площадью поперечного сечения *А*.

Допускаемое напряжение .

Из условия прочности решаем проектировочную задачу, математическая формулировка которой: .

Предельное значение площади

.

**IV.** Определяем удлинение стержня *ВС* и величину вертикального перемещения точки *С*.

* *Удлинение стержня ВС определяем* согласно закону Гука для абсолютных удлинений на основании следующей формулы:

.

* *Вертикальное перемещение точки С находим*, заменяя дугу (радиусом ) перпендикуляром *С2С1* на первоначальное направление стержня (см. рис. 12, *а*). Малая величина удлинения  по сравнению с длиной стержня  допускает такую замену при весьма незначительной погрешности результата. Из треугольника *СС1С2* находим, что вертикальное перемещение

.

**Задача 3**

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 3).

Решение типовой задачи см. в [1] пример 6.1; c. 195-199.

**Задача 4**

**Схема «*а*» (рис.13)**

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 4, схема «*а*»).

*Исходные данные*:

, , , , , .

*Решение:*

**I.** Построим эпюры поперечной силы *Q* и изгибающего момента *M*.

* *Получим выражения для Q и M по участкам.* Заданная балка имеет два участка нагружения: по длине первого участка распределена равномерная нагрузка *q*, прекращение действия которой означает начало второго участка (см. рис. 13, *а*). На рисунке  и  - координаты поперечных сечений первого и второго участков. Для каждого участка выбирается своя система координат.

*I* – ый участок: .

Рассматривая равновесие левой отсечённой части балки (см. рис. 13, б), запишем выражения для  и :

.

Полученное выражение представляет собой уравнение наклонной прямой, следовательно, для её построения необходимо определить координаты двух точек. Мы выберем крайние точки:

; .



Равнодействующая распределённой нагрузки *q* на участке  равняется  и приложена в середине участка, то есть расстояние от силы  до сечения равно . Данное выражение изгибающего момента представляет собой уравнение кривой второго порядка, имеющей экстремум в сечении с координатой , в котором  (см. ответ на вопрос 3 раздела 6). Следовательно, для построения эпюры *M* требуются координаты трёх точек:

; .

При .

Тогда .

*II* – ой участок: .

Рассматривая равновесие левой части, отсечённой сечением с координатой  (см. рис. 13, *в*), запишем выражения для  и :

.

Полученное выражение представляет собой уравнение прямой, параллельной оси эпюры.

.

Рис. 13

*a1*

*z2*

*F*

*M(z2)*

*Q(z2)*

*q*

*F*

*z1*

*M(z1)*

*Q(z1)*

*q*

*в)*

*б*)

*q*

*F*

*z1*

*z2*

*Y*

*Z*

*г)*

**-**

*q*

z0

*F*

*z1*

*z2*

*a1*

*a2*

15

5

0

0

11.25

*Э Q,*

*кН*

10

5

*Э M,*

*кН·м*

0

0

*а)*

**+**

**+**

В данном случае мы получили уравнение прямой, наклонной к оси эпюры. Для её построения определим координаты двух крайних точек:

;



* *Строим эпюры Q и M.* Результат представлен на рис. 13, *а.*

**II.** Определяем максимальное нормальное напряжение в балке сложного поперечного сечения, уже рассмотренного в задаче 1.

Для этого следует воспользоваться формулой

.

**III.** Определяем фактический коэффициент запаса прочности как

.

Конструкция пригодна к эксплуатации, так как действительный запас прочности больше нормативного , то есть 3,77 > 1,5.

**IV.** Определяем прогиб конца консоли аналитическим методом.

* *Составляем приближённые дифференциальные уравнения изогнутой оси балки* по участкам с соблюдением условий Клебша (см. ответ на вопрос 11 раздела 6).

Необходимо отметить, что в этом случае выбирается только одна система координат с началом в крайней левой точке балки (см. рис. 13, *г*). Если в этой точке балка жёстко или шарнирно зафиксирована, то прежде чем приступить к составлению уравнений, необходимо определить реакции в опорах.

Для нашего случая:

I – ый участок: , ;

II – ой участок: , .

* *Дважды интегрируем дифференциальные уравнения*



* *Рассматриваем граничные условия и доказываем равенство постоянных интегрирования на обоих участках.*

При  (на границе двух смежных участков балки) , , так как они являются углами поворота и прогибами, соответственно, одного и того же сечения.

Тогда, учитывая формулы (1) и (3), получим:

, откуда .

Из формул (2) и (4) получим

, откуда .

Следовательно, имеют место только две постоянных интегрирования: *C*, *D*.

* *Из начальных условий определяем значения постоянных интегрирования C и D.*

Первое условие: при  , то есть в защемленном конце балки угол поворота равен нулю, иными словами сечение не поворачивается. Тогда согласно формуле (3)

.

Откуда .

Второе условие: при , , то есть в защемленном конце балки прогиб равен нулю – сечение не перемещается вертикально. Тогда в соответствии с формулой (4)

.

Откуда .

* *Вычисляем прогиб конца консоли*

Для этого воспользуемся формулой (2) при :

.

Согласно принятому направлению координатных осей (см. рис. 13, *г*) при решении задачи аналитическим методом знак «+» указывает на то, что прогиб конца консоли балки направлен вверх.

**Задача 4**

**Схема «*б*» (рис.14)**

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 4, схема «б»).

*Исходные данные*:

, , , , , .

*Решение:*

**I.** Построим эпюры поперечной силы *Q* и изгибающего момента *M*.

* *Определяем опорные реакции балки.* Заданная балка зафиксирована в двух сечениях с помощью шарнирно-подвижной и шарнирно-неподвижной опор (см. рис. 14). Характер прикладываемой нагрузки обуславливает необходимость определения только вертикальных реакций опор  и , так как горизонтальная составляющая реакции в опоре *А* равна нулю ().





Проверка: .

Полученное тождество свидетельствует о правильности результатов.

* *Записываем уравнения для Q и M по участкам.* Для каждого участка выбирается своя система координат

*I* – ый участок: .

Рассматриваем равновесие левой части балки:

.

*II* – ой участок: .

Рассматриваем равновесие правой части балки:

.

.

.



При  ,

тогда .

*RB*

*q*

*Э Q,*

*кН*

*Э M,*

*кН·м*

*z1*

*z2*

*a1*

*a2*

*M*

*RA*

*A*

# *B*

*6*

*0*

*26*

*21,125*

*20*

*z0*

Рис. 14

**-**

**+**

* *Строим эпюры Q и M.* Результат представлен на рис. 14.

**II.** Подбираем сечения указанных в задании форм.

Условие прочности при изгибе по нормальным напряжениям для пластичных материалов:

,

где .

Тогда условие проектировочной задачи принимает следующий вид:

.

Так как  (см. рис.14), то предельное значение осевого момента сопротивления:

.

* *Подбираем прямоугольное сечение.* Соотношение сторон  (рис.15).

Так как для прямоугольного сечения момент сопротивления относительно оси X ( см. рис. 15)  и по условию , то:

h

b

x

Рис. 15

y

,,

.

* *Подбираем круглое сечение.*

d

Рис. 16

y

x

Для круглого сечения осевой момент сопротивления (рис. 16) ; тогда

;

**.

* *Подбираем кольцевое сечение.* Отношение диаметров  (рис. 17).

d

Рис.17

y

x

D

Для кольцевого сечения осевой момент сопротивления . Тогда

;

;

.

* *Подбираем сечение, состоящее из двух швеллеров.*

В основе определения осевого момента сопротивления лежит соотношение



y

x

Рис. 18

(см. решение задачи 1, пункт VI).

Рассматриваемое сечение сложное (см. решение задачи 1, пункт V), состоит из двух равных частей (рис. 18):

.

По условию проектировочной задачи . Тогда предельное расчётное значение осевого момента сопротивления для одного швеллера .

По таблице ГОСТ 8240-72 выбираем швеллер № 14 с ближайшим большим моментом сопротивления . Следовательно, площадь всего сечения балки .

* *Подбираем двутавровое сечение*.

y

x

Рис.19

Условие проектировочной задачи для балки с двутавровым сечением (рис. 19):

.

По таблице ГОСТ 8239-72 выбираем двутавровую балку № 18 с ближайшим значением момента сопротивления, значение которого отвечает условию проектировочной задачи:

.

**III.** Оцениваем эффективность формы сечения.

Для этого сравниваем площади всех подобранных сечений:



Наиболее эффективной формой сечения балки (балка с наименьшим весом) является двутавровое сечение, наименее эффективной – круглое сплошное сечение.

**Задача 8 (рис. 21)**

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 8).

*Исходные данные*:

, , ,  (*μ* – коэффициент, зависящий от условий закрепления стержня, табличная величина).

*Решение:*

**I.** Находим размеры поперечного сечения стержня при допускаемом напряжении на центральное сжатие , пользуясь методом последовательных приближений.

* *Записываем выражение для определения площади поперечного сечения стержня из условия устойчивости.*

Условие устойчивости ,

|  |  |
| --- | --- |
| тогда ,  *А*  *А*  *F*  *L*  *d*  *3d*  *2d*  *A-A*  Рис. 21 | (5) |

где  - коэффициент уменьшения допускаемого напряжения на сжатие, или коэффициент продольного изгиба.

В расчётной формуле (5) имеются две неизвестные величины – коэффициент  и искомая площадь *A*. Поэтому при подборе сечения необходимо использовать метод последовательных приближений.

* *Для упрощения расчётов выполним вспомогательные преобразования.*

Так как проектируемое сечение сложное, минимальный момент инерции (потеря устойчивости происходит в плоскости наименьшей жёсткости) определяется следующим образом:

.

Площадь поперечного сечения

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |
| Тогда . | (6) |

Минимальный радиус инерции

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |
| . | (7) |

* *Выполняем первое приближение.* В первом приближении коэффициент продольного изгиба обычно принимают , тогда

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Используя соотношения (6) и (7), получим:

|  |  |
| --- | --- |
| ; |  |
| . |  |

Тогда расчётная гибкость колонны:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

По таблице ([1], табл. 13.1, с. 493) определяем значение коэффициента , соответствующего гибкости .

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

Путём линейной интерполяции

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Проверим выполнение условия устойчивости в первом приближении. Для этого вычислим рабочие напряжения первого приближения следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Затем определим допускаемые напряжения по устойчивости в первом приближении

|  |  |
| --- | --- |
| как . |  |

Из приведённых вычислений следует, что условие устойчивости не выполняется, так как

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

В этом случае перенапряжение составляет

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

что недопустимо. Следовательно, необходимо второе приближение.

* *Выполняем второе приближение.* Во втором приближении коэффициент продольного изгиба

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Тогда площадь сечения

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |
| Диаметр ; |  |
| радиус инерции . |  |

Гибкость колонны

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Определяем значение коэффициента , соответствующего этой гибкости:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| . |  |

Проверим выполнение условия устойчивости во втором приближении. Для этого вычислим рабочие напряжения второго приближения

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Затем определим допускаемые напряжения по устойчивости во втором приближении .

Из приведённых вычислений следует, что условие устойчивости не выполняется, так как

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

В этом случае перенапряжение составляет

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

что опять недопустимо, так как перенапряжение превышает 5%. Следовательно, необходимо третье приближение.

* *Выполняем третье приближение.* В третьем приближении коэффициент продольного изгиба

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Тогда площадь сечения

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |
| Диаметр ; |  |
| радиус инерции . |  |

Гибкость колонны

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Определяем значение коэффициента , соответствующего этой гибкости.

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
| . |  |

Проверим выполнение условия устойчивости в третьем приближении. Для этого вычислим рабочие напряжения третьего приближения

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Затем определим допускаемые напряжения по устойчивости в третьем приближении

|  |  |
| --- | --- |
| ; |  |
| . |  |

Из чего следует, что условие устойчивости не выполняется, однако перенапряжение составляет

|  |  |
| --- | --- |
| , |  |

что допустимо, так как оно не превышает 5%. То есть окончательно принимаем

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

Следовательно, сечение имеет размеры 72×108 см;

|  |  |
| --- | --- |
| ; |  |
| . |  |

**II.** Находим величину критической силы.

Так как , то есть , то используем формулу Эйлера для определения критической силы:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

**III.** Определяем коэффициент запаса устойчивости следующим образом:

|  |  |
| --- | --- |
| . |  |

**Задача 9**

Постановку задачи см. в практической части задания к курсовой работе (задача 9).

Решение типовой задачи см. в [1] пример 14.2; с. 537 – 540.

**Библиографический список**

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высш. школа, 1989. – 624 с.
2. Писаренко Г.С. Сопротивление материалов. – Киев: Высш. школа, 1986. – 775 с.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.