Вестник Сыктывкарского университета.
Сер.1. Вып.16.2012

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ ГИБКОГО СТЕРЖНЯ В УПРУГОЙ СРЕДЕ

В. Л. Никитенков, А. А. Холопов

В задаче о продольном сжатии вертикальной силой в упругой среде гибкого стержня, при различных граничных условиях получены условия реализации первой и последующих критических сил. Выведены асимптотические зависимости параметра, характеризующего критическую силу, от жесткости, объемлющей стержень, среды.

Ключевые слова: стержень, жесткость среды, критические силы, граничные условия, шарнирное опирание, жесткая заделка, свободный край.

Рассмотрим гибкий стержень длины l в упругой среде, характеризующийся коэффициентом жесткости C. На стержень действует вертикальная сжимающая сила N. На концах стержня могут быть заданы следующие граничные условия (см. Рис. 1):

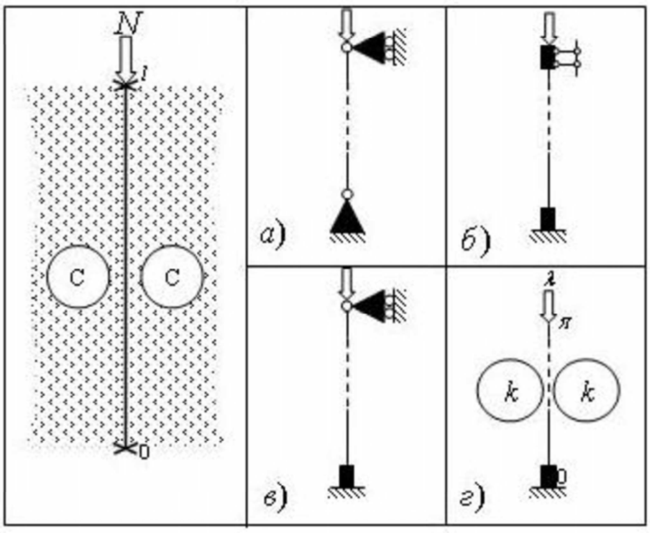

Рис. 1 Виды рассматриваемых граничных условий

а) Шарнирное опирание обоих концов;

б) Оба конца жестко заделаны;

в) Нижний конец жестко заделан, а верхний шарнирно оперт;

г) Жесткая заделка на нижнем конце стержня и условия свободного края с вертикально действующей продольной сжимающей силой на верхнем конце.

Нас будут интересовать соотношения между параметрами жесткости среды (k) и сжимающей силы (λ), когда последняя достигает своих критических значений (первого и последующих). Переход к безразмерным координатам $z = x\pi/l$, изменяющимся на промежутке и введение обозначений

$$\lambda = \frac{Nl^2}{2\pi^2 EI}, k^2 = \frac{Cl^4}{\pi^4 EI}$$

позволяет записать уравнение продольного изгиба в виде [1, с. 100]:

$$w^{IV} + 2\lambda w'' + k^2 w = 0 \qquad (0.1)$$

Граничные условия задаются в виде одной из следующих однородных систем (см. Табл. 1):

Таблица 1

а) Шарнирное опирание на обоих концах	б) Жесткая заделка обоих концов	в) Нижний конец – жесткая заделка, Верхний – шарнирное опирание	г) Нижний конец – жесткая заделка, Верхний – свободный край
$w(0)=0$ $w''(0)=0$ $w(\pi)=0$ $w''(\pi)=0$ (0.2)	$w(0)=0$ $w'(0)=0$ $w(\pi)=0$ $w'(\pi)=0$ (0.3)	$w(0)=0$ $w'(0)=0$ $w(\pi)=0$ $w''(\pi)=0$ (0.4)	$w(0)=0$ $w'(0)=0$ $w'''(\pi)+2\lambda w'(\pi)=0$ $w''(\pi)=0$ (0.5)

Необходимо при фиксированном значении k найти все значения параметра λ , которым соответствуют нетривиальные решения уравнения (0.1) при граничных условиях из набора а) - г). Интерес представляют также зависимости λ от k для задач а) - г).

1. Определяющие зависимости

Характеристическое уравнение для (0.1)

$$p^4 + 2\lambda p^2 + k^2 = 0 \qquad (1.1)$$

имеет корни,

$$\pm\sqrt{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - k^2}}$$

которые являются чисто мнимыми при $D = \lambda^2 - k^2 > 0$

$$\pm i\, m = \pm\, i\sqrt{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - k^2}}, \quad \pm i\, n = \pm i\, \sqrt{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - k^2}} \tag{1.2}$$

или комплексными при $D < 0$

$$\mu = \pm\,(\beta + i\gamma)\,, \quad \nu = \pm\,(\beta - i\gamma)$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{k - \lambda}{2}}, \quad \gamma = \sqrt{\frac{k + \lambda}{2}} \tag{1.3}$$

.

При $D = 0$ уравнение (1.1) имеет кратные корни

$$\pm\, n = \pm\,\sqrt{\lambda}, \quad n = \sqrt{\lambda} \tag{1.4}$$

Этим трем случаям соответствуют следующие фундаментальные системы решений (ФСР) (см. Табл. 2):

Таблица 2

Дискриминант	ФСР	Значение в нуле	Дифференцирование ФСР
$D<0$	$Y_0(z) = ch(\beta z)\cos(\gamma z)$ $Y_1(z) = ch(\beta z)\sin(\gamma z)$ $Y_2(z) = sh(\beta z)\cos(\gamma z)$ $Y_3(z) = sh(\beta z)\sin(\gamma z)$	$Y_0(0)=1$ $Y_1(0)=0$ $Y_2(0)=0$ $Y_3(0)=0$	$Y_0'(z) = \beta Y_2(z) - \gamma Y_1(z)$ $Y_1'(z) = \beta Y_3(z) + \gamma Y_0(z)$ $Y_2'(z) = \beta Y_0(z) - \gamma Y_3(z)$ $Y_3'(z) = \beta Y_1(z) + \gamma Y_2(z)$
$D=0$	$Y_0(z) = \cos(nz)$ $Y_1(z) = z\cos(nz)$ $Y_2(z) = \sin(nz)$ $Y_3(z) = z\sin(nz)$	$Y_0(0)=1$ $Y_1(0)=0$ $Y_2(0)=0$ $Y_3(0)=0$	$Y_0'(z) = -nY_2(z)$ $Y_1'(z) = Y_0(z) - nY_3(z)$ $Y_2'(z) = nY_0(z)$ $Y_3'(z) = Y_2(z) + nY_1(z)$
$D>0$	$Y_0(z) = \cos(mz)$ $Y_1(z) = \sin(mz)$ $Y_2(z) = \cos(nz)$ $Y_3(z) = \sin(nz)$	$Y_0(0)=1$ $Y_1(0)=0$ $Y_2(0)=1$ $Y_3(0)=0$	$Y_0'(z) = -mY_1(z)$ $Y_1'(z) = mY_0(z)$ $Y_2'(z) = -nY_3(z)$ $Y_3'(z) = nY_2(z)$

Общее решение (0.1) запишется в виде

Произвольные постоянные определяются из однородной системы граничных условий, определитель которой в случае нетривиального решения должен быть равен рулю. Указанное равенство дает при фиксированном определяющее соотношение для параметра критических сил.

Сведем в таблицу эти определяющие соотношения для всех рассматриваемых задач, группируя их в зависимости от знака дискриминанта. Начнем со случая отрицательного дискриминанта.

Таблица 3

$D<0$	Матрица СЛАУ $\det A = 0$
	а) Шарнирное опирание на обоих концах стержня
	$A=\begin{bmatrix} Y_1(\pi) & Y_2(\pi) \\ -\lambda Y_1(\pi)+2\beta\gamma Y_2(\pi) & -\lambda Y_2(\pi)-2\beta\gamma Y_1(\pi) \end{bmatrix}$
	$\boxed{\sqrt{k^2-\lambda^2}\left(ch^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi)+sh^2(\beta\pi)\cos^2(\gamma\pi)\right)=0}$ (1.5)
	б) Жесткая заделка на обоих концах стержня
	$A=\begin{bmatrix} \gamma & \beta & 0 \\ Y_1(\pi) & Y_2(\pi) & Y_3(\pi) \\ \beta Y_3(\pi)+\gamma Y_0(\pi) & \beta Y_0(\pi)-\gamma Y_3(\pi) & \beta Y_1(\pi)+\gamma Y_2(\pi) \end{bmatrix}$
	$\boxed{-(k-\lambda)ch^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi)+(k+\lambda)sh^2(\beta\pi)\cos^2(\gamma\pi)+2k\,sh^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi)=0}$ (1.6)
	в) Жесткая заделка и шарнирное опирание
	$A=\begin{bmatrix} Y_2(\pi)-\frac{\beta}{\gamma}Y_1(\pi) & Y_3(\pi) \\ Y_1(\pi)-\frac{\beta}{\gamma}Y_2(\pi) & Y_0(\pi) \end{bmatrix}$
	$\boxed{sh(2\beta\pi)-\frac{\beta}{\gamma}\sin(2\gamma\pi)=0}$ (1.7)
	г) Жесткая заделка и свободный край
	$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma}(-k\lambda Y_3(\pi)-2\beta\gamma k Y_0(\pi)) & (-\beta k Y_1(\pi)+\gamma k Y_2(\pi)) \\ \frac{1}{\gamma}(-\beta k Y_1(\pi)-\gamma k Y_2(\pi)) & (-\lambda Y_3(\pi)+2\beta\gamma Y_0(\pi)) \end{bmatrix}$
	$\boxed{\begin{aligned}&2(k^2-\lambda^2)ch^2(\beta\pi)cos^2(\gamma\pi)+k(k-\lambda)ch^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi)-\\&-k(k+\lambda)sh^2(\beta\pi)\cos^2(\gamma\pi)-2\lambda^2 sh^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi)=0\end{aligned}}$ (1.8)

Как будет показано ниже (см. Утверждения 1-3) при отрицательном дискриминанте для задач а) - в) первая критическая сила не реализуется. В задаче г) при $D<0$ (Утверждение 5) первая критическая сила реализуется для значений k , превышающих некоторое пороговое значение k^* (Утверждение 4). Приведем теперь определяющие соотношения в случае, когда дискриминант равен нулю ($\lambda = k$).

Таблица 4

$D=0$	Матрица СЛАУ $\det A=0$
	а) Шарнирное опирание на обоих концах стержня
	$A=\begin{bmatrix} Y_1(\pi) & Y_2(\pi) \\ -n^2Y_1(\pi) & -2nY_1(\pi)-n^2Y_2(\pi) \end{bmatrix}$ $\boxed{-2n\sin^2(n\pi)=0}$ (1.9)
	б) Жесткая заделка на обоих концах стержня
	$A=\begin{bmatrix} Y_1(\pi)-nY_2(\pi) & Y_3(\pi) \\ n^2Y_3(\pi) & Y_1(\pi)+nY_2(\pi) \end{bmatrix}$ $\boxed{\sin^2(n\pi)-(n\pi)^2=0}$ (1.10)
	в) Жесткая заделка и шарнирное опирание
	$A=\begin{bmatrix} Y_1(\pi)-nY_2(\pi) & Y_3(\pi) \\ nY_1(\pi)+n^2Y_2(\pi) & 2Y_0(\pi)-nY_3(\pi) \end{bmatrix}$ $\boxed{\sin(n\pi)\cos(n\pi)-n\pi=0}$ (1.11)
	г) Жесткая заделка и свободный край
	$A=\begin{bmatrix} nY_2(\pi)+n^2Y_1(\pi) & 2Y_0(\pi)-nY_3(\pi) \\ 2nY_0(\pi)+n^2Y_3(\pi) & nY_1(\pi)-Y_2(\pi) \end{bmatrix}$ $\boxed{3cos^2(n\pi)-(n\pi)^2+1=0}$ (1.12)

Далее показывается (Утверждения 6 и 7), что в задачах б) и в) первая критическая сила также не реализуется, а в задаче а) реализуется на счетном наборе точек $\lambda = k = i^2,\ i = 1, 2, \ldots$. В задачс г) пороговое значение $\lambda = k^*$ реализуется как раз в случае $D = 0$ (Утверждение 4). Первая и последующие критические силы для задач а)-в), (а для задачи г) при $k < k^*$) реализуются, когда $D > 0$. Определяющие соотношения приведены в таблице ниже.

Таблица 5

$D>0$	Матрица СЛАУ $\det A=0$
	а) Шарнирное опирание на обоих концах стержня
	$A=\begin{bmatrix} Y_1(\pi) & Y_3(\pi) \\ -m^2Y_1(\pi) & -n^2Y_3(\pi) \end{bmatrix}$ $\boxed{(m^2-n^2)\left(\sin(m\pi)\sin(n\pi)\right)=0}$ (1.13)
	б) Жесткая заделка на обоих концах стержня
	$A=\begin{bmatrix} Y_0(\pi)-Y_2(\pi) & Y_1(\pi)-\frac{m}{n}Y_3(\pi) \\ -mY_1(\pi)+nY_3(\pi) & mY_0(\pi)-mY_2(\pi) \end{bmatrix}$ $\boxed{\cos(m\pi)\cos(n\pi)+\frac{\lambda}{k}\sin(m\pi)\sin(n\pi)-1=0}$ (1.14)
	в) Жесткая заделка и шарнирное опирание
	$A=\begin{bmatrix} Y_0(\pi)-Y_2(\pi) & Y_1(\pi)-\frac{m}{n}Y_3(\pi) \\ -m^2Y_0(\pi)+n^2Y_2(\pi) & -m^2Y_1(\pi)+mnY_3(\pi) \end{bmatrix}$ $\boxed{m\cos(m\pi)\sin(n\pi)-n\sin(m\pi)\cos(n\pi)=0}$ (1.15)
	г) Жесткая заделка и свободный край
	$A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\gamma}\left(-k\lambda Y_3(\pi)-2\beta\gamma kY_0(\pi)\right) & \left(-\beta kY_1(\pi)+\gamma kY_2(\pi)\right) \\ \frac{1}{\gamma}\left(-\beta kY_1(\pi)-\gamma kY_2(\pi)\right) & \left(-\lambda Y_3(\pi)+2\beta\gamma Y_0(\pi)\right) \end{bmatrix}$ $\boxed{2k\lambda\sin(m\pi)\sin(n\pi)+(4\lambda^2-2k^2)\cos(m\pi)\cos(n\pi)-2k^2=0}$ (1.16)

Перейдем к формулировке и доказательствам утверждений, о реализуемости критических нагрузок во всех рассматриваемых задачах.

2. Реализуемость первой и последующих критических сил

Утверждение 1. Для граничных условий шарнирного опирания на обоих концах стержня критическая сила не реализуется при $D<0$ (уравнение (1.5) не имеет корней при $\lambda\in[0,k)$).

Доказательство. Пусть $D<0$, т.е. $\lambda<k$. Тогда уравнение

$$\sqrt{k^2-\lambda^2}\left(ch^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi)+sh^2(\beta\pi)\cos^2(\gamma\pi)\right)=0$$

имеет корни, если оба неотрицательных слагаемых в левой части равны нулю $ch^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi)=0, \quad sh^2(\beta\pi)\cos^2(\gamma\pi)=0$. Последнее возможно только если $\beta=\gamma=0$. Тогда из (2.3) получаем $\lambda=k=0$ и $D=0$. Утверждение доказано.

Утверждение 2. Для граничных условий жесткой заделки на обоих концах стержня критическая сила не реализуется при (уравнение (1.6) не имеет корней при).

Доказательство. Преобразуем уравнение (1.6)

$$(k+\lambda)sh^2(\beta\pi)\cos^2(\gamma\pi)+sh^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi)+ksh^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi)+$$

$$+ksh^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi)=(k-\lambda)ch^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi),$$

$$(k+\lambda)sh^2(\beta\pi)\left(\cos^2(\gamma\pi)+\sin^2(\gamma\pi)\right)+(k-\lambda)sh^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi)=$$

$$=(k-\lambda)ch^2(\beta\pi)\sin^2(\gamma\pi),$$

$$(k+\lambda)sh^2(\beta\pi)=(k-\lambda)\sin^2(\gamma\pi)\left(ch^2(\beta\pi)-sh^2(\beta\pi)\right),$$

$$(k+\lambda)sh^2(\beta\pi)=(k-\lambda)\sin^2(\gamma\pi),$$

$$sh^2(\beta\pi)-\frac{\beta^2}{\gamma^2}\sin^2(\gamma\pi)=0.$$

Так как

$$sh^2(\beta\pi)>(\beta\pi)^2\ \forall\beta>0$$

и

$$\sin^2(\gamma\pi)<(\gamma\pi)^2\ \forall\gamma>0,$$

то

$$sh^2(\beta\pi)-\frac{\beta^2}{\gamma^2}\sin^2(\gamma\pi)>\beta^2\pi^2-\frac{\beta^2}{\gamma^2}\gamma^2\pi^2=0$$

при любом $\lambda\in[0,k)$.

Утверждение доказано.

Утверждение 3. Для граничных условий, когда нижний конец стержня жестко заделан, а верхний - шарнирно оперт, критическая сила не реализуется при $D<0$ (уравнение (1.7) не имеет корней при $\lambda\in[0,k)$).

Доказательство. Проводится аналогично предыдущему.

Утверждения 1 - 3 могут быть доказаны проще, следуя [2]. Дифференциальный оператор уравнения (0.1) представляется в виде

$$L=\frac{d^4}{dz^4}+2\lambda\frac{d^2}{dz^2}+k^2E=B^2+\left(k^2-\lambda^2\right)E$$

В пространстве $H = L^2(0, \pi)$ краевые задачи с граничными условиями а) - в) являются самосопряженными, так как операторы L и B содержат производные четного порядка, а для граничных условий а) - в) выполнены условия

$$w(0) \cdot w'''(0) = 0, \; w(\pi) \cdot w'''(\pi) = 0, \; w'(0) \cdot w''(0) = 0, \; w'(\pi) \cdot w''(\pi) = 0.$$

Тогда легко видеть (т. к. оператор $B = \frac{d^2}{dz^2} + \lambda$ - самосопряженный), что

$$(Lw, w)_H = \left\| \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \lambda w \right\|_H^2 + \left(k^2 - \lambda^2\right) \|w\|_H^2 .$$

Левая часть равна нулю согласно (0.1), а правая положительна при $\lambda < k$, поэтому выполнено $\lambda \geqslant k$.

Утверждение 4. При граничных условиях, когда нижний конец стержня жестко закреплен, а на свободный верхний конец действует вертикальная сжимающая сила, характеризующаяся параметром λ , первая критическая сила реализуется при только при одном значении $k = \lambda = k^* = 0.143388465$ (уравнение (1.12) имеет только один корень $\lambda = k^*$).

Доказательство. Запишем уравнение (1.12) в виде

$$3cos^2(n\pi) = (n\pi)^2 - 1 \tag{2.1}$$

На промежутке $[0,\, 0.5]$ левая часть монотонно убывает от 3 до нуля, а правая - монотонно возрастает от -1 до $\pi^2/4 - 1$. Следовательно, при$n \in [0,\, 0.5]$ имеется единственный положительный корень $n^* \approx 0.37866667$, который соответствует следующим параметрам жесткости среды и первой критической силы:$k^* = \lambda^* = (n^*)^2 = 0.143388465$.

Утверждение доказано.

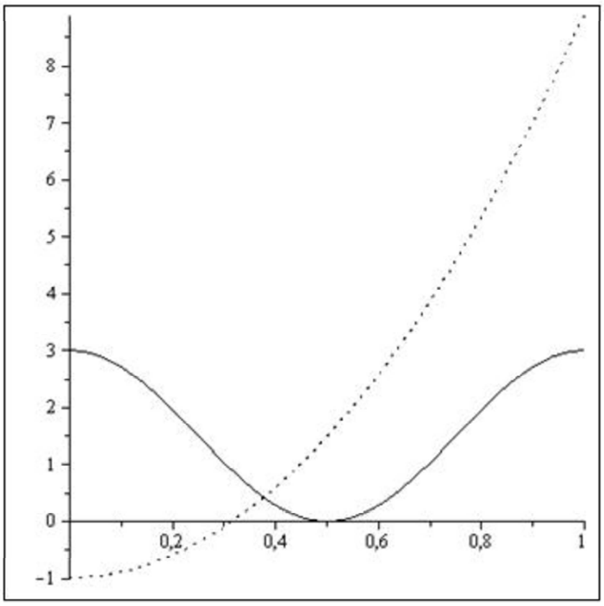

Рис. 2. Графики правой и левой части уравнения (2.1)

Утверждение 5. При граничных условиях жесткой заделки на нижнем конце стержня и свободном крае с вертикально действующей силой на верхнем, и фиксированном $k > k^*$ (k^* из Утверждения 4) в случае $D < 0$ реализуется первая критическая сила (уравнение (1.8) имеет хотя бы один корень на промежутке $(k/2,\ k)$.

Доказательство. Пусть $k > k^*$. Воспользуемся тем, что

$$ch^2(\beta\pi) = (ch(2\beta\pi)+1)/2 \; sh^2(\beta\pi) = (ch(2\beta\pi)-1)/2,$$

и представим левую часть уравнения (2.8) в следующем виде:

$$f(\lambda) = \frac{ch(2)+1}{2}\cos^2 + \frac{ch(2)+1}{2}\sin^2 - \frac{ch(2)-1}{2}\cos^2 -$$

$$\frac{ch(2)-1}{2}\sin^2 = \frac{ch(2)}{2} + \frac{1}{2}()$$

$$(ch(2) = ch(2\beta\pi),\ \cos(2) = \cos(2\gamma\pi),\ \cos = \cos(\gamma\pi),\ \sin = \sin(\gamma\pi))$$

Преобразуем выражения I и II (круглые скобки в правой части).

$$I = 2k^2\cos^2 - 2\lambda^2\cos^2 + k^2\sin^2 - k\lambda\sin^2 - k^2\cos^2 - k\lambda\cos^2 - 2\lambda^2\sin^2 =$$

$$= k^2\left(\cos^2 + \sin^2\right) - 2\lambda^2\left(\cos^2 + \sin^2\right) - k\lambda\left(\cos^2 + \sin^2\right) =$$

$$= k^2 - 2\lambda^2 - k\lambda = \underline{(k+\lambda)\,(k-2\lambda)};$$

$$II = 2k^2\cos^2 - 2\lambda^2\cos^2 + k^2\sin^2 - k\lambda\sin^2 + k^2\cos^2 + k\lambda\cos^2 + 2\lambda^2\sin^2 =$$

$$= k^2\left(1 + 2\cos^2\right) - 2\lambda^2\left(\cos^2 - \sin^2\right) + k\lambda\left(\cos^2 - \sin^2\right) =$$

$$= k^2\left(2 + \cos(2)\right) - 2\lambda^2\cos(2) + k\lambda\cos(2) = 2k^2 + \left(k^2 - \lambda^2 - \lambda^2 + k\lambda\right)\cos(2) =$$

$$= 2k^2 + ((k-\lambda)(k+\lambda) + \lambda(k-\lambda))\cos(2) = \underline{2k^2 + (k-\lambda)(k+2\lambda)\cos(2)}$$

Окончательно получим

$$f(\lambda) = \frac{ch(2\beta\pi)}{2}(k+\lambda)(k-2\lambda) + \frac{\cos(2\gamma\pi)}{2}(k-\lambda)(k+2\lambda) + k^2.$$

Заметим, что

$$f(0) = \frac{k^2}{2}\left(ch(\sqrt{2k}\pi) + \cos(\sqrt{2k}\pi) + 2\right) > 0;$$

$$f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{k^2}{2}\cos(2\gamma\pi) + k^2 > 0;$$

$$f(k) = \frac{ch(0)}{2}2k(-k) + 0 + k^2 = 0.$$

Вычислим производную функции $f(\lambda)$ в точке $\lambda = k$. Имеем $f'(\lambda)|_{\lambda=k} = k\left[k\pi^2 - \left(1 + 3\cos^2(\sqrt{k}\pi)\right)\right] = 0$ при $k = k^*$ (см. утверждение 4). При $k > k^*$ имеем $f'(\lambda)|_{\lambda=k} > 0$ и, следовательно, $\exists\ \lambda \in (k/2,\ k):\ \ f(\lambda) = 0$. Утверждение доказано.

На рис. 3,4 показано поведение функции $f(\lambda)$ на промежутке $(k/2,\ k)$ при $k = 0.1,\quad k^*,\quad 0.2,\quad 0.3$ (рис.3) и при $k = 2,\quad 3$ (рис.4).

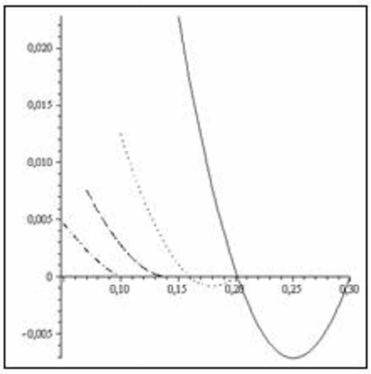

Рис. 3

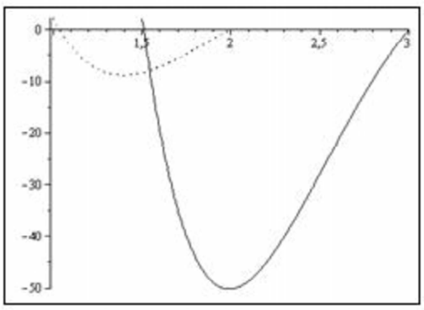

Рис. 4

Два последних утверждения показывают, что в отличие от граничных условий шарнирного опирания или жесткой заделки на концах стержня, в случае свободного верхнего конца первая критическая сила реализуется: при $D < 0$ и $k > k^*$; при $D = 0$ и $k = k^*$; и при $D > 0$ и $k < k^*$ (как будет показано в дальнейшем).

Утверждение 6. В случае граничных условий шарнирного опирания на обоих концах стержня первая критическая сила реализуется при $D = 0$ для $\lambda = k = n^2, \quad n = 1, 2, \dots$

Доказательство. Уравнение (1.9) имеет корни $n\pi \quad n = 1, 2, \dots$ Утверждение доказано.

Утверждение 7. Если оба конца стержня жестко заделаны, либо нижний конец жестко заделан, а верхний шарнирно закреплен, то первая критическая сила не реализуется при $D = 0$.

Доказательство. Уравнения (1.10), (1.11) не имеют корней при $\lambda = k$, так как $\sin^2(n\pi) - (n\pi)^2 < 0$, $\sin(2n\pi) - (2n\pi) < 0$. Утверждение доказано.

Реализация 1-й критической силы при $D = 0$ в случае жесткой заделки нижнего конца стержня и свободного верхнего конца доказана выше в утверждении 4.

Утверждение 8. При $D > 0$ критические силы реализуются (при фиксированном k) на следующих промежутках:

1. Для граничных условий а), б) и г) $\lambda \in [k + (i-1)^2/2,\ k + i^2/2], i = 1, 2, \dots$ (см. табл. 5) ;

2. Для граничных условий в) $\lambda \in [k + (2i-1)^2/8,\ k + (2i+1)^2/8], i = 1, 2, \dots.$

В случаях а) - в) наименьшее λ соответствует 1-й критической силе, а в случае г) - второй.

Доказательство. Заметим, что во всех рассматриваемых случаях при $n = m + i \quad \Rightarrow \lambda = k + i^2/2$. Рассматривая левую часть уравнений (1.13) - (1.16) как функцию $f(\lambda)$, вычислим ее значения на концах указанных промежутков:

а) Пусть i - четное, $\lambda = k + i^2/2 \quad \Rightarrow n\pi = m\pi + i\pi$

$$f(\lambda) = (m^2 - n^2)\sin^2(m\pi) \leqslant 0.$$

Аналогично при $\lambda = k + (i-1)^2/2 \quad \Rightarrow n\pi = m\pi + (i-1)\pi$

$$f(\lambda) = (n^2 - m^2)\sin^2(m\pi) \geqslant 0.$$

б) При $\lambda = k + i^2/2$

$$f(\lambda) = \cos^2(m\pi) + \frac{\lambda}{k}\sin^2(m\pi) - 1 = \left(\frac{\lambda}{k} - 1\right)\sin^2(m\pi) \geqslant 0,$$

при $\lambda = k + i^2/2$

$$f(\lambda) = 2k\left(k + i^2/2\right)\sin^2(m\pi) + \left(4\left(ki^2/2\right) - 2k^2\right)\cos^2(m\pi). - 2k^2 > 0$$

г) При $\lambda = k + (i-1)^2/2$

$$f(\lambda) = 2k\left(k + i^2/2\right)\sin^2(m\pi) + \left(4\left(ki^2/2\right) - 2k^2\right)\cos^2(m\pi) - 2k^2 > 0$$

при $\lambda = k + (i-1)^2/2$

$$f(\lambda) = -2k\left(k + i^2/2\right)\sin^2(m\pi) - \left(4\left(ki^2/2\right) - 2k^2\right)\cos^2(m\pi) - 2k^2 < 0.$$

Таким образом, при некотором $\lambda \in [k + (i-1)^2/2,\ k + i^2/2], i = 1, 2, \ldots,$ функция $f(\lambda)$ обращается в нуль.

в) Пусть i - нечетное. Тогда при $n = m + (2i-1)/2 \quad \Rightarrow \lambda = k + (2i-1)^2/8$ имеем

$$f(\lambda) = f(k + (2i-1)^2/8) = m + \frac{2i-1}{2}\sin^2(m\pi) > 0,$$

а при $n = m + (2i+1)/2 \quad \Rightarrow \lambda = k + (2i+1)^2/8$

$$f(\lambda) = f(k + (2i+1)^2/8) = -m - \frac{2i+1}{2}\sin^2(m\pi) < 0.$$

При четном i имеем

$$f(\lambda) = f(k + (2i-1)^2/8) = -m - \frac{2i-1}{2}\sin^2(m\pi) < 0,$$

и

$$f(\lambda) = f(k + (2i+1)^2/8) = m\frac{2i+1}{2}\sin^2(m\pi) > 0.$$

Следовательно, при некотором $\lambda \in [k+(2i-1)^2/8,\ k+(2i+1)^2/8], i = 1, 2, 3, \ldots,$ функция $f(\lambda)$ обращается в нуль.Утверждение доказано.

3. Поведение критических сил в зависимости от жесткости среды

В заключение, докажем утверждения о поведении критических сил при изменении жесткости среды k. То есть найдем асимптотические зависимости $\lambda(k)$.

Утверждение 9. В случае граничных условий а) функции $\lambda_{(i)\ kp.}(k)$ не имеют предела и их графики заключены между прямыми $k+(i-1)^2/2$ и $k + i^2/2, \quad i = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Так как все корни уравнения, следующего из (1.13)

$$\sin(m\pi)\sin(n\pi) = 0,$$

принадлежат промежуткам $[k+(i-1)^2/2,\ k+i^2/2]$, и при $\lambda_i = \frac{m^2+n^2}{2} = \frac{2m^2+2mi+i^2}{2}$, $k = mn = m(m+i)$, то кривая $\lambda_{(i)\ kp.}(k)$ касается прямой $\lambda = k+\frac{i^2}{2}$ в бесконечном числе точек $\left\{m(m+i),\ \frac{2m^2+2mi+i^2}{2}\right\}$ и, аналогично, касается прямой $\lambda = k+\frac{(i-1)^2}{2}$в точках

$$\left\{m(m+i-1),\ \frac{2m^2+2m(i-1)+(i-1)^2}{2}\right\}$$

при $m = 0, 1, 2, \dots$, и поэтому не имеет предела. Утверждение доказано. Зависимости для граничных условий а) приведены на рис. 5.

Утверждение 10. В случае граничных условий б) (жесткая заделка на обоих концах) зависимости $\lambda_{(i)\ kp.}(k)$ и$\lambda_{(i+1)\ kp.}(k)$ $i = 1, 3, 5, \dots$ стремятся к линейной, то есть:

$$\lambda_{(i)\ kp.}(k)\underbrace{\to}_{k\to\infty} k+\frac{(i+1)^2}{2}, \quad \lambda_{(i+1)\ kp.}(k)\underbrace{\to}_{k\to\infty} k+\frac{(i+1)^2}{2}, \quad i = 1, 3, 5, \dots.$$

Доказательство. Обозначим левую часть уравнения (1.14) через $f(\lambda)$

$$f(\lambda) = \cos(m\pi)\cos(n\pi) + \frac{\lambda}{k}\sin(m\pi)\sin(n\pi) - 1,$$

и вычислим ее значения в точках (напомним, что при $n = m+i \quad \Rightarrow \lambda_i = k + i^2/2$):

$$f\left(k+\frac{i^2}{2}\right) = -\cos^2(m\pi) - \frac{k+i^2/2}{k}\sin^2(m\pi) - 1 < 0,$$

$$f\left(k+\frac{(i+1)^2}{2}\right) = \underbrace{\cos^2(m\pi) + \frac{k+(i+1)^2/2}{k}\sin^2(m\pi) - 1}_{\to 0 \quad \textit{при} \quad k\to\infty} > 0$$

Найдем приращение функции

$$\Delta f_1 = \underbrace{2\cos^2(m\pi) + \frac{2k+((i+1)^2+i^2)/2}{k}\sin^2(m\pi)}_{\to 2\ \textit{при}\ k\to\infty} > 0$$

и аргумента $\Delta_1 = ((i+1)^2 - i^2)/2$. Приближение к корню по методу хорд запишется в виде

$$\widetilde{\lambda}_i = k + \frac{(i+1)^2}{2} - \frac{\overbrace{\Delta_1}^{const}}{\underbrace{\Delta f_1}_{\to 2}} \to k + \frac{(i+1)^2}{2}.$$

Аналогично рассматривается случай приближения к корню $\widetilde{\lambda}_{i+1}$.

Утверждение доказано.

Зависимости для граничных условий б) приведены на рис. 6.

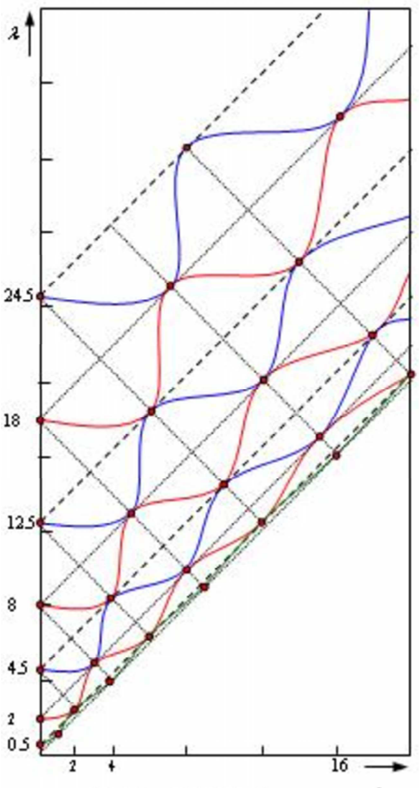

Рис. 5. Случай а)

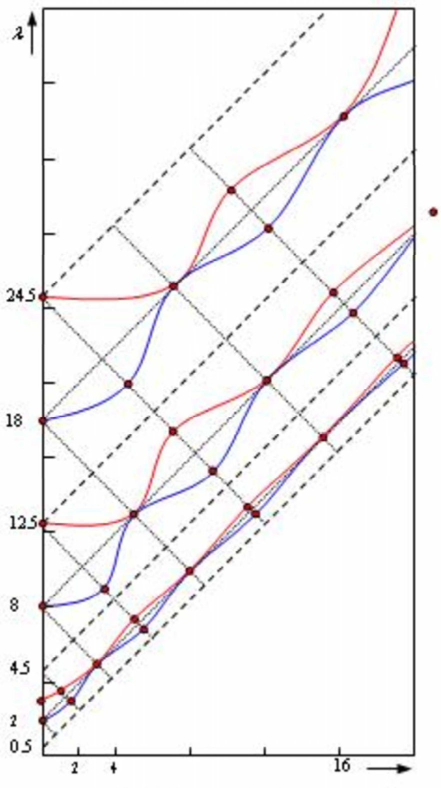

Рис. 6. Случай б)

Утверждение 11. В случае граничных условий в) (внизу - жесткая заделка, вверху - шарнирное опирание) зависимости$\lambda_{(i)\ kp.}(k)$ стремятся к линейной функции $\lambda = k + \frac{i^2}{2}$, при $i = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Зафиксируем i . Все корни λ_i уравнения (1.15)

$$f(\lambda) = m\cos(m\pi)\sin(n\pi) - n\sin(m\pi)\cos(n\pi) = 0$$

принадлежат промежутку $[k+(2i-1)^2/8,\ k+(2i+1)^2/8]$ (см. Утверждение 8). Рассмотрим отдельно корни $\lambda_i^{(1)} \in [k+(2i-1)^2/8,\ k+i^2/2]$ и $\lambda_i^{(2)} \in [k+i^2/2,\ k+(2i+1)^2/8]$ (см. рис. 7),

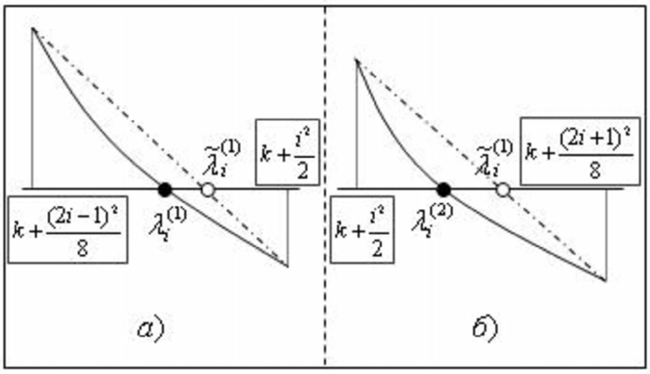

Рис. 7. Расположение корней на соседних промежутках

и покажем, что

$$\lambda_i^{(1)}(k), \lambda_i^{(2)}(k) \to k+\frac{i^2}{2} \quad \textit{при} \quad k\to\infty.$$

Рассмотрим сначала корни $\lambda_i^{(1)}$. Еще раз напомним, что

$$\lambda = k+\frac{(2i-1)^2}{8}\ \textit{при}\ n = m+\frac{(2i-1)}{2},$$

$$\lambda = k+\frac{(2i-1)^2}{8}\ \textit{при}\ n = m+\frac{(2i-1)}{2},$$

$$f\left(k+\frac{(2i-1)^2}{8}\right) = m+\frac{(2i-1)}{2}\sin^2(m\pi) > 0,$$

тогда

$$\Delta f_1 = f\left(k+\frac{i^2}{2}\right) - f\left(k+\frac{(2i-1)^2}{8}\right) =$$

$$= -i\left|\sin m\pi \cos m\pi\right| - m - \frac{2i-1}{2}\sin^2 m\pi < 0$$

$$\Delta_1 = k+\frac{i^2}{2} - k - \frac{(2i-1)^2}{8} = \frac{4i-1}{8}.$$

Из уравнения хорды, проходящей через точку

$$\left(k+(2i-1)^2/8,\ \ f(k+(2i-1)^2/8)\right)$$

с угловым коэффициентом $\frac{\Delta f_1}{\Delta_1}$ найдем приближение к корню

$$\widetilde{\lambda}_i^{(1)} = k + \frac{(2i-1)^2}{8} + \frac{4i-1}{8} \cdot \left[\frac{m + \frac{2i-1}{2}\sin^2 m\pi}{m + \frac{2i-1}{2}\sin^2 m\pi + i\,|\sin m\pi \cos m\pi|} \right].$$

Выражение в квадратных скобках стремится к 1 при $k \to \infty$ (потому, что m растет, как $\sqrt{k}$). Тогда

$$\widetilde{\lambda}_i^{(1)} \to k + \frac{4i^2 - 4i + 1}{8} + \frac{4i-1}{8} = k + \frac{i^2}{2}.$$

Аналогично

$$\widetilde{\lambda}_i^{(2)} \to k + \frac{4i^2 + 4i + 1}{8} - \frac{4i+1}{8} = k + \frac{i^2}{2}.$$

Утверждение доказано. Кривые показаны на рис. 8.

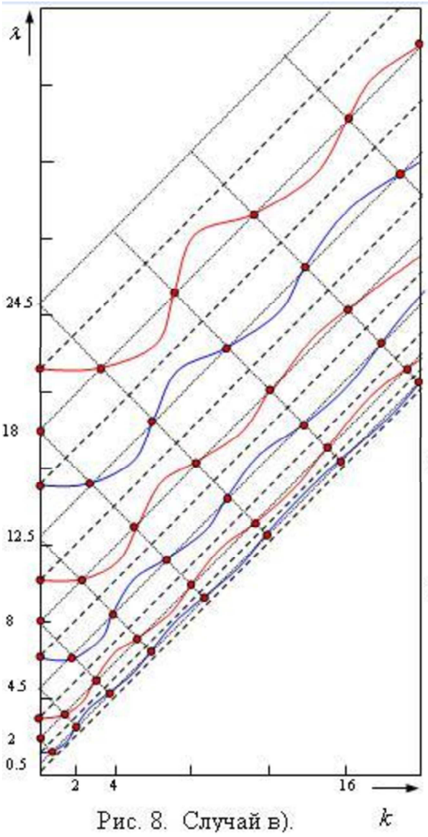

Рис. 8. Случай в).

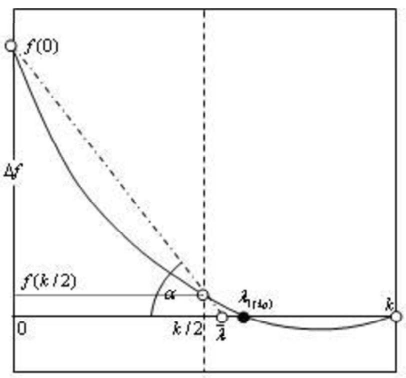

Рис. 9. Случай г): первая кр. сила

Утверждение 12. В случае граничных условий г):

1. Зависимости соседних критических сил $\lambda_{(i)\ kp.}(k), \lambda_{(i+1)\ kp.}(k)$ стремятся при $k \to \infty$ к линейной функции $\lambda = k + \frac{i^2}{2}$, при $i = 2, 4, \ldots$.

2.$\lambda_{(1)\ kp.}(k) \to \frac{k}{2}$ при $k \to \infty$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай первой критической силы. Напомним, что она реализуется при $D < 0$, как единственный корень уравнения (1.8)

$$f(\lambda) = 2(k^2 - \lambda^2)Y_0^2(\pi) + k(k - \lambda)Y_1^2(\pi) - k(k + \lambda)Y_2^2(\pi) - 2\lambda^2 Y_3^2(\pi) = 0$$

где $Y_i \ \ (i = 0, 1, 2, 3)$ вычисляются по таблице 2 при $D < 0$ в точке π.

Вычислим значения функции $f(\lambda)$ (см. рис. 9): в точке $\lambda = k/2$

$$f\left(\frac{k}{2}\right) = \frac{3k^2}{2}Y_0^2(\pi) + \frac{k^2}{2}Y_1^2(\pi) - \frac{k^2}{2}Y_3^2(\pi) - \frac{3k^2}{2}Y_2^2(\pi) > 0,$$

и в точке $\lambda = 0$

$$f\,(0) = 2k^2 Y_0^2(\pi) + k^2 Y_1^2(\pi) - k^2 Y_2^2(\pi) > 0.$$

Вычислим приращение

$$\Delta f = f(k/2) - f(0) = -\frac{k^2}{2}\left(Y_0^2 + Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2\right) = -\frac{k^2}{2}ch(2\beta\pi).$$

Определим тангенс угла наклона хорды (см. рис. 9):

$$tg\alpha = \frac{\Delta f}{(k/2)} = -\frac{k^2/2}{k/2}ch(2\beta\pi) = -k \cdot ch(2\beta\pi).$$

Найдем точку пересечения хорды с осью абсцисс (приближенное значение λ_{kp}):

$$tg\alpha \cdot \widetilde{\lambda} + f(0) = 0 \Rightarrow \widetilde{\lambda} = -\frac{f(0)}{tg\alpha} = \frac{2k^2 Y_0^2(\pi) + k^2 Y_1^2(\pi) - k^2 Y_2^2(\pi)}{-k \cdot ch(2\beta\pi)} =$$

$$= \frac{k}{2}\left[1 + \underbrace{\frac{1 + 2\cos^2(\gamma\pi)}{ch(2\beta\pi)}}_{\to 0}\right]$$

Таким образом,$\lambda_{kp} \approx \widetilde{\lambda} \to \frac{k}{2}$ *при* $k \to \infty$. Второй пункт доказан.

Переходим к доказательству первого пункта. Поведение функции $f(\lambda)$ на промежутке $[k + \frac{(i-1)^2}{2},\ k + \frac{(i+1)^2}{2}]$ показано на рис. 10.

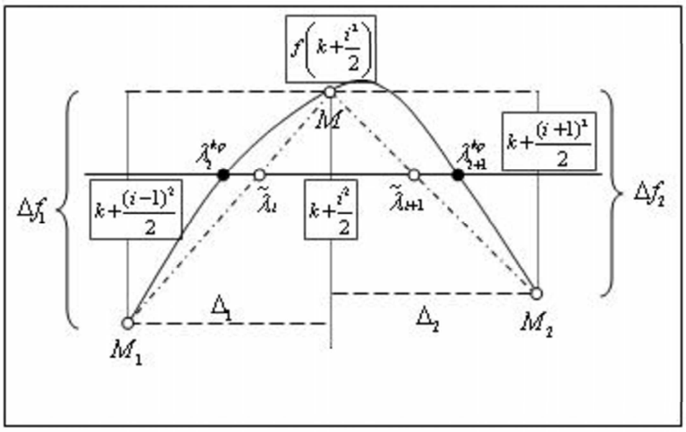

Рис. 10.

Вычислим приращение функции

$$\Delta f = f\left(k+\frac{i^2}{2}\right) - f\left(k+\frac{(i-1)^2}{2}\right) =$$

$$= \left[2k\left(2k+\frac{i^2}{2}+\frac{(i-1)^2}{2}\right)\right]\sin^2 m\pi +$$

$$+\left\{4\left[\left(k+\frac{i^2}{2}\right)^2+\left(k+\frac{(i-1)^2}{2}\right)^2\right]-4k^2\right\}\cos^2 m\pi,$$

и приращение аргумента

$$\Delta_1 = \frac{i^2}{2} - \frac{(i-1)^2}{2} = \frac{(2i-1)}{2}.$$

Тангенс угла наклона хорды, проходящей через точки M_1 и M равен $tg\alpha = \frac{\Delta f_1}{\Delta_1}$.

Уравнение хорды, проходящей через две указанные точки

$$y - f\left(k+\frac{i^2}{2}\right) = \frac{\Delta f_1}{\Delta_1}\cdot\left(\lambda - \left(k+\frac{i^2}{2}\right)\right).$$

Хорда пересекает ось абсцисс при $y=0$ в точке $\widetilde{\lambda}_i$:

$$-f\left(k+\frac{i^2}{2}\right) = \frac{\Delta f_1}{\Delta_1}\cdot\left(\widetilde{\lambda}_i - \left(k+\frac{i^2}{2}\right)\right).$$

Откуда

$$\widetilde{\lambda}_i = \left(k+\frac{i^2}{2}\right) - \frac{f\left(k+\frac{i^2}{2}\right)}{\Delta f_1}\Delta_1 = \left(k+\frac{i^2}{2}\right)\cdot\left[1-\frac{f\left(k+\frac{i^2}{2}\right)}{\Delta f_1}\frac{\Delta_1}{k+\frac{i^2}{2}}\right].$$

Числитель подчерлнутого выражения в квадратных скобках стремится к нулю, а знаменатель к единице, при $k \to \infty$. Таким образом, имеем

$$\lambda_{i(kp)} = \lim_{k \to \infty} \widetilde{\lambda}_i = k + \frac{i^2}{2}.$$

Аналогично доказывается, что $\lambda_{i+1(kp)} = \lim\limits_{k \to \infty} \widetilde{\lambda}_{i+1} = k + \frac{i^2}{2}$. Утверждение доказано.

На рис. 11 показаны зависимости $\lambda_{i(kp)}(k), \quad i = 1, 2, \ldots$.

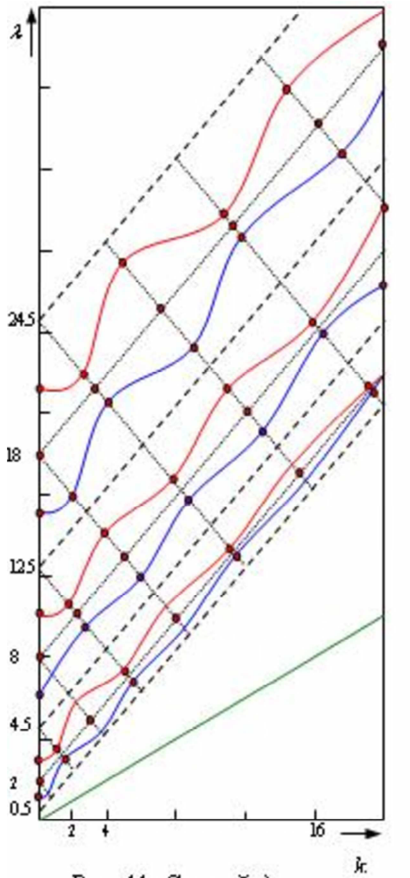

Рис. 11. Случай г).

Покажем, наконец, что при $k < k^*, \quad k \to 0, \lambda_{1(kp)} \to \frac{1}{8} = 0.125$.

$m \to 0, \quad n \to \sqrt{2\lambda}$,при $k \to 0$ и $f(\lambda) \to \cos\left(\sqrt{2\lambda}\pi\right)$ Тогда $\lambda_{1(kp)}$ будет стремится к решению уравнения $cos\left(\sqrt{2\lambda}\pi\right) = 0$, решая которое, находим $\lambda = \frac{1}{8} = 0.125$. Поведение $\lambda_{1(kp)}$ показано на рис. 12.

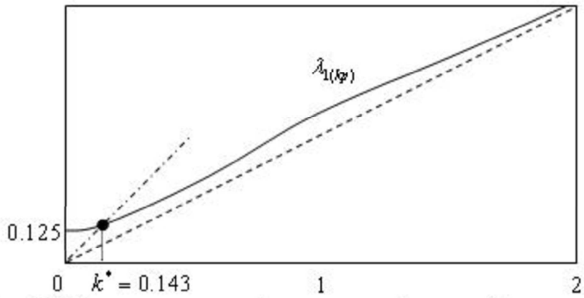

Рис. 12 Поведение первой критической силы вблизи нуля

5. Сравнение параметров критических сил в случае отсутствия упругой среды

Если $k = 0$ (упругая среда отсутствует), полученные зависимости дают значения $\lambda_{i(kp)}$, совпадающие с приведенными в [3] для всех рассмотренных граничных условий.

Литература

1. **Михайловский Е. И.** Элементы конструктивно-нелинейной механики/ Е.И. Михайловский. - Сыктывкар: Изд-во СыктГУ, 2011. - 212 с.

2. **Холопов А. А.** Минимальные формы потери устойчивости стержня на границе жесткой упругой сред // *Вестн. Сыктывкарск. ун-та. Сер. 1. - 1995. - Вып. 1. - С. 217 - 233.*

3. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем/ А.С. Вольмир. - М.: Наука, 1967. - 984 с.

Summary

Nikitenkov V. L., Kholopov A. A. Stability of a flexible core in elastic environment

In a problem about longitudinal compression by vertical force in the elastic environment of a flexible core, under various boundary conditions conditions of realization of the first and the subsequent critical forces are received. Asymptotic dependences of the parameter characterizing critical force, on rigidity, comprehensive a core, are deduced environments.

Keywords: core, rigidity of environment, critical forces, boundary conditions, hinge fastening, rigid seal, free edge.

Сыктывкарский государственный университет *Поступила 20.12.2012*