ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

В. Г. Фарафонов, В. Б. Ильин

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Учебное пособие

Часть I

Санкт-Петербург

2012

УДК 519.2
ББК 22.171
Ф24

Рецензенты:
доктор физико-математических наук, профессор А.П.Киселев
доктор физико-математических наук, профессор В.А.Гаген-Торн

Утверждено
редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

Фарафонов В. Г., Ильин В. Б.

Ф24 Основы теории вероятностей и математической статистики: учеб. пособие / В.Г. Фарафонов, В.Б. Ильин. – СПб.: ГУАП, 2012. Ч.1 – 105 с.: ил.
ISBN

Учебное пособие составлено в соответствии с программой по высшей математике для студентов, обучающихся по направлениям «Приборостроение», «Радиофизика» и «Информатика», в том числе на заочном факультете.

В первой части пособия рассмотрены разделы курса теории вероятностей, начиная с понятия случайного события и операций над ними и заканчивая системами случайных величин. Каждый раздел содержит теоретические сведения и формулы, проиллюстрированные подробно разобранными примерами. Завершают пособие 10 вариантов, каждый из которых содержит по 9 задач из разных разделов теории вероятностей. Вопросы математической статистики рассматриваются во второй части учебного пособия.

УДК 519.2
ББК 22.171

ISBN

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие написано на основе курсов лекций по теории вероятностей и математической статистике, читавшихся в течение многих лет студентам младших курсов Санкт-Петербургского государственного университета аэрокосмического приборостроения.

Пособие состоит из двух частей: в первой даются основы теории вероятностей, во второй – математической статистики. Излагаемый материал включает все вопросы, рассматриваемые в стандартном курсе теории вероятностей и математической статистики.

В части I математически строго определяется понятие случайного события, рассматриваются возможные операции над такими событиями (п. 1), обсуждаются эмпирическое и теоретические определения понятия вероятности события (пп. 2,3), приводятся формулы для вычисления вероятностей сложных (составных) событий. Соответствующие параграфы включают теоремы сложения и умножения вероятностей (п. 4), формулы полной вероятности и Байеса (п. 5) и формулу Бернулли (п. 6).

На основе введенных понятий случайного события и его вероятности математически строго определяется понятие случайной величины, рассматриваются основные числовые характеристики таких величин (п. 7). Теория для одной случайной величины обобщается на случай системы случайных величин (п. 8).

Авторы стремились изложить материал, с одной стороны, наиболее просто и понятно, а с другой стороны, достаточно строго с математической точки зрения. Применяемый математический аппарат не выходит за рамки школьной программы и начального университетского курса высшей математики.

Пособие снабжено большим числом примеров и упражнениями, что особенно удобно при заочной форме обучения. Завершают пособие 10 вариантов, каждый из которых содержит по 9 задач из разных разделов теории вероятностей.

В.Г. Фарафонов
В.Б. Ильин

Санкт-Петербург,
август 2012 г.

Часть I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ВВЕДЕНИЕ

Окружающий человека мир в значительной степени случаен: многие события могут происходить, а могут и не происходить. При этом одни *случайные события* происходят сравнительно часто, а другие – довольно редко. Относительная частота события, т.е. отношение числа его появлений к числу наблюдений, с ростом последнего обычно приближается к некоторому числу, называемому *вероятностью* данного случайного события.

Любое измерение физической величины – это также случайное событие, и, следовательно, результат измерения – *случайная величина*: при повторных опытах она может принимать различные значения с разной вероятностью. Как следствие возникает множество вопросов, важных для практики. Например, если проведено несколько измерений случайной величины, то можно ли предсказать разброс результатов последующих измерений? Или обобщая, можно ли по небольшой выборке из множества (значений, людей, событий и т.д.) определить то или иное среднее свойство элементов этого множества? Возможно ли, с другой стороны, определить, насколько достоверно то или иное предположение о характере случайной величины?

Ответы на эти и многие другие вопросы дают *теория вероятностей и математическая статистика*. Эти науки появились в начале XVIII века. Сегодня они являются важным разделом математики, который изучает свойства вероятности и способы применения этого понятия. Предметом этих наук являются методы, позволяющие находить вероятность событий без проведения опытов, и подходы, позволяющие предсказывать общие результаты последующих однотипных опытов или наблюдений. Такие методы и прогнозы нужны во многих областях науки и техники, в том числе в приборостроении, радиотехнике, физике, биологии, экономике, социологии и других науках.

1. СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

1.1. Случайные события

Опытом называется всякое осуществление определенных условий и действий, при которых наблюдается рассматриваемое случайное явление. Теория вероятностей изучает массовые случайные явления, т.е. предполагается, что любой опыт можно повторять сколько угодно раз.

Событием называется любая качественная характеристика результата опыта. Событие называется *достоверным*, если оно обязательно происходит в результате опыта. Событие называется *невозможным*, если оно никогда не происходит в результате опыта. *Случайным* называют событие, которое может произойти или не произойти в результате опыта.

Пространством Ω *возможных исходов* опыта называют множество элементарных событий, т.е. множество всех возможных исходов опыта. Любое случайное событие связано с пространством Ω.

Случайное событие есть подмножество пространства возможных исходов опыта. Это подмножество состоит из элементарных событий, благоприятствующих данному случайному событию, т.е. таких элементарных событий, наступление которых влечет за собой наступления данного события.

Для обозначения случайных событий используются заглавные буквы латинского алфавита A, B, C, ..., Z. Достоверное событие обозначается буквой U, при этом соответствующее ему подмножество совпадает с пространством Ω. Невозможное событие обозначается буквой V, при этом соответствующее ему подмножество пространства Ω не содержит элементов этого пространства, т.е. является пустым множеством $\varnothing$.

Рассмотрим следующие опыты:

Пример 1. Производится бросание монеты. В этом опыте возможны два исхода: 1) монета выпадает вверх “орлом” (элементарное событие ω_1) и 2) монета выпадает вверх “решкой” (элементарное событие ω_2). В данном случае пространство Ω возможных исходов опыта содержит только два элемента (элементарные события ω_1 и ω_2), т.е. $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Пример 2. Производится бросание игральной кости. Здесь пространство Ω возможных исходов опыта содержит шесть элементарных событий ω_k, где k – выпавшее число, $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. И, например, событие A, заключающееся в выпадении четного числа, будет подмножеством, состоящим из трех элементарных событий, а именно $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$.

1.2. Операции над случайными событиями

Случайные события являются подмножествами пространства Ω, поэтому действия над ними есть действия над множествами.

Будем говорить, что *событие A влечет за собой событие B* (обозначение $A \subset B$), если наступление события A приводит к наступлению события B. Другими словами, все элементы подмножества, соответствующего событию A, являются элементами подмножества, соответствующего событию B, т.е., если $\omega \in A \Rightarrow \omega \in B$.

Равенство событий A и B (обозначение $A = B$) означает, что наступление одного из этих событий влечет за собой наступление другого события (т.е. $A \subset B$ и $B \subset A$). Подмножества, соответствующие событиям A и B, содержат одни и те же элементы, т.е. $\omega \in A \Leftrightarrow \omega \in B$.

Объединением событий A и B называется событие $C = A \cup B$ или $(A+B)$, состоящее в наступлении хотя бы одного из этих событий A и B. Подмножество, соответствующее событию $A \cup B$, состоит из элементов подмножеств, соответствующих событиям A и B, т.е. $\omega \in C = A \cup B$, если $\omega \in A$ или $\omega \in B$.

Пересечением событий A и B называется событие $C = A \cap B$ или (AB), состоящее в одновременном наступлении событий A и B. Подмножество, соответствующее событию $A \cap B$, состоит из элементов, общих для подмножеств, соответствующих событиям A и B, т.е. $\omega \in C = A \cap B$, если $\omega \in A$ и $\omega \in B$.

Разностью событий A и B называется событие $C = A \setminus B$, состоящее в том, что событие A происходит, а событие B не происходит. Подмножество, соответствующее событию $A \setminus B$, состоит из элементов, подмножества A за вычетом элементов подмножества B, т.е. $\omega \in C = A \setminus B$, если $\omega \in A$ и $\omega \notin B$.

Событием, *противоположным* событию A, называется событие $C = \overline{A}$, состоящее в том, что событие A не происходит. Подмножество, соответствующее событию $\overline{A}$, состоит из элементов пространства Ω возможных исходов опыта, не принадлежащих подмножеству, соответствующему событию A, т.е. $\omega \in \overline{A}$, если $\omega \notin A$ (или иначе $\omega \in (\Omega \setminus A)$).

Из определения разности событий A и B и противоположного события, следует соотношение $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

События A и B называются *несовместными*, если $A \cap B = V$, т.е. если невозможно их одновременное наступление.

Для лучшего понимания операций над событиями – подмножествами – обычно используют графические изображения, представляя достоверное событие Ω как прямоугольник, а другие события – как круги. Тогда введенные выше операции над событиями могут быть представлены в виде *диаграмм Вьенна* (рис. 1.1), на которых результаты операция изображены в виде затемненных фигур (кроме рис. 1.1д). Операция объединения событий изображена на рис. 1.1а, пересечения – на рис. 1.1б, разности – на рис. 1.1в. Противоположенное событие (дополнение) показано на рис. 1.1г, несовместные события – на рис. 1.1д.

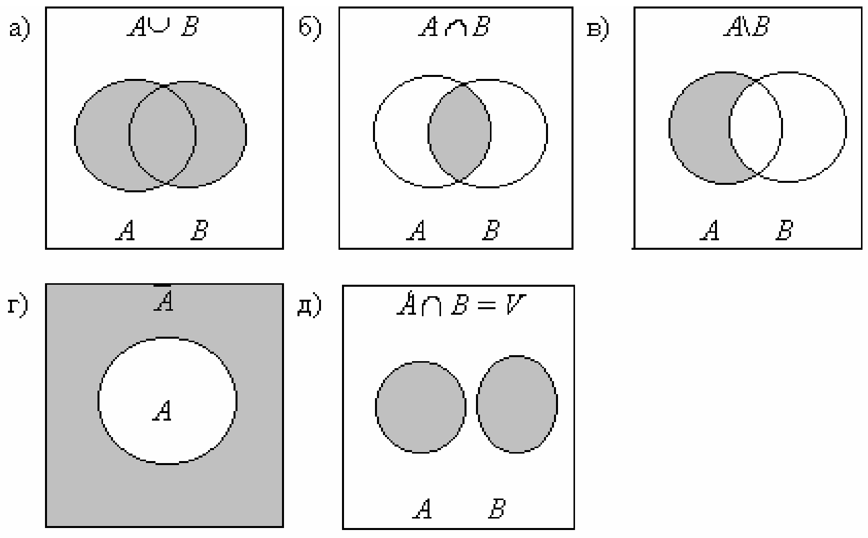

Рис. 1.1. Диаграммы Вьенна

События A_k (k = 1, 2, …, n) образуют *полную группу*, если в результате опыта обязательно должно наступить хотя бы одно из этих событий, т.е. объединение всех событий A_k является достоверным событием

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = U.$$

Обычно рассматривают полную группу несовместных событий, когда события A_k попарно несовместны

$$A_k \cap A_j = V \quad \text{при} \quad k \neq j.$$

Примером полной группы несовместных событий могут служить событие A и противоположное событие $\bar{A}$. Действительно $A \cup \bar{A} = U$, но $A \cap \bar{A} = V$.

Ниже приведены свойства, которым подчиняются операции объединения и пересечения событий:

коммутативность: $A\cup B = B\cup A$, $A\cap B = B\cap A$;

ассоциативность: $A\cup(B\cup C) = (A\cup B)\cup C$,
$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$;

дистрибутивность: $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$,
$A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Алгеброй событий $\Im$ называют такую совокупность подмножеств пространства элементарных событий Ω, т.е. по сути, такое множество событий, которое включает:

1) достоверное событие, т.е. $\Omega\in\Im$;

2) противоположное событие $\bar{A}$ для любого события $A\in\Im$;

3) событие $A\cup B$ для каждой пары событий $A,B\in\Im$.

Можно легко доказать теорему о том, что любая алгебра событий замкнута относительно конечного числа теоретико-множественных операций, т.е. результат действия конечного числа операций над элементами алгебры вновь дает элемент алгебры.

Если над событиями нужно осуществлять бесконечное число операций, то вводят понятие *σ-алгебры*. Отличие от простой алгебры событий заключается в том, что для любого бесконечного набора событий $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$, принадлежащих некоторой σ-алгебре $\Im$, объединение этих событий также принадлежит $\Im$, т.е. $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Im$. Можно доказать теорему о том, что σ-алгебра замкнута относительно бесконечного числа операций.

Чтобы уяснить связь терминологии в теории множеств с терминологией в теории вероятностей, приведем следующую таблицу:

Таблица 1.1

Обозначение	*Терминология в теории множеств*	*Терминология в теории вероятностей*
Ω	Пространство (основное множество)	Пространство элементарных исходов, достоверное событие
$\omega \in \Omega$	Элемент ω пространства Ω	Элементарное событие (или исход опыта) ω
$A \subset \Omega$	Множество A	Событие A
$A \cup B$ $A + B$	Объединение множеств A и B	Объединение или сумма событий A и B
$A \cap B$ AB	Пересечение множеств A и B	Пересечение или произведение событий A и B
$\varnothing$	Пустое множество	Невозможное событие
$\bar{A}$	Дополнительное множество	Противоположное событие
$A \cap B = \varnothing$ $AB = \varnothing$	A и B не пересекаются	A и B несовместны
$A \subset B$	A содержится в B	A влечет B
$A = B$	A и B совпадают	A и B равны

Замечание. Существует очевидная связь между логическими операциями и операциями над событиями. Например, фраза с логической операцией “произойдет событие A *или* событие B” эквивалентна фразе “произойдет событие $A \cup B$”.

1.3. Решение типовых примеров

Методические замечания. При решении задач в этом разделе полезно пользоваться диаграммами Вьенна (см. рис. 1.1), отмеченной аналогией с логическими операциями и операциями над множествами или таблицами истинности (см. ниже пример 1.2). Решение ряда задач требует правильного выбора пространства возможных исходов.

Пример 1.1. При каких событиях A и B возможно равенство $A \cup B = A$?

Решение. Объединение событий $A \cup B$ есть событие, заключающееся в наступлении хотя бы одного из событий A и B. Следовательно, наступление события A влечет за собой наступление события $A \cup B$, т.е. $A \subset A \cup B$.

В каком случае наступление события $A \cup B$ влечет за собой наступление события A, т.е. $A \cup B \subset A$? Только в том случае, когда наступление события B влечет за собой наступление события A. Таким образом, равенство возможно только в случае $B \subset A$.

Пример 1.2. Доказать неравенство $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B$.

Решение. В результате опыта событие A может произойти или не произойти (т.е. произойдет противоположное событие $\overline{A}$). Будем обозначать наступление событий цифрой 1, а ненаступление – цифрой 0.

Рассмотрим все возможные комбинации наступления и ненаступления двух событий A и B и заполним следующую таблицу (таблицу истинности), которая содержит сравниваемые события.

Таблица 1.2.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$A \cup B$	$\overline{A} \cap \overline{B}$	$\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$
1	1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0

Мы видим, что столбцы, соответствующие событиям $A \cup B$ и $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}}$ совпали, т.е. эти события равны $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = A \cup B,$ так как наступление одного из них влечет за собой наступление другого.

Пример 1.3. Имеются события: A – хотя бы один из трех проверяемых приборов бракованный, B – все приборы качественные. Что означают события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$ и $A \backslash B$?

Решение. Для решение этой задачи следует правильно выбрать пространство возможных исходов опыта Ω. Введем $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, где элементарное событие ω_0 состоит в том, что бракованных приборов нет, ω_1 – только один прибор бракованный, ω_2 – ровно два прибора бракованные, ω_3 – все три прибора бракованные. Событиям A и B будут соответствовать следующие подмножества: $A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$, $B = \{\omega_0\}$. Теперь легко записать соответствующие подмножества для противоположных событий: $\overline{A} = \{\omega_0\} = B,\ \overline{B} = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\} = A$.

Объединение событий $A \cup B$ дает достоверное событие

$$A \cup B = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3\} = U.$$

Пересечение событий $A \cap B$ есть невозможное событие, так как нет общих элементарных событий

$$A \cap B = V.$$

Для разности событий $A \backslash B$ в соответствии с определением получаем

$$A \backslash B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}.$$

Событие $A \backslash B$ можно представить и в другом виде:

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} = A \cap A = A = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\},$$

так как имеет место соотношение $\overline{B} = A$.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ

2.1. Статистическое определение вероятности

Пусть некоторый опыт производится N раз при одинаковых условиях, при этом случайное событие A происходит $N(A)$ раз. Число $N(A)$ называется *частотой* события A, а отношение $N(A)/N$ – *относительной частотой* события A. Оказывается, что при больших N относительная частота для случайных массовых событий (их можно наблюдать при одинаковых условиях сколько угодно раз) обладает свойством устойчивости, т.е. в нескольких сериях из достаточно большого количества N_1, N_2,… , N_k наблюдений данного опыта имеют место приближенные равенства

$$\frac{N_1(A)}{N_1} \approx \frac{N_2(A)}{N_2} \approx \ldots \approx \frac{N_k(A)}{N_k}. \tag{2.1}$$

Таким образом, относительная частота события A колеблется около одного и того же числа, которое характеризует данное случайное событие A. Это число $p(A)$ называется *вероятностью* события A. Из этого определения следует, что за вероятность события приближенно можно брать его относительную частоту при достаточно большом числе наблюдений данного опыта в одинаковых условиях.

Пример. Производится бросание “правильной” (симметричной, однородной и пр.) монеты. Событие A заключается в проявлении “герба”. Если подбрасывать монету много раз, то относительная частота события A будет колебаться около числа 1/2, которое будет вероятностью события A.

2.2. Классическое определение вероятности

Соображения симметрии в случае конечного пространства Ω возможных исходов опыта позволяет дать простое определение вероятности. Несколько событий в данном опыте называются *равновозможными*, если по условиям симметрии нет оснований считать какое-либо из них более возможным, чем другое.

Пусть пространство Ω возможных исходов опыта содержит n элементов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Если все элементарные события ω_k, где $k = 1, 2, \ldots, n$, равновозможные (т.е. равновозможны все исходы данного опыта), то вероятность события A вычисляется по формуле

$$p(A) = \frac{m_A}{n}, \tag{2.2}$$

где m_A – число элементарных событий, благоприятствующих событию A, т.е. число элементов ω_k, принадлежащих подмножеству, соответствующему событию A.

Пример. Производится бросание монеты. Монета предполагается “правильной” (симметричной и однородной). Пространство возможных исходов опыта содержит два элемента $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, где ω_1 состоит в проявлении “орла”, а ω_2 – “решки”. Событие A состоит в появлении “орла”, т.е. $A = \{\omega_1\}$. Согласно классическому определению вероятности $p(A) = 1/2$.

2.3. Аксиоматическое определение вероятности

Данные выше определения вероятности обладают рядом недостатков.

Классическое определение является ограниченным (частным случаем), поскольку требует конечности пространства Ω возможных исходов опыта и равновозможности элементарных событий, что часто не соответствует действительности.

Статистическое определение опирается на факт устойчивости относительных частот массовых случайных событий и существование их пределов, которые в математической теории мы пока не можем обосновать.

Само же понятие вероятности очень важно, так как ее можно рассматривать как объективную меру относительной частоты появления события в серии опытов. Поэтому существование вероятности постулируют.

Вероятностным пространством называется тройка объектов $(\Omega, \Im, p)$, где Ω – пространство возможных исходов опыта, $\Im$ – σ-алгебра событий (т.е. подмножеств пространства Ω), p – числовая функция, определенная на событиях и называемая вероятностью. Вероятность удовлетворяет следующим аксиомам:

1) а*ксиома неотрицательности вероятности:*
для всех событий $A \in \Im$ имеем $p(A) \geq 0$;

2) а*ксиома нормировки вероятности:*
вероятность достоверного события равна единице, т.е. $p(U) = 1$;

3) а*ксиома аддитивности вероятности:*
если A и B несовместные события (т.е. $A \cap B = V$), то
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

В случае, когда пространство Ω бесконечно, следует ввести дополнительную аксиому:

4) а*ксиома счетной аддитивности вероятности:*
Если $\{A_n\}$ – последовательность попарно несовместных событий, то
$$p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} p(A_n).$$

Из этих аксиом можно вывести следующие свойства:

1) вероятность любого события A является неотрицательным числом, не превышающим единицы, т.е.
$$0 \leq p(A) \leq 1;$$

2) вероятность невозможного события V равна нулю, т.е.

$$p(V) = 0;$$

3) вероятность противоположного события равна

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A);$$

4) если A влечет за собой B, то вероятность A не превосходит вероятности B, т.е.

$$\text{если } A \subset B, \text{ то } p(A) \le p(B).$$

Для доказательства следует рассмотреть несовместные события A и $B \backslash A$. Их объединение есть B, поэтому из аксиомы аддитивности следует, что $p(B) = p(A \cup (B \backslash A)) = p(A) + p(B \backslash A)$. Поскольку вероятность неотрицательна, $p(B \backslash A) \ge 0$, то имеем $p(B) \ge p(A)$.

5) Если A влечет за собой B, то вероятность разности этих событий равна разности их вероятностей, т.е.

$$\text{если } A \subset B, \text{ то } p(B \backslash A) = p(B) - p(A) .$$

Доказательство очевидно из предыдущего.

Замечания:

1. Данное аксиоматическое определение вероятности не является конструктивным, т.к. оно не указывает формулы или правила, по которым вероятность можно рассчитать. Это общее определение, которому должны удовлетворять все конструктивные (частные) определения вероятности.

В частности, легко проверить, что классическое определение вероятности полностью согласуется с данными аксиомами.

Отметим, что аксиомы вероятности аналогичны аксиомам меры. Например, для площади имеем:
1) площадь любой фигуры неотрицательна: $S(A) \ge 0$;
2) площадь квадрата с единичной стороной равна 1: $S(\square 1 \times 1) = 1$;
3) если фигуры A и B не пересекаются, то площадь их объединения равна сумме площадей: $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$.

Таким образом, понятие площади, нормированной на площадь доступного пространства, сходно с понятием вероятности, и это будет использовано ниже при геометрическом определении вероятности.

2. Статистическое определение вероятности – эмпирический путь нахождения числовой характеристики случайного события, называемой его вероятностью.

Напротив, аксиоматическое определение является чисто теоретическим подходом к понятию вероятности и не связано с реальными событиями.

Неочевидно, что вероятности, определенные эмпирически и теоретически, – это одно и то же. Связь между ними, точнее приближенное равенство, устанавливается теоремой, называемой Законом больших чисел (см. часть II пособия).

2.4. Элементы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в соответствии с заданными правилами.

Рассмотрим множество, состоящее из N элементов, например, $X = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_N\}$. Будем составлять из элементов этого множества комбинации по k элементов. Две комбинации считаются различными, если они отличаются или хотя бы одним элементом, или их порядком. Приведем важные в практическом отношении понятия размещений, перестановок и сочетаний.

Размещением из N элементов множества X по k элементов называется любая упорядоченная комбинация $(x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jk})$. Две комбинации $(x_{j1}, x_{j2}, ..., x_{jk})$ и $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{ik})$ равны тогда и только тогда, когда $x_{jl} = x_{il}$ для $l = 1, 2, ..., k$. Число всех различных размещений из N элементов по k обозначается A_N^k и вычисляется по формуле

$$A_N^k = N \cdot (N-1) \cdot ... \cdot (N-k+1) = \frac{N!}{(N-k)!}, \qquad (2.3)$$

где предполагается, что $A_N^0 = 1$.

Пример. Если множество X состоит из 5 элементов $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и мы будем составлять упорядоченные комбинации по 2 элемента, то общее число таких комбинаций (размещений) будет равно $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$, а именно: $x_1 x_2$, $x_1 x_3$, $x_1 x_4$, $x_1 x_5$, $x_2 x_1$, $x_2 x_3$, $x_2 x_4$, $x_2 x_5$, $x_3 x_1$, $x_3 x_2$, $x_3 x_4$, $x_3 x_5$, $x_4 x_1$, $x_4 x_2$, $x_4 x_3$, $x_4 x_5$, $x_5 x_1$, $x_5 x_2$, $x_5 x_3$, $x_5 x_4$.

Частный случай размещения при $k = N$ называется *перестановкой* из N элементов. Число всех перестановок из N элементов равно

$$A_N^N = N \cdot (N-1) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = N! \qquad (2.4)$$

Пример. Если множество X состоит из 3 элементов $X = \{x_1, x_2, x_3\}$, то возможно всего 6 различных перестановок $A_3^3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, а именно: $x_1 x_2 x_3$, $x_1 x_3 x_2$, $x_2 x_1 x_3$, $x_2 x_3 x_1$, $x_3 x_1 x_2$, $x_3 x_2 x_1$.

Сочетанием из N элементов множества X по k называется любая неупорядоченная комбинация $\{x_{j1}, x_{j2}, \ldots, x_{jk}\}$, состоящая из k элементов множества X. Число всех сочетаний из N по k обозначается C_N^k и вычисляется по формуле

$$C_N^k = \frac{A_N^k}{k!} = \frac{N \cdot (N-1) \cdot \ldots \cdot (N-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{N!}{k!(N-k)!}. \qquad (2.5)$$

Предполагается, что $C_N^0 = 1$ и $C_N^k = 0$, если $k > N$. Из формулы для вычисления числа сочетаний C_N^k непосредственно следует равенство $C_N^k = C_N^{N-k}$.

Пример. Если множество X состоит из 5 элементов $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ и мы будем составлять неупорядоченные комбинации по 2 элемента, то общее число таких комбинаций (сочетаний) будет равно $C_5^2 = A_5^2 / 2! = 20/2 \cdot 1 = 10$, а именно: $x_1\,x_2$, $x_1\,x_3$, $x_1\,x_4$, $x_1\,x_5$, $x_2\,x_3$, $x_2\,x_4$, $x_2\,x_5$, $x_3\,x_4$, $x_3\,x_5$, $x_4\,x_5$.

Во всех приведенных формулах встречается факториал $N! = N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot2\cdot1$. При больших N справедлива формула Стирлинга $N! = \sqrt{2\pi N}\, N^N e^{-N}$.

Элементы комбинаторики широко применяются в теории вероятностей для определения числа элементов множеств равновозможных исходов, используемых в классическом определении вероятности (2.2).

Пример 1. При случайном выборе (без возврата) трех элементов из исходного множества, состоящего из 24 элементов, пространство возможных исходов Ω есть множество всех размещений из 24 элементов по 3, если порядок выбора элементов существен. Соответственно число элементов Ω равно $A_{24}^3 = 12144$.

Пример 2. Если порядок выбора элементов в примере 1 не учитывается, то пространство Ω есть множество всех сочетаний из 24 элементов по 3, и соответственно число элементов Ω равно $C_{24}^3 = 2024$. Это число меньше, чем в примере 1, в 3! = 6 раз, поскольку все размещения любых трех элементов (т.е. все их перестановки) здесь учитываются одним сочетанием.

Пример 3. В частном случае, когда из множества в N элементов случайным образом выбираются без возврата все N элементов, число возможных исходов равно числу перестановок $A_N^N = N!$.

Пример 4. При так называемом выборе “с возвратом”, например, при случайном наборе номера телефона, содержащего N цифр, пространство возможных исходов Ω есть множество всех N-значных чисел, и соответственно число элементов Ω равно 10^N.

2.5. Решение типовых примеров

Методические замечания. Обычно порядок решения задач с использованием классического определения вероятности состоит в следующем:

1) Сначала нужно определить пространство элементарных событий Ω, которое будет наиболее удобным при описании данного случайного опыта, и убедиться в равновозможности всех элементов Ω.

2) Затем определить подмножество Ω, содержащее все исходы, благоприятствующие событию A.

3) Определить n – общее число элементарных событий в Ω и m_A – число элементарных событий в подмножестве, соответствующем A.

4) Применить формулу классического определения вероятности события

$$p(A)=\frac{m_A}{n}.$$

Пример 2.1. Игральная кость бросается один раз. Найти вероятность следующих событий: A – выпадение четного числа очков, B – выпадение не менее 5 очков, C – выпадение не более 5 очков.

Решение. В рассматриваемом случае пространство Ω возможных исходов содержит 6 элементов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2,\ldots, \omega_6\}$, где элементарное событие ω_k есть выпадение числа k. Игральная кость считается "правильной", поэтому все элементарные события являются равновозможными и можно пользоваться классическим определением вероятности. События A, B и C соответствуют следующим подмножествам пространства Ω:

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\},$$

$$B = \{\omega_5, \omega_6\},$$

$$C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5\},$$

поэтому число элементарных событий, благоприятствующих событиям A, B и C, соответственно равно $m_A = 3$, $m_B = 2$, $m_C = 5$. Теперь вычисляем вероятности этих событий

$$p(A)=\frac{m_A}{n}=\frac{1}{2},\quad p(B)=\frac{m_B}{n}=\frac{1}{3},\quad p(C)=\frac{m_C}{n}=\frac{5}{6}.$$

Пример 2.2. В урне k белых и r черных шаров ($k > 2$). Из урны вынимают наугад два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. За пространство возможных исходов опыта $\Omega = \{\omega\}$ принимаем множество всех сочетаний из $(k + r)$ элементов (общее число шаров) по 2 (число вынутых шаров). Из соображений симметрии (все шары одинаковые, и их вынимают наугад) следует, что все элементарные события равновозможные, поэтому для определения вероятности события (оба вынутых шара белые) можно воспользоваться классическим определением: $p(A)=\frac{m_A}{n}$. Число всех элементарных событий равно числу сочетаний из $(k + r)$ по 2

$$n=C_{k+r}^2=\frac{1}{2}\cdot(k\ +\ r)\cdot(k\ +\ r-1).$$

Поскольку нас интересует вероятность вынуть два белых шара, то благоприятные события – возможные сочетания по 2 только белых шаров. Таким образом, число элементарных событий m_A, благоприятствующих событию A, равно числу сочетаний из k элементов (общее число белых шаров) по 2 (число вынутых шаров)

$$m_A=C_k^2=\frac{1}{2}\cdot k\cdot(k-1).$$

Вероятность события A равна $p(A) = \dfrac{k \cdot (k-1)}{(k + r) \cdot (k + r - 1)}$.

Пример 2.3. В партии, состоящей из k изделий, имеется l дефектных ($l \le k$). Из партии выбирается для контроля r изделий. Найти вероятность того, что из них ровно s изделий будет дефектных ($s \le r$).

Решение. За пространство возможных исходов опыта $\Omega = \{\omega\}$ принимаем множество всех сочетаний из k элементов (общее число изделий) по r (число выбранных изделий). Элементарные события равновозможные, поэтому пользуемся классическим определением вероятности. Событие A состоит в том, что из r выбранных изделий ровно s дефектных. Его вероятность определяется по формуле $p(A) = \dfrac{m_A}{n}$, где общее число элементарных событий n равно числу сочетаний из k по r, т.е. $n = C_k^r$. Элементарное событие будет благоприятствующим событию A, если из r выбранных изделий ровно s будет дефектных, а $(r - s)$ – годных. Поэтому число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно произведению числа сочетаний из l (общее число дефектных изделий) по s (выбранное число дефектных изделий) на число сочетаний из $(k - l)$ (общее число годных изделий) по $(r - s)$ (выбранное число годных изделий)

$$m_A = C_l^s \cdot C_{k\text{-}l}^{r\text{-}s}.$$

Вероятность события A равна $p(A) = \dfrac{C_l^s \cdot C_{k\text{-}l}^{r\text{-}s}}{C_k^r}$.

Пример 2.4. Из урны, содержащей k перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим l находящихся в ней шаров ($l \le k$). Найти вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку:

$$s,\ s + 1, \ldots,\ s + l - 1 \qquad (1 \le s \le k - l + 1).$$

Решение. За пространство возможных исходов опыта $\Omega = \{\omega\}$ принимаем множество всех размещений из k элементов (общее число шаров) по l (число вынутых шаров). Событие A состоит в том, что номера вынутых шаров будут идти по порядку. В силу симметрии результатов опыта все элементарные события равновозможные, поэтому вероятность события A вычисляется по классическому определению

$$p(A) = \frac{m_A}{n}.$$

Общее число элементарных событий n равно числу размещений из k по l

$$n = A_k^l = k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k - l + 1).$$

Элементарное событие будет благоприятствовать событию A, если номера вынутых шаров образуют ряд последовательных натуральных чисел. Такие размещения (цепочка из l чисел) определяются первым числом, поскольку затем номера увеличиваются на единицу. Так как последнее число в цепочке не может превышать общего числа шаров k, то первый вынутый шар может иметь следующие номера: 1, 2, …, $(k - l + 1)$, т.е. число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно $m_A = k - l + 1$. Вероятность события A равна

$$p(A) = \frac{(k - l + 1)}{k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k - l + 1)} = \frac{1}{k \cdot (k - 1) \cdot \ldots \cdot (k - l + 2)}.$$

В частном случае $l = k$ мы получим очевидный результат $p(A) = \dfrac{1}{k!}$, так как общее число элементарных событий равно числу перестановок, а благоприятствующим является только одно элементарное событие. Если вынимается только один шар, то событие A является достоверным событием, т.е. $p(A) = 1$.

Пример 2.5. Имеется 3 ящика с различными материалами. Их наугад распределяют на 5 полок. Найти вероятность того, что: а) все ящики будут на последней полке; б) только один ящик будет на последней полке.

Решение. Каждый ящик может находиться на любой из пяти полок, поэтому распределение одного ящика можно описать числом x_1, принимающим одно из значений: 1, 2, …, 5, соответствующее номеру полки. Распределение двух ящиков можно описать двумерным вектором (x_1, x_2), каждый компонент которого принимает одно из значений: 1, 2, …, 5.

За пространство возможных исходов опыта примем множество трехмерных векторов (x_1, x_2, x_3), каждый компонент которого принимает одно из значений: 1, 2, …, 5. Событие A состоит в том, что все ящики будут на последней (пятой) полке, событие B – только один ящик на последней полке. В силу симметрии результатов опыта, все элементарные события равновозможные, поэтому для определения вероятности событий A и B пользуемся классическим определением

$$p(A) = \frac{m_A}{n},\ p(B) = \frac{m_B}{n}.$$

Общее число элементарных событий n равно числу трехмерных векторов (x_1, x_2, x_3), каждый компонент которых принимает одно из значений: 1, 2, …, 5, т.е.

$$n = 5^3 = 125.$$

Число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно единице $m_A = 1$ (событию A соответствует только один вектор (5, 5, 5), все компоненты которого равны пяти).

Число элементарных событий, благоприятствующих событию B, равно $m_B = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48,$ так как один из компонентов вектора должен принимать значение 5, а две остальные – значение 1, 2, 3 или 4.

Вероятность событий A и B равна

$$p(A) = \frac{1}{125} = 0{,}008; \quad p(B) = \frac{48}{125} = 0{,}384.$$

Пример 2.6. В розыгрыше первенства по футболу участвуют 16 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 8 команд в каждой. Среди участников соревнований имеется 5 команд экстра-класса. Найти вероятность следующих событий: A – все команды экстра-класса попадут в одну и ту же группу, B – две команды экстра-класса попадут в одну из групп, а три – в другую.

Решение. Будем следить за формированием одной группы, например, первой. Вторая группа формируется автоматически из оставшихся 8 команд.

За пространство возможных исходов опыта $\Omega = \{\omega\}$ примем множество сочетаний из 16 элементов (общее число команд) по 8 (число команд в первой группе). Все элементарные события равновозможные, поэтому можно пользоваться классическим определением вероятности

$$p(A) = \frac{m_A}{n}, \quad p(B) = \frac{m_B}{n}.$$

Общее число элементарных событий равно числу сочетаний из 16 команд по 8

$$n = C_{16}^{8}.$$

Элементарное событие будет благоприятствовать событию A, если в первой группе нет команд экстра-класса или в нее входят все пять команд экстра-класса. В первом случае число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно произведению числа сочетаний из 5 (общее число команд экстра-класса) по 0 (число команд экстра-класса в первой группе) на число сочетаний из 11 (общее число команд не экстра-класса) по 8 (число команд не экстра-класса в первой группе)

$$m_{1A} = C_5^0 \cdot C_{11}^8 = C_{11}^8.$$

Во втором случае число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно

$$m_{2A} = C_5^5 \cdot C_{11}^3 = C_{11}^3.$$

Общее число элементарных событий, благоприятствующих событию A, равно $m_A = m_{1A} + m_{2A} = C_{11}^8 + C_{11}^3 = 2 \cdot C_{11}^3$, так как $C_{11}^8 = C_{11}^3$.

Элементарное событие будет благоприятствовать событию B, если в первой группе две команды экстра-класса или в нее входят три команды экстра-класса. В первом случае число элементарных событий, благоприятствующих событию B, равно произведению числа сочетаний из 5 (общее число команд экстра-класса в первой группе) по 2 (число команд экстра-класса в первой группе) на число сочетаний из 11 (общее число команд не экстра-класса) по 6 (число команд не экстра-класса в первой группе):

$$m_{1B} = C_5^2 \cdot C_{11}^6.$$

Во втором случае получим $m_{2B} = C_5^3 \cdot C_{11}^5$, и общее число элементарных событий, благоприятствующих событию B, равно $m_B = m_{1B} + m_{2B} = C_5^2 \cdot C_{11}^6 + C_5^3 \cdot C_{11}^5 = 2 \cdot C_5^3 \cdot C_{11}^5$, так как $C_5^2 = C_5^3$, $C_{11}^6 = C_{11}^5$.

Итак, вероятности событий A и B равны:

$$p(A) = \frac{2 \cdot C_{11}^3}{C_{16}^8}, \quad p(B) = \frac{2 \cdot C_5^3 \cdot C_{11}^5}{C_{16}^8}.$$

Пример 2.7. Шесть спортсменок (№1, №2, …, №6) приехали на сборы. Их расселили случайным образом в двух комнатах. Одна комната рассчитана на двух человек, другая – на четырех. Найти вероятность того, что спортсменки №1 и №2 окажутся в одной комнате.

Решение. Нам достаточно следить за заселением только комнаты, рассчитанной на двух человек. В четырехместной комнате будут жить спортсменки, не попавшие в двухместную комнату.

За пространство возможных исходов опыта Ω = {ω} примем множество сочетаний из 6 элементов (общее число спортсменок) по 2 (число спортсменок, заселенных в двухместную комнату). Все элементарные события равновозможные, поэтому можно пользоваться классическим определением вероятности

$$p(A) = \frac{m_A}{n}.$$

Общее число элементарных событий равно числу сочетаний из 6 человек по 2:

$$n = C_6^2 = 15.$$

Эти сочетания таковы:

№1–№2	№1–№3	№1–№4	№1–№5	№1–№6
№2–№3	№2–№4	№2–№5	№2–№6	
№3–№4	№3–№5	№3–№6		
№4–№5	№4–№6			
№5–№6				

Элементарное событие будет благоприятствовать событию A (спортсменки №1 и №2 в одной комнате), если в двухместной комнате окажутся спортсменки №1 и №2 или если в двухместной комнате будут жить спортсменки №3, №4, №5 или №6.

В первом случае спортсменки №1 и №2 будут жить вместе в двухместной комнате, во втором – в четырехместной. Число благоприятных случаев равно соответственно:

$m_{A1} = 1$ (случай №1–№2)

$m_{A2} = 6$ (случаи №3–№4, №3–№5, №3–№6, №4–№5, №4–№6, №5–№6)

Полное число благоприятных случаев равно $m_A = m_{A1} + m_{A2} = 7$, и следовательно

$$p(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{7}{15}.$$

Эту же задачу мы в дальнейшем решим с использованием формулы полной вероятности.

3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

3.1. Геометрическое определение вероятности

В некоторых случаях за пространство возможных исходов опыта можно принимать область n–мерного пространства (прямой, плоскости, трехмерного пространства и т.д.).

Предположим, что за пространство Ω принята некоторая область на плоскости (например, прямоугольник). Тогда событиями будут являться различные подмножества множества Ω (см. рис. 3.1). Элементарными событиями в данном случае служат точки области, соответствующей пространству возможных исходов опыта Ω. Множество Ω является бесконечным, так как содержит бесконечное число точек – элементарных событий.

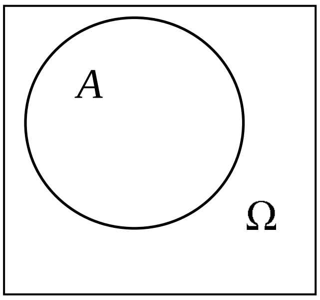

Рис. 3.1

Если элементарные события равновозможные (т.е. точки области Ω равноправны), то вероятность попадания точки в область A пропорциональна площади этой области и не зависит ни от формы области A, ни от ее положения внутри области Ω

$$p(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}, \tag{3.1}$$

где S_Ω – площадь области Ω, а S_A – площадь области A.

Рассмотрим одномерный случай. За пространство возможных исходов опыта Ω принимается отрезок AB, тогда событиями будут являться подмножества этого отрезка. Пусть вероятность попадания точки на отрезок CD пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения внутри отрезка AB (из-за равновозможности элементарных событий – точек отрезка AB) (см. рис. 3.2).

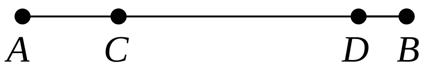

Рис. 3.2

Тогда вероятность попадания точки на отрезок CD будет равна отношению длины отрезков CD и AB: $p = \dfrac{|CD|}{|AB|}$.

Аналогично определяется вероятность попадания точки в пространственную фигуру v, составляющую часть фигуры V: $p = \dfrac{m_v}{m_V}$, где m_v и m_V – мера (объем) фигур v и V.

Геометрическое определение вероятности удовлетворяет всем аксиомам вероятности.

3.2. Решение типовых примеров

Методические замечания. Методика решения задач с использованием геометрического определения вероятности аналогична методике с применением классического определения:

1) Следует определить подходящим образом пространство элементарных событий Ω.

2) Выделить его подмножество, содержащее все исходы, благоприятствующие событию A.

3) Определить S_Ω – площадь (длину, объем) пространства Ω и S_A – площадь (длину, объем) его подмножества, соответствующего A.

4) Применить формулу геометрического определения вероятности события

$$p(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}.$$

Пример 3.1. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

Решение. Обозначим через x и y время прихода студентов к месту встречи. За момент отсчета времени примем 12 часов дня, тогда имеют место неравенства: $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1$.

Введем декартовую систему координат на плоскости. Моменту прихода студентов соответствует точка $M(x,y)$, которая случайным образом ставится в квадрате OAO_1B.

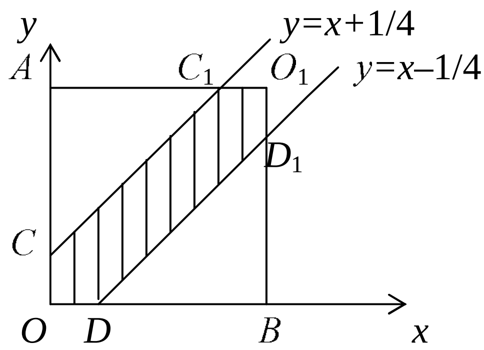

Рис. 3.3

За пространство Ω исходов опыта можно принять квадрат OAO_1B со стороной, равной единице. Из условия задачи следует, что можно воспользоваться геометрическим определением вероятности. Определим область, расположенную внутри квадрата OAO_1B, которая соответствует тому, что встреча студентов состоится. Для этого необходимо выполнение следующего условия:

$$|x - y| < 1/4,$$

т.е. чтобы моменты прихода студентов к месту встречи отличались бы менее, чем на ¼ часа. Раскрывая знак абсолютной величины, получим

$$x - 1/4 < y < x + 1/4.$$

Соответствующая область лежит между прямыми $y = x - 1/4$ и $y = x + 1/4$. Итак, искомая область – есть многоугольник $OCC_1O_1D_1D$ (см. рис. 3.3). Теперь подсчитываем вероятность встречи студентов:

$$p = \frac{S_{OCC_1O_1D_1D}}{S_{OAO_1B}} = \frac{1 - 2S_{CAC_1}}{1} = 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}.$$

4. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

4.1. Теорема сложения вероятностей

Аксиома аддитивности позволяет вычислить вероятность объединения двух несовместных событий A и B ($A \cap B = V$)

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

Ее следствием является формула для вычисления вероятности объединения конечного числа попарно несовместных событий ($A_i \cap A_j = V$ при $i \neq j$):

$$p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_n).$$

Для совместных событий справедлива следующая *теорема сложения вероятностей*.

Теорема: Вероятность объединения двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления (т.е. без вероятности пересечения этих событий):

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B). \tag{4.1}$$

Доказательство: рассмотрим две пары несовместных событий. Первая пара – события B и $A \backslash B$. Их объединение $B \cup A \backslash B = A \cup B$, и, следовательно, имеем $p(A \cup B) = p(B) + p(A \backslash B)$. Вторая пара – события $A \backslash B$ и $A \cap B$. Их объединение $(A \backslash B) \cup (A \cap B) = A$, и поэтому $p(A \backslash B) + p(A \cap B) = p(A)$ или $p(A \backslash B) = p(A) - p(A \cap B)$. Складывая результаты, полученные для пар, и сокращая в левой и правой частях на $p(A \backslash B)$, получим равенство (4.1).

Согласие формул сложения вероятностей для несовместных и совместных событий очевидно, так как пересечение несовместных событий есть невозможное событие, вероятность которого равна нулю.

Геометрическое определение вероятности делает данную теорему более понятной. Очевидно, что площадь (вероятность) объединения $A \cup B$ двух областей A и B равна сумме площадей (вероятностей) этих областей за вычетом площади (вероятности) их пересечения $A \cap B$ (см. рис. 1.1б).

С этих позиций не трудно понять формулу сложения вероятностей трех событий A, B и C

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - \\ - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C).$$

Приведем общую формулу для вычисления вероятности объединения конечного числа совместных событий

$$p\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_k p(A_k) - \sum_{1 \le i < j \le n} p(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} p(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots \\ + (-1)^n p(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n), \tag{4.2}$$

где суммы распространяются на все возможные комбинации указанных индексов.

4.2. Условие вероятности. Теорема умножения вероятностей

Для того чтобы сформулировать теорему умножения вероятностей, определим условные вероятности.

Условной вероятностью события B при условии, что событие A произошло, называется отношение вероятности совместного наступления двух событий A и B (т.е. их пересечения $A \cap B$) к вероятности события A:

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}. \tag{4.3}$$

Теперь можно сформулировать очевидную *теорему умножения вероятностей*.

Теорема: Вероятность пересечения двух событий A и B равна произведению вероятности события A на условную вероятность события B при условии, что событие A уже произошло, т.е.

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p_A(B). \tag{4.4}$$

Таким образом, теорема умножения вероятностей неразрывно связана с понятием условной вероятности. Следствием этой теоремы является формула для определения вероятности пересечения конечного числа событий. Вероятность совместного появления нескольких событий (т.е. их пересечения) равна произведению вероятности одного из них на условные вероятности всех остальных, причем вероятности каждого последующего события вычисляются в предположении, что все предыдущие события уже наступили:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p_{A_1}(A_2) \cdot p_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots p_{A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n),$$

где $p_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}}(A_n)$ – вероятность события A_n при условии, что события A_1, A_2, …, A_{n-1} уже произошли.

События A и B называются *независимыми*, если вероятность их совместного появления равна произведению вероятностей этих событий

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B). \tag{4.5}$$

Это определение независимости событий A и B эквивалентно требованию совпадения вероятности события B и условной вероятности события B при условии, что событие A уже произошло, т.е.

$$p(B) = p_A(B) \text{ или } p(A) = p_B(A).$$

В случае нескольких событий, независимых в совокупности, вероятность их совместного появления равна произведению вероятностей этих событий:

$$p(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = p(A_1) \cdot p(A_2) \cdot p(A_3) \cdot \ldots \cdot p(A_n). \tag{4.6}$$

Замечания.

1. Вычислим условную вероятность события *B*, если произошло событие *A*, используя геометрическое определение вероятности.

Изначально мы имели пространство элементарных исходов Ω, и вероятность события *B* равна отношению площадей *B* и Ω (см. п.3.1)

$$p(B) = \frac{S_B}{S_\Omega}. \tag{4.7}$$

Пусть известно, что имеет место событие *A*. Это сужает пространство возможных исходов Ω до множества всех исходов, благоприятных *A*, т.е., по сути, до множества *A*.

Если при этом происходит событие *B*, то это означает, что имеет место и *A*, и *B*, т.е. событие *B* сужается до множества исходов, благоприятных и *A*, и *B*, или, иными словами, $A \cap B$ (см. рис.1.1б).

Таким образом, если мы знаем, что случилось событие *A*, то в формуле (4.7) происходит сужение $\Omega \to \Omega \cap A = A$, $B \to B \cap A$. Как следствие, условная вероятность события *B*, если известно, что имело место событие *A*, равна отношению площадей

$$p_A(B) = \frac{S_{A \cap B}}{S_A}.$$

Умножая числитель и знаменатель на площадь S_Ω, в результате получим формулу (4.3), которая служила определением условной вероятности

$$p_A(B) = \frac{S_{A \cap B}}{S_A} \frac{S_\Omega}{S_\Omega} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

2. Следует различать “физическую” независимость событий, когда между ними нет причинно-следственной связи, и “математическую” независимость, сформулированную выше. При наличии “физической” независимости можно считать, что имеет место и “математическая” независимость, т.е. справедлива формула (4.5) и ей эквивалентные.

4.4. Решение типовых примеров

Методические замечания. Задачи в этом разделе обычно решаются следующим образом:

1) Следует определить все входящие в задачу простейшие случайные события и составные события, вероятность которых надо найти. Нужно иметь в виду, что иногда легче вычислить вероятность противоположенного события (см. пример 4.3).

2) Выразить составные события через простейшие, используя операции над событиями.

3) Применить теоремы сложения и умножения вероятностей. Перед применением теоремы сложения проверить – являются объединяемые события совместными или несовместными (это может быть неочевидно – см. пример 4.2).

Пример 4.1. Вероятность события A равна p. Доказать, что вероятность противоположного события равна $(1 - p)$.

Решение. Покажем, что события A и $\overline{A}$ образуют полную группу несовместных событий. Событие $\overline{A}$, противоположное событию A, наступает в том случае, когда событие A не появилось. Поэтому эти события несовместны, т.е. они не могут наступить одновременно в данном опыте. Из определения события $\overline{A}$ следует, что объединение противоположных событий A и $\overline{A}$ дает достоверное событие (событие A произойдет или не произойдет). Итак, события A и $\overline{A}$ образуют полную группу несовместных событий, т.е. они несовместны и $A \cup \overline{A} = U$.

Теперь применим теорему сложения вероятностей несовместных событий, учитывая, что вероятность достоверного события равна 1,

$$p(A) + p(\overline{A}) = 1.$$

Вероятность противоположного события обозначают через q.

Таким образом, $q = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - p$.

Пример 4.2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадет только один из стрелков.

Решение. Пусть событие A есть попадание в мишень первым стрелком, а событие B – попадание в мишень вторым стрелком. Тогда противоположные события будут соответствовать $\overline{A}$ – промаху первого стрелка, $\overline{B}$ – промаху второго стрелка. Событие C наступает, когда в мишень попадает только один из стрелков. Это событие можно представить в виде

$$C = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B),$$

т.е. происходит хотя бы одно из событий: первый стрелок попадает в мишень, а второй – не попадает $(A \cap \overline{B})$, либо первый стрелок не попадает в мишень, а второй – попадает $(\overline{A} \cap B)$.

Поскольку вероятности событий A и B известны, то легко вычислить вероятность противоположных событий (см. пример 3.1)

$$p(\overline{A}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3; \qquad p(\overline{B}) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

События $(A \cap \overline{B})$ и $(\overline{A} \cap B)$ несовместны, так как при появлении первого должно наступить событие A, а при появлении второго событие A не должно наступить. Стрелки стреляют независимо друг от друга, поэтому события A и B можно считать независимыми. Из теорем сложения и умножения вероятностей имеем

$$p(C) = p((A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)) = p(A\cap\overline{B}) + p(\overline{A}\cap B) =$$
$$= p(A)\cdot p(\overline{B}) + p(\overline{A})\cdot p(B) = 0{,}7\cdot 0{,}2 + 0{,}3\cdot 0{,}8 = 0{,}38.$$

Пример 4.3. ОТК проверяет изделия на стандартность. Вероятность того, что изделие нестандартно, равна 0,1. Найти вероятность того, что хотя бы одно из трех проверяемых изделий нестандартно.

Решение. Введем обозначение событий: A_i – i-е изделие нестандартно (i = 1, 2, 3), B – хотя бы одно из трех проверяемых изделий нестандартно. Тогда событие $\overline{A}_i$ наступит тогда, когда i–е изделие стандартно, и вероятность этого события равна

$$p(\overline{A}_i) = 1 - p(A_i) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9.$$

События $\overline{B}$ наступает, когда ни одно из трех проверяемых изделий не является нестандартным, т.е. когда все три изделия стандартны. Следовательно, данное событие можно представить в виде $\overline{B} = \overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3$.

Поскольку стандартность или нестандартность изделия не зависит от результатов проверки других изделий, то события A_1, A_2, A_3 являются независимыми, и по теореме умножения вероятностей имеем

$$p(\overline{B}) = p(\overline{A}_1\cap\overline{A}_2\cap\overline{A}_3) = p(\overline{A}_1)\cdot p(\overline{A}_2)\cdot p(\overline{A}_3) = 0{,}9^3 = 0{,}729.$$

Теперь вычисляем вероятность события B:

$$p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - 0{,}729 = 0{,}271.$$

Для того чтобы найти вероятность события В, состоящего в появлении события A хотя бы один раз при нескольких испытаниях, целесообразно определить сначала вероятность противоположного события $\overline{B}$ (непоявление события A при этих испытаниях), а затем определить вероятность события B.

Пример 4.4. Брошены три игральные кости. Найти вероятность того, что на всех трех костях появится разное число очков.

Первый способ решения. Введем обозначения: событие A наступает тогда, когда на второй игральной кости выпадает число, отличное от числа, выпавшего на первой игральной кости. Событие B наступает тогда, когда на третьей игральной кости выпадает число, отличное от числа на первой и второй игральных костях. Событие C наступает тогда, когда на всех трех костях появится разное число очков. Это событие есть пересечение событий A и B, т.е. $C = A\cap B$.

По теореме умножения вероятностей имеем

$$p(C) = p(A \cap B) = p(A) \cdot p_A(B).$$

Вычислим вероятности событий A и B. Вероятность события A равна $p(A) = \frac{5}{6}$. Так как общее число случаев (количество чисел, которые могут выпасть на второй кости) равно 6, а число случаев, благоприятствующих событию A, (количество чисел, не совпадающих с числом, выпавшем на первой кости) равно 5. Аналогично, вероятность события B при условии, что событие A появилось, равна $p_A(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$. Общее число случаев (количество чисел, которые могут выпасть на третей кости) равно 6, а число случаев, благоприятствующих событию B (количество чисел, не совпадающих с числами на первой и второй костях) равно 4.

Окончательно, вероятность события C равна

$$p(C) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}.$$

Второй способ решения. Вероятность события C можно вычислить, пользуясь только классическим определением вероятности.

Общее число случаев, которые соответствуют различным упорядоченным цепочкам из трех чисел, принимающих значения 1, 2, ..., 6, равно $n = 6^3 = 216$.

Число случаев, благоприятствующих событию C, которые соответствуют упорядоченным цепочкам из трех различных чисел, равно числу размещений

$$m_C = A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

Таким образом, вероятность события C равна

$$p(C) = \frac{m_C}{n} = \frac{120}{216} = \frac{5}{9}.$$

Как и следовало ожидать, оба способа решения приводят к одному и тому же результату.

Пример 4.5. В читальном зале имеется шесть учебников по теории вероятностей, из которых четыре в твердом переплете. Библиотекарь наудачу взял три учебника. Найти вероятность того, что все они в твердом переплете.

Первый способ решения. Введем следующие обозначения событий: A – первый учебник в твердом переплете, B – второй учебник в твердом переплете, C – третий учебник в твердом переплете, F – все выбранные учебники в твердом переплете. Событие F есть пересечение событий

$$F = A \cap B \cap C.$$

В рассматриваемом случае события A, B и C не являются независимыми, поэтому по теореме умножения вероятностей имеем

$$p(F) = p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p_A(B) \cdot p_{A \cap B}(C).$$

Вычислим эти вероятности, используя классическое определение.

Вероятность события A равна

$$p(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Условная вероятность события B при условии, что событие A произошло (т.е. осталось 5 учебников, из них 3 в твердом переплете), равна

$$p_A(B) = \frac{3}{5}.$$

Условная вероятность события C при условии, что события A и B произошли (т.е. осталось 4 учебника, из них 2 в твердом переплете), равна

$$p_{A \cap B}(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Таким образом, вероятность события F равна

$$p(F) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}.$$

Второй способ решения. Эту задачу можно решить, используя только классическое определение вероятности. Общее число случаев равно числу сочетаний $n = C_6^3 = 20$.

Число случаев m_F, благоприятствующих событию F, равно числу сочетаний $C_4^3 = 4.$ Таким образом, вероятность события F равна

$$p(F) = \frac{m_F}{n} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

Оба способа приводят к одному и тому же результату.

Пример 4.6. Разрыв электрической цепи может произойти вследствие выхода из строя элемента k или двух элементов k_1 и k_2. Элементы k, k_1 и k_2 выходят из строя независимо друг от друга с вероятностями 0,3; 0,2 и 0,2 соответственно. Определить вероятность разрыва электрической цепи.

Решение. Введем обозначение событий: A – выход из строя элемента k, B_i – выход из строя элемента k_i (i = 1, 2), C – разрыв электрической цепи. По условию задачи событие C произойдет в том случае, когда выйдет из строя элемент k или выйдут из строя два элемента k_1 и k_2. Поэтому событие C можно представить в виде $C = A \cup (B_1 \cap B_2)$.

Согласно теореме вероятностей имеем (события A и B_i не являются несовместными)

$$p(C) = p(A \cup (B_1 \cap B_2)) = p(A) + p(B_1 \cap B_2) - p(A \cap B_1 \cap B_2).$$

Так как события A, B_1 и B_2 независимы, то по теореме умножения вероятностей получим

$$p(C) = p(A) + p(B_1)p(B_2) - p(A)p(B_1)p(B_2) =$$
$$= 0{,}3 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 - 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 = 0{,}328.$$

5. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ГИПОТЕЗЫ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

5.1. Формула полной вероятности и формула Байеса

Введем полную группу попарно несовместных событий H_1, H_2, ..., H_n, которые в дальнейшем будем называть *гипотезами*. Для гипотез должны выполняться следующие соотношения:

1) $H_i \cap H_j = V$ при $i \neq j$;

2) $p(H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n) = p(H_1) + p(H_2) + \ldots + p(H_n) = 1.$

Событие А можно представить как

$$A = A \cap \Omega = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n) =$$
$$= (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n),$$

поскольку оно наступает с одной и только одной из гипотез.

Так как несовместность отдельных гипотез приводит к несовместности событий $A \cap H_i$, то по теореме сложения вероятностей получим

$$p(A) = p((A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n)) =$$
$$= p(A \cap H_1) + p(A \cap H_2) + \ldots + p(A \cap H_n).$$

Событие A может появляться совместно с каждой из гипотез. Используя теорему умножения вероятностей, вероятность события A можно вычислить по формуле, называемой *формулой полной вероятности*:

$$p(A) = p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + p(H_2) \cdot p_{H_2}(A) + \ldots + p(H_n) \cdot p_{H_n}(A). \quad (5.1)$$

Каждый член в формуле полной вероятности $p(H_i) \cdot p_{H_i}(A)$ дает вероятность соответствующей части $(A \cap H_i)$ разбиения события A.

Если до опыта вероятности гипотез были равны $p(H_1)$, $p(\mathrm{H}_2), \ldots, p(H_n)$, а в результате опыта появилось событие A, то с учетом этого события, “новые”, т.е. условные вероятности гипотез, можно вычислить по *формуле Байеса*

$$p_A(H_i) = \frac{p(H_i) \cdot p_{H_i}(A)}{p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + \ldots + p(H_n) \cdot p_{H_n}(A)} = \frac{p(H_i) \cdot p_{H_i}(A)}{p(A)}. \quad (5.2)$$

Таким образом, формула Байеса дает возможность “переоценить” вероятности гипотез с учетом наблюдения результата опыта. Заметим, что формула Байеса следует из следующих очевидных равенств после их деления на вероятность $p(A)$

$$p(A) \cdot p_A(H_i) = p(A \cap H_i) = p(H_i \cap A) = p(H_i) \cdot p_{H_i}(A).$$

5.2. Решение типовых примеров

Методические замечания. Если требуется найти вероятность некоторого события A, когда известны вероятности его наступления совместно с рядом других событий (см. подробнее условие примера 5.1), то следует:

1) Определить полную группу несовместных гипотез, сообразуясь с условиями задачи (см. следующий пункт).
2) Найти вероятности гипотез и условную вероятность события A при условии, что каждая гипотеза имела место (эти данные обычно, так или иначе, сообщаются в условии задачи). Проверить, равна ли сумма вероятностей гипотез 1.
3) Применить формулу полной вероятности.

Если требуется найти вероятность некоторого события B при условии, что другое событие A имело место (см. пример 5.4), то следует:

1) Определить полную группу несовместных гипотез, сообразуясь с условиями задачи. Событие B обычно должно быть одной из гипотез.
2) Найти вероятности гипотез и условную вероятность события A при условии, что каждая гипотеза имела место (эти данные обычно сообщаются в задаче).
3) Применить формулу полной вероятности для определения вероятности события A.
4) Найти условную вероятность $p_A(B)$ по формуле Байеса.

Пример 5.1. В каждой из двух урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар. Найти вероятность того, что шар черный.

Решение. Введем полную группу несовместных гипотез: H_1 – шар, извлеченный из первой урны, является черным, H_2 – шар, извлеченный из первой урны, является белым. Гипотезы образуют полную группу, так как их объединение есть достоверное событие. Вероятности этих несовместных гипотез равны

$$p(H_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5},\quad p(H_2)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}.$$

Найдем условные вероятности события A (из второй урны извлечен черный шар) при выполнении гипотез H_1 и H_2. При появлении события H_1 во второй урне будет содержаться 11 шаров: 7 черных и 4 белых. Поэтому условная вероятность события A при условии, что событие H_1 произошло, будет равна

$$p_{H_1}(A)=\frac{7}{11}.$$

Аналогично вычисляем условную вероятность события при условии, что произошло событие H_2. В этом случае во второй урне 11 шаров: 6 черных и 5 белых, поэтому

$$p_{H_2}(A) = \frac{6}{11}.$$

По формуле полной вероятности вычисляем вероятность события A

$$p(A) = p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + p(H_2) \cdot p_{H_2}(A) = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{11} + \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{11} = \frac{3}{5}.$$

Вероятность события A, извлечения черного шара из второй урны, равна вероятности извлечения черного шара из первой урны.

Пример 5.2. Три орудия производят стрельбу по трем целям. Каждое орудие выбирает себе цель случайным образом и независимо от других. Цель, обстрелянная одним орудием, поражается с вероятностью 0,8. Найти вероятности того, что из трех целей будут поражены две, а третья – нет.

Решение. Введем полную группу несовместных гипотез:

H_1 – обстреляны все три цели;

H_2 – две цели из трех обстреляны, а третья – нет;

H_3 – все орудия стреляют по одной цели;

Эти события несовместны и образуют полную группу, так как их объединение есть достоверное событие. Вероятность события H_1 равна

$$p(H_1) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9},$$

так как первое орудие всегда будет стрелять по какой-то цели, второе орудие будет стрелять по другой цели с вероятностью $\frac{2}{3}$, а третье орудие – по оставшейся необстрелянной цели с вероятностью $\frac{1}{3}$. Вероятность события H_3 равна

$$p(H_3) = 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}.$$

Так как $p(H_1) + p(H_2) + p(H_3) = 1$, то $p(H_2) = 1 - \frac{2}{9} - \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$.

Событие A наступает тогда, когда поражены ровно две цели из трех. Вычислим условные вероятности наступления события A при условии, что произошло одно из событий H_i (i = 1, 2, 3). Вероятность события A при условии, что произошло событие H_1, равна

$$p_{H_1}(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}8 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 0{,}384.$$

Первое слагаемое соответствует случаю, когда не поражена первая цель, второе – не поражена вторая цель, третье – не поражена третья цель, а остальные две цели поражены.

Вероятность события A при условии, что произошло событие H_3, равна нулю

$$p_{H_3}(A) = 0.$$

Вероятность события A при условии, что произошло событие H_2, равна

$$p_{H_2}(A) = 0{,}8 \cdot (1 - 0{,}2^2) = 0{,}768.$$

В этом случае по одной цели стреляет одно орудие (вероятность поражения равна 0,8), по другой цели стреляют два орудия (вероятность поражения – хотя бы одного попадания – равна $1 - 0{,}2^2$).

По формуле полной вероятности находим вероятность события A

$$p(A) = \frac{2}{9} \cdot 0{,}384 + \frac{2}{3} \cdot 0{,}768 + \frac{1}{9} \cdot 0 = 0{,}5973.$$

Пример 5.3. Шесть спортсменок (№1, №2, …, №6) приехали на сборы. Их расселили случайным образом в двух комнатах. Одна комната рассчитана на двух человек, другая – на четырех. Найти вероятность того, что спортсменки №1 и №2 окажутся в одной комнате.

Решение. Нам достаточно следить за заселением только комнаты, рассчитанной на двух человек. В четырехместной комнате будут жить спортсменки, не попавшие в двухместную комнату.

Введем полную группу несовместных гипотез:

H_1 – спортсменку №1 поселили в двухместную комнату;

H_2 – спортсменку №1 поселили в четырехместную комнату.

Это события несовместные. Они образуют полную группу, так как их объединение есть достоверное событие.

Вероятности гипотез равны

$$p(H_1) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad p(H_2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Чтобы произошло событие A (спортсменки №1 и №2 оказались в одной комнате) при условии, что произошло событие H_1, спортсменка №2 должна быть также заселена в двухместную комнату. Всего свободных мест 5, а в двухместной комнате свободно только одно место, поэтому условная вероятность события A здесь равна

$$p_{H_1}(A) = \frac{1}{5}.$$

Аналогично, при условии, что произошло событие H_2, спортсменка №2 должна быть заселена в четырехместную комнату. Всего свободных мест 5, а в четырехместной комнате свободны только три места, т.е. условная вероятность события A

$$p_{H_2}(A) = \frac{3}{5}.$$

По формуле полной вероятности получим

$$p(A) = p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + p(H_2) \cdot p_{H_2}(A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{7}{15}.$$

Пример 5.4. На вход радиолокационного устройства с вероятностью 0,2 поступает смесь полезного сигнала с помехой, а с вероятностью 0,8 – только одна помеха. Если поступает полезный сигнал с помехой, то устройство регистрирует наличие какого-то сигнала с вероятностью 0,95, а если помеха – с вероятностью 0,02. Известно, что устройство зарегистрировало наличие какого-то сигнала. Найти вероятность того, что в его составе имеется полезный сигнал.

Решение. Из условия задачи следует, что можно ввести следующую полную группу несовместных гипотез: H_1 – полезный сигнал на входе имеется, H_2 – полезного сигнала на входе нет. Вероятность этих событий равна $p(H_1) = 0{,}2$, $p(H_2) = 0{,}8$, а их сумма дает единицу.

Событие A наступает тогда, когда устройство регистрирует наличие какого-то сигнала. Условная вероятность события A при условии, что событие H_1 произошло, равна

$$p_{H_1}(A) = 0{,}95.$$

Условная вероятность события A при условии, что событие H_2 произошло, равна

$$p_{H_2}(A) = 0{,}02.$$

По условию задачи нужно определить вероятность наличия полезного сигнала, если устройство зарегистрировало какой-то сигнал, т.е. условную вероятность $p_A(H_1)$. Эта вероятность определяется по формуле Байеса

$$p_A(H_1) = \frac{p(H_1) \cdot p_{H_1}(A)}{p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + p(H_2) \cdot p_{H_2}(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}95}{0{,}2 \cdot 0{,}95 + 0{,}8 \cdot 0{,}002} = 0{,}922.$$

Пример 5.5. Батарея из трех орудий произвела залп, причем два снаряда попали в цель. Найти вероятность того, чтобы первое орудие дало попадание, если вероятности попадания в цель первым, вторым и третьим орудиями соответственно равны 0,4; 0,3; 0,5.

Решение. Введем полную группу несовместных гипотез: H_1 – первое орудие попало в цель, H_2 – первое орудие не попало в цель. Вероятности этих событий равны

$$p(H_1) = 0{,}4; \quad p(H_2) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6.$$

Событие A наступает тогда, когда два снаряда попадают в цель. Поэтому условная вероятность события A при условии, что событие H_1 произошло (первое орудие попало в цель) будет суммой двух слагаемых:

$$p_{H_1}(A) = 0{,}3 \cdot (1 - 0{,}5) + (1 - 0{,}3) \cdot 0{,}5 = 0{,}5.$$

Здесь первое слагаемое соответствует случаю, когда второе орудие попадает в цель, а третье не попадает. Второе слагаемое соответствует случаю, когда попадает в цель третье орудие, а второе не попадает.

Условная вероятность события A при условии, что событие H_2 произошло (первое орудие не попало в цель), равна

$$p_{H_2}(A) = 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}15,$$

так как в этом случае попадает в цель второе и третье орудия.

По формуле Байеса определяем искомую вероятность попадания в цель первого орудия при условии, что два снаряда попали в цель

$$p_A(H_1) = \frac{p(H_1) \cdot p_{H_1}(A)}{p(H_1) \cdot p_{H_1}(A) + p(H_2) \cdot p_{H_2}(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}5}{0{,}4 \cdot 0{,}5 + 0{,}6 \cdot 0{,}15} = 0{,}69.$$

6. ПОВТОРЕНИЕ ИСПЫТАНИЙ

6.1. Схема независимых испытаний. Формула Бернулли

Важным частным случаем применения формул сложения и умножения вероятностей является следующая схема. Пусть проводится конечное число n последовательных независимых испытаний, в каждом из которых возможно только два исхода: либо успех, либо противоположное событие – неудача. Такая последовательность испытаний называется *схемой Бернулли*, если вероятности успеха в каждом опыте одинаковы.

В схеме Бернулли одному испытанию соответствует множество элементарных исходов, состоящее из двух элементарных событий: $\{A, \overline{A}\}$, где A – успех, а $\overline{A}$ – неудача. Пусть вероятности успеха и неудачи в отдельном испытании равны: $p(A) = p$; $p(\overline{A}) = 1 - p = q$.

Событие, состоящее в том, что в n испытаниях событие A наступает ровно k раз, обозначим как событие Q_n^k. Пусть A_i означает, что событие A наступило в i-м испытании, а $\overline{A_i}$ – то, что событие A не наступило в i-м испытании, где i меняется от 1 до n. Выразим событие Q_n^k через события A_i и противоположные им события следующим образом:

$$Q_n^k = (A_1 \cap \ldots \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} \cap \ldots \cap \overline{A}_n) \cup \ldots \cup (\overline{A}_1 \cap \ldots \cap \overline{A}_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap \ldots \cap A_n),$$

где в первых скобках стоит последовательность событий, когда сначала имеют место все k успехов (событий A), а затем все $n - k$ неудач, в последних скобках – событие, когда наоборот сначала имеет место $n - k$ неудач, а затем k успехов. Между этими событиями заключены все возможные последовательности из k успехов и $n - k$ неудач. Вероятность любой такой последовательности событий, начиная с первой, по теореме умножения для независимых событий равна $p^k \cdot q^{n-k}$, т.е. одинакова. Количество подобных последовательностей равно числу сочетаний из n элементов по k, поскольку последовательность однозначно определяется комбинацией (порядок здесь не важен) номеров успешных испытаний, длина комбинации таких номеров равна k, и номера выбираются из множества всех возможных номеров от 1 до n. Далее по теореме сложения для несовместных событий получаем $p(Q_n^k) = C_n^k p^k q^{n-k}$.

Таким образом, мы вывели *формулу Бернулли*, определяющую вероятность $p_n(k)$ того, что в n испытаниях произошло ровно k успехов,

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{6.1}$$

где C_n^k – число сочетаний по k элементов из n.

В ряде задач представляет интерес наивероятнейшее число успехов, т.е. такое число успехов m^*, вероятность которого самая большая при данном n. Это число находится в интервале единичной длины вблизи точки np:

$$np - q \le m^* \le np + p.$$

6.2. Предельные теоремы Лапласа

Формула Бернулли верна при любом n, но при большом числе опытов по ней затруднительно проводить вычисления. В случае больших n удобнее пользоваться приближенными формулами.

Если n велико, то применяется *локальная формула Муавра–Лапласа*

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad (6.2)$$

где $0{,}1 \le p \le 0{,}9$; $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$.

Функция $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ табулирована (см. табл. 1 в *Приложении*). Эта функция имеет следующие свойства:

1) $\varphi(x)$ – четная и имеет максимум при $x = 0$;
2) точки перегиба $x = \pm 1$;
3) при $x \ge 5$ функция мала, т.е. $\varphi(x) \to 0$.

При больших значениях n для вычисления вероятности того, что произойдет от k_1 до k_2 событий по схеме Бернулли, используется *интегральная формула Муавра–Лапласа*

$$p_n(k_1 \le k \le k_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (6.3)$$

где $x_1 = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $\Phi(x)$ – функция Лапласа, значения которой приведены в табл. 2 *Приложения*.

Функция Лапласа $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t$ имеет следующие свойства:

1) $\Phi(-x) = -\Phi(x)$ – функция нечетная;
2) функция $\Phi(x)$ монотонно возрастает;
3) при больших x ($x \ge 5$) $\Phi(x) \to 1/2$ ($y = \pm 0{,}5$ – горизонтальные асимптоты), поэтому функция $\Phi(x)$ представлена в *Приложении* только для $0 \le x \le 5$.

Вероятность отклонения относительной частоты m/n от вероятности p в независимых испытаниях не более, чем на некоторое число $\varepsilon > 0$, вычисляется по формуле

$$p_n\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \qquad (6.4)$$

6.3. Распределение Пуассона

Рассмотрим, как ведут себя биномиальные вероятности при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np \to \lambda$, т.е. когда проводят большое число наблюдений “редких” событий ($np \approx npq$). В этом случае имеем

$$p_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \xrightarrow{n\to\infty,\, p\to 0,\, np=\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = p(k). \tag{6.5}$$

Предельные вероятности $p(k)$ в схеме независимых испытаний

$$p(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \ k = 0, 1, 2, \ldots$$

называются *пуассоновскими*.

6.4. Решение типовых примеров

Методические замечания. Следует руководствоваться следующим алгоритмом:

1) Понять, включает ли задача схему Бернулли, и если да, то определить значения параметров схемы: p, q, n.

2) Если n сравнительно мало, то применить формулу Бернулли.

3) Если n велико и p, $q > 0{,}1$, то использовать приближенную локальную или интегральную формулу Муавра−Лапласа.

4) Если n велико, а p мало ($p < 0{,}1$), то следует найти $\lambda = np$ и применить приближенную формулу распределения Пуассона.

Пример 6.1. Некоторый стрелок попадает в цель с вероятностью 0,6. Он собирается произвести 10 выстрелов. Найти вероятность того, что он попадет в цель: а) три раза, б) хотя бы один раз, в) наивероятнейшее число попаданий в цель.

Решение. В формуле Бернулли параметры равны

$$p = 0{,}6,\ \ q = 1 - p = 1 - 0{,}6 = 0{,}4,\ \ n = 10.$$

Теперь можно вычислить искомые вероятности:

а) $p_{10}(3) = C_{10}^3 p^3 q^{10-3} = \dfrac{10!}{(10-3)!3!} \cdot 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^7 \approx 0{,}255;$

б) $p_{10}(k \ge 1) = 1 - C_{10}^0 p^0 q^{10-0} = 1 - 0{,}4^{10};$

в) $10 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le k_0 \le 10 \cdot 0{,}6 + 0{,}6$, $\ 5{,}6 \le k_0 \le 6{,}6$, $\ k_0 = 6.$

Пример 6.2. Стрелок выполнил 400 выстрелов. Найти вероятность 325 попаданий, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,8.

Решение. Так как число испытаний (выстрелов) достаточно велико, то можно использовать локальную формулу Муавра–Лапласа (npq = 400·0,8·0,2 = 64 ≥ 10). Следовательно, по формуле

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

имеем

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где $x = \dfrac{k - np}{\sqrt{npq}}$. Окончательно,

$$p_{400}(325) \approx \frac{1}{\sqrt{64}} \varphi(0,63) \approx \frac{1}{8} \cdot 0,3271 \approx 0,041.$$

Пример 6.3. Стрелок выполнил 400 выстрелов, вероятность одного попадания равна 0,8. Найти вероятность того, что он попадет от 310 до 325 раз.

Решение. Согласно интегральной формуле Муавра–Лапласа имеем

$$p_{400}(310 \le x \le 325) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

где

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{325 - 320}{\sqrt{64}} = \frac{5}{8} = 0,63,$$

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{310 - 320}{\sqrt{64}} = \frac{-10}{8} = -1,25.$$

Окончательно,

$$p_{400}(310 \le x \le 325) = \Phi(0,63) - \Phi(-1,25) = \Phi(0,63) + \Phi(1,25) =$$
$$= 0,2357 + 0,3944 = 0,6301.$$

Пример 6.4. В каждом из 10000 независимых испытаний вероятность события p = 0,75. Найти вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от вероятности события по абсолютной величине не более чем на 0,0001.

Решение. По условию задачи n = 10000, p = 0,75, q = 1 – p = 1 – 0,75 = 0,25, ε = 0,0001. Следовательно,

$$p_{10000}\left(\left|\frac{m}{n} - 0,75\right| < 0,0001\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(0,0001 \cdot \sqrt{\frac{10000}{0,75 \cdot 0,25}}\right) =$$
$$= 2\Phi(0,23) = 0,182.$$

Таким образом, вероятность того, что отклонение относительной частоты успеха от его вероятности в 10000 независимых испытаниях не превысит 0,0001, равна 0,182.

Пример 6.5. Завод отправил 5000 качественных изделий. Вероятность того, что в пути разбили одно изделие 0,0002. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено:

а) 3 изделия;

б) 1 изделие;

в) не более трех изделий.

Решение. В задаче рассматривается случай большого числа “редких” событий. При решении задачи нужно воспользоваться формулой Пуассона

$$p(k) \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

где $\lambda = np = 5000 \cdot 0,0002 = 1$. Теперь можно найти:

а) при $к$ = 3 $p_{5000}(3) \approx \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0,061;$

б) при $к$ = 1 $p_{5000}(1) \approx \frac{1^3}{1!} e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0,366;$

в) $p_{5000}(0 \le x \le 3) = p_{5000}(0) + p_{5000}(1) + p_{5000}(2) + p_{5000}(3) =$

$$= \frac{1}{e} + \frac{1}{e} + \frac{1}{2e} + \frac{1}{6e} = \frac{16}{6e} = \frac{8}{3e} \approx 0,981.$$

7. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

7.1. Случайная величина. Функция распределения

Под случайной величиной понимается величина, которая в ряде повторных опытов может принимать различные значения и в каждом осуществлении опыта принимает одно и только одно значение, заранее неизвестно какое (зависящее от случайного исхода опыта).

Такое определение случайной величины понятно, но не конструктивно – его нельзя использовать в математике. В теории вероятностей случайная величина должна быть определена строго, на основе понятия случайного события, теория для которого изложена выше.

Нетрудно заметить связь между случайным событием и случайной величиной. Например, значение физической случайной величины есть результат ее измерения. В то же время любое произведенное измерение – это сложное событие, являющееся пересечением случайных событий, которые имели место в процессе измерения и были связаны с состоянием измерительного прибора, а также физическими условиями при измерении и т.д.).

Можно сказать, что существует некоторая однозначная связь между значениями случайной величины и случайными событиями. Поэтому определим случайную величину как функцию, которая элементарному событию сопоставляет число – значение случайной величины.

Случайной величиной ξ будем называть действительную числовую функцию $\xi = \xi(\omega),\ \omega \in \Omega$, определенную на множестве Ω элементарных событий рассматриваемой задачи, для которой определена вероятность $p(\xi \in B) = p\{\omega : \xi(\omega) \in B\}$ принадлежности ξ каждому из заданных множеств B числовой оси ($B \in R^1$).

По сути, такая функция каждому исходу ставит в соответствие определенное число. В качестве множеств B обычно рассматриваются интервалы вида (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$ и их объединения. Вероятность $p(\xi \in B)$ может быть вычислена, если известна вероятность $p(\xi < x) = p\{\omega: \xi(\omega) < x\}$.

Функцией распределения $F_\xi(x)$ случайной величины ξ называется вероятность события $(\xi < x)$, рассматриваемая как функция переменной x ($x \in R^1$):

$$F_\xi(x) = p(\xi < x). \tag{7.1}$$

Если не возникает недоразумений, то пишут просто $F_\xi(x) = F(x)$.

Свойства функции распределения:

1) $F(x) \ge 0$, поскольку функция распределения есть вероятность;
2) $F(x)$ – неубывающая функция: $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$, поскольку разность $F(x_2) - F(x_1)$ есть вероятность попадания в интервал $[x_1, x_2)$;
3) $F(-\infty) = 0,\ F(\infty) = 1$, т.к. $(\xi < -\infty)$ есть невозможное событие, а $(\xi < \infty)$ –

достоверное событие.

4) непрерывность слева: $\lim\limits_{\varepsilon>0,\, \varepsilon\to 0} F(x-\varepsilon)=F(x)$ (важна в точках разрыва).

Если $x = x_k$ – точка разрыва непрерывности функции $F(x)$, то величина скачка равна вероятности событий ($\xi=x_k$)

$$F(x_k+0)-F(x_k)=p(\xi=x_k). \tag{7.2}$$

Если в точке $x=x_k$ функция $F(x)$ непрерывна, то

$$p(\xi=x_k)=0. \tag{7.3}$$

Задачи вычисления вероятностей вида $p(\xi\in B)$ с помощью функции распределения $F(x)$ решаются с использованием следующей формулы:

$$p(\xi\in[a,b))=p(a\le\xi<b)=F(b)-F(a); \tag{7.4}$$

для непересекающихся интервалов $[a_i, b_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, m$, имеем

$$p(\xi\in\bigcup_{i=1}^{m}[a_i,b_i))=\sum_{i=1}^{m}p(\xi\in[a_i,b_i)). \tag{7.5}$$

Замечание. Функция распределения $F_\xi(x)$ определена для любого x и позволяет вычислить вероятность попадания величины ξ в любое множество, для которого есть понятие длины, т.е. функция распределения содержит максимальную информацию о случайной величине.

7.2. Дискретная случайная величина

Случайная величина ξ называется *дискретной*, если множество ее возможных значений конечное ($\{x_i\}_{i=1}^{n}$) или счетное ($\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$) (т.е. множество Ω дискретно).

В соответствии с определением и свойством (7.2) функция распределения дискретной случайной величины является кусочно-постоянной функцией и однозначно определяется положением точек разрыва x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) и величиной скачков (7.2) в этих точках.

Соответствие между последовательностями x_i и $p_i = p(\xi = x_i)$ ($i = 1, 2, ..., n$) называется *законом* (*рядом*) *распределения* дискретной случайной величины. Обычно он представляется в виде таблицы, в первой строке которой указаны все возможные значения случайной величины, а во второй – соответствующие вероятности:

x_i	x_1	x_2	…	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	…	p_n

Вероятность $p(\xi\in[a, b))$ вычисляется по формуле, вытекающей из (7.4) и свойств $F(x)$

$$p(\xi \in [a,b)) = \sum_{x_i \in [a,b)} p_i.$$

Кроме того, справедливо условие нормировки

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{x_i \in (-\infty,\infty)} p(\xi = x_i) = 1. \qquad (7.6)$$

Функция распределения дискретной случайной величины представляет собой ступенчатую функцию, имеющую разрывы (скачки) в точках, соответствующих возможным значениям случайной величины, при этом величина разрывов равна вероятностям этих значений, т.е.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x \le x_1; \\ p_1 & x_1 < x \le x_2; \\ p_1 + p_2 & x_2 < x \le x_3; \\ \ldots & \ldots \\ 1 & x_n < x. \end{cases}$$

Математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ, принимающей возможные значения x_i с вероятностями $p_i = p(\xi=x_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, называется неслучайная величина $M[\xi]$, определяемая формулой

$$M[\xi] = m_\xi = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i, \qquad (7.7)$$

где n – число возможных значений.

Свойства математического ожидания:

1) $M[C] = C,$ если C – константа;
2) $M[C \cdot \xi] = C \cdot M[\xi];$ (7.8)
3) $M[\xi + \eta] = M[\xi] + M[\eta].$

Математическое ожидание случайной величины η, являющейся функцией случайной величины ξ, т.е. $\eta = \varphi(\xi),$ определяется формулой

$$M[\eta] = m_\eta = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot p_i. \qquad (7.9)$$

Дисперсией $D[\xi]$ случайной величины ξ называется неслучайная величина, определяемая формулой

$$D[\xi] = M\left[\dot{\xi}^2\right] = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_\xi)^2 \cdot p_i, \qquad (7.10)$$

где $\dot{\xi} = \xi - m_\xi$ – центрированная случайная величина. Для вычислений дисперсии удобен другой вариант формулы (7.10)

$$D[\xi] = M\left[\dot{\xi}^2\right] = M\left[(\xi - M_\xi)^2\right] = M\left[\xi^2\right] - M^2[\xi] = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i - m_\xi^2. \qquad (7.11)$$

Свойства дисперсии:

1) $D[C]=0$, если C – константа;
2) $D[C \cdot \xi]=C^2 \cdot D[\xi]$; (7.11а)
3) $D[\xi+\eta]=D[\xi]+D[\eta]$, если ξ, η – независимые случайные величины.

Величина $\sigma_\xi=\sqrt{D[\xi]}$ называется *средним квадратичным отклонением* случайной величины ξ.

Вероятностный смысл $M[\xi]$ и $D[\xi]$ заключается в том, что математическое ожидание дает среднее значение случайной величины, а дисперсия (и среднее квадратическое отклонение) характеризует степень ее отклонения от этого среднего значения.

Начальные моменты α_k и *центральные моменты* β_k порядка k случайной величины ξ определяются как математическое ожидание k-й степени величины и центрированной величины (ξ – M[ξ]) соответственно:

$$\alpha_k=M[\xi^k]=\sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i\,, \qquad (k=1, 2, \ldots);$$
$$\beta_k=M[\dot{\xi}^k]=\sum_{i=1}^{n} (x_i-m_\xi)^k \cdot p_i\,, \qquad (k=1, 2, \ldots). \tag{7.12}$$

Можно показать, что любой центральный момент выражается через начальные и наоборот – начальные через центральные и α_1. Например, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \alpha_2 - (\alpha_1)^2$ и т.д.

Нетрудно видеть, что $\alpha_1 = M[\xi]$ и $\beta_2 = D[\xi]$. Совокупность всех начальных моментов случайной величины эквивалентна заданию функции распределения, т.е. содержит всю информацию о поведении случайной величины. Однако во многих практических случаях достаточно определения лишь нескольких моментов.

Замечание. Рассмотрим физический смысл дисперсии и среднего квадратичного отклонения.

Пусть значения некоторой случайной величины выражены в метрах (например, измеряемая длина чего-либо). Тогда ее математическое ожидание согласно формуле (7.7) будет иметь размерность метров, а дисперсия согласно (7.10) – метров в квадрате. Сравнивать метры и метры в квадрате, т.е. математическое ожидание и дисперсию, бессмысленно.

С другой стороны, среднее квадратическое отклонение, являясь корнем квадратным из дисперсии, имеет размерность метров. Его можно и более того нужно сопоставлять с математическим ожиданием.

Практика показывает, что отклонение любого значения случайной величины ξ (скажем, результата измерения) от ее среднего значения (математического ожидания) $M[\xi]$ и среднее квадратическое отклонение σ_ξ обычно являются величинами одного порядка, т.е.

$$|\xi - M[\xi]| \sim \sigma_\xi .$$

Можно строго доказать, что с вероятностью более 89% отклонение любой случайной величины ξ от ее математического ожидания $M[\xi]$ не превосходит трех σ_ξ, точнее

$$p(|\xi - M[\xi]| < 3\sigma_\xi) > \frac{8}{9},$$

Иными словами, чем больше дисперсия и среднее квадратическое отклонение, тем шире область, в которую будут попадать значения случайной величины (как говорят, тем больше разброс ее значений). На практике можно пользоваться оценкой

$$p(M[\xi] - \sigma_\xi < \xi < M[\xi] + \sigma_\xi) \approx 0{,}6 - 0{,}8 ,$$

которая, как правило, справедлива.

7.3. Непрерывная случайная величина

Случайная величина ξ называется *непрерывной*, если ее функция распределения $F(x)$ непрерывна при всех значениях x.

Для любого из возможных значений x непрерывной случайной величины ξ выполняется условие (7.3), и поэтому имеет смысл лишь вычисление вероятностей вида $p(\xi \in B)$, где $B = [a, b)$ – конечный интервал (или объединение таких интервалов).

Иными словами, вероятность того, что непрерывная случайная величина примет какое-либо конкретное значение, равна нулю. Отличной от нуля является вероятность попадания в какой-то конечный интервал. Для вычисления такой вероятности используется общая формула (7.4).

Случайная величина ξ называется *абсолютно непрерывной* (распределенной с некоторой плотностью), если существует такая интегрируемая неотрицательная функция $f(x)$, что при любом x

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.13}$$

Функция $f(x)$, называемая *плотностью распределения вероятности*, соответственно равна

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x}, \tag{7.14}$$

и удовлетворяет условиям, следующим из свойств $F(x)$:

1) $f(x) \geq 0$, так как $F(x)$ – неубывающая функция;

2) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1,$ так как $p(-\infty < \xi < \infty) = 1;$ (7.14а)

3) $f(\pm\infty) = 0.$

Обычно непрерывной называют абсолютно непрерывную случайную величину. В соответствии с формулами (7.4) и (7.13) для вероятности попадания случайной величины в интервал ($a \le \xi < b$) имеет место равенство

$$p(a \le \xi < b) = \int\limits_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x.$$

Вероятностный смысл плотности распределения заключается в том, что она равна отношению вероятности попадания случайной величины в элементарный интервал к длине этого интервала.

Непрерывную случайную величину ξ можно задать, используя либо плотность распределения вероятности $f_\xi(x)$, либо функцию распределения $F_\xi(x)$. Приближенно такую величину можно охарактеризовать несколькими ее моментами.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины ξ называется неслучайная величина, определяемая равенством

$$M[\xi] = m_\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.15}$$

Математическое ожидание функции $\eta = \varphi(\xi)$ находится по аналогичной формуле

$$M[\varphi(\xi)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \cdot f(x)\mathrm{d}x. \tag{7.16}$$

Для дисперсии $D[\xi]$ имеем

$$D[\xi] = M[\dot{\xi}^2] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x \tag{7.17}$$

или

$$D[\xi] = M[\xi^2] - M^2[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\mathrm{d}x - m_\xi^2. \tag{7.18}$$

Свойства математического ожидания и дисперсии определяются прежними соотношениями (7.8) и (7.11а).

Начальные α_k и центральные β_k моменты определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= M[\xi^k] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x)\mathrm{d}x \qquad (k = 1, 2, \ldots); \\ \beta_k &= M[\dot{\xi}^k] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m_\xi)^k \cdot f(x)\mathrm{d}x \qquad (k = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{7.19}$$

7.4. Функция случайных величин

Величина $\eta = \varphi(\xi)$, являющаяся функцией случайной величины ξ, также является случайной величиной.

Основные задачи сводятся к определению ее характеристик – законов распределения и числовых характеристик по аналогичным характеристикам случайного аргумента.

Пусть ξ – дискретная случайная величина, заданная законом (рядом) распределения

$$x_i,\ p_i = p(\xi = x_i), \quad \text{где } i = 1, 2, ..., n.$$

Учитывая, что возможные значения y_i случайной величины η определяется соотношениями $y_i = \varphi(x_i)$ и $p(\eta = y_i) = p(\xi = x_i) = p_i$, получаем закон распределения для η

$$y_i = \varphi(x_i), \quad p_i = p(\xi = x_i),, \quad \text{где } i = 1, 2, ..., n. \qquad (7.20)$$

При неоднозначности функции $\varphi(\xi)$ нескольким x_i может отвечать одно y_j ($j = 1, 2, ..., m,\ m<n$). В таком случае соответствующие вероятности p_i следует просуммировать.

Для числовых характеристик справедливы формулы, вытекающие из (7.9)

$$M[\eta] = m_\eta = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) \cdot p_i, \qquad (7.21)$$

$$D[\eta] = M[\dot{\eta}^2] = \sum_{i=1}^{n} [\varphi(x_i) - m_\eta]^2 \cdot p_i. \qquad (7.22)$$

7.5. Примеры распределений случайных величин

Рассмотрим несколько часто встречающихся распределений случайных величин: биномиальное и пуассоновское распределение дискретных случайных величин, а также равномерный, показательный и нормальный законы распределения непрерывных случайных величин.

7.5.1. Биномиальное распределение (распределение Бернулли)

Распределением Бернулли называется распределение случайной величины ξ – числа успехов в серии из n независимых испытаний. В частности, эта величина возникает когда проводят несколько опытов по наблюдению случайного события A; тогда вероятностью успеха является вероятность события $p = p(A)$. Вероятности отдельных значений ξ = 0, 1, 2, ..., n находятся по формуле Бернулли, и все вместе образуют ряд распределения

x_k	0	1	...	k	....	n
p_k	q^n	npq^{n-1}	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	p^n

Условие нормировки для распределения Бернулли следует из формулы (бином Ньютона)

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

Числовые характеристики распределения можно найти разными способами. Можно напрямую воспользоваться формулами (7.7), (7.11). Другой способ вычисления заключается в том, что случайную величину ξ представляют как сумму независимых случайных величин ξ_k

$$\xi = \sum_{k=1}^{n} \xi_k.$$

Пусть каждая случайная величина ξ_k отвечает отдельному испытанию. Очевидно, что ξ_k равна нулю с вероятностью $q = 1 - p$ и равна единице с вероятностью p. Числовые характеристики ξ_k вычисляются следующим образом:

$$M[\xi_k] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p, \quad D[\xi_k] = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p - p^2 = pq.$$

Математическое ожидание самой случайной величины ξ равно сумме математических ожиданий ξ_k

$$M[\xi] = \sum_{k=1}^{n} M_{\xi_k} = \sum_{k=1}^{n} p = np, \tag{7.23}$$

а дисперсия, учитывая независимость отдельных ξ_k, равна сумме дисперсий ξ_k

$$D[\xi] = \sum_{k=1}^{n} D_{\xi_k} = \sum_{k=1}^{n} pq = npq. \tag{7.24}$$

7.5.2. Распределение Пуассона

Предельным случаем распределения Бернулли при $n \to \infty$, $p \to 0$, $np = \lambda$ является *распределение Пуассона*

$$p(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Это распределение широко применяется в теории массового обслуживания. Например, оно определяет вероятность числа k вызовов на АТС в единицу времени при средней интенсивности вызовов λ. Другими примерами могут служить поступление вызовов на пункт медицинской помощи, приход клиентов в предприятие бытового обслуживания, последовательность отказов технических элементов.

Ряд распределения имеет вид:

x_k	0	1	...	k	...
p_k	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	...	$\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	...

Можно доказать, что при предельном переходе $n \to \infty, p \to 0$ таком, что $n \cdot p = \lambda$, биномиальное распределение переходит в распределение Пуассона, т.е.

$$p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \xrightarrow[n\to\infty,\, p\to 0,\, np\to\lambda]{} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Поэтому математическое ожидание и дисперсию пуассоновского распределения можно найти, используя предельный переход в формулах для математического ожидания и дисперсии распределения Бернулли ($p \to 0$, $q \to 1$)

$$M[\xi] = \lim_{n\to\infty,\, np\to\lambda} np = \lambda; \quad D[\xi] = \lim_{n\to\infty,\, np\to\lambda} npq = \lambda.$$

Результат можно проверить прямым счетом по формулам (7.7), (7.11). Например, для математического ожидания имеем

$$M[\xi] = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda.$$

Замечание. Распределение Пуассона возникает при *простейшем* или *пуассоновском* потоке случайных событий, т.е. потоке, который имеет следующие свойства:

1) отсутствие последействия (т.е. вероятность наступления события не зависит от предыстории);
2) ординарность (два и более событий не могут наступать одновременно);
3) стационарность (плотность потока постоянна во времени).

Плотностью потока ρ называется количество событий, наступивших в единицу времени. Количество событий, имевших место в интервале времени от T до $T + \Delta t$, является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона с параметром $\lambda = \rho\, \Delta t$.

7.5.3. Равномерный закон распределения

Встречаются непрерывные случайные величины, имеющий *равномерный закон*, когда плотность распределения вероятности имеет вид

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < a; \\ C & a \le x \le b; \\ 0 & b < x, \end{cases}$$

где C – некоторая постоянная, которая определяется из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} 0\, \mathrm{d}x + \int_{a}^{b} C \mathrm{d}x + \int_{b}^{\infty} 0 dx = Cx\Big|_a^b = C(b-a) = 1.$$

Как следствие, $C = 1/(b-a)$.

Функция распределения равномерного закона имеет вид

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < a; \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b; \\ 1 & b < x. \end{cases}$$

Вероятность попадания значения в интервал [α, β], где $\beta < b$ и $a < \beta$, есть

$$p(\alpha \le \xi \le \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f_{\xi}(x)\mathrm{d}x = F_{\xi}(\beta) - F_{\xi}(\alpha) = \frac{\beta-\alpha}{b-a}. \qquad (7.25)$$

Математическое ожидание и дисперсия равны соответственно:

$$M[\xi] = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2} = \frac{a+b}{2};$$

$$D[\xi] = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} x^2\mathrm{d}x - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

7.5.4. Показательный закон распределения

В теории массового обслуживания время обслуживания одной заявки распределено по *показательному закону*, плотность распределения вероятности которого имеет вид ($\mu > 0$)

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} \mu e^{-\mu x}, & x \ge 0, \\ 0 \quad , & x < 0. \end{cases}$$

График плотности распределения вероятности приведен на рис. 7.1.

Условие нормировки плотности распределения вероятности легко проверяется

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} \mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} e^{-z}\mathrm{d}z = 1,$$

где $z = \mu x$, $\mathrm{d}z = \mu\, \mathrm{d}x$.

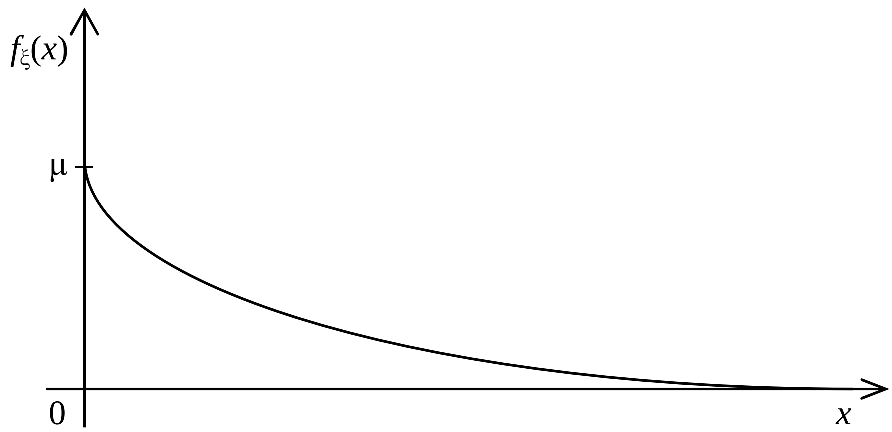

Рис. 7.1. Плотность распределения вероятности при показательном законе.

Функция распределения показательного закона имеет вид

$$F_\xi(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f_\xi(y)\mathrm{d}y=\int\limits_0^x \mu e^{-\mu y}\mathrm{d}y=\int\limits_0^{\mu x} e^{-z}\mathrm{d}z=1-e^{-\mu x},$$

где $z = \mu\, y$, $\mathrm{d}z = \mu\ \mathrm{d}y$.

Найдем теперь математическое ожидание и выясним содержательный смысл параметра μ. Математическое ожидание (среднее время обслуживание одной заявки) найдем интегрированием по частям

$$M[\xi]=\int\limits_0^\infty x\mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\mu}\int\limits_0^\infty ze^{-z}\mathrm{d}z=\frac{1}{\mu}(-ze^{-z}\Big|_0^\infty+\int\limits_0^\infty e^{-z}\mathrm{d}z)=\frac{1}{\mu},$$

где $z = \mu\, x$, $\mathrm{d}z = \mu\ \mathrm{d}x$.

Таким образом, среднее время обслуживания обратно пропорционально μ. В свою очередь $\mu=1/M[\xi]$ – среднее число заявок, обслуженных в единицу времени, или интенсивность обслуживания.

Дисперсию показательной случайной величины находим, дважды интегрируя по частям

$$D[\xi]=\int\limits_0^\infty x^2\mu e^{-\mu x}\mathrm{d}x-\frac{1}{\mu^2}=\frac{1}{\mu^2}\int\limits_0^\infty z^2e^{-z}\mathrm{d}z-\frac{1}{\mu^2}=\frac{2}{\mu^2}-\frac{1}{\mu^2}=\frac{1}{\mu^2}.$$

где $z = \mu\, x$, $\mathrm{d}z = \mu\ \mathrm{d}x$.

Замечание. Покажем, что для простейшего (пуассоновского) потока событий интервал времени между соседними событиями есть случайная величина ξ, имеющая показательный закон.

Функция распределения для такой величины η есть

$$F_\eta(x)=p(\eta<x)=1-p(\eta>x).$$

Событие $(\eta > x)$ означает, что за интервал времени $[0, x)$ не имело места не одного события потока. Число событий за интервал времени $\Delta t = x$ при плотности потока ρ, как отмечалось выше, есть случайная величина ξ с пуассоновским распределением и $\lambda = \rho\ \Delta t$. Поскольку событие $(\eta > x)$ означает $\xi = 0$, то

$$p(\eta>x)=p(\xi=0)=\frac{\lambda^0}{0!}e^{-\lambda}=e^{-\lambda}.$$

Возвращаясь к величине η, получаем показательный закон для ее плотности распределения вероятности

$$f_\eta(x)=F'_\eta(x)=(1-e^{-\lambda})'=\lambda e^{-\lambda}.$$

7.5.5. Нормальный закон распределения

Нормальное распределение (распределение Гаусса) занимает в теории вероятностей особо важное место, поскольку согласно центральной предельной теореме достаточно большая сумма независимых случайных величин имеет распределение близкое к нормальному. В частности, биномиальное распределение при $n \to \infty$ стремится к нормальному.

Плотность распределения вероятности *нормального закона* имеет следующий вид:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

Проверим условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z = 1,$$

где $z = \dfrac{x-a}{\sigma}$, $\mathrm{d}z = \dfrac{1}{\sigma}\mathrm{d}x$.

При вычислении нормировки мы воспользовались известным результатом, а именно интегралом Пуассона

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z = \sqrt{2\pi}.$$

На рис. 7.2 приведено семейство кривых нормальных плотностей в зависимости от параметров a и σ. С геометрической точки зрения параметр a – точка максимума плотности и центр симметрии; σ определяет крутизну кривой и величину максимума.

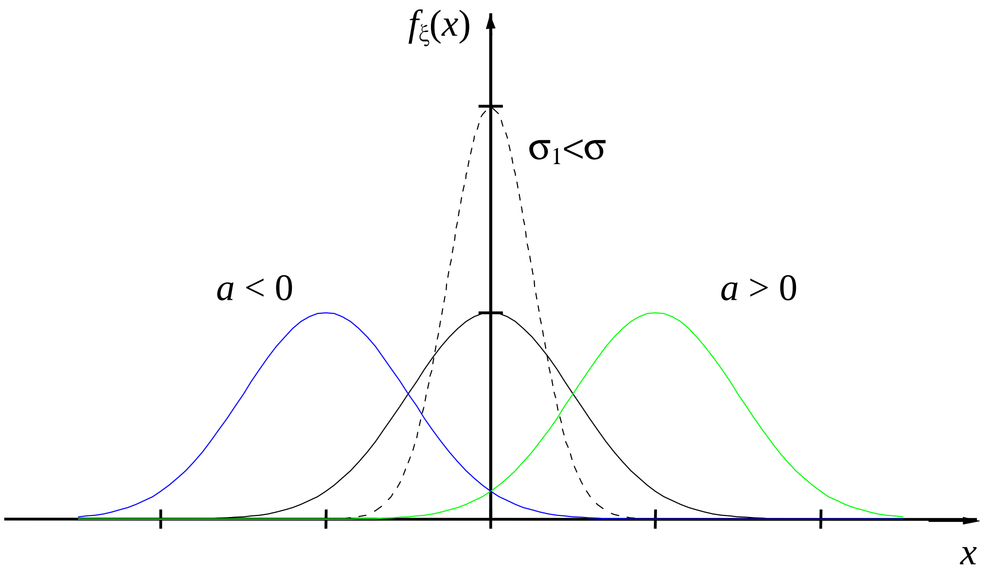

Рис. 7.2. Плотности распределения вероятности при нормальном законе

Выясним теперь теоретико-вероятностный смысл параметров. С учетом замены переменных $z = (x - a) / \sigma$ имеем

$$M[\xi]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ze^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=0+a=a.$$

Первый равен нулю, как интеграл от нечетной функции по симметричному относительно нуля интервалу, второй интеграл сводится к интегралу Пуассона.

Таким образом, параметр a является математическим ожиданием нормальной случайной величины.

При вычислении дисперсии необходимо проинтегрировать по частям дважды

$$D[\xi]=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(x\text{-}a)^2\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z^2e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(-ze^{-\frac{z^2}{2}}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z\right)=\sigma^2.$$

Отсюда σ^2 – это дисперсия нормальной случайной величины, а σ – ее среднее квадратическое отклонение.

Определение вероятности попадания нормальной случайной величины в интервал требует введения специальной функции – *функции Лапласа*

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t,$$

поскольку интеграл от нормальной плотности не выражается в известных элементарных функциях.

С использованием этой функции получаем

$$p(\alpha<\xi<\beta)=\int_{\alpha}^{\beta}f_{\xi}(x)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}\mathrm{d}z=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

и аналогично функцию распределения для нормального закона

$$F_{\xi}(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Если интервал является симметричным относительно математического ожидания, то формула упрощается

$$p(a-t\cdot\sigma<\xi<a+t\cdot\sigma)=2\Phi(t).$$

Отметим два следствия из последнего соотношения.

Во-первых, поскольку функция Лапласа достаточно быстро приближается к своим предельным значениям, например, $2\Phi(3)\approx 0{,}9973$, то справедливо так называемое *правило "трех сигм"*: теоретически нормальная плотность распределения вероятности отлична от нуля при любых значениях x, однако практически значения случайной величины ξ сосредоточена на отрезке $a \pm 3\sigma$:

$$p(a-3\cdot\sigma<\xi<a+3\cdot\sigma)=2\Phi(3)\approx 0{,}9973.$$

Вероятность попадания вне этого отрезка всего 0,0027.

Во-вторых, формула позволяет строить интервал с заданной вероятностью попадания – подобную задачу часто приходится решать в математической статистике.

Интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна числу p, строится следующим образом.

Вначале, пользуясь таблицей функции Лапласа, находим t_p из условия $2\Phi(t_p)=p$. Затем строим интервал, удовлетворяющий заданному условию:

$$p(a-t_p\cdot\sigma<\xi<a+t_p\cdot\sigma)=2\Phi(t_p)=p\,.$$

7.6. Решение типовых примеров

Методические замечания. Следует помнить, что:

1) Каждый закон распределения удовлетворяет условию нормировки (7.6) или (7.14а).
2) Дисперсию случайных величин часто удобнее вычислять по формулам (7.11) или (7.18).
3) Математическое ожидание и дисперсия случайных величин, имеющих какое-либо из рассмотренных в п. 7.5 распределений, можно легко найти по приведенным общим формулам (например, для биномиального распределения по формулам (7.23), (7.24) и т.д.).

Пример 7.1. Восстановить следующий закон распределения дискретной случайной величины ξ (т.е. определить x_1, x_3, p_2):

x_i	x_1	0	x_3
p_i	0,5	p_2	0,3

если известно, что $m_\xi=-0{,}2;\ \mathrm{D}[\xi]=0{,}76$.

Решение. Для отыскания трех неизвестных x_1, x_3, p_2 нужно составить систему трех уравнений.

Первое уравнение запишем, используя условие $m_\xi=-0{,}2$. В соответствии с соотношением (7.7) имеем

$$x_1 \cdot 0{,}5 + 0 \cdot p_2 + x_3 \cdot 0{,}3 = -0{,}2.$$

Второе уравнение запишем, используя условие $D[\xi] = 0{,}76$. Так как в соответствии с уравнением (7.11) имеем

$$x_1^2 \cdot 0{,}5 + 0^2 \cdot p_2 + x_3^2 \cdot 0{,}3 - (-0{,}2)^2 = 0{,}76.$$

Третье уравнение получим, воспользовавшись условием нормировки $\sum_{i=1}^{3} p_i = 1$, которое дает

$$0{,}5 + p_2 + 0{,}3 = 1.$$

Кроме того, так как значения x_1, x_2, x_3 пишутся в возрастающем порядке, то у нас имеется еще одно неявное условие:

$$x_1 < 0 < x_3.$$

Таким образом, получаем систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &0{,}5 \cdot x_1 + 0{,}3 \cdot x_3 = -0{,}2\ ,\\ &0{,}5 \cdot x_1^2 + 0{,}3 \cdot x_3^2 = 0{,}8\ ,\\ &0{,}5 + p_2 + 0{,}3 = 1\ \ , \end{aligned}\right\}$$
$$x_1 < 0 < x_3.$$

Решая ее, находим: $x_1 = -1$, $x_3 = 1$, $p_2 = 0{,}2$, и искомый закон распределения принимает вид

x_i	–1	0	1
p_i	0,5	0,2	0,3

Пример 7.2. Известна вероятность события *A*: *p*(*A*) = 0,5.Случайная величина ξ – число появлений *A* в трех опытах. Требуется построить ряд распределения случайной величины ξ в трех опытах; найти ее математическое ожидание и дисперсию.

Решение. Ряд распределения ξ мы построим, если найдем все возможные значения ξ и соответствующие вероятности. В трех опытах число успехов может быть 0, 1, 2 или 3. Вероятности определим по формуле Бернулли:

$$p(\xi = 0) = C_3^0 (0{,}5)^0 (0{,}5)^{3-0} = 0{,}125; \quad p(\xi = 1) = C_3^1 (0{,}5)^1 (0{,}5)^{3-1} = 0{,}375;$$

$$p(\xi = 2) = C_3^2 (0{,}5)^2 (0{,}5)^{3-2} = 0{,}375; \quad p(\xi = 3) = C_3^3 (0{,}5)^3 (0{,}5)^{3-3} = 0{,}125.$$

Получим ряд распределения

x_k	0	1	2	3
p_k	0,125	0,375	0,375	0,125

причем найденные вероятности удовлетворяют условию нормировки:

$$0{,}125 + 0{,}375 + 0{,}375 + 0{,}125 = 1.$$

Числовые характеристики величины ξ можно найти непосредственно по формулам (7.7), (7.11)

$$M[\xi] = 0 \cdot 0{,}125 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}375 + 3 \cdot 0{,}125 = 1{,}5;$$

$$D[\xi] = 0^2 \cdot 0{,}125 + 1^2 \cdot 0{,}375 + 2^2 \cdot 0{,}375 + 3^2 \cdot 0{,}125 - 1{,}5^2 = 0{,}75.$$

Как и следовало ожидать, наши результаты совпадают со значениями, полученными ранее для распределения Бернулли:

$$M[\xi] = np = 3 \cdot 0{,}5 = 1{,}5;$$

$$D[\xi] = npq = 3 \cdot 0{,}5 \cdot (1 - 0{,}5) = 0{,}75.$$

Пример 7.3. Плотность потока заявок в некотором бюро по вызову равна двум заявкам в минуту. Найти среднее количество заявок, поступающих с 7 часов до 7.30. Считать поток заявок пуассоновским

Решение. Случайная величина ξ – число заявок в интервал времени длиной $\Delta t = 30$ мин имеет пуассоновское распределение с параметром $\lambda = \rho\,\Delta t = 2 \cdot 30 = 60$, поскольку плотность потока $\rho = 2$ мин$^{-1}$. Среднее число заявок есть математическое ожидание $M[\xi]$, равное $\lambda = 60$.

Пример 7.4. Плотность распределения вероятности $f_\xi(x)$ случайной величины ξ задана в виде

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0\ , & -\infty < x < 1, \\ C \cdot x\,, & 1 \le x < 2\,, \\ 0\ , & 2 \le x < \infty\,. \end{cases} \tag{7.26}$$

Требуется найти функцию распределения $F_\xi(x)$, построить графики обеих функций, вычислить вероятность события ($\xi \ge 0$), а также математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$случайной величины ξ.

Решение. Константу C находим из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\mathrm{d}x = 1,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\xi(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0 \cdot \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} Cx \cdot \mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0 \cdot \mathrm{d}x = \left.\frac{Cx^2}{2}\right|_1^2 = \frac{3}{2} \cdot C.$$

Отсюда $C = \dfrac{2}{3}$. График функции $f_\xi(x)$ представлен на рис. 7.3.

При вычислении функции распределения $F_\xi(x)$ по формуле (7.13) следует

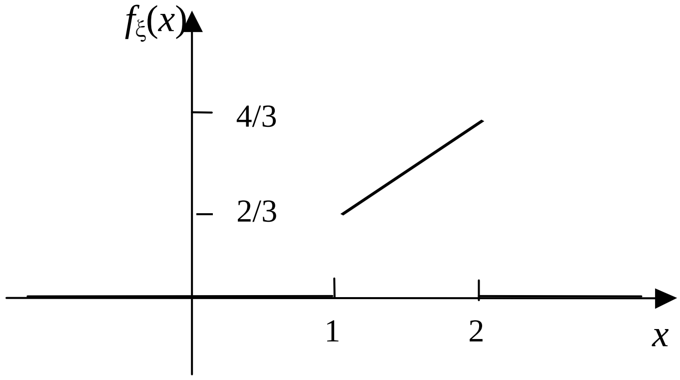

Рис. 7.3. График плотности распределения вероятности $f_\xi(x)$

иметь в виду, что плотность $f_\xi(x)$ задается различными выражениями на трех интервалах (см. (7.26)).

В соответствии с этим различаются аналитические выражения для функции распределения $F_\xi(x)$:

а) при $x \in (-\infty;\ 1)$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot \mathrm{d}x = 0;$$

б) при $x \in [1;2)$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0 \cdot \mathrm{d}x + \int_{1}^{x} \frac{2}{3} x \cdot \mathrm{d}x = \frac{x^2}{3} - \frac{1}{3};$$

в) при $x \in [2;\ \infty)$

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} f_\xi(x) \cdot \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0 \cdot \mathrm{d}x + \int_{1}^{2} \frac{2}{3} x \cdot \mathrm{d}x + \int_{2}^{x} 0 \cdot \mathrm{d}x = 1.$$

Таким образом,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0\ , & -\infty < x < 1, \\ \dfrac{x^2}{3} - \dfrac{1}{3}\ , & 1 \le x < 2, \\ 1\ , & 2 \le x < \infty. \end{cases}$$

Функция распределения $F_\xi(x)$ представлена на рис. 7.4.

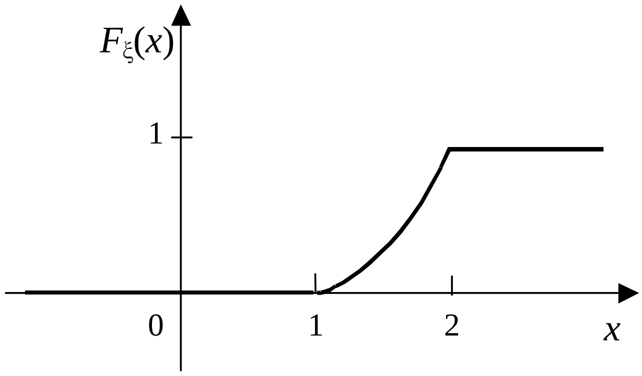

Рис. 7.4. График функции распределения $F_\xi(x)$

Вычисляем вероятность события ($\xi \geq 0$) следующим образом:

$$p(\xi \geq 0) = \int\limits_0^\infty f_\xi(x) \cdot \mathrm{d}x = F_\xi(\infty) - F_\xi(0) = 1.$$

Математическое ожидание в соответствии с формулой (7.15) и предыдущем замечанием о различном представлении $f_\xi(x)$ на разных интервалах имеет вид

$$M[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_\xi(x) \cdot \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 x \cdot \frac{2}{3} \cdot x \cdot \mathrm{d}x = \int\limits_1^2 \frac{2}{3} \cdot x^2 \cdot \mathrm{d}x = \frac{14}{9}.$$

Дисперсию $D[\xi]$ определяем по формуле (7.18)

$$D[\xi] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_\xi(x) \cdot \mathrm{d}x - m_\xi^2 = \int\limits_1^2 \frac{2}{3} \cdot x^3 \cdot \mathrm{d}x - m_\xi^2 = \frac{13}{162}.$$

Пример 7.5. Для случайной величины ξ, равномерно распределенной на интервале $[a, b]$, найти вероятность попадания ее значения в интервал $[m_\xi - \sigma_\xi, m_\xi + \sigma_\xi]$, где m_ξ и σ_ξ – соответственно математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение ξ.

Решение. Для равномерно распределенной случайной величины ξ математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение выражаются через a, b следующим образом: $m_\xi = (a + b)/2$, $\sigma_\xi = (b - a)/2\sqrt{3}$.

Применение формулы (7.25) для $\beta = m_\xi + \sigma_\xi$ и $\alpha = m_\xi - \sigma_\xi$ дает

$$p(\alpha \leq \xi \leq \beta) = \frac{\beta - \alpha}{b - a} = \frac{2\sigma_\xi}{b - a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}6.$$

Пример 7.6. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием $a = 65$ и средним квадратичным отклонением $\sigma = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна $p = 0{,}9606$.

Решение. Будем искать интервал в виде $a \pm t \cdot \sigma$. Тогда по условию

$$0{,}96 = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{a-t\sigma}^{a+t\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{z^2}{2}} \mathrm{d}z = 2\Phi(t).$$

Обратимся к таблице значений функции Лапласа. Найдем значение аргумента, при котором функция $\Phi(t) = 0{,}4803$. В результате получим $t = 2{,}06$.

Теперь можно построить интервал:

$$p(65 - 2{,}06 \cdot 5 < \xi < 65 + 2{,}06 \cdot 5) = 0{,}96.$$

Окончательно получим

$$p(54{,}7 < \xi < 75{,}3) = 0{,}96.$$

8. СИСТЕМЫ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Система случайных величин $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ возникает в том случае, когда на одном и том же вероятностном пространстве $(\Omega, \Im, p)$ задано несколько случайных величин:

$$\xi_1 = \xi_1(\omega),\ \xi_2 = \xi_2(\omega),\ \ldots,\ \xi_n = \xi_n(\omega).$$

Будем рассматривать частный случай – системы двух случайных величин (ξ_1, ξ_2). Такую двумерную случайную величину можно определить как функцию, отображающую пару элементарных случайных событий в пару чисел:

$$(\xi, \eta):\ \Omega^{(\xi)} \times \Omega^{(\eta)} \to R^1 \times R^1 = R^2.$$

8.1 Закон распределения системы дискретных случайных величин

Законом распределением системы двух дискретных случайных величин (дискретной двумерной случайной величиной) (ξ, η) называется конечный или бесконечный набор возможных значений (x_i, y_j) и их вероятностей, т.е. вероятностей пересечения событий $(\xi = x_i)$ и $(\eta = y_i)$

$$p_{ij} = p(\xi = x_i, \eta = y_j), \tag{8.1}$$

при этом должно выполняться условие нормировки

$$\sum_{i,j} p_{ij} = 1.$$

Обычно распределение дискретной двумерной случайной величины (закон распределения) задают в виде таблицы.

ξ η	x_1	x_2	…	x_i	…
y_1	p_{11}	p_{21}	…	p_{i1}	…
y_2	p_{12}	p_{22}	…	p_{i2}	…
…	…	…	…	…	…
y_j	p_{1j}	p_{2j}	…	p_{ij}	…
…	…	…	…	…	…

Для системы двух дискретных случайных величин существует связь между распределением (8.1) и функцией распределения $F_{\xi\eta}(x, y) = \sum p_{ij}$, где суммирование проводится только по тем парам индексов (i, j), для которых выполняются условия $x_i < x$ и $y_j < y$.

В общем случае вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ, η) в произвольную область G вычисляется по формуле

$$p((\xi, \eta) \in G) = \sum_{(i,\, j)} p_{ij}, \tag{8.2}$$

где суммирование проводится по тем же парам индексов (i, j), для которых соответствующие точки (x_i, y_j) принадлежат области G.

8.2. Частные и условные распределения системы двух дискретных случайных величин

Пусть известно совместное распределение системы двух дискретных случайных величин (ξ, η):

$$p_{ij} = p(\xi = x_i, \eta = y_j).$$

Распределения для каждой из случайных величин называются *частными распределениями* для системы двух случайных величин. Эти распределения находятся следующим образом:

$$\begin{aligned} p_i^{(\xi)} &= p(\xi = x_i) = p((\xi = x_i) \cap (\bigcup_j (\eta = y_j))) = \\ &= p(\bigcup_j ((\xi = x_i) \cap (\eta = y_j))) = \sum_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_j p_{ij}, \end{aligned} \tag{8.3}$$

так как объединение всех событий $(\eta = y_j)$ есть достоверное событие $\bigcup_j (\eta = y_j) = U$, а события $(\eta = y_{j_1})$ и $(\eta = y_{j_2})$ при различных индексах j_1 и j_2 являются несовместными. Учитывая, что вероятность объединения несовместных событий равна сумме вероятностей, получаем соотношение (8.3).

Аналогично определяется частное распределение случайной величины η

$$p_j^{(\eta)} = p(\eta = y_j) = \sum_j p(\xi = x_i, \eta = y_j) = \sum_j p_{ij}. \tag{8.4}$$

Условным распределением случайной величины ξ при $\eta = y_j$ называется совокупность условных вероятностей событий $(\xi = x_i)$:

$$p_\xi(x_1 / y_j),\ p_\xi(x_2 / y_j),\ \ldots,\ p_\xi(x_i / y_j),\ \ldots, \tag{8.5}$$

вычисленных в предположение, что событие $(\eta = y_j)$ уже наступило $(p_j^{(\eta)} = p(\eta = y_j) > 0)$. Индекс j имеет одно и то же значение при всех значениях случайной величины ξ.

Аналогично определяется условное распределение случайной величины η при условии, что $\xi = x_i$ $(p_i^{(\xi)} > 0)$.

Зная совместное распределение системы двух дискретных случайных величин, можно найти условное распределение:

$$p_\xi(x_i / y_j) = p(\xi = x_i / \eta = y_j) = \frac{p(\xi = x_i, \eta = y_j)}{p(\eta = y_j)} = \frac{p_{ij}}{p_i^{(\eta)}}. \qquad (8.6)$$

Здесь используется определение условной вероятности события $(\xi = x_i)$ в предположение, что событие $(\eta = y_j)$ наступило. Частное распределение $p_j^{(\eta)}$ находится по формуле (8.4).

Аналогично находится условное распределение случайной величины η при $(\xi = x_i)$

$$p_\eta(y_j / x_i) = p(\eta = y_j / \xi = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_i^{(\xi)}}, \qquad (8.7)$$

где $p_i^{(\xi)}$ вычисляются по формуле (8.3).

8.3. Условия независимости двух случайных величин

Случайные величины ξ и η называются *независимыми*, если распределение одной случайной величины не зависит от того, какое значение принимает другая случайная величина.

Это определение эквивалентно следующему: случайные величины ξ и η независимы, если для любых x, y справедливо условие

$$F_{\xi\eta}(x,y) = p(\xi < x, \eta < y) = p(\xi < x) \cdot p(\eta < y) = F_\xi(x) \cdot F_\eta(y), \quad (8.8)$$

т.е. события $(\xi < x)$ и $(\eta < y)$ являются независимыми при любых значениях x и y.

Для дискретных случайных величин условие независимости (8.8) можно записать в виде

$$p_{ij} = p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i) \cdot p(\eta = y_j) = p_i^{(\xi)} \cdot p_j^{(\eta)}, \qquad (8.9)$$

а для непрерывных случайных величин – в виде

$$f_{\xi\eta}(x, y) = f_\xi(x) \cdot f_\eta(y). \qquad (8.10)$$

В случае системы двух независимых случайных величин условные распределения совпадают с частными (безусловными) распределениями.

Если случайные величины являются дискретными, то

$$p_\xi(x_i/y_j) = p_i^{(\xi)}, \qquad p_\eta(y_j/x_i) = p_j^{(\eta)},$$

при этом использовались соотношения (8.6) и (8.9).

В случае непрерывных случайных величин получаем

$$f_\xi(x/y) = \frac{f_{\xi\eta}(x, y)}{f_\eta(y)} = f_\xi(x), \qquad f_\eta(y/x) = f_\eta(y),$$

при этом использовались соотношения (8.10).

Заметим, что полученные выше соотношения, как и соотношения (8.9), (8.10), являются условиями независимости случайных величин ξ и η, эквивалентными определению независимости случайных величин (8.8).

Таким образом, для проверки независимости двух случайных величин достаточно определить частные распределения и, зная совместное распределение, проверить выполнение соотношений (8.9) или (8.10). Если эти соотношения справедливы при любых индексах i и j (соответственно при любых значениях переменных x и y), то случайные величины являются независимыми. В противном случае они являются зависимыми.

8.4. Математическое ожидание и дисперсия для системы случайных величин

Подробный анализ понятия математического ожидания случайной величины и его свойств дан в шестом разделе. Математическим ожиданием $M[\xi]$ дискретной случайной величины ξ вычисляется по формуле

$$M[\xi]=\sum_{i} x_i \cdot p_i, \tag{8.11}$$

при этом математическое ожидание существует, если ряд (8.11) сходится абсолютно, т.е. $\sum_{i}|x_i| \cdot p_i < \infty$.

Математическое ожидание дискретной случайной величины ξ можно найти, зная совместное распределение системы двух случайных величин (ξ, η). Для этого необходимо воспользоваться выражением для частного распределения (8.3)

$$M[\xi]=\sum_{i} x_i \cdot p_i^{(\xi)}=\sum_{i}\sum_{j} x_i \cdot p_{ij}. \tag{8.12}$$

Аналогично находим математическое ожидание другой случайной величины

$$M[\eta]=\sum_{j} y_j \cdot p_j^{(\eta)}=\sum_{i}\sum_{j} y_j \cdot p_{ij}. \tag{8.13}$$

В случае непрерывных случайных величин математическое ожидание определяется с помощью интегрирования.

Математическое ожидание дает среднее значение случайной величины, а дисперсия является характеристикой отклонения случайной величины от своего среднего значения.

Для дискретных случайных величин, используя определение математического ожидания, получим

$$D[\xi]=\sum_{i} x_i^2 \cdot p_{ij}-(M[\xi])^2=\sum_{i}\sum_{j} x_i^2 \cdot p_{ij}-(M[\xi])^2,$$

$$D[\eta] = \sum_i y_j^2 \cdot p_{ij} - (M[\eta])^2 = \sum_i \sum_j y_j^2 \cdot p_{ij} - (M[\eta])^2. \qquad (8.14)$$

Среднее квадратическое отклонение случайной величины определяется как корень квадратный из дисперсии

$$\sigma_\xi = \sqrt{D[\xi]}, \;\; \sigma_\eta = \sqrt{\mathrm{D}[\eta]}. \qquad (8.15)$$

8.5. Корреляционная матрица двух случайных величин

Математическое ожидание и дисперсия являются числовыми характеристиками каждой из случайных величин системы. Корреляционный момент – числовая характеристика системы случайных величин.

Корреляционным моментом $K_{\xi\eta}$ случайных величин ξ и η называется математическое ожидание произведения центрированных случайных величин, т.е.

$$K_{\xi\eta} = M[\dot{\xi} \cdot \dot{\eta}] = M[(\xi - M[\xi]) \cdot (\eta - M[\eta])]. \qquad (8.16)$$

Если раскрыть это выражение и использовать свойства математического ожидания, то получим более пригодную для практических расчетов формулу

$$K_{\xi\eta} = M[\xi\eta] - M[\xi] \cdot M[\eta]. \qquad (8.17)$$

В случае дискретных случайных величин математическое ожидание представляется в виде суммы

$$K_{\xi\eta} = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot p_{i,j} - M[\xi] \cdot M[\eta]. \qquad (8.18)$$

Если же случайные величины ξ и η являются непрерывными, то суммы следует заменить интегралами.

Свойства корреляционного момента:

1) $K_{\xi\eta} = K_{\eta\xi}$;
2) $K_{\xi\xi} = D[\xi]$;
3) $|K_{\xi\eta}| \le \sqrt{D[\xi] \cdot D[\eta]} = \sigma_\xi \cdot \sigma_\eta$.

Совокупность корреляционных моментов и дисперсий определяет *корреляционную матрицу* системы случайных величин

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{\xi\xi} & K_{\xi\eta} \\ K_{\eta\xi} & K_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D[\xi] & K_{\xi\eta} \\ K_{\eta\xi} & D[\eta] \end{pmatrix}. \qquad (8.19)$$

Из свойств корреляционного момента следует симметричность этой матрицы, а также ее положительная определенность

$$(\mathbf{K}\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i,j}^{2} K_{i,j}\, x_i\, x_j = D[\xi]\, x_1^2 + 2K_{\xi\eta}\, x_1 x_2 + D[\eta]\, x_2^2 > 0, \;\; \forall\, x_1, x_2,$$

где $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ – произвольный двумерный вектор.

Коэффициентом корреляции случайных величин ξ и η называется число

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta}. \tag{8.20}$$

Из свойств дисперсии и корреляционного момента получаем свойства коэффициента корреляции:

1) $r_{\xi\eta} = r_{\eta\xi}$;
2) $r_{\xi\xi} = 1$;
3) $|r_{\xi\eta}| \le 1$.

Нормированная корреляционная матрица

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_{\xi\xi} & r_{\xi\eta} \\ r_{\eta\xi} & r_{\eta\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_{\xi\eta} \\ r_{\eta\xi} & 1 \end{pmatrix},$$

как и корреляционная матрица **K**, обладает свойствами симметричности и неотрицательной определенности.

8.6. Соотношение независимости и некоррелированности случайных величин

Понятие независимости случайных величин было рассмотрено в п. 8.3. Теперь определим понятие некоррелированности случайных величин.

Случайные величины ξ и η называются *некоррелированными*, если их корреляционный момент равен нулю, т.е.

$$K_{\xi\eta} = M[\dot{\xi} \cdot \dot{\eta}] = 0. \tag{8.21}$$

Из определения коэффициента корреляции следует, что в случае некоррелированных случайных величин он также равен нулю.

Принимая во внимание формулу (8.17), для некоррелированных случайных величин получим

$$M[\xi\eta] = M[\xi] \cdot M[\eta], \tag{8.22}$$

т.е. математическое ожидание произведения случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин.

Это утверждение справедливо для независимых случайных величин. Например, в случае дискретных независимых случайных величин имеем (см. выражение (8.9)):

$$M[\xi \cdot \eta] = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot p_{i,j} = \sum_i \sum_j x_i \cdot y_j \cdot p_i \cdot p_j = \sum_i x_i \cdot p_i \sum_j y_j \cdot p_j = M[\xi] M[\eta].$$

Таким образом, из независимости случайных величин следует их некоррелированность. Обратное утверждение в общем случае неверно.

Если корреляционный момент $K_{\xi\eta}$ отличен от нуля, то случайные величины ξ и η называются *коррелированными*, при этом коэффициент корреляции также отличен от нуля $r_{\xi\eta} \neq 0$.

В общем случае коэффициент корреляции $r_{\xi\eta}$ показывает степень линейной связи случайных величин ξ и η. Чем больше значение абсолютной величины коэффициента корреляции $|r_{\xi\eta}|$, тем более сильно связаны случайные величины ξ и η (см. рис. 8.1). Оказывается, что наибольшее абсолютное значение $|r_{\xi\eta}| = 1$ коэффициент корреляции принимает тогда и только тогда, когда случайные величины связаны линейной зависимостью $\eta = A\xi + B$ $(A \neq 0)$.

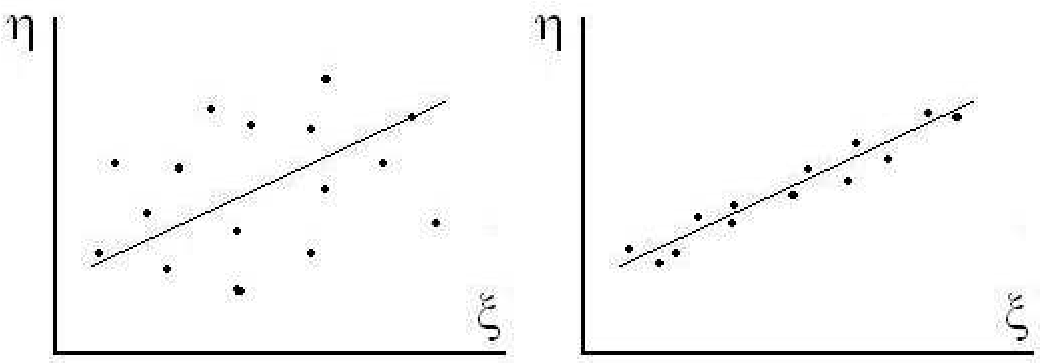

Рис. 8.1. Примеры корреляции случайных величин ξ и η: слев – слабая корреляция ($r_{\xi\eta} \approx 0$), справа – сильная ($r_{\xi\eta} \sim 1$).

8.7. Решение типового примера

Методические замечания. При решении задач этого раздела следует проходить отмеченные в решении данного примера этапы 1−8 и обращать особое внимание на аккуратное выполнение арифметических операций.

Пример 8.1. Задано распределение системы двух дискретных случайных величин (ξ, η) (см. таблицу 8.1). Определить частные, условные (при $\xi = -1$ и $\eta = 0$) распределения и моментные характеристики системы случайных величин, а также найти вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ, η) в область

$$G = \{(x, y) : \frac{x^2}{4} + y^2 < 1\}.$$

Таблица 8.1

ξ / η	–1	1	3	5
0	0,16	0,12	0,14	0,08
5	0,08	0,10	0,09	0,08
10	0,06	0,04	0,03	0,02

Решение. Действия разбиваются на несколько этапов:

1. *Вычисление вероятности попадания* двумерной случайной величины (ξ, η) в заданную область G – эллипс с полуосями, равными 2 и 1.

Вероятность попадания случайной точки с координатами (ξ, η) в область G вычисляется по формуле

$$p((\xi,\eta)\in G)=\sum_{(i,j)} p_{ij},$$

где суммирование производится только по тем парам индексов (i, j), которые соответствуют точкам (x_i, y_j), находящимся внутри области G. Непосредственной проверкой убеждаемся, что таких точек две: (–1, 0) и (1, 0) и поэтому

$$p((\xi,\eta)\in G)=p_{11}+p_{12}=0{,}16+0{,}12=0{,}28.$$

2. *Определение частных распределений*. При известном совместном распределении систем двух дискретных случайных величин (ξ, η) частные распределения находятся по формулам:

$$p_i^{(\xi)}=\sum_j p_{ij} \text{ и } p_j^{(\eta)}=\sum_j p_{ij}.$$

Полученные частные распределения даны в табл. 8.2 и 8.3

Таблица 8.2

ξ	–1	1	3	5
$p^{(\xi)}$	0,3	0,26	0,26	0,18

Таблица 8.3

η	0	5	10
$p^{(\eta)}$	0,5	0,35	0,15

3. *Определение условных распределений*. Условное распределение случайной величины ξ при условии, что η = 0, вычисляется по формуле

$$p_\xi(x_i/\eta=0)=\frac{p_{i1}}{p_1^{(\eta)}}.$$

Полученное условное распределение дано в табл. 8.4. Условное распределение случайной величины η при условии, что $\xi = -1$, вычисляется по формуле

$$p_\eta(y_j / \xi = -1) = \frac{p_{1j}}{p_1^{(\xi)}}.$$

Это условное распределение приведено в табл. 8.5.

Таблица 8.4

ξ	–1	1	3	5
$p_\xi(x / \eta = 0)$	0,32	0,24	0,28	0,16

Таблица 8.5

η	0	5	10
$p_\xi(y / \xi = -1)$	8/15	4/15	1/5

4. *Проверка условий независимости.* Для того чтобы случайные величины ξ и η были независимыми, необходимо и достаточно выполнения условия $p_{ij} = p_i^{(\xi)} p_j^{(\eta)}$ (см. п. 8.3) при любых значениях индексов i и j, т.е. $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3$.

Из табл. 8.1–8.3 видно, что это условие не выполняется, например, при $i = 1$ и $j = 1$. Таким образом, случайные величины ξ и η являются зависимыми.

5. *Вычисление математических ожиданий.* Так как известны частные распределения случайных величин ξ и η, то их математические ожидания вычисляются по формулам (8.12) –(8.13)

$$M[\xi] = \sum_{i=1}^{4} x_i \cdot p_i^{(\xi)} = 1{,}64; \quad M[\eta] = \sum_{j=1}^{3} y_j \cdot p_{ji}^{(\eta)} = 3{,}25.$$

6. *Вычисление дисперсий, средних квадратичных отклонений.* Дисперсии случайных величин ξ и η определяем по формулам (8.14)

$$D[\xi] = M\left[\xi^2\right] - \left(M[\xi]\right)^2 = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 p_i^{(\xi)} - (1{,}64)^2 = 4{,}71;$$

$$D[\eta] = M\left[\eta^2\right] - \left(M[\eta]\right)^2 = \sum_{j=1}^{3} y_j^2 p_j^{(\eta)} - (3{,}25)^2 = 13{,}19.$$

Теперь находим средние квадратичные отклонения

$$\sigma_\xi = \sqrt{D[\xi]} \approx 2{,}17; \quad \sigma_\eta = \sqrt{D[\eta]} \approx 3{,}63.$$

7. Вычисление корреляционной матрицы. Сначала вычислим корреляционный момент случайных величин ξ и η

$$K_{\xi\eta} = M[\xi\eta] - M[\xi] \cdot M[\eta] = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} - 1{,}64 \cdot 3{,}25 \approx -0{,}18.$$

Теперь найдем коэффициент корреляции

$$r_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \cdot \sigma_\eta} = \frac{-0{,}18}{2{,}17 \cdot 3{,}63} \approx -0{,}023.$$

Таким образом, можно написать корреляционную матрицу

$$\begin{pmatrix} 4{,}71 & -0{,}18 \\ -0{,}18 & 13{,}19 \end{pmatrix}$$

и нормированную корреляционную матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -0{,}023 \\ -0{,}023 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как коэффициент корреляции отличен от нуля, то случайные величины ξ и η являются коррелированными, причем между ними существует весьма слабая линейная связь ($r_{\xi\eta} \approx -0{,}023$).

8. Выводы. Рассматриваемые случайные величины ξ и η являются зависимыми, коррелированными, причем между ними имеется достаточно слабая линейная связь. Распределение случайных величин и их числовые характеристики определены выше. Вероятность попадания двумерной случайной величины (ξ, η) в заданную область G равна 0,28.

9. ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

При статистическом определении вероятности она трактуется как некоторое число, к которому стремится относительная частота случайного события (см. п. 2.1). При аксиоматическом определении вероятность – это, по сути, аддитивная мера множества исходов, благоприятствующих случайному событию (см. пп. 2.2, 2.3 и 3.1). В первом случае имеем дело с эмпирическим пределом, во втором – с теоретическим понятием меры. Совсем не очевидно, что они относятся к одному и тому же понятию. Нетривиальную связь данных определений вероятности устанавливает теорема Бернулли, являющаяся частным случаем так называемого закона больших чисел.

Как отмечалось, при увеличении числа испытаний биномиальный закон стремится к нормальному распределению (см. п. 7.5). Это теорема Муавра–Лапласа, которая является частным случаем центральной предельной теоремы. Последняя гласит, что функция распределения суммы независимых случайных величин с ростом числа слагаемых стремится к нормальному закону.

Закон больших чисел и центральная предельная теорема имеют важное практическое значение. В частности, они лежат в основании математической статистики.

Рассмотрение предельных теорем начнем с утверждений и теорем, объединенных общим названием – закон больших чисел. Наиболее изящные и простые доказательства этих теорем получаются с помощью неравенства Чебышева, которое и рассмотрим в первую очередь. Доказательство центральной предельной теоремы предварим описанием используемых для этого характеристических функций.

9.1. Неравенство Чебышева

Пусть случайная величина ξ имеет конечные математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$. Тогда для любого положительного числа ε справедливо неравенство

$$p\left(\left|\xi - M[\xi]\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2}. \tag{9.1}$$

Приведем доказательство справедливости этого неравенства, для непрерывной случайной величины с плотностью распределения вероятности $f_\xi(x)$. В этом случае

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - M[\xi]\right)^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Разобьем область интегрирования на две части: $|x - M[\xi]| < k\sigma_\xi$ и $|x - M[\xi]| \geq k\sigma_\xi$, где σ_ξ – среднее квадратическое отклонение ξ и $k > 0$. Тогда

$$D[\xi]=\int\limits_{|x-M[\xi]|\ge k\sigma_\xi}(x-M[\xi])^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x+\int\limits_{|x-M[\xi]|<k\sigma_\xi}(x-M[\xi])^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Оба интеграла, входящих в эту формулу, неотрицательны в силу неотрицательности подынтегральной функции. Поэтому, отбросив второй из них и заменив в подынтегральной функции в первом интеграле $|x - M[\xi]|$ на минимально возможное значение, равное $k\sigma_\xi$ для данной области, получим оценку снизу

$$D[\xi]\ge\int\limits_{|x-M[\xi]|\ge k\sigma_\xi}(x-M[\xi])^2 f_\xi(x)\,\mathrm{d}x>k^2{\sigma_\xi}^2\int\limits_{|x-M[\xi]|\ge k\sigma_\xi}f_\xi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Поскольку $\sigma_\xi^2 = D[\xi]$ и $\int_\alpha^\beta f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = p(\alpha \le \xi \le \beta)$, то неравенство можно переписать

$$D[\xi] > k^2\, D[\xi]\;\; p(|\xi - M[\xi]| \ge k\sigma_\xi).$$

Поделив на $k^2D[\xi]$, имеем

$$\frac{1}{k^2} > p\left(|\xi - M[\xi]| \ge k\sigma_\xi\right).$$

Принимая во внимание равенство $p(|\xi - M[\xi]| \ge k\sigma_\xi) = 1 - p(|\xi - M[\xi]| < k\sigma_\xi)$ и выбирая $\varepsilon = k\sigma_\xi$, получим *неравенство Чебышева*, которое устанавливает универсальное соотношение между математическим ожиданием и дисперсией:

$$p\left(|\xi - M[\xi]| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2}.$$

Замечания:

1. Очевидно, что для противоположенного события

$$p\left(|\xi - M[\xi]| \ge \varepsilon\right) \le \frac{D[\xi]}{\varepsilon^2}. \qquad (9.2)$$

2. Неравенство Чебышева справедливо для любого закона распределения.

3. Неравенства (9.1), (9.2) дают довольно грубую оценку вероятности соответствующих событий. Например, при $\varepsilon = \sigma_\xi$ получим:

$$p\left(|\xi - M[\xi]| \ge \sigma_\xi\right) \le \frac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\xi^2} = 1,$$

что и так ясно, поскольку вероятность не может быть больше единицы. При $\varepsilon = 3\sigma_\xi$ оценка получается более точной и интересной:

$$p\left(|\xi - M[\xi]| \ge 3\sigma_\xi\right) \le \frac{\sigma_\xi^2}{9\sigma_\xi^2} = \frac{1}{9} \approx 0{,}11.$$

Неравенство Чебышева используется крайне редко на практике, но его теоретическое значение очень велико.

9.2. Закон больших чисел в форме Чебышева

Теорема: Пусть случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ попарно независимы и имеют конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной C: $D[\xi_i] \le C$, где $i = 1, 2, \ldots$ Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[\xi_i]\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (9.3)$$

Доказательство: Используем неравенство Чебышева. Пусть $\xi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i$, тогда $M[\xi] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[\xi_i]$ и $D[\xi] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D[\xi_i] \le \frac{C}{n}$. Из (9.2) следует, что

$$p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[\xi_i]\right| \ge \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\sum_{i=1}^{n}D[\xi_i] \le \frac{C}{\varepsilon^2 n}.$$

Перейдя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[\xi_i]\right| \ge \varepsilon\right) \le 0.$$

Поскольку вероятность не может быть отрицательной, имеем

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[\xi_i]\right| \ge \varepsilon\right) = 0$$

и соответственно

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M[\xi_i]\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Можно ввести понятие *сходимости по вероятности*, когда вероятность различия двух величин стремится к нулю. Напомним, что в случае обычной сходимости различие величин должно стремиться к нулю.

Таким образом, закон больших чисел говорит о сходимости по вероятности среднего арифметического случайных величин (т.е. случайной величины) к среднему арифметическому их математических ожиданий (т.е. к величине по определению неслучайной).

Замечание: Для вывода формулы (9.3) достаточно потребовать, чтобы

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right] = 0.$$

В этом состоит суть *теоремы Маркова*, которая утверждает, что закон больших чисел выполняется, если дисперсия суммы случайных величин растет не слишком быстро с ростом n.

9.3. Теорема Бернулли

Одной из важнейших теорем теории вероятностей является теорема Бернулли, представляющая собой частный случай закона больших чисел. Впервые она была опубликована в труде Якоба Бернулли “Искусство предположений”, изданном в 1713 году. Наиболее изящное и краткое ее доказательство нашел П.Л. Чебышев в середине XIX века.

Теорема: Рассмотрим схему Бернулли. Пусть μ_n – число наступлений события A в n независимых испытаниях, p – вероятность наступления события A в одном испытании. Тогда для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} p\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \tag{9.4}$$

Другими словами, вероятность того, что отклонение относительной частоты случайного события от его вероятности p будет по модулю сколь угодно мало, стремится к 1 с ростом числа испытаний n.

Доказательство: Случайная величина μ_n распределена по биномиальному закону, поэтому имеем (см. п. 7.5)

$$M[\mu_n] = np,\ \ D[\mu_n] = np(1-p),$$

и тогда

$$M\left[\frac{\mu_n}{n}\right] = p, \quad D\left[\frac{\mu_n}{n}\right] = \frac{p(1-p)}{n}.$$

Для случайной величины μ_n/n неравенство Чебышева принимает следующий вид:

$$p\left(\left|\frac{\mu_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) > 1 - \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем формулу (9.4).

Замечание. Принципиальное различие сходимости по вероятности и просто сходимости можно понять на примере бросания монеты n раз. Легко показать, что относительная частота выпадения “герба” не стремится строго математически к 1/2: для любого n существует отличная от нуля вероятность того, что относительная частота будет равна, например, 1, а не 1/2 (см. пример 9.2). Однако эта вероятность (ее легко найти по формуле Бернулли) быстро убывает с ростом n, и относительная частота сходится по вероятности к 1/2.

9.4. Характеристические функции

Для доказательства центральной предельной теоремы необходимо ознакомиться с аппаратом характеристических функций.

Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция

$$\phi_\xi(t) = M\left[\exp(it\xi)\right], \tag{9.5}$$

где $\exp(x) = e^x$.

Таким образом, $\phi_\xi(t)$ представляет собой математическое ожидание некоторой комплексной случайной величины $\eta = \exp(it\xi)$, связанной с величиной ξ. В частности, если ξ – дискретная случайная величина, заданная рядом распределения $\{x_i, p_i\}$, где $i = 1, 2, ..., n$, то

$$\phi_\xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \exp(itx_i)\, p_i\, . \tag{9.6}$$

Для непрерывной случайной величины ξ с плотностью распределения вероятности $f_\xi(x)$

$$\phi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(itx)\, f_\xi(x)\, \mathrm{d}x. \tag{9.7}$$

Например, для случайной величины ξ, имеющей нормальный закон распределения с параметрами $a = M[\xi]$ и $\sigma = \sqrt{D[\xi]}$, характеристическая функция равна

$$\phi_\xi(t) = \exp\left(ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right). \tag{9.8}$$

Вывод этого соотношения приведен в примере 9.4.

Между характеристической функцией случайной величины $\phi_\xi(t)$ и ее функцией распределения $F_\xi(x)$ существует взаимно однозначное соответствие. Покажем это для непрерывной случайной величины ξ. Доказательство для дискретной величины аналогично.

Соотношение (9.7) есть так называемое *прямое преобразование Фурье*. Известно, что в таком случае функцию $f_\xi(x)$ можно найти по известной характеристической функции $\phi_\xi(t)$, используя *обратное преобразование Фурье*:

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx)\phi_\xi(t)\, \mathrm{d}t. \tag{9.9}$$

В силу единственности преобразования Фурье между $f_\xi(x)$ и $\phi_\xi(t)$ имеется однозначное соответствие: известной плотности распределения вероятности $f_\xi(x)$ соответствует одна и только одна характеристическая функция $\phi_\xi(t)$, и наоборот. Поскольку между $f_\xi(x)$ и $F_\xi(x)$ также существует однозначное соответствие, такое соотношение между $\phi_\xi(t)$ и $F_\xi(x)$ доказано.

Отметим другие свойства характеристических функций:

1) $\phi_{C\xi}(t) = \phi_\xi(Ct)$ для любой постоянной C.

   Иными словами, если случайные величины η и ξ связаны соотношением $\eta = C\xi$, то для их характеристических функций справедливо равенство

$$\phi_\eta(t) = \phi_\xi(Ct). \tag{9.10}$$

Действительно,

$$\phi_\eta(t) = M[\exp(it\eta)] = M[\exp(itC\xi)] = M[\exp(i\tilde{t}\xi)] = \phi_\xi(\tilde{t}) = \phi_\xi(Ct),$$

где $\tilde{t} = Ct$.

2) Для последовательности независимых случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$

$$\phi_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(t) = \phi_{\xi_1}(t)\cdot\phi_{\xi_2}(t)\cdot\ldots\cdot\phi_{\xi_n}(t), \tag{9.11}$$

Как легко видеть,

$$\phi_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(t) = M[\exp(it(\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n))] =$$

$$= M[\exp(it\xi_1)\cdot\exp(it\xi_2)\cdot\ldots\cdot\exp(it\xi_n)] =$$

$$= M[\exp(it\xi_1)]\cdot\ldots\cdot M[\exp(it\xi_n)] = \phi_{\xi_1}(t)\cdot\phi_{\xi_2}(t)\cdot\ldots\cdot\phi_{\xi_n}(t).$$

Если все случайные величины ξ_i имеют одинаковое распределение, т.е. $\phi_{\xi_i}(t) = \phi_\xi(t)$, то формула упрощается

$$\phi_{\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n}(t) = (\phi_\xi(t))^n. \tag{9.12}$$

3) $\phi_\xi^{(k)}(0) = i^k M[\xi^k]$, т.е. производные $\phi_\xi(t)$ по t связаны с моментами ξ.

Пусть существуют начальные моменты порядка k ($k = 1, 2, \ldots$) случайной величины ξ, т.е. $\left|M[\xi^k]\right| < \infty$. Тогда характеристическая функция $\phi_\xi(t)$ непрерывно дифференцируема k раз, и ее k-я производная в нуле связана с k-м моментом

$$\phi_\xi^{(k)}(0) = \left(\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}M[\exp(it\xi)]\right)\Bigg|_{t=0} = M\left[\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\exp(it\xi))\right]\Bigg|_{t=0} =$$

$$= M[i^k\xi^k\exp(it\xi)]|_{t=0} = i^k M[\xi^k]. \tag{9.13}$$

Как следствие, характеристическую функцию $\phi_\xi(t)$ часто называют *производящей функцией* начальных моментов ξ.

4) Функция $\phi_\xi(t)$ раскладывается в ряд Тейлора.

Если существуют моменты случайной величины ξ порядка $k = 1, 2, \ldots$, т.е. $\left|M[\xi^k]\right| < \infty$, то ее характеристическая функция $\phi_\xi(t)$ может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности точки $t = 0$ следующим образом:

$$\phi_\xi(t) = \phi_\xi(0) + \sum_{j=1}^{k}\frac{t^j}{j!}\phi_\xi^{(j)}(0) + o(|t^k|) = 1 + \sum_{j=1}^{k}\frac{i^j t^j}{j!}M[\xi^j] + o(|t^k|) =$$

$$= 1 + itM[\xi] - \frac{t^2}{2}M[\xi^2] + \ldots + \frac{i^k t^k}{k!}M[\xi^k] + o(|t^k|). \tag{9.14}$$

Замечание: Характеристические функции позволяют легко доказать следующие свойства нормального распределения:

1. Нормальное распределение устойчиво относительно суммирования.

Обозначим плотность распределения вероятности нормально распределенной величины с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 как

$$f_N(x,a,\sigma)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

а функцию распределения как

$$F_N(x,a,\sigma)=\int_{-\infty}^{x} f_N(t,a,\sigma)\,\mathrm{d}t=\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)+\frac{1}{2}.$$

Пусть случайные величины ξ_1 и ξ_2 являются независимыми и имеют нормальное распределение с параметрами a_1, σ_1 и a_2, σ_2 соответственно, т.е. их плотности распределения вероятности равны $f_{\xi_1}(x)=f_N(x,a_1,\sigma_1)$ и $f_{\xi_2}(x)=f_N(x,a_2,\sigma_2)$.

Тогда, согласно формулам (9.8) и (9.11), характеристическая функция суммы $\xi_1+\xi_2$ равна

$$\phi_{\xi_1+\xi_2}(t)=\phi_{\xi_1}(t)\cdot\phi_{\xi_2}(t)=\exp\left(ita_1-\frac{t^2\sigma_1^2}{2}\right)\cdot\exp\left(ita_2-\frac{t^2\sigma_2^2}{2}\right)=$$

$$=\exp\left\{it(a_1+a_2)-\frac{t^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}{2}\right\},$$

т.е. характеристическая функция суммы $\xi_1+\xi_2$ есть характеристическая функция случайной величины, имеющей плотность распределения вероятности $f_N(x,\ a_1+a_2,\ \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$. Следовательно, данная сумма распределена по нормальному закону с параметрами $a=a_1+a_2$ и $\sigma=\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ и ее функция распределения равна $F_N(x,\ a_1+a_2,\ \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2})$.

2. Если случайная величина ξ имеет нормальное распределение с плотностью $f_\xi(x)=f_N(x,0,1)$, то случайная величина $\eta=\alpha+\beta\xi$ имеет нормальное распределение с плотностью $f_\eta(x)=f_N(x,\alpha,\beta)$.

Рассмотрим характеристическую функцию η, используя формулы (9.8), (9.10) и (9.11),

$$\phi_\eta(t)=\phi_{\alpha+\beta\xi}(t)=\phi_\alpha(t)\cdot\phi_{\beta\xi}(t)=\phi_\alpha(t)\cdot\phi_\xi(\beta t)=$$

$$=\exp(it\alpha)\cdot\exp\left(-\frac{t^2\beta^2}{2}\right)=\exp\left(it\alpha-\frac{t^2\beta^2}{2}\right).$$

Таким образом, характеристическая функция η есть характеристическая функция случайной величины, имеющей нормальное распределение с параметрами α и β. Следовательно, случайная величина η = α + βξ распределена по нормальному закону $F_{\eta}(x) = F_N(x, \alpha, \beta)$.

9.5. Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова)

Группа теорем, касающихся предельных законов распределения суммы случайных величин, носит общее название *центральной предельной теоремы*. Рассмотрим ее классическую формулировку.

Теорема: Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ – бесконечная последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, имеющих конечные математическое ожидание a и дисперсию σ^2. Тогда при $n \to \infty$ функция распределения $\eta_n = (S_n - an)/(\sigma\sqrt{n})$, где $S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$, стремится к нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением, равным единице, т.е.

$$F_{\eta_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_N(x, 0, 1). \tag{9.15}$$

Доказательство: Используем характеристические функции. Пусть

$$\zeta_i = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}(\xi_i - a).$$

Разложим характеристическую функцию ζ_i в ряд Тейлора

$$\phi_{\zeta_i}(t) = 1 + itM[\zeta_i] - \frac{t^2}{2}M[\zeta_i^2] - \frac{it^3}{6}M[\zeta_i^3] + \ldots + \frac{i^k t^k}{k!}M[\zeta_i^k] + \ldots \tag{9.16}$$

Ясно, что в формуле (9.16) $M[\zeta_i] = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}M[\xi_i - a] = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\left(M[\xi_i] - a\right) = 0$ и $M[\zeta_i^2] = \frac{1}{\sigma^2 n}\left(M[\xi_i^2] - 2aM[\xi_i] + a^2\right) = \frac{1}{\sigma^2 n}\left[D[\xi_i] + (M[\xi_i])^2 - a^2\right] = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 n} = \frac{1}{n}.$ Тогда при больших n для любого i имеем

$$\phi_{\zeta_i}(t) = 1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\left|\frac{1}{n}\right|\right). \tag{9.17}$$

Интересующая нас случайная величина есть

$$\eta_n = \frac{S_n - an}{\sigma\sqrt{n}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\xi_i - an}{\sigma\sqrt{n}} = \sum_{i=1}^{n}\zeta_i,$$

и ее характеристическая функция соответственно равна

$$\phi_{\eta_n}(t) = \phi_{\zeta_1+\zeta_2+\ldots+\zeta_n}(t) = \phi_{\zeta_1}(t)\cdot\phi_{\zeta_2}(t)\cdot\ldots\cdot\phi_{\zeta_n}(t) =$$

$$= \left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\left|\frac{1}{n}\right|\right)\right)^n. \tag{9.18}$$

Переходя в (9.18) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} \phi_{\eta_n}(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t^2}{2n} + o\left(\left|\frac{1}{n}\right|\right)\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n = \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right). \quad (9.19)$$

Следовательно, при $n \to \infty$ характеристическая функция $\eta_n = (S_n - an)/(\sigma\sqrt{n})$ стремится к характеристической функции некоторой случайной величины, имеющей нормальное распределение с a = 0 и σ = 1. Поскольку между функцией распределения случайной величины и ее характеристической функцией имеется однозначное соответствие, функция распределения η_n стремится к нормальному закону:

$$F_{\eta_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_N(x, 0, 1),$$

что и требовалось доказать.

Замечания:

1. С ростом n функция распределения S_n стремится к нормальному закону:

$$F_{S_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_N(x, an, \sigma\sqrt{n}),$$

поскольку $S_n = an + \sigma\sqrt{n}\,\eta_n$ и согласно предельной теореме функция распределения η_n стремится к $F_N(x, 0, 1)$.

2. Если использовать $\bar{\xi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \frac{S_n}{n}$, то можно переписать результат центральной предельной теоремы в следующем виде:

$$F_{\bar{\xi}}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_N\left(x,\ a,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right). \quad (9.20)$$

9.6. Предельная (интегральная) теорема Муавра−Лапласа

Интегральная *теорема Муавра−Лапласа* является следствием центральной предельной теоремы в случае, когда реализуется схема Бернулли и случайная величина распределена по биномиальному закону.

Теорема. Рассмотрим схему Бернулли. Пусть μ_n − число наступлений события A в n независимых испытаниях, p − вероятность наступления события A в одном испытании. Тогда при $n \to \infty$ функция распределения $\eta_n = \frac{\mu_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ стремится к нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и стандартным отклонением, равным единице, т.е.

$$F_{\eta_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_N(x, 0, 1). \quad (9.21)$$

Доказательство: Представим μ_n как сумму независимых случайных величин: $\mu_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$, где $\xi_i = 1$, если событие A произошло в i-м испытании, и $\xi_i = 0$ в противоположном случае. Все ξ_i имеют одинаковый биномиальный закон распределения

ξ_i	0	1
p_i	$1-p$	p

и, следовательно, $M[\xi_i] = a = p$, $D[\xi_i] = \sigma^2 = p(1-p)$.

Подставляя в формулировку центральной предельной теоремы $S_n = \mu_n$ и найденные значения a и σ, получим соотношение (9.21).

Замечания:

1. С ростом n функция распределения μ_n стремится к нормальному закону (по аналогии с S_n)

$$F_{\mu_n}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_N(x, np, \sqrt{np(1-p)}).$$

2. Аналогично, если

$$\bar{\mu} = \frac{\mu_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i,$$

то можно переписать результат теоремы Муавра−Лапласа в следующем виде:

$$F_{\bar{\mu}}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_N(x,\ p, \sqrt{p(1-p)/n}). \qquad (9.22)$$

3. Предельная теорема Муавра–Лапласа приводит к интегральной формуле Муавра–Лапласа, рассмотренной в п. 6.2. Доказательство этого приведено в решении примера 9.5.

9.7. Решение типовых примеров

Методические замечания. При решении задач этого раздела следует помнить следующее: 1) Закон больших чисел применим к достаточно большой последовательности независимых случайных величин, и гласит, что сумма этих величин стремится по вероятности к сумме их математических ожиданий; 2) Центральная предельная теорема говорит о том, что закон распределения такой суммы случайных величин стремится к нормальному.

Пример 9.1. Пусть последовательность независимых случайных величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_k, ... задана следующим законом распределения:

$(\xi_k)_i$	$-ka$	0	ka
p_i	$1/(2k^2)$	$1 - 1/k^2$	$1/(2k^2)$

где a – некоторый параметр, $i = 1, 2, 3$.

Применим ли к этой последовательности закон больших чисел в форме Чебышева? Если применим, то к чему стремится по вероятности сумма случайных величин этой последовательности?

Решение. Для того чтобы к последовательности случайных величин был применим закон больших чисел достаточно, чтобы эти величины были попарно независимы и их дисперсии были ограничены одним и тем же числом.

Поскольку ξ_1, ξ_2, ..., ξ_k, ... независимы, то они и подавно попарно независимы, т.е. первое требование выполнено. Для любого $k \geq 1$ математическое ожидание $M[\xi_k] = 0$, поскольку закон распределения симметричен относительно значения ξ_k, равного 0. Дисперсия ξ_k равна

$$D[\xi_k] = M[\xi_k^2] - \left(M[\xi_k]\right)^2 = (-ka)^2 \frac{1}{2k^2} + 0 + (ka)^2 \frac{1}{2k^2} - 0 = a^2,$$

и, следовательно, ограничена числом a^2 для любого k. Таким образом, выполнено и второе требование, т.е. к данной последовательности применим закон больших чисел. Тогда сумма $\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_k, + ...$ должна стремиться по вероятности к сумме математических ожиданий $\sum_{k=1}^{\infty} M[\xi_k] = 0$.

Пример 9.2. Доказать, что с ростом числа бросков монеты n относительная частота выпадения “герба” r_n не стремится строго математически, но стремится по вероятности к 1/2.

Решение. Если бы r_n стремилось к 1/2, то для любого малого $\varepsilon > 0$, существовало бы некоторое число n_1, такое что для всех $n > n_1$ выполнялось бы неравенство $|r_n - 1/2| < \varepsilon$. Покажем, что это не так в нашем случае.

Например, при выпадении “герба” все n раз относительная частота $r_n = 1$. Вероятность такого события согласно формуле Бернулли равна (то же когда “герб” не выпадает ни разу, т.е. для $r_n = 0$)

$$p_n(n) = C_n^n \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n} = 2^{-n}.$$

Как следствие, уже для $\varepsilon = 1/2$ не существует такого n_1, чтобы для всех $n > n_1$ событие ($|r_n - 1/2| < \varepsilon$) было достоверным, поскольку вероятность противоположенного события (того, что $r_n - 1/2 \geq 1/2$ или $1/2 - r_n \geq 1/2$, т.е. $r_n = 1$ или $r_n = 0$) равна $2 \cdot 2^{-n}$ и больше 0.

Сходимость r_n к 1/2 по вероятности доказывается соответствующим применением теоремы Бернулли. Условия теоремы в данном случае, очевидно, выполнены, и $\mu_n / n = r_n$, $p = 1/2$.

Пример 9.3. Найти характеристическую функцию дискретной случайной величины ξ, принимающей значение 1, если выпало 10 и более очков при одновременном броске двух игральных кубиков, и 0 – в противном случае.

Решение. Поскольку возможно всего 36 комбинаций выпадающих чисел, при этом только в 6 случаях сумма очков равна 10 и более, имеем следующий закон распределения ξ:

x_i	0	1
p_i	5/6	1/6

Тогда по формуле (9.6) $\phi_\xi(t) = \exp(it\cdot 0)\frac{5}{6} + \exp(it\cdot 1)\frac{1}{6} = \frac{5+\exp(it)}{6}$.

Пример 9.4. Найти характеристическую функцию непрерывной случайной величины ξ, распределенной по нормальному закону

$$f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Решение. Начнем с того, что согласно (9.7)

$$\phi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp(itx)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\}\mathrm{d}x.$$

Пусть $y = \frac{x-a}{\sigma}$, тогда

$$\phi_\xi(x) = \frac{\exp(ita)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(ity\sigma)\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{\exp\left(ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}(y-it\sigma)^2\right)\mathrm{d}y.$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(y-it\sigma)^2}{2}\right)\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}z = \sqrt{2\pi},$$

то искомая характеристическая функция равна

$$\phi_\xi(t) = \exp\left(ita - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right). \qquad (89)$$

Пример 9.5. Игральную кость бросают 300 раз. Оценить вероятность того, что 1 или 2 выпадет от 85 до 115 раз.

Решение. Будем считать выпадение 1 или 2 благоприятным исходом отдельного испытания (броска). Пусть k – число благоприятных исходов. Требуется определить $p(85 \le k \le 115)$.

Отдельные броски игральной кости можно считать независимыми испытаниями (как в схеме Бернулли) и задачу можно решить, используя биномиальное распределение. Вероятность k благоприятных исходов в серии из n независимых испытаний согласно формуле Бернулли равна

$$p_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k},$$

где p – вероятность благоприятного исхода в отдельном испытании. В нашем случае $p = 1/3$.

Искомая вероятность будет точно определяться суммой

$$p(85 \le k \le 115) = \sum_{i=85}^{115} C_{300}^i \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(1 - \frac{1}{3}\right)^{300-i},$$

вычисление которой весьма утомительно.

Более простой, но в некоторой степени приближенный способ решения поставленной задачи состоит в использовании центральной предельной теоремы.

Пусть ξ_i – случайная величина, относящаяся к i-му испытанию. Ее значение, равное $x_1 = 1$, соответствует благоприятному исходу i-го испытания, $x_2 = 0$ − противоположному случаю. Величины ξ_i имеет один и тот же закон распределения:

x_j	0	1
p_j	2/3	1/3

где $j = 1, 2$.

Тогда $M[\xi_i] = a = 1 \cdot \frac{1}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$ и

$$D[\xi_i] = \sigma^2 = M\left[\xi_i^2\right] - (M[\xi_i])^2 = 1^2 \cdot \frac{1}{3} + 0^2 \cdot \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}.$$

Очевидно, что при таком выборе ξ_i, случайная величина $S_{300} = \sum_{i=1}^{300} \xi_i$ будет описывать число благоприятных исходов (выпадение 1 или 2) в нашей задаче.

Поскольку общее число испытаний достаточно велико ($n = 300$), можно считать, что условия центральной теоремы выполнены и, следовательно, S_{300} имеет функцию распределения, близкую к нормальному закону с математическим ожиданием $an = 100$ и дисперсией $\sigma^2 n = 200/3$, т.е. $F_{S_{300}}(x) \approx F_N(x, an, \sigma\sqrt{n})$.

Тогда

$$p(k_1 \le k \le k_2) = F_{S_{300}}(k_2) - F_{S_{300}}(k_1) \approx F_N(k_2, an, \sigma\sqrt{n}) -$$

$$- F_N(k_1, an, \sigma\sqrt{n}) = \Phi\left(\frac{k_2 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1 - na}{\sigma\sqrt{n}}\right), \qquad (9.7)$$

где $\Phi(x)$ – функция Лапласа (таблица ее значений приведена в *Приложении*).

Подставляя численные значения, соответствующие нашей задаче, получим

$$p(85 \le k \le 115) \approx \Phi\left(\frac{115-100}{10\sqrt{2/3}}\right) - \Phi\left(\frac{85-100}{10\sqrt{2/3}}\right) =$$
$$= 2\Phi\left(\frac{15}{10\sqrt{2/3}}\right) \approx 2\Phi(1{,}84) \approx 0{,}93.$$

Иными словами, вероятность того, что полное число благоприятных исходов не заключено в пределах от 85 до 115, составляет лишь около 7 процентов.

Пример 9.6. Величина S – сумма 100 чисел, каждое из которых сгенерировано датчиком случайных чисел. Датчики вырабатывают случайные числа, равномерно распределенные в интервале [0, 1]. Найти пределы, в которые с вероятностью, не меньшей 0,9, попадет S.

Решение. Пусть ξ_i – случайное число, выработанное i-м датчиком. Если ξ_i равномерно распределены в интервале $[\alpha, \beta]$, то согласно п. 7.5

$$M[\xi_i] = a = \frac{\alpha+\beta}{2}, \quad D[\xi_i] = \sigma^2 = \frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

В нашем случае $\alpha = 0$ и $\beta = 1$, соответственно $M[\xi_i] = 1/2$ и $D[\xi_i] = \sigma^2 = (1 - 0)^2/12 = 1/12$.

Величина S, согласно центральной предельной теореме, стремится к нормально распределенной, т.е. $F_S(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} F_N(x, an, \sigma\sqrt{n})$. Будем искать интервал, симметричный относительно математического ожидания $[an - t\sigma\sqrt{n}, an + t\sigma\sqrt{n}]$, где параметр $t > 0$,

$$p(an - t\sigma\sqrt{n} \le S \le an + t\sigma\sqrt{n}) = \Phi(t) - \Phi(-t) = 2\Phi(t).$$

По условию задачи $p \ge 0{,}9$, и, следовательно, $2\Phi(t) \ge 0{,}9$ или $\Phi(t) \ge 0{,}45$. Обратившись к таблицам значений функции Лапласа, мы найдем, что $t \ge 1{,}64$.

В результате находим искомый интервал

$$[an - t\sigma\sqrt{n},\ an + t\sigma\sqrt{n}] = \left[50 - \frac{16{,}4}{2\sqrt{3}},\ 50 + \frac{16{,}4}{2\sqrt{3}}\right] = [45{,}3;\ 54{,}7],$$

т.е. $45{,}3 \le S \le 54{,}7$ с вероятностью, не меньшей 0,9.

Пример 9.7. Классическая задача. Монета подбрасывается 100, 900 и 10000 раз. Оценим в каждом из случаев вероятность того, что частота выпадения “герба” отличается от половины на одну сотую или более.

Решение. Поскольку здесь имеет место схема Бернулли и число испытаний достаточно велико, используем предельную (интегральную) теорему Муавра–Лапласа в виде (9.22), где $\overline{\mu}$ − относительная частота выпадения "герба", а p = 0,5.

Рассмотрим сначала вероятность противоположного события, состоящего в том, что $|\overline{\mu} - p| \le 0{,}01$.

Случайная величина $(\overline{\mu} - p)$ имеет математическое ожидание, равное 0, и дисперсию $D[\overline{\mu} - p] = p \cdot (1 - p) / n = 0{,}25 / n$. Поэтому при больших n функция распределения $(\overline{\mu} - p)$ стремится к нормальному закону $F_N(x,\, 0,\, 0{,}5/\sqrt{n})$. Тогда

$$p(|\overline{\mu} - 0{,}5| \le 0{,}01) = p(-0{,}01 \le \overline{\mu} - 0{,}5 \le 0{,}01) \approx$$
$$\approx \Phi\left(\frac{0{,}01}{0{,}5/\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{-0{,}01}{0{,}5/\sqrt{n}}\right) = \Phi(0{,}02\sqrt{n}).$$

Следовательно:

для n = 100 $\quad p(|\overline{\mu} - 0{,}5| \le 0{,}01) \approx 2 \cdot \Phi(0{,}2) \approx 0{,}159;$

для n = 900 $\quad p(|\overline{\mu} - 0{,}5| \le 0{,}01) = 2 \cdot \Phi(0{,}6) = 0{,}451;$

для n = 10000 $\quad p(|\overline{\mu} - 0{,}5| \le 0{,}01) = 2 \cdot \Phi(2{,}0) = 0{,}955.$

Таким образом, $p(|\overline{\mu} - 0{,}5| \ge 0{,}01)$ − вероятность того, что частота выпадения "герба" отличается от половины на одну сотую или более, для 100, 900 и 10000 бросков равна соответственно: (1 − 0,159) = 0,841; (1 − 0,451) = 0,549 и (1 − 0,955) = 0,045.

Данный пример показывает, как с увеличением числа бросков (испытаний) частота выпадения "герба" по вероятности стремится к своему математическому ожиданию, равному 1/2. Видно, что, чем больше испытаний, тем меньше вероятность отклонения относительной частоты события от его вероятности. Напомним, что именно в этом и состоит суть закона больших чисел (теоремы Бернулли).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Колемаев В.А., Калинина В.Н.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2003. 352 с.
2. *Гмурман В.Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшее образование, 2006. 575 с.
3. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. М.: Агар, 2000. 256 с.
4. *Гмурман В.Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшее образование, 2006. 476 с.
5. Сборник задач по математике (для ВТУЗов). Специальные курсы. / Под ред. *А.В.Ефимова*, т.3. М.,1984. 605 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

Значения функции $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

t	**0,00**	**0,02**	**0,04**	**0,06**	**0,08**
0,0	0,39894	0,39886	0,39862	0,39822	0,39767
0,1	0,39695	0,39608	0,39505	0,39387	0,39253
0,2	0,39104	0,38940	0,38762	0,38568	0,38361
0,3	0,38139	0,37903	0,37654	0,37391	0,37115
0,4	0,36827	0,36526	0,36213	0,35889	0,35553
0,5	0,35207	0,34849	0,34382	0,34105	0,33718
0,6	0,33322	0,32918	0,32506	0,32086	0,31659
0,7	0,31225	0,30785	0,30339	0,29887	0,29431
0,8	0,28969	0,28504	0,28034	0,27562	0,27086
0,9	0,26609	0,26129	0,25648	0,25164	0,24681
1,0	0,24197	0,23713	0,23230	0,22747	0,22265
1,1	0,21785	0,21307	0,20831	0,20357	0,19886
1,2	0,19419	0,18954	0,18494	0,18037	0,17585
1,3	0,17137	0,16694	0,16256	0,15822	0,15395
1,4	0,14973	0,14556	0,14146	0,13742	0,13344
1,5	0,12952	0,12566	0,12188	0,11816	0,11450
1,6	0,11092	0,10741	0,10396	0,10059	0,09728
1,7	0,09405	0,09089	0,08780	0,08478	0,08183
1,8	0,07895	0,07614	0,07341	0,07074	0,06814
1,9	0,06562	0,06316	0,06077	0,05844	0,05618
2,0	0,05399	0,05186	0,04980	0,04780	0,04586
2,1	0,04398	0,04217	0,04041	0,03871	0,03706
2,2	0,03547	0,03394	0,03246	0,03103	0,02965
2,3	0,02833	0,02705	0,02582	0,02463	0,02349
2,4	0,02239	0,02134	0,02033	0,01936	0,01842
2,5	0,01753	0,01667	0,01585	0,01506	0,01431
2,6	0,01358	0,01289	0,01223	0,01160	0,01100
2,7	0,01042	0,00987	0,00935	0,00885	0,00837
2,8	0,00792	0,00748	0,00707	0,00668	0,00631
2,9	0,00595	0,00562	0,00530	0,00499	0,00470
t	**3,0**	**3,2**	**3,4**	**3,6**	**3,8**
φ(*t*)	0,00443	0,00238	0,00123	0,00061	0,00029
t	**4,0**	**4,2**	**4,4**	**4,6**	
φ(*t*)	0,00013	0,00006	0,00002	0,00001	

Таблица 2

Значения функции Лапласа $\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$

t	**0,00**	**0,02**	**0,04**	**0,06**	**0,08**
0,0	0,00000	0,00798	0,01595	0,02392	0,03188
0,1	0,03983	0,04776	0,05567	0,06356	0,07142
0,2	0,07926	0,08706	0,09483	0,10257	0,11026
0,3	0,11791	0,12552	0,13307	0,14058	0,14803
0,4	0,15542	0,16276	0,17003	0,17724	0,18439
0,5	0,19146	0,19847	0,20540	0,21226	0,21904
0,6	0,22575	0,23237	0,23891	0,24537	0,25175
0,7	0,25804	0,26424	0,27035	0,27637	0,28230
0,8	0,28814	0,29389	0,29955	0,30511	0,31057
0,9	0,31594	0,32121	0,32639	0,33147	0,33646
1,0	0,34134	0,34614	0,35083	0,35543	0,35993
1,1	0,36433	0,36864	0,37286	0,37698	0,38100
1,2	0,38493	0,38877	0,39251	0,39617	0,39973
1,3	0,40320	0,40658	0,40988	0,41308	0,41621
1,4	0,41924	0,42220	0,42507	0,42786	0,43056
1,5	0,43319	0,43574	0,43822	0,44062	0,44295
1,6	0,44520	0,44738	0,44950	0,45154	0,45352
1,7	0,45543	0,45728	0,45907	0,46080	0,46246
1,8	0,46407	0,46562	0,46712	0,46856	0,46995
1,9	0,47128	0,47257	0,47381	0,47500	0,47615
2,0	0,47725	0,47831	0,47932	0,48030	0,48124
2,1	0,48214	0,48300	0,48382	0,48461	0,48537
2,2	0,48610	0,48679	0,48745	0,48809	0,48870
2,3	0,48928	0,48983	0,49036	0,49086	0,49134
2,4	0,49180	0,49224	0,49266	0,49305	0,49343
2,5	0,49379	0,49413	0,49446	0,49477	0,49506
2,6	0,49534	0,49560	0,49585	0,49609	0,49632
2,7	0,49653	0,49674	0,49693	0,49711	0,49728
2,8	0,49744	0,49760	0,49774	0,49788	0,49801
2,9	0,49813	0,49825	0,49836	0,49846	0,49856
t	**3,0**	**3,2**	**3,4**	**3,6**	**3,8**
Φ(*t*)	0,49865	0,49931	0,49966	0,49984	0,49993

t	**4,0**	**4,2**
Φ(*t*)	0,49997	0,49999

ВАРИАНТЫ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ДЛЯ ЗАОЧНИКОВ

Вариант 1

1. Бросают игральную кость. Путь событие A – это выпадение четного числа, а событие B – выпадение числа меньшего 4. Что представляют собой события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$? Какие элементы пространства элементарных исходов данного опыта им благоприятствуют?
2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность события A, когда сумма выпавших очков равна 4, и события B, когда произведение выпавших очков равно 4.
3. Случайным образом выбирают 3 шара из 7, среди которых 3 белых и 4 черных. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется два белых шара.
4. Два независимых события A и B наступают с вероятностями 0,3 и 0,8 соответственно. Найти вероятность того, что наступит: а) хотя бы одно событие; б) ровно одно событие.
5. В группе 20 студентов: 2 отличника, 10 хорошистов, 4 троечника и 4 двоечника. Отличники учат 100% экзаменационных билетов, хорошисты – только 80%, троечники – 60% и двоечники – только 40%. Найти вероятность того, что взятый наугад студент этой группы сдаст экзамен. Если некий студент данной группы сдал экзамен, то какова вероятность того, что он являлся одним из четырех троечников?
6. Известна вероятность события A: $p(A) = 0,1$. Дискретная случайная величина ξ – число появлений события A в трех опытах. Требуется построить ряд распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание $M[\xi]$, дисперсию $D[\xi]$, среднее квадратическое отклонение σ и вероятность попадания в интервал $p(|\xi - M[\xi]| < \sigma)$.
7. Дана плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины ξ
$$f_\xi(x) = \begin{cases} C(x+1), & x \in [0;2], \\ 0, & x \notin [0;2]. \end{cases}$$
   Найти значение константы C, функцию распределения $F_\xi(x)$, вероятность попадания в интервал $p(\xi\in[1, 3])$, математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$.
8. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a=15 и дисперсией σ^2=400. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна p=0,762.
9. Дан ряд распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

η \ ξ	0	1	2
–1	p_{11}	0	1/8
0	1/8	1/8	0
1	3/8	1/8	0

Найти значение p_{11}, частные распределения случайных величин ξ и η, их математическое ожидание и дисперсию (т.е. $M[\xi]$, $D[\xi]$, $M[\eta]$, $D[\eta]$), а также корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$ и коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Вариант 2

1. Бросают игральную кость. Путь событие A – это выпадение нечетного числа, а событие B – выпадение числа меньшего 5. Что представляют собой события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$? Какие элементы пространства элементарных исходов данного опыта им благоприятствуют?
2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность события A, когда сумма выпавших очков равна 10, и события B, когда произведение выпавших очков равно 6.
3. Случайным образом выбирают 3 шара из 7, среди которых 4 белых и 3 черных. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется два белых шара.
4. Два независимых события A и B наступают с вероятностями 0,2 и 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что наступит: а) хотя бы одно событие; б) ровно одно событие.
5. В группе 20 студентов: 2 отличника, 4 хорошиста, 12 троечников и 2 двоечника. Отличники учат 100% экзаменационных билетов, хорошисты – только 80%, троечники – 60% и двоечники – только 40%. Найти вероятность того, что взятый наугад студент этой группы сдаст экзамен. Если некий студент данной группы сдал экзамен, то какова вероятность того, что он являлся одним из двух двоечников?
6. Известна вероятность события A: $p(A) = 0{,}2$. Дискретная случайная величина ξ – число появлений события A в трех опытах. Требуется построить ряд распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание $M[\xi]$, дисперсию $D[\xi]$, среднее квадратическое отклонение σ и вероятность попадания в интервал $p(|\xi - M[\xi]| < \sigma)$.
7. Дана плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} C(x+1), & x \in [0;3], \\ 0, & x \notin [0;3]. \end{cases}$$

Найти значение константы C, функцию распределения $F_\xi(x)$, вероятность попадания в интервал $p(\xi\in[1, 4])$, математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$.

8. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a=25 и дисперсией σ^2=400. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна p=0,8444.

9. Дан ряд распределения двумерной случайной величины (ξ,η):

$\eta \backslash \xi$	0	1	2
–1	3/8	1/8	0
0	1/8	1/8	0
1	1/8	0	p_{33}

Найти значение p_{33}, частные распределения случайных величин ξ и η, их математическое ожидание и дисперсию (т.е. $M[\xi]$, $D[\xi]$, $M[\eta]$, $D[\eta]$), а также корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$ и коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Вариант 3

1. Бросают игральную кость. Путь событие A – это выпадение четного числа, а событие B – выпадение числа большего 3. Что представляют собой события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$? Какие элементы пространства элементарных исходов данного опыта им благоприятствуют?

2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность события A, когда сумма выпавших очков равна 5, и события B, когда произведение выпавших очков равно 4.

3. Случайным образом выбирают 3 шара из 8, среди которых 3 белых и 5 черных. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется два белых шара.

4. Два независимых события A и B наступают с вероятностями 0,4 и 0,8 соответственно. Найти вероятность того, что наступит: а) хотя бы одно событие; б) ровно одно событие.

5. В группе 20 студентов: 2 отличника, 8 хорошистов, 6 троечников и 4 двоечника. Отличники учат 100% экзаменационных билетов, хорошисты – только 80%, троечники – 60% и двоечники – только 40%. Найти вероятность того, что взятый наугад студент этой группы сдаст экзамен. Если некий студент данной группы сдал экзамен, то какова вероятность того, что он являлся одним из шести троечников?

6. Известна вероятность события A: $p(A) = 0{,}3$. Дискретная случайная величина ξ – число появлений события A в трех опытах. Требуется построить ряд распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание $M[\xi]$, дисперсию $D[\xi]$, среднее квадратическое отклонение σ и вероятность попадания в интервал $p(|\xi - M[\xi]| < \sigma)$.
7. Дана плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} C(x+2), & x \in [0;2], \\ 0, & x \notin [0;2]. \end{cases}$$

Найти значение константы C, функцию распределения $F_\xi(x)$, вероятность попадания в интервал $p(\xi \in [1, 3])$, математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$.

8. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a=15 и дисперсией σ^2=400. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна p=0,8859.
9. Дан ряд распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

η \ ξ	0	1	2
–1	1/8	0	p_{13}
0	1/8	1/8	0
1	3/8	1/8	0

Найти значение p_{13}, частные распределения случайных величин ξ и η, их математическое ожидание и дисперсию (т.е. $M[\xi]$, $D[\xi]$, $M[\eta]$, $D[\eta]$), а также корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$ и коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Вариант 4

1. Бросают игральную кость. Путь событие A – это выпадение нечетного числа, а событие B – выпадение числа большего 2. Что представляют собой события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$? Какие элементы пространства элементарных исходов данного опыта им благоприятствуют?
2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность события A, когда сумма выпавших очков равна 9, и события B, когда произведение выпавших очков равно 6.
3. Случайным образом выбирают 3 шара из 8, среди которых 5 белых и 3 черных. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется два белых шара.

4. Два независимых события A и B наступают с вероятностями 0,3 и 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что наступит: а) хотя бы одно событие; б) ровно одно событие.

5. В группе 20 студентов: 2 отличника, 6 хорошистов, 10 троечников и 2 двоечника. Отличники учат 100% экзаменационных билетов, хорошисты – только 80%, троечники – 60% и двоечники – только 40%. Найти вероятность того, что взятый наугад студент этой группы сдаст экзамен. Если некий студент данной группы сдал экзамен, то какова вероятность того, что он являлся одним из двух двоечников?

6. Известна вероятность события A: $p(A) = 0,4$. Дискретная случайная величина ξ – число появлений события A в трех опытах. Требуется построить ряд распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание $M[\xi]$, дисперсию $D[\xi]$, среднее квадратическое отклонение σ и вероятность попадания в интервал $p(|\xi - M[\xi]| < \sigma)$.

7. Дана плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} C(x+2), & x \in [0;3], \\ 0, & x \notin [0;3]. \end{cases}$$

   Найти значение константы C, функцию распределения $F_\xi(x)$, вероятность попадания в интервал $p(\xi \in [1, 4])$, математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$.

8. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a=15 и дисперсией σ^2=400. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна p=0,899.

9. Дан ряд распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

η \ ξ	0	1	2
–1	3/8	1/8	0
0	1/8	1/8	0
1	p_{31}	0	1/8

   Найти значение p_{31}, частные распределения случайных величин ξ и η, их математическое ожидание и дисперсию (т.е. $M[\xi]$, $D[\xi]$, $M[\eta]$, $D[\eta]$), а также корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$ и коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Вариант 5

1. Бросают игральную кость. Путь событие A – это выпадение четного числа, а событие B – выпадение числа меньшего 6. Что представляют собой собы-

тия $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$? Какие элементы пространства элементарных исходов данного опыта им благоприятствуют?

2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность события A, когда сумма выпавших очков равна 6, и события B, когда произведение выпавших очков равно 4.
3. Случайным образом выбирают 3 шара из 9, среди которых 3 белых и 6 черных. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется два белых шара.
4. Два независимых события A и B наступают с вероятностями 0,5 и 0,8 соответственно. Найти вероятность того, что наступит: а) хотя бы одно событие; б) ровно одно событие.
5. В группе 20 студентов: 2 отличника, 6 хорошистов, 8 троечников и 4 двоечника. Отличники учат 100% экзаменационных билетов, хорошисты – только 80%, троечники – 60% и двоечники – только 40%. Найти вероятность того, что взятый наугад студент этой группы сдаст экзамен. Если некий студент данной группы сдал экзамен, то какова вероятность того, что он являлся одним из восьми троечников?
6. Известна вероятность события A: $p(A) = 0{,}5$. Дискретная случайная величина ξ – число появлений события A в трех опытах. Требуется построить ряд распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание $M[\xi]$, дисперсию $D[\xi]$, среднее квадратическое отклонение σ и вероятность попадания в интервал $p(|\xi - M[\xi]| < \sigma)$.
7. Дана плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} C(x+3), & x \in [0;2], \\ 0, & x \notin [0;2]. \end{cases}$$

   Найти значение константы C, функцию распределения $F_\xi(x)$, вероятность попадания в интервал $p(\xi \in [1, 3])$, математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$.
8. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a=15 и дисперсией σ^2=400. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна p=0,9216.
9. Дан ряд распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

η \ ξ	0	1	2
–1	1/8	0	1/8
0	p_{21}	1/8	0
1	3/8	1/8	0

Найти значение p_{21}, частные распределения случайных величин ξ и η, их математическое ожидание и дисперсию (т.е. $M[\xi]$, $D[\xi]$, $M[\eta]$, $D[\eta]$), а также корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$ и коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Вариант 6

1. Бросают игральную кость. Путь событие A – это выпадение нечетного числа, а событие B – выпадение числа меньшего 3. Что представляют собой события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$? Какие элементы пространства элементарных исходов данного опыта им благоприятствуют?
2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность события A, когда сумма выпавших очков равна 8, и события B, когда произведение выпавших очков равно 6.
3. Случайным образом выбирают 3 шара из 9, среди которых 6 белых и 3 черных. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется два белых шара.
4. Два независимых события A и B наступают с вероятностями 0,4 и 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что наступит: а) хотя бы одно событие; б) ровно одно событие.
5. В группе 20 студентов: 2 отличника, 8 хорошистов, 8 троечников и 2 двоечника. Отличники учат 100% экзаменационных билетов, хорошисты – только 80%, троечники – 60% и двоечники – только 40%. Найти вероятность того, что взятый наугад студент этой группы сдаст экзамен. Если некий студент данной группы сдал экзамен, то какова вероятность того, что он являлся одним из двух двоечников?
6. Известна вероятность события A: $p(A) = 0{,}6$. Дискретная случайная величина ξ – число появлений события A в трех опытах. Требуется построить ряд распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание $M[\xi]$, дисперсию $D[\xi]$, среднее квадратическое отклонение σ и вероятность попадания в интервал $p(|\xi - M[\xi]| < \sigma)$.
7. Дана плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} C(x+3), & x \in [0;3], \\ 0, & x \notin [0;3]. \end{cases}$$

   Найти значение константы C, функцию распределения $F_\xi(x)$, вероятность попадания в интервал $p(\xi \in [1, 4])$, математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$.
8. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a=15 и дисперсией σ^2=400. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна p=0,95.

9. Дан ряд распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

η \ ξ	0	1	2
–1	3/8	1/8	0
0	1/8	p_{22}	0
1	1/8	0	1/8

Найти значение p_{22}, частные распределения случайных величин ξ и η, их математическое ожидание и дисперсию (т.е. $M[\xi]$, $D[\xi]$, $M[\eta]$, $D[\eta]$), а также корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$ и коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Вариант 7

1. Бросают игральную кость. Путь событие A – это выпадение четного числа, а событие B – выпадение числа большего 4. Что представляют собой события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$? Какие элементы пространства элементарных исходов данного опыта им благоприятствуют?
2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность события A, когда сумма выпавших очков равна 7, и события B, когда произведение выпавших очков равно 4.
3. Случайным образом выбирают 3 шара из 10, среди которых 3 белых и 7 черных. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется два белых шара.
4. Два независимых события A и B наступают с вероятностями 0,6 и 0,8 соответственно. Найти вероятность того, что наступит: а) хотя бы одно событие; б) ровно одно событие.
5. В группе 20 студентов: 2 отличника, 4 хорошиста, 10 троечников и 4 двоечника. Отличники учат 100% экзаменационных билетов, хорошисты – только 80%, троечники – 60% и двоечники – только 40%. Найти вероятность того, что взятый наугад студент этой группы сдаст экзамен. Если некий студент данной группы сдал экзамен, то какова вероятность того, что он являлся одним из десяти троечников?
6. Известна вероятность события A: $p(A) = 0,7$. Дискретная случайная величина ξ – число появлений события A в трех опытах. Требуется построить ряд распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание $M[\xi]$, дисперсию $D[\xi]$, среднее квадратическое отклонение σ и вероятность попадания в интервал $p(|\xi - M[\xi]| < \sigma)$.
7. Дана плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины ξ

$$f_\xi(x)=\begin{cases} C(x+4), & x\in[0;2], \\ 0, & x\notin[0;2]. \end{cases}$$

Найти значение константы C, функцию распределения $F_\xi(x)$, вероятность попадания в интервал $p(\xi\in[1, 3])$, математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$.

8. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a=15 и дисперсией σ^2=400. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна p=0,9606.

9. Дан ряд распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

η \ ξ	0	1	2
–1	1/8	0	1/8
0	1/8	1/8	0
1	p_{31}	1/8	0

Найти значение p_{31}, частные распределения случайных величин ξ и η, их математическое ожидание и дисперсию (т.е. $M[\xi]$, $D[\xi]$, $M[\eta]$, $D[\eta]$), а также корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$ и коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Вариант 8

1. Бросают игральную кость. Путь событие A – это выпадение нечетного числа, а событие B – выпадение числа большего 1. Что представляют собой события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\cup B$, $A\cap B$, $A\backslash B$, $B\backslash A$? Какие элементы пространства элементарных исходов данного опыта им благоприятствуют?
2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность события A, когда сумма выпавших очков равна 7, и события B, когда произведение выпавших очков равно 6.
3. Случайным образом выбирают 3 шара из 10, среди которых 7 белых и 3 черных. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется два белых шара.
4. Два независимых события A и B наступают с вероятностями 0,5 и 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что наступит: а) хотя бы одно событие; б) ровно одно событие.
5. В группе 20 студентов: 2 отличника, 10 хорошистов, 6 троечников и 2 двоечника. Отличники учат 100% экзаменационных билетов, хорошисты – только 80%, троечники – 60% и двоечники – только 40%. Найти вероятность того, что взятый наугад студент этой группы сдаст экзамен. Если не-

кий студент данной группы сдал экзамен, то какова вероятность того, что он являлся одним из двух двоечников?

6. Известна вероятность события A: $p(A) = 0{,}8$. Дискретная случайная величина ξ – число появлений события A в трех опытах. Требуется построить ряд распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание $M[\xi]$, дисперсию $D[\xi]$, среднее квадратическое отклонение σ и вероятность попадания в интервал $p(|\xi - M[\xi]| < \sigma)$.

7. Дана плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} C(x+4), & x \in [0;3], \\ 0, & x \notin [0;3]. \end{cases}$$

Найти значение константы C, функцию распределения $F_\xi(x)$, вероятность попадания в интервал $p(\xi \in [1, 4])$, математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$.

8. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a=15 и дисперсией σ^2=400. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна p=0,966.

9. Дан ряд распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

η \ ξ	0	1	2
–1	3/8	p_{12}	0
0	1/8	1/8	0
1	1/8	0	1/8

Найти значение p_{12}, частные распределения случайных величин ξ и η, их математическое ожидание и дисперсию (т.е. $M[\xi]$, $D[\xi]$, $M[\eta]$, $D[\eta]$), а также корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$ и коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Вариант 9

1. Бросают игральную кость. Путь событие A – это выпадение четного числа, а событие B – выпадение числа большего 5. Что представляют собой события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$, $B \backslash A$? Какие элементы пространства элементарных исходов данного опыта им благоприятствуют?

2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность события A, когда сумма выпавших очков равна 8, и события B, когда произведение выпавших очков равно 4.

3. Случайным образом выбирают 3 шара из 11, среди которых 3 белых и 8 черных. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется два белых шара.
4. Два независимых события A и B наступают с вероятностями 0,7 и 0,8 соответственно. Найти вероятность того, что наступит: а) хотя бы одно событие; б) ровно одно событие.
5. В группе 20 студентов: 2 отличника, 2 хорошиста, 12 троечников и 4 двоечника. Отличники учат 100% экзаменационных билетов, хорошисты – только 80%, троечники – 60% и двоечники – только 40%. Найти вероятность того, что взятый наугад студент этой группы сдаст экзамен. Если некий студент данной группы сдал экзамен, то какова вероятность того, что он являлся одним из двенадцати троечников?
6. Известна вероятность события A: $p(A) = 0{,}9$. Дискретная случайная величина ξ – число появлений события A в трех опытах. Требуется построить ряд распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание $M[\xi]$, дисперсию $D[\xi]$, среднее квадратическое отклонение σ и вероятность попадания в интервал $p(|\xi - M[\xi]| < \sigma)$.
7. Дана плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины ξ

$$f_\xi(x) = \begin{cases} C(x+5), & x \in [0;2], \\ 0, & x \notin [0;2]. \end{cases}$$

   Найти значение константы C, функцию распределения $F_\xi(x)$, вероятность попадания в интервал $p(\xi \in [1, 3])$, математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$.
8. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a=15 и дисперсией σ^2=400. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна p=0,9774.
9. Дан ряд распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

η \ ξ	0	1	2
–1	1/8	0	1/8
0	1/8	1/8	0
1	3/8	p_{32}	0

   Найти значение p_{32}, частные распределения случайных величин ξ и η, их математическое ожидание и дисперсию (т.е. $M[\xi]$, $D[\xi]$, $M[\eta]$, $D[\eta]$), а также корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$ и коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

Вариант 10

1. Бросают игральную кость. Путь событие A – это выпадение нечетного числа, а событие B – выпадение числа меньшего 2. Что представляют собой события $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$? Какие элементы пространства элементарных исходов данного опыта им благоприятствуют?
2. Бросают две игральные кости. Найти вероятность события A, когда сумма выпавших очков равна 6, и события B, когда произведение выпавших очков равно 6.
3. Случайным образом выбирают 3 шара из 11, среди которых 8 белых и 3 черных. Найти вероятность того, что среди выбранных окажется два белых шара.
4. Два независимых события A и B наступают с вероятностями 0,6 и 0,9 соответственно. Найти вероятность того, что наступит: а) хотя бы одно событие; б) ровно одно событие.
5. В группе 20 студентов: 2 отличника, 12 хорошистов, 4 троечника и 2 двоечника. Отличники учат 100% экзаменационных билетов, хорошисты – только 80%, троечники – 60% и двоечники – только 40%. Найти вероятность того, что взятый наугад студент этой группы сдаст экзамен. Если некий студент данной группы сдал экзамен, то какова вероятность того, что он являлся одним из двух двоечников?
6. Известна вероятность события A: $p(A) = 1/4$. Дискретная случайная величина ξ – число появлений события A в трех опытах. Требуется построить ряд распределения этой случайной величины, найти ее математическое ожидание $M[\xi]$, дисперсию $D[\xi]$, среднее квадратическое отклонение σ и вероятность попадания в интервал $p(|\xi - M[\xi]| < \sigma)$.
7. Дана плотность распределения вероятности непрерывной случайной величины ξ
$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} C(x+5), & x \in [0;3], \\ 0, & x \notin [0;3]. \end{cases}$$
Найти значение константы C, функцию распределения $F_{\xi}(x)$, вероятность попадания в интервал $p(\xi \in [1, 4])$, математическое ожидание $M[\xi]$ и дисперсию $D[\xi]$.
8. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с математическим ожиданием a=15 и дисперсией σ^2=400. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, вероятность попадания в который равна p=0,9861.
9. Дан ряд распределения двумерной случайной величины (ξ, η):

ξ / η	0	1	2
–1	p_{11}	1/8	0
0	1/8	1/8	0
1	1/8	0	1/8

Найти значение p_{11}, частные распределения случайных величин ξ и η, их математическое ожидание и дисперсию (т.е. $M[\xi]$, $D[\xi]$, $M[\eta]$, $D[\eta]$), а также корреляционный момент $K_{\xi,\eta}$ и коэффициент корреляции $r_{\xi,\eta}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Часть I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ