

Министерство образования Российской Федерации
Пермский государственный технический университет
Кафедра конструирования машин и сопротивления материалов

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие и задания
по сопротивлению материалов для студентов строительных
специальностей

Пермь 2008

Составители: А.А.Балакирев, В.Е.Калугин, Ю.П.Сметанников,
Т.Э.Римм

УДК 620.10

Сопротивление материалов. Учебное пособие и задания по
сопротивлению материалов для студентов строительных
специальностей. Часть 1./Сост.: А.А.Балакирев, В.Е.Калугин,
Ю.П.Сметанников, Т.Э.Римм, Пермский государственный
технический университет. Пермь, 2008

Рецензент профессор Н.Н.Вассерман

© Пермский государственный
технический университет, 2008 г.

Содержание

ГЛАВА I. ВВЕДЕНИЕ	6
1.1 Общие определения.....	6
1.2 Методические указания	7
1.3 Основные понятия, метод сечения	8
1.4 Понятие о напряжениях	10
1.5 Деформации и перемещения	13
1.6 Основные гипотезы науки о сопротивлении материалов	14
1.7 Связь между деформациями и напряжениями. Закон Гука	15
ГЛАВА II. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ	16
2.1 Продольные силы в поперечных сечениях	16
2.2 Напряжения, деформации и перемещения.....	17
2.3 Примеры расчёта статически определимых систем растяжения-сжатия	21
2.4. Контрольное задание 1. Расчеты на прочность статически определимых систем растяжения – сжатия	40
2.5. Контрольное задание 2. Определение грузоподъемности стержневых систем растяжения – сжатия	44
ГЛАВА III. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ.....	48
3.1 Общие определения.....	48
3.2 Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей..	50
3.3 Изменение моментов инерции при повороте осей координат	51
3.4 Определение главных моментов инерции и направления главных осей	52
3.5 Методика определения положения главных осей, величин главных моментов инерции, радиусов инерции.....	53
3.6 Геометрические характеристики некоторых плоских сечений	54

3.7 Примеры определения геометрических характеристик сложных фигур	55
3.8 Контрольное задание 3. Геометрические характеристики плоских сечений	62
3.9 Контрольное задание 4. Геометрические характеристики плоских симметричных сечений	66
ГЛАВА IV. КРУЧЕНИЕ	70
4.1 Понятие о крутящем моменте, внешние нагрузки, вызывающие кручение	70
4.2 Внутренние силовые факторы, эпюра крутящих моментов	70
4.3 Определение напряжений и деформаций при кручении вала круглого сечения	73
4.4. Кручение вала прямоугольного сечения	74
4.5 Пример расчета стального вала на прочность и жесткость	76
4.6 Контрольное задание 5. Расчет вала на прочность и жесткость....	81
ГЛАВА V. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ	84
5.1 Понятие об изгибе.....	84
5.2 Расчет на прочность балок и рам.....	85
5.3 Пример расчета балки на прочность по нормальным напряжениям	90
5.4 Пример расчета на прочность двутавровой балки	97
5.5 Пример расчёта балки из неравнопрочного материала.....	102
5.6 Пример расчета рамы на прочность	107
5.7 Контрольное задание 6. Расчет балки на прочность по нормальным напряжениям	109
5.8 Контрольное задание 7. Расчет на прочность двутавровой балки	114
5.9 Контрольное задание 8. Расчет балки из неравнопрочных материалов	118

5.10 Контрольное задание 9. Расчет деревянной балки на прочность	122
5.11 Контрольное задание 10. Расчет рамы на прочность	126
ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ И РАМАХ	130
6.1. Определение перемещений непосредственным интегрированием упругой линии балки	130
6.2. Метод начальных параметров	131
6.3. Интеграл Мора	133
6.4. Способ Верещагина	134
6.5. Пример определения перемещений в балке	134
6.6 Пример определения перемещений в раме	147
6.7. Контрольное задание 11. Определение перемещений в балках ..	154
6.8 Контрольное задание 12. Определение перемещений в рамах	159

ГЛАВА I. ВВЕДЕНИЕ

1.1 Общие определения

При проектировании инженерных сооружений и машин вопрос о выборе размеров отдельных частей с позиции прочности играет весьма важную роль. Для решения этой задачи приходится, прежде всего, выяснить те внешние нагрузки, которые действуют на сооружения, затем по этим силам необходимо определить внутренние усилия, возникающие в частях сооружений и машин. Для обеспечения прочности и долговечности сооружения нужно выбрать размеры частей так, чтобы внутренние усилия не превосходили известных норм, устанавливаемых для различных материалов на основании опытного исследования их прочности.

Сопротивление материалов называется наука об инженерных методах расчета на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций и деталей машин.

Под прочностью понимают способность конструкции, ее частей и деталей выдерживать определенную нагрузку не разрушаясь.

В отличие от курса теоретической механики сопротивление материалов наделяет реальные тела свойствами деформируемости – изменяемости геометрических размеров и формы. В связи с этим, кроме расчетов на прочность, во многих случаях проектирования производят расчеты на жесткость и устойчивость.

Под жесткостью подразумевают способность конструкции и ее элементов противостоять внешним нагрузкам с точки зрения деформаций (изменение формы, размеров).

Под устойчивостью понимается способность конструкции сохранять первоначальную форму упругого равновесия при воздействии внешних нагрузок.

Сопротивление материалов рассматривает методы расчетов элементов конструкции и вопросы расчета некоторых простейших конструкций. Вопросами расчетов на прочность, жесткость и устойчивость самих конструкций занимается строительная механика.

В методических указаниях и контрольных заданиях данного пособия рассматриваются схематизированные типовые элементы строительных, транспортных и других конструкций, которые и предлагаются к расчету на прочность, жесткость и устойчивость.

Основная цель настоящего пособия – помочь студентам освоить методики и приобрести навыки расчетов по различным разделам курса «Сопротивление материалов».

1.2 Методические указания

Методические указания составлены с учетом рабочей программы по дисциплине «Сопротивление материалов» и требованиям ГОСа по направлению 653500-Строительство. При составлении контрольных заданий использованы разработки Пермского государственного технического университета.

Комплекс задач в контрольных заданиях регламентируется решением кафедры применительно к конкретной специальности, по которой осуществляется инженерная подготовка. Последовательность выполнения контрольных заданий может быть изменена применительно к учебному плану.

В связи с определенными трудностями, которые возникают у начинающего изучать курс «Сопротивление материалов», рекомендуется изучение дисциплины в следующей последовательности: предварительно ознакомиться с учебным материалом по учебникам и учебным пособиям, обращая внимание на понимание физической сущности явлений, принимаемые допущения и ограничения; на основании полученных представлений от предварительного изучения курса надо решить несколько задач, относящихся к разделу и рекомендованных в пособии; углубленно изучить раздел курса сопротивления материалов и законспектировать основные положения, необходимость в которых определяется индивидуально самим студентом.

В конце каждой темы методического пособия даются вопросы для самопроверки. Изучив тему, необходимо решить соответствующие задачи контрольных заданий. Студент допускается к сдаче экзамена при наличии знаний по курсу, определяемых предварительным зачетом, получение которого возможно при выполнении контрольных работ по данному пособию и после прохождения лабораторного практикума.

Основной список литературы

1. Александров А.В. и др. Сопротивление материалов. - М.: Высшая школа, 2000.-560 с.
2. Саргсян А.Е. Сопротивление материалов. - М.: В.ш., 2000.-286 с.
3. Смирнов А.Ф. Сопротивление материалов. - М.: В.ш., 1975.-480 с.

Дополнительная литература

4. Писаренко Г.С. и др. Справочник по сопротивлению материалов.- Киев: Наукова думка, 1975.- 704 с.

5. Справочные таблицы для выполнения учебных заданий и курсовых работ по курсу «Сопротивление материалов». Пермь, ПГТУ, 2005. 34 с.

6. Механические испытания материалов. Лабораторный практикум по курсу сопротивления материалов. Пермь, ПГТУ, 2001. – 16 с.

1.3 Основные понятия, метод сечения

Основными понятиями науки о сопротивлении материалов являются понятия реального объекта и расчетной схемы, внешних и внутренних силовых факторов, геометрических характеристик, напряжений (полное, нормальное, касательное), деформаций и перемещений (линейные, угловые). Сюда относятся также основные физические законы, общие гипотезы и методы, при помощи которых устанавливаются зависимости между этими понятиями.

При выборе расчетной схемы вводятся упрощения в геометрию реального объекта.

Основным упрощающим приемом в сопротивлении материалов является приведение геометрической формы тела к схеме стержня, оболочки, пластины, массива.

Под стержнем понимается тело, одно из измерений которого (длина) значительно больше двух других. Геометрия стержня может быть образована путем перемещения плоской фигуры вдоль некоторой кривой. Эта кривая называется осью стержня, а плоская фигура, имеющая свой центр тяжести на оси и нормальная к ней, называется поперечным сечением. Для стержня обозначим продольную ось – Z , в поперечном сечении главные оси – X и Y .

Пластина-это тело, у которого толщина существенно меньше его размеров в плане. Криволинейная до загрузки пластина называется оболочкой.

В курсе сопротивления материалов рассматриваются главным образом задачи расчёта прямолинейных стержней.

Как и всякая наука, сопротивление материалов идет от простого к сложному, решая сначала элементарные задачи растяжения – сжатия, сдвига, изгиба и кручения, а затем используя эти решения для задач сложного нагружения.

Внешние силы, действующие на реальный объект, чаще всего известны. Обычно необходимо определить внутренние силы

(результат взаимодействия между отдельными частями данного тела) которые неизвестны по величине и направлению, но знание которых необходимо для прочностных и деформационных расчетов. Определение внутренних сил осуществляется с помощью так называемого метода сечений, сущность которого заключается в следующем:

1. Мысленно разрезают тело по интересующему нас сечению.
2. Отбрасывают одну из частей (независимо какую).
3. Заменяют действие отброшенной части тела на оставшуюся системой сил, которые в данном случае переходят в разряд внешних.

Силы упругости по принципу действия и противодействия всегда взаимны и представляют непрерывно распределенную по сечению систему сил. Их значение и ориентация в каждой точке сечения произвольны, зависят от ориентации сечения относительно тела, величины и направления внешних сил, геометрических размеров тела. Внутренние силы можно привести к главному вектору \bar{R} и главному моменту \bar{M} . За точку приведения обычно принимают центр тяжести сечения. Выбрав систему координат X, Y, Z (Z – продольная ось по нормали к поперечному сечению, X и Y – в плоскости этого сечения) и начало системы в центре тяжести, обозначим проекцию главного вектора R на координатные оси через N, Q_x, Q_y , а проекции главного момента $\bar{M} - M_x, M_y, M_z$. Эти три силы и три момента называют внутренними силовыми факторами в сечении:

N – продольная сила;

Q_x, Q_y – поперечные силы;

M_z – крутящий момент;

M_x, M_y – изгибающие моменты.

Так как внутренние силы находятся в равновесии с внешними силами, они могут быть определены из уравнений равновесия статики:

$$\begin{aligned} \sum X=0, \sum Y=0, \sum Z=0, \\ \sum M_x=0, \sum M_y=0, \sum M_z=0. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Любой внутренний силовой фактор в сечении равен алгебраической сумме соответствующих внешних силовых факторов, действующих с одной стороны от сечения.

Внутренний силовой фактор в сечении численно равен интегральной сумме соответствующих элементарных внутренних сил или моментов по всей площади сечения:

$$\begin{aligned}
Q_y &= \int_F dQ_y, & M_x &= \int_F dM_x, \\
Q_x &= \int_F dQ_x, & M_y &= \int_F dM_y, \\
N &= \int_F dN, & M_z &= \int_F dM_z.
\end{aligned}
\tag{1.2}$$

Классификация основных видов нагружения связана с внутренним силовым фактором, возникающим в сечении. Так, если в поперечных сечениях возникает только продольная сила N , а другие внутренние силовые факторы равны нулю, то на этом участке имеет место растяжение или сжатие, в зависимости от направления силы N . Нагружение, когда в поперечном сечении возникает только поперечная сила Q , называют сдвигом.

Если в поперечном сечении возникает только крутящий момент $M_k (M_z)$, то стержень работает на кручение. В случае, когда от внешних сил, приложенных к стержню возникает только изгибающий момент M_x (или M_y), такой вид нагружения называют чистым изгибом в плоскости yz (или xz). Если в поперечном сечении наряду с изгибающим моментом (например, M_x) возникает поперечная сила Q_y , то такой вид нагружения называют плоским поперечным изгибом (в плоскости yz). Вид нагружения, когда в поперечном сечении стержня возникают только изгибающие моменты M_x и M_y , называют косым изгибом (плоским или пространственным). При действии в поперечном сечении нормальной силы N и изгибающих моментов M_x и M_y возникает нагружение, называемое сложным изгибом с растяжением сжатием или внецентренным растяжением (сжатием). При действии в сечении изгибающего момента и крутящего момента возникает изгиб с кручением.

Общим случаем нагружения называют случай, когда в поперечном сечении возникают все шесть внутренних силовых факторов.

К особым видам нагружения следует отнести смятие, когда деформация носит местный характер, не распространяясь на всё тело и продольный изгиб (частный случай общего явления потери устойчивости).

1.4 Понятие о напряжениях

Величина внутренних силовых факторов не отражает интенсивности напряженного состояния тела, близости к опасному состоянию (разрушению). Для оценки интенсивности внутренних сил вводится критерий (числовая мера), называемый напряжением.

Если в поперечном сечении площадью A некоторого тела выделим элементарную площадку ΔA , рис.1.1, в пределах которой выявлена внутренняя сила ΔR , то за среднее напряжение на площадке ΔA может быть принято отношение:

$$\bar{p}_{CP} = \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A}. \quad (1.3)$$

Истинное напряжение в точке можно определить, уменьшая площадку:

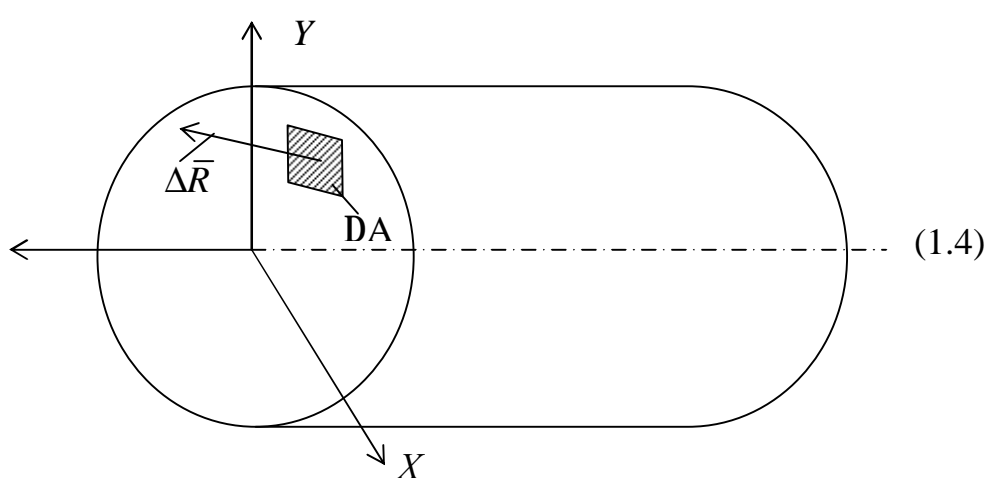
$$\bar{p} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{R}}{\Delta A}. \quad (1.4)$$


Рис.1.1

Векторная величина p представляет собой полное напряжение в точке. Размерность напряжения принимается в Па (Паскаль) или МПа (Мегапаскаль). Полное напряжение обычно в расчетах не применяется, а определяется его нормальная к сечению составляющая σ - нормальное напряжение, и касательные τ' , τ'' - касательные напряжения (рис.1.2). Полные напряжения, приходящиеся на единицу площади, можно выразить через нормальные и касательные напряжения:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}. \quad (1.5)$$

Между действующими напряжениями и внутренними силовыми факторами существует следующая связь:

$$\begin{aligned} N &= \int_A s dA; & M_x &= \int_A y s dA; \\ Q_y &= \int_A t'' dA; & M_y &= \int_A x s dA; \\ Q_x &= \int_A t' dA; & M_k &= \int_A (t'' \cdot x - t' \cdot y) dA \end{aligned} \quad (1.6)$$

Нормальные и касательные напряжения являются функцией внутренних силовых факторов и геометрических характеристик сечения. Эти напряжения, вычисленные по соответствующим формулам, можно назвать фактическими или рабочими.

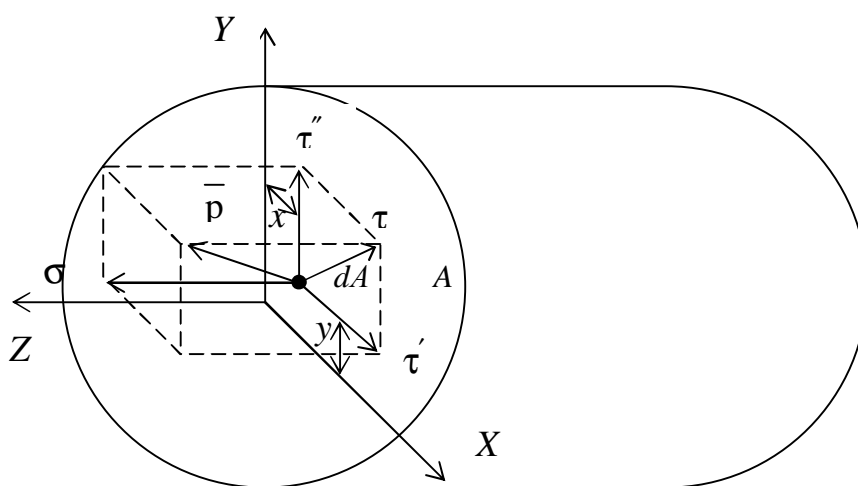


Рис.1.2

Наибольшее значение фактических напряжений ограничено предельным напряжением, при котором материал разрушается или появляются недопустимые пластические деформации. Первая из этих границ существует у любого хрупкого материала и называется пределом прочности (σ_B , τ_B), вторая имеет место только у пластичных материалов и называется пределом текучести (σ_T , τ_T). При действии циклически изменяющихся напряжений разрушение происходит при достижении так называемого предела выносливости (σ_R , τ_R), значительно меньшего, чем соответствующие пределы прочности.

1.5 Деформации и перемещения

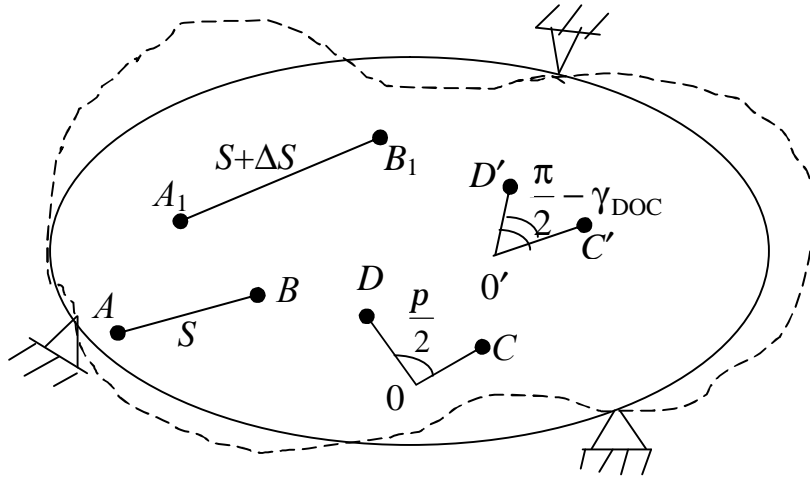


Рис.1.3

При воздействии внешних сил тело деформируется, изменяя свои размеры и форму. С физической точки зрения деформации могут быть упругими, пластическими и вязкими.

Упругими называются деформации, возникающие сразу и полностью после приложения нагрузки и сразу же и полностью исчезающие после ее снятия.

Пластическими (остаточными) называются деформации, не исчезающие ни сразу после снятия нагрузки, ни по истечении достаточно большого времени.

Вязкими называются деформации, развивающиеся в теле с течением времени без изменения нагрузки.

В курсе сопротивления материалов объектом изучения является в основном упругая деформация.

В геометрическом смысле любая деформация может быть представлена как совокупность линейных (ϵ) и угловых (γ) деформаций (рис.1.3).

$$\epsilon_{AB} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{S}, \quad (1.7)$$

$$g_{COD} = \lim_{\substack{OC \rightarrow 0 \\ OD \rightarrow 0}} (\angle COD - \angle C'O'D'). \quad (1.8)$$

где ϵ - относительная линейная деформация в продольном направлении; γ - угловая деформация (угол сдвига).

Накопление деформаций в связанных друг с другом элементах твердого тела приводит к изменению их первоначального положения в пространстве. Эти изменения называются перемещениями. Перемещение может быть линейным и угловым. Линейным перемещением, например, является прогиб сечения балки, угловым перемещением – поворот сечения при изгибе и кручении.

Поскольку перемещения – следствие накопления деформаций в элементах тела, они должны быть интегральными функциями внутренних силовых факторов.

Понятия перемещения и деформация не следует смешивать. Можно привести много примеров, когда деформации есть, а перемещений нет и, наоборот, при отсутствии деформаций имеют место перемещения.

1.6 Основные гипотезы науки о сопротивлении материалов

В сопротивлении материалов принимают некоторые упрощающие гипотезы применительно к структуре и свойствам материалов, а так же о характере деформаций.

1. Гипотеза о сплошности материала

Принимается инженерная модель материала, по которой предполагается, что материал сплошь заполняет форму тела.

2. Гипотеза об однородности и изотропности

Материал предполагается однородным и изотропным, т.е. в любом объеме и в любом направлении свойства материала считаются одинаковыми. В некоторых случаях предположение об изотропности не приемлемо. Например, к анизотропным материалам относятся древесина, бетон, некоторые композиционные материалы.

3. Гипотеза о малости деформаций и перемещений

Предполагается, что перемещения малы по сравнению с размерами тела. Это позволяет в большинстве случаев пренебречь изменениями в расположении внешних сил относительно отдельных частей тела и составлять уравнения статики для недеформированного тела. В некоторых случаях этот принцип не применим. Такие варианты оговариваются особо.

4. Гипотеза об идеальной упругости

Все тела предполагаются абсолютно упругими. Отклонения от идеальной упругости, которые всегда наблюдаются при нагружении реальных тел, несущественны и ими пренебрегают до определенных пределов деформирования.

5. Принцип независимости действия сил

Результат воздействия на конструкцию системы нагрузок равен сумме результатов воздействия каждой нагрузки в отдельности. Этот принцип применим в тех случаях, когда могут быть использованы закон Гука и предпосылка о малости деформации.

6. Гипотеза плоских сечений (гипотеза Бернулли)

Поперечные сечения бруса, плоские до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и при действии нагрузки.

1.7 Связь между деформациями и напряжениями. Закон Гука

Физическая индивидуальность твердых тел, с точки зрения сопротивления материалов, заключается в том, что для каждого из них связь между внешними силами и вызываемыми ими перемещениями различна.

Впервые эту связь установил в 1660 г. Роберт Гук. Тем самым было положено начало сопротивлению материалов как науки.

Для линейного напряженного состояния этот закон в современной трактовке гласит: напряжение прямо пропорционально относительной продольной деформации и зависит от упругих свойств тела.

$$\sigma = E \cdot \epsilon, \quad (1.9)$$

где E – модуль упругости (Па).

Закон Гука справедлив только до напряжения, называемого пределом пропорциональности.

Для чистого сдвига закон Гука имеет вид:

$$\tau = G \cdot \gamma, \quad (1.10)$$

где G – модуль сдвига (Па).

Модуль сдвига связан с модулем продольной упругости:

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \quad (1.11)$$

Вопросы для самопроверки

Что называется наукой о сопротивлении материалов. Реальный объект и расчетная схема. Схематизация свойств материала, форм геометрических тел, сил. Внутренние силы, метод сечения. Понятия о напряжениях, полном, нормальном, касательном. Предельное напряжение, расчётное сопротивление, нормированный запас прочности. Понятие о деформациях и перемещениях, их отличие. Связь напряжений с силовыми факторами. Основные гипотезы в науке о сопротивлении материалов.

Литература: [1.] Глава 1; Глава 2, § 2.1.

[2.] Глава 1.

[3.] Глава 1.

ГЛАВА II. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

2.1 Продольные силы в поперечных сечениях

Растяжением или сжатием называется такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только один внутренний силовой фактор – продольная сила N .

Продольная сила считается положительной, если она вызывает растяжение (направлена от сечения), и отрицательной, если она вызывает сжатие (направлена к сечению).

В произвольном сечении продольная сила численно равняется алгебраической сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, действующих по одну сторону от данного сечения.

При этом, внешние силы, направленные от сечения входят в уравнение со знаком плюс, а направленные к сечению – со знаком минус, что соответствует указанному выше правилу знаков для продольной силы.

$$N = \sum_{i=1}^n P_i + \int_l q \cdot dz \quad (2.1)$$

где P_i – внешние продольные силы, а q – интенсивность продольной нагрузки. Интегрирование и суммирование производится по всем участкам, расположенным по одну сторону от исследуемого сечения.

Примером распределенной нагрузки является собственный вес материала стержня. Интенсивность сил тяжести в пределах каждого участка ступенчатого стержня будет величиной постоянной и равной:

$$q = g \cdot A \quad (2.2)$$

где γ – вес единицы объема материала, A – площадь поперечного сечения.

При растяжении – сжатии интенсивность распределенной нагрузки и продольная сила связаны между собой следующей дифференциальной зависимостью:

$$\frac{dN}{dz} = q. \quad (2.3)$$

Для наглядного представления о характере распределения продольных сил по длине стержня строится эпюра продольных сил.

При построении эпюры следует руководствоваться некоторыми правилами, вытекающими как из метода сечений, так и из дифференциальной зависимости между q и N .

1. Если на участке стержня отсутствует распределенная нагрузка, то продольная сила постоянна.

2. Если на участке имеется равномерно распределенная нагрузка, то продольная сила изменяется по линейному закону.

3. В сечении, где приложена внешняя сосредоточенная сила, эпюра продольных сил имеет скачок на величину этой силы.

4. В концевых сечениях стержня продольные силы равны приложенным в этих сечениях внешним сосредоточенным силам.

2.2 Напряжения, деформации и перемещения

Нормальные напряжения в поперечных сечениях стержня, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, вычисляются по формуле:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (2.4)$$

Для однородного стержня постоянного сечения при действии продольной силы N нормальные напряжения будут постоянными как по сечению, так и по всей длине. Такое напряженное состояние называется однородным.

При осевом растяжении или сжатии стержня, выполненного из пластичного материала, условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{|N_{\max}|}{A} \leq R, \quad (2.5)$$

где σ_{\max} и N_{\max} – нормальное напряжение и продольная сила в опасном поперечном сечении; R -расчётное сопротивление.

Для хрупкого материала условие прочности выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} |\sigma|_{\max}^P &= \frac{|N'|}{A} \leq R_p, \\ |\sigma|_{\max}^C &= \frac{|N''|}{A} \leq R_c. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Здесь $|\sigma|_{\max}^P$ и $|\sigma|_{\max}^C$, – максимальные растягивающее и сжимающее напряжения, а $|N'|$ и $|N''|$ – растягивающая и сжимающая

нормальные силы; R_p и R_c - расчётное сопротивление на растяжение и расчётное сопротивление на сжатие.

Определяется расчётное сопротивление по формуле

$$R = \frac{R_n}{k}, \quad (2.7)$$

где R_n –нормативное сопротивление, устанавливаемое СНиПом; k – коэффициент безопасности по материалу.

Для материалов, находящихся в пластичном состоянии, за нормативное напряжение принимается предел текучести (σ_T), а для хрупких материалов – предел прочности (σ_B). Соответственно при растяжении это S_B^P и при сжатии S_B^C .

Таким образом, для пластичных материалов

$$R = \frac{S_T}{k}, \quad (2.8)$$

где $k=1,10...1,15$.

Для хрупких материалов

$$R_p = \frac{S_B^P}{k}, \quad (2.9)$$

$$R_c = \frac{S_B^C}{k}, \quad (2.10)$$

где $k= 1,3...1,5$.

Условие прочности позволяет решать три типа задач.

1. Проверка прочности

По известным продольной силе и размерам поперечного сечения стержня определяют наибольшее напряжение, которое сравнивают с расчётным сопротивлением, либо определяют фактический запас прочности:

$$k = \frac{R_n}{S_{\max}} \geq [k], \quad (2.11)$$

где $[k]$ – нормативный коэффициент запаса прочности; k – фактический коэффициент запаса прочности.

Расчет выполняется непосредственно по формулам 2.5 или 2.6.

2. Подбор сечения – проектировочный расчет.

По известной продольной силе и расчётному сопротивлению определяется необходимая площадь поперечного сечения стержня:

$$A \geq \frac{|N|}{R}. \quad (2.12)$$

3. Определение допускаемой нагрузки.

По известной площади поперечного сечения и материалу стержня (расчётное сопротивление) определяют допускаемое значение продольной силы:

$$|N| \leq A \cdot R. \quad (2.13)$$

Затем по известной продольной силе вычисляется допускаемое значение внешней нагрузки.

Размеры нагруженного стержня меняются в зависимости от величины приложенных сил. Так, если до нагружения стержня (рис.2.1) его длина была равна l , то после нагружения она станет равной $l + \Delta l$. Величину Δl называют абсолютным удлинением стержня.

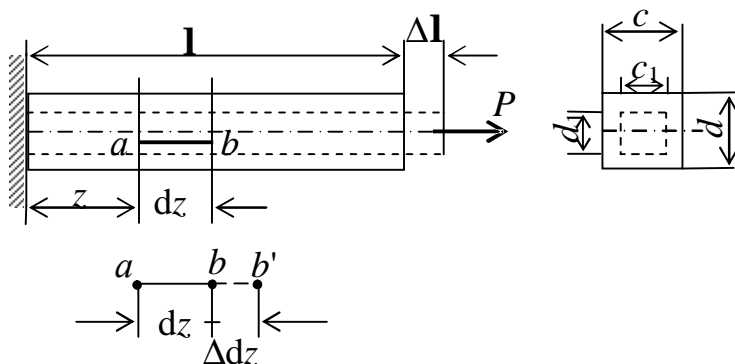


Рис.2.1

Мысленно вырежем из стержня бесконечно малый элемент длиной dz . После приложения нагрузки он получит удлинение Δdz . Отношение удлинения к длине элемента

$$e = \frac{\Delta dz}{dz}, \quad (2.14)$$

называется относительной продольной линейной деформацией в сечении z .

В пределах малых удлинений для подавляющего большинства материалов справедлив закон Гука, который

устанавливает прямую пропорциональность между напряжениями и деформациями:

$$\sigma = E \cdot \epsilon, \quad (2.15)$$

где E – модуль упругости, физическая константа материала.

Если в выражении (2.15) заменить σ на N/A , а ϵ на $\Delta dz/dz$, то

$$\Delta dz = \frac{N \cdot dz}{E \cdot A}.$$

Абсолютное удлинение стержня на длине l будет равно:

$$\Delta l = \int_l \frac{N \cdot dz}{E \cdot A}. \quad (2.16)$$

При постоянной продольной силе и площади поперечного сечения в пределах каждого участка, из выражения (2.16) получаем:

$$\Delta l = \frac{N \cdot l}{E \cdot A}. \quad (2.17)$$

Изменение поперечных размеров стержня оценивается абсолютной и относительной поперечной деформацией.

$\Delta d = d - d_1$ - абсолютная поперечная деформация,

$\epsilon' = \frac{\Delta d}{d}$ - относительная поперечная деформация,

где d_1 и d – конечный и начальный поперечный размер стержня (рис. 2.1).

При растяжении $\epsilon > 0$, $\epsilon' < 0$, а при сжатии $\epsilon < 0$, $\epsilon' > 0$.

Отношение поперечной деформации к продольной, взятой по абсолютной величине при простом растяжении или сжатии, называется коэффициентом Пуассона и обозначается буквой μ :

$$\mu = \left| \frac{\epsilon'}{\epsilon} \right|. \quad (2.18)$$

Для различных материалов значение коэффициента Пуассона колеблется в пределах от 0 до 0,5.

Из формулы (2.15) следует, что продольная деформация $e = \frac{S}{E}$, тогда $e' = -me$ или

$$e' = -m \cdot \frac{S}{E}. \quad (2.19)$$

При деформации стержневой системы, состоящей из n стержней или имеющей n различно нагруженных участка в его материале накапливается потенциальная энергия, величина которой находится по формуле:

$$U = \sum_{i=1}^n \int_l \frac{N_i^2 dz}{2E \cdot A_i}. \quad (2.20)$$

Для призматического бруса с постоянной по длине продольной силой выражение (2.20) имеет вид:

$$U = \frac{N^2 \cdot l}{2E \cdot A} = \frac{\Delta l^2 E \cdot A}{2l}.$$

Удельная потенциальная энергия упругой деформации, т.е. энергия, приходящаяся на единицу объема, будет равна:

$$u = \frac{S^2}{2E} = \frac{S \cdot e}{2}. \quad (2.21)$$

2.3 Примеры расчёта статически определимых систем растяжения-сжатия

2.3.1. Пример 1.

По оси двухступенчатого стального стержня приложены силы $P_1=30$ кН, $P_2=70$ кН и $P_3=100$ кН (рис.2.2). Ступени имеют длины $l_1=25$ см, $l_2=35$ см, $l_3=40$ см. Соответствующие площади поперечных сечений: $A_1=2$ см², $A_2=4$ см². Модуль упругости для материала стержня $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений.

Решение.

1. Построение эпюры N . Разбиваем стержень на три участка, границы которых совпадают с сечениями, где приложены внешние силы. Значения продольной силы на каждом участке определяем, пользуясь методом сечений.

В сечении 1-1 $N_1=P_1=30$ кН. В сечении 2-2 $N_2=P_1-P_2=30-70=-40$ кН. В сечении 3-3 $N_3=P_1-P_2-P_3=30-70+100=60$ кН.

По полученным значениям строится эпюра продольных сил (рис.2.2).

2. Построение эпюры σ . Для вычисления напряжений стержень разбивается на четыре участка. Их границы определяются не только сечениями, где приложены внешние силы, но и сечениями, где меняются поперечные размеры стержня. Пользуясь эпюрой N , находим:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_1}{A_1} = \frac{30 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = 100 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\sigma_{BC} = \frac{N_2}{A_1} = \frac{-40 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^{-4}} = -133 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\sigma_{CD} = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-40 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = -100 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$\sigma_{DE} = \frac{N_3}{A_2} = \frac{60 \cdot 10^3}{4 \cdot 10^{-4}} = 150 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Проверка прочности стержня на наиболее напряженном участке: $\sigma_{\max}=150 \text{ МПа} < R=210 \text{ МПа}$.

По полученным результатам строим эпюру нормальных напряжений.

3. Построение эпюры перемещений Δ .

Определение перемещений начинаем от заделки, где оно равно 0. Перемещение произвольного сечения на расстояние z равно абсолютному удлинению части стержня, которая заключена между этим сечением и заделкой.

Так, перемещение произвольного сечения на третьем участке может быть вычислено по формуле $w_{(z)} = \frac{N_3 \cdot z}{E \cdot A_2}$.

Это есть уравнение наклонной прямой, так как $w_{(z)}$ линейно зависит от переменной z при прочих постоянных для данного участка параметрах.

Перемещение сечения D относительно заделки равно абсолютному удлинению участка DE

$$w_D = \Delta l_{DE} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,15 \text{ мм}.$$

Перемещение сечения C относительно заделки складывается из абсолютного укорочения участка CD и удлинения участка DE

$$w_C = -\frac{40 \cdot 10^3 \cdot 20 \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-4}} + 1,5 \cdot 10^{-4} = 0,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,05 \text{ мм}.$$

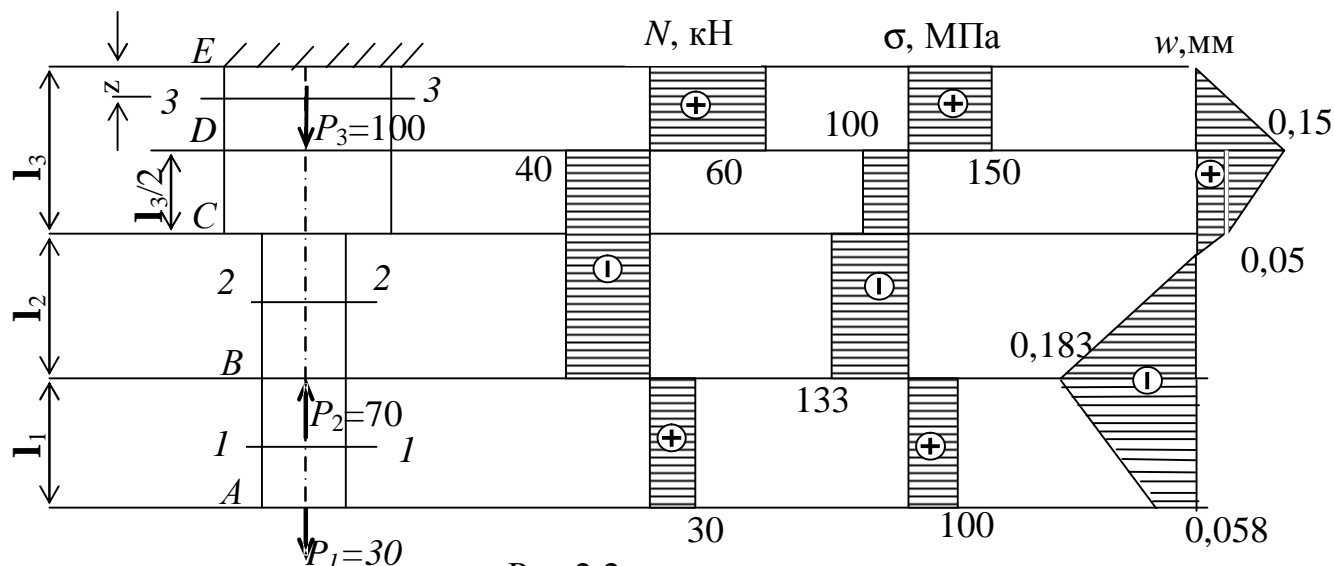


Рис.2.2

Аналогично определяем перемещения сечений B и A :
 $w_B = -0,183$ мм; $w_A = -0,058$ мм. Эпюра перемещений представлена на рис. 2.2.

2.3.2. Пример 2.

Жесткий стержень AC шарнирно закреплён в точке C и поддерживается стальной тягой BD круглого поперечного сечения диаметром 20 мм. На части стержня AC приложена равномерно распределенная нагрузка с интенсивностью $q=80,0$ кН/м (рис.2.3). Расчётное сопротивление для материала тяги BD $R=210$ МПа, модуль упругости $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

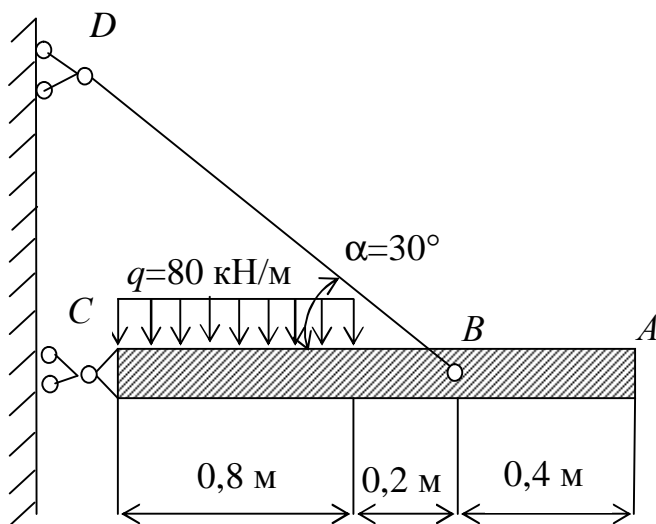


Рис. 2.3

Проверить прочность тяги и определить перемещение свободного конца жесткого бруса, т.е. точки A .

Решение.

1. Определяем усилие, возникающее в тяге BD под действием приложенной нагрузки. Мысленно рассекаем тягу BD , действие отброшенной верхней части заменяем внутренним усилием N_{BD} (рис.2.4). Составляем уравнение равновесия системы в виде суммы моментов, действующих на нее сил относительно точки C .

$$\begin{aligned}\Sigma m_C &= 0 \\ -80 \cdot 0,8 \cdot 0,4 + N_{BD} \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ &= 0; \\ N_{BD} &= \frac{80,0 \cdot 0,8 \cdot 0,4}{0,5 \cdot 1} = 51,2 \text{ кН.}\end{aligned}$$

Положительный результат означает, что стержень BD растягивается.

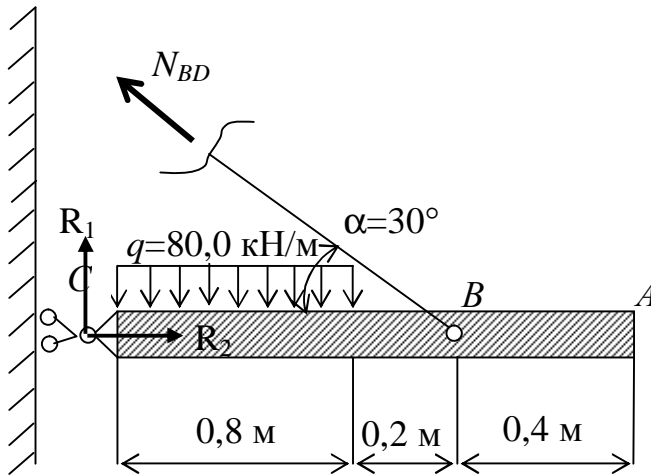


Рис.2.4

2. Условие прочности для тяги BD имеет вид:

$$s = \frac{N_{BD}}{A_{BD}} \leq R,$$

где $A_{BD} = \frac{pd^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 2^2}{4} = 3,14 \text{ см}^2$.

Тогда $s = \frac{N}{A} = \frac{51,2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 10^{-4}} = 16,3 \cdot 10^7 \text{ Па} = 163 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}$

Так как напряжение в тяге меньше расчётного сопротивления прочность тяги BD обеспечена.

3. Для определения перемещения точки A найдем удлинение Δl тяги BD и построим план перемещения данной системы, т.е. покажем положение стержневой системы после приложения нагрузки.

Удлинение тяги BD равно:

$$\Delta l = \frac{N_{BD} \cdot l_{BD}}{E \cdot A_{BD}} = \frac{51,2 \cdot 10^3 \cdot 1,0}{\cos 30^\circ \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 3,14 \cdot 10^{-4}} = 9,4 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,94 \text{ мм}$$

План перемещения показан на рис.2.5.

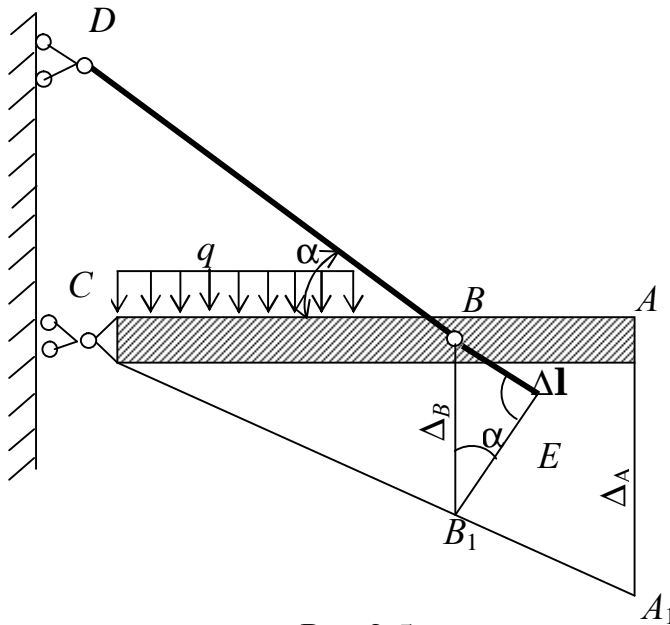


Рис.2.5

При построении плана перемещения полагаем, что в точке B тяга не соединяется с жестким стержнем AC . Тогда тяга удлинится на величину Δl . Для того чтобы найти новое положение точки B , которая одновременно должна находиться на продолжении тяги Δl и вместе с жестким стержнем перемещаться по дуге радиусом CB вниз, надо радиусом $DB + \Delta l$ и радиусом CB произвести засечки. На основании допущения о том, что перемещения точек тела, обусловленные его упругими деформациями, весьма малы по сравнению с размерами самого тела, заменяем дуги перпендикулярами к соответствующим стержням. Тогда отрезок BB_1 будет искомым перемещением точки B , а отрезок AA_1 есть искомое перемещение точки A - Δ_A .

Из прямоугольного треугольника BB_1E найдем $\Delta_B = \frac{\Delta l}{\sin 30^\circ} = \frac{0,94}{0,5} = 1,88 \text{ мм}$, из подобия треугольников $(\Delta CAA_1 \sim \Delta CBB_1)$ получим перемещение точки A .

$$\Delta_A = \Delta_B \frac{AC}{BC} = 1,88 \frac{1,4}{1} = 2,63 \text{ мм}.$$

2.3.3 Пример 3.

Подобрать из условия прочности поперечные сечения стальных стержней кронштейна, нагруженного силой $P=200$ кН, и определить горизонтальное, вертикальное и полное перемещение узла C (рис.2.6).

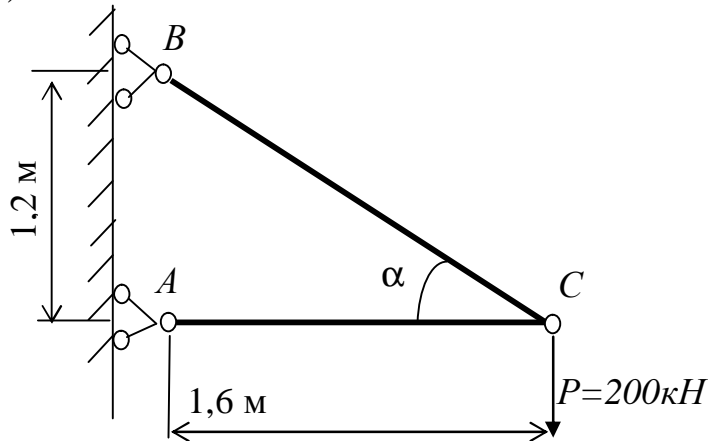


Рис.2.6

Стержень AC двутаврового поперечного сечения, стержень BC круглого поперечного сечения. Расчётное сопротивление для материала стержней $R=210$ МПа, модуль упругости $E=2 \cdot 10^5$ МПа.

Решение.

1. Составим уравнения равновесия и определим усилия в стержнях. Для этого мысленно вырежем узел C . В сечениях стержней приложим неизвестные пока усилия в направлении, вызывающем растяжение стержней (рис.2.7).

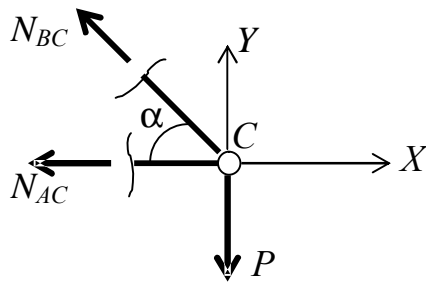


Рис.2.7

$$l_{BC} = \sqrt{1,2^2 + 1,6^2} = 2\text{ м};$$

$$\sin \alpha = \frac{1,2}{2} = 0,6; \quad \cos \alpha = \frac{1,6}{2} = 0,8;$$

$$\sum P_y = 0: \quad N_{BC} \cdot \sin \alpha - P = 0;$$

$$N_{BC} = \frac{P}{\sin \alpha} = \frac{200}{0,6} = 333,3\text{ кН}.$$

$$\sum P_x = 0:$$

$$-N_{AC} - N_{BC} \cdot \cos \alpha = 0.$$

$$N_{AC} = -N_{BC} \cdot \cos \alpha =$$

$$= -333,3 \cdot 0,8 = -266,7 \text{ кН}.$$

Отрицательное значение усилия N_{AC} указывает на то, что стержень AC испытывает сжатие.

2. Подбираем из условия прочности размеры стержней.

а) Для стержня BC $A_{BC} \geq \frac{|N|_{BC}}{R}$, причем $A_{BC} = \frac{pd^2}{4}$. Тогда

$$d \geq \sqrt{\frac{4 \cdot N_{BC}}{p \cdot R}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 333,3 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 210 \cdot 10^6}} = 4,50 \cdot 10^{-2} \text{ м} = 45,0 \text{ мм}.$$

Принимаем в соответствие с таблицей нормальных размеров (см. страницу 39) $d=45$ мм. Площадь стержня BC

$$A_{BC} = \frac{p \cdot d^2}{4} = 15,9 \text{ см}^2.$$

б) Для стержня AC

$$A_{AC} \geq \frac{|N|_{AC}}{R} = \frac{266,7 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 1,27 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 12,7 \text{ см}^2.$$

В соответствии с сортаментом на двутавровые балки по ГОСТу 8239-72 принимаем двутавр № 12 с $A=14,7 \text{ см}^2$.

3. Находим изменение длины каждого стержня.

а) Удлинение стержня BC

$$\Delta l_{BC} = \frac{N_{BC} \cdot l_{BC}}{E \cdot A_{BC}} = \frac{333,3 \cdot 10^3 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 15,9 \cdot 10^{-4}} = 20,96 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 2,10 \text{ мм}.$$

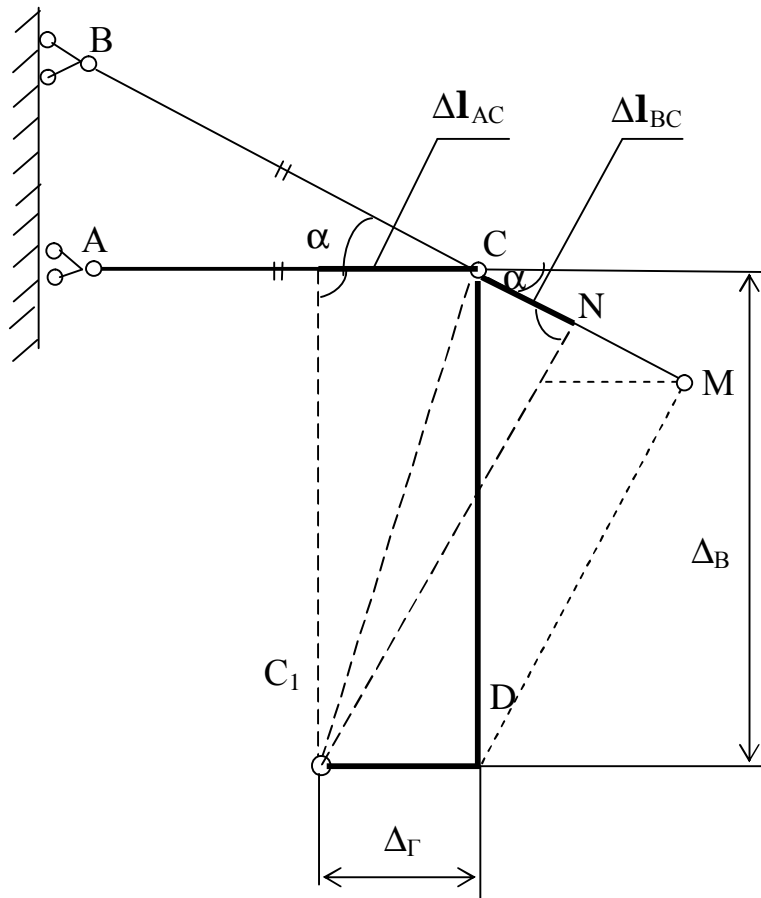
б) Укорочение стержня AC

$$\Delta l_{AC} = \frac{N_{AC} \cdot l_{AC}}{E \cdot A_{AC}} = \frac{-266,7 \cdot 10^3 \cdot 1,6}{2 \cdot 10^{11} \cdot 14,7 \cdot 10^{-4}} = -14,5 \cdot 10^{-4} \text{ м} = -1,45 \text{ мм}$$

4. Определяем перемещение узловой точки C .

План перемещения представлен на рис.2.8. Для определения перемещения узла C положим, что стержни в узле C не соединены между собой. Тогда стержень BC удлинится на величину Δl_{BC} , и стержень AC укоротится на величину Δl_{AC} . Новое положение узла C (точка C_1) определится как точка пересечения перпендикуляров к стержням BC и AC , проведенных из конца стержней $BC + \Delta l_{BC}$ и $AC - \Delta l_{AC}$ (вместо дуг радиусов $BC + \Delta l_{BC}$ и $AC - \Delta l_{AC}$). Из схемы видно, что горизонтальное перемещение точки C равно $\Delta_{\Gamma} = |\Delta l_{AC}| = 1,45 \text{ мм}$. Для нахождения второй координаты точки C_1 — Δ_B проведем из точки D перпендикуляр на продолжение стержня BC . Тогда удлинение Δl_{BC} можно представить как разность отрезков $CN = CM - NM$ или $\Delta l_{BC} = \Delta_B \cdot \sin \alpha - \Delta_{\Gamma} \cos \alpha$, откуда

$$\Delta_B = \frac{\Delta l_{BC} + |\Delta l_{AC}| \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2,1 + 1,45 \cdot 0,8}{0,6} = 5,43 \text{ мм}.$$



Полное перемещение узла C определяется как геометрическая сумма

$$\Delta_n = \sqrt{\Delta_B^2 + \Delta_I^2} = \sqrt{5,43^2 + 1,45^2} = 5,62 \text{ mm} \quad .$$

2.3.4. Пример 4.

Подобрать площади поперечных сечений стержней статически определимой системы (рис. 2.9).

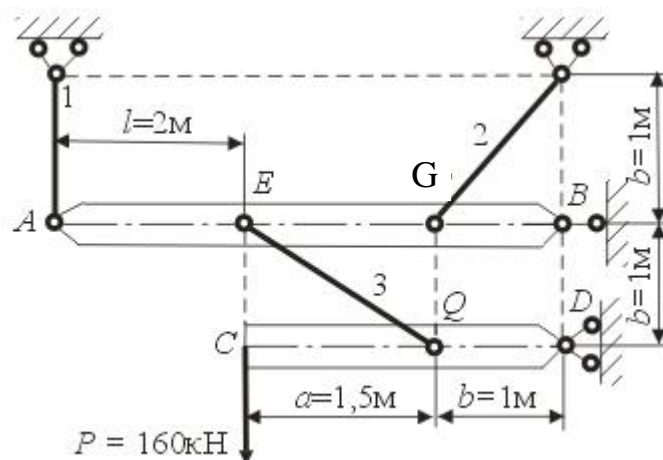


Рис.2.9

Исходные данные: $P = 160 \text{ кН}$; $l = 2 \text{ м}$; $a = 1,5 \text{ м}$; $b = 1 \text{ м}$. Стержни 1,2 имеют двутавровые сечения, стержень 3 изготовлен из швеллера. Расчетное сопротивление материала стержней равно $R = 210 \text{ МПа}$, модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Решение.

1. Вычерчиваем в масштабе схему с указанием численных значений заданных величин (рис. 2.9).

2. Составляем уравнение равновесия системы и выражаем нормальные усилия в стержнях через нагрузку P . Для этого каждый стержень рассекаем поперечным сечением и заменяем действие отсеченных частей внутренними усилиями N_1, N_2, N_3 . Действие связей заменяем их реакциями R_1, R_2, R_3 (рис.2.10).

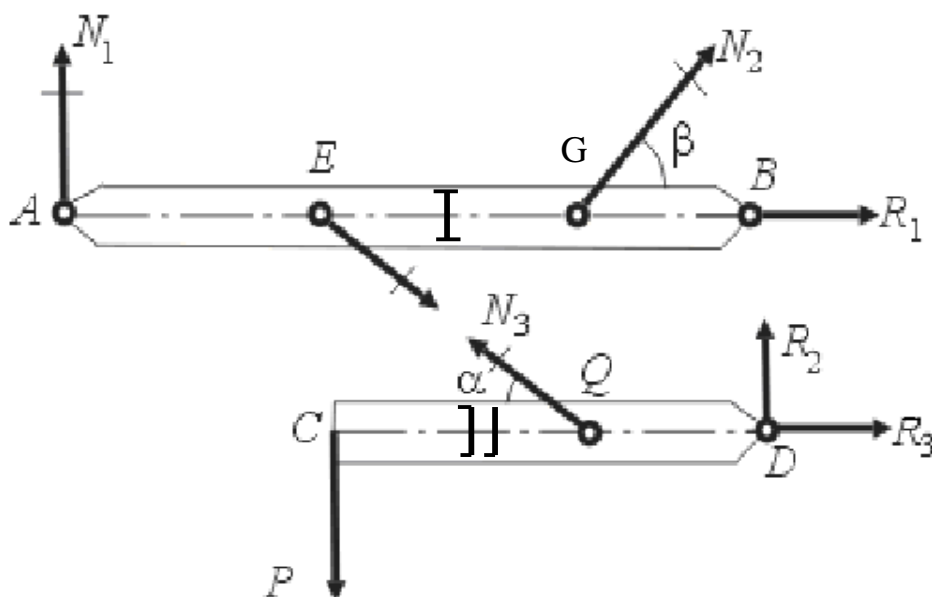


Рис.2.10

В рассматриваемом примере нормальные силы N_1, N_2, N_3 проще всего определяются из нижеприведенных уравнений равновесия.

Для части II стержневой системы (см. рис. 2.10)

$$\sum M_D = P(a+b) - N_3 b \sin a = P \cdot 2,5 - N_3 1 \sin a = 0,$$

$$N_3 = \frac{2,5}{\sin a} P.$$

Из рис. 2.9 $\operatorname{tg} a = \frac{1,0}{1,5} = 0,667$; $a = 33,7^\circ$;

$\sin a = 0,55$; следовательно

$$N_3 = 4,5P \quad (2.22)$$

Для части I стержневой системы (см. рис. 2.10)

$$\sum M_A = N_2 \sin b(a+b+l) - N_3 l \sin a = N_2 \sin b \cdot 3,5 - N_3 2 \sin a = 0.$$

Из рис. 2.9 $\operatorname{tg} b = 1$; $b = 45^\circ$; $\sin b = 0,71$.

$$N_2 = \frac{2 \sin a}{3,5 \sin b} 4,5P = 2P. \quad (2.23)$$

$$\sum M_F = -N_1(l+a) + N_3 a \sin a = -N_1 3,5 + N_3 0,55 \cdot 1,5 = 0,$$

$$N_1 = \frac{1,5 \cdot 0,55}{3,5} N_3 = \frac{1,5 \cdot 0,55}{3,5} 4,5P = 1,06P. \quad (2.24)$$

Проверим правильность вычисления нормальных сил, вычислив сумму моментов относительно точки B (рис. 2,10):
 $-N_1 4,5 + N_3 \sin a \cdot 2,5 - N_2 \sin b \cdot 1 = -1,06P \cdot 4,5 + 4,5P \cdot 0,55 \cdot 2,5 - 2P \cdot 0,71 \cdot 1 =$
 $-4,77P + 6,187P - 1,42P = 0$

Таким образом, уравнение равновесия удовлетворено, и нормальные силы выражены правильно:

$$N_1 = 1,06P = 170 \text{ кН}; N_2 = 2P = 320 \text{ кН}; N_3 = 4,5P = 720 \text{ кН}.$$

(2.25)

3. Из условий прочности стержней, составляющих стержневую систему, определяем площади поперечных сечений.

Для первого стержня:

$$s_1 = \frac{N_1}{A_1} \leq R, \text{ откуда } A_1 \geq \frac{N_1}{R} = \frac{170 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,81 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 8,1 \text{ см}^2$$

Подбор двутавра сводится к выбору из таблиц сортамента номера с ближайшей большей площадью сечения. Таковым является двутавр №10 с $A_1 = 12 \text{ см}^2$.

Для второго стержня:

$$s_2 = \frac{N_2}{A_2} \leq R, \text{ откуда } A_2 \geq \frac{N_2}{R} = \frac{320 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 1,52 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 15,2 \text{ см}^2$$

У ближайшего по площади двутавра №14 площадь $A_2 = 17,4 \text{ см}^2$.

Для третьего стержня:

$$s_3 = \frac{N_3}{A_3} \leq R, \text{ откуда } A_3 \geq \frac{N_3}{R} = \frac{720 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 3,42 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2 = 34,2 \text{ см}^2$$

Этой площади соответствует швеллер №27, у которого площадь сечения $A_3 = 35,2 \text{ см}^2$.

Определяем изменения длины каждого стержня.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{169,1 \cdot 10^3 \cdot 1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} = 7,04 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 0,70 \text{ мм.}$$

$$l_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = 1,41 \text{ м, } l_3 = \sqrt{1,5^2 + 1^2} = 1,8 \text{ м.}$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{320 \cdot 10^3 \cdot 1,41}{2 \cdot 10^{11} \cdot 15,2 \cdot 10^{-4}} = 14,8 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,48 \text{ мм.}$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{720 \cdot 10^3 \cdot 1,8}{2 \cdot 10^{11} \cdot 35,2 \cdot 10^{-4}} = 18,4 \cdot 10^{-4} \text{ м.} = 1,84 \text{ мм.}$$

4. Определяем перемещение точки С.

Задачу об определении перемещений точек системы можно решать различными способами. Один из них базируется на плане перемещений. Построение плана перемещений является сложным этапом решения, так как для каждой стержневой системы он индивидуален, требует от исполнителя воображения и внимательного учета особенностей закрепления элементов системы.

Если система содержит жесткие элементы, то построение плана перемещений начинают с показа предполагаемого положения их после деформации упругих стержней (положение $A_1E_1B_1$ и C_1D на рис.2.11). Концы деформируемых стержней приводят в положение после их деформации, раскладывая действительное перемещение их концов по направлениям вдоль и поперек стержня (см. перемещение точки G в G_1 и Q_2 в Q_1 на рис.2.11). Такой прием позволяет выразить перемещение точек через деформации стержней.

По плану перемещений устанавливаем связь между известными деформациями стержней и искомым перемещением. Так, исходя из подобия треугольников CC_1D и QQ_1D , находим

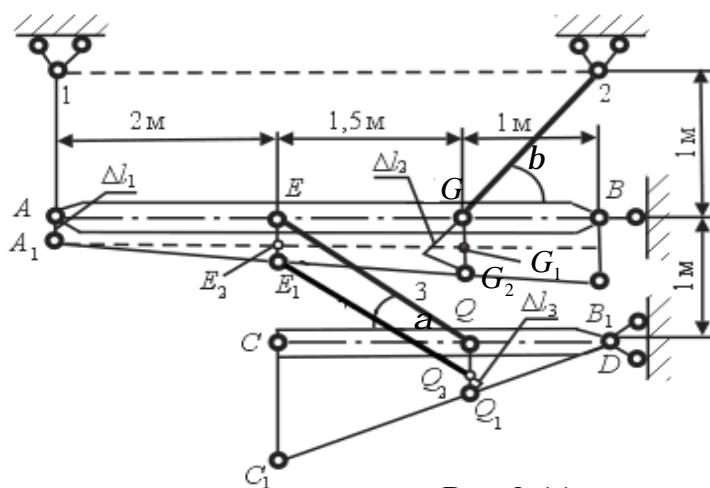


Рис.2.11

План перемещения
конца стержня 3.

$$CC_1 = QQ_1 \cdot \frac{CD}{QD} = QQ_1 \cdot 2,5.$$

$$QQ_1 = QQ_2 + Q_1Q_2 = EE_1 + \frac{\Delta l_3}{\sin b} = EE_1 + \frac{18,41 \cdot 10^{-4}}{0,55} = EE_1 + 33,47 \cdot 10^{-4} \text{ м},$$

$$EE_1 = \Delta l_1 + E_1E_2.$$

Из подобия треугольников $A_1G_2G_1$ и $A_1E_2E_1$:

$$E_1E_2 = G_1G_2 \frac{A \cdot E}{A \cdot F} = 0,57 \cdot G_1G_2.$$

$$G_1G_2 = \frac{\Delta l_2}{\sin \alpha} - \Delta l_1 = \frac{14,8 \cdot 10^{-4}}{0,71} - 7,04 \cdot 10^{-4} = 13,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

$$E_1E_2 = 13,8 \cdot 10^{-4} \cdot 0,57 = 7,86 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

$$EE_1 = 7,04 \cdot 10^{-4} + 7,86 \cdot 10^{-4} = 14,91 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

$$QQ_1 = 14,91 \cdot 10^{-4} + 33,47 \cdot 10^{-4} = 48,38 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

$$\text{Таким образом: } CC_1 = 48,38 \cdot 10^{-4} \cdot 2,5 = 120 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,2 \text{ см}.$$

Наиболее простым и универсальным способом определения перемещений точек стержневой системы является метод Мора, доказательство которого будет проведено позже. Согласно методу Мора перемещение Δ любой точки системы равно

$$\Delta = \sum_1^n \int_{l_i} \frac{N_i \cdot \bar{N}_i}{E_i \cdot A_i} dz,$$

где n – число стержней; N_i – нормальная сила в i - том стержне, возникающая от действия внешней нагрузки; \bar{N}_i – нормальная сила в i – том стержне от силы равной единице, приложенной в точке определения перемещения в направлении перемещения; A_i – площадь i -того стержня; l_i – длина i – того стержня; E_i – модуль упругости i – того стержня.

Методика определения перемещения заданной точки стержневой системы состоит в следующем.

1. Определяют нормальные силы N_i в стержнях от нагрузки.
2. В точку стержневой системы, перемещение которой определяется, прикладывают силу равную единице в направлении искомого перемещения и определяют нормальные силы \bar{N}_i в стержнях от этой единичной силы.
3. Записывают интеграл Мора и вычисляют его.

Определим вертикальное перемещение точки С с помощью интеграла Мора:

$$\Delta_c = \sum_{l=1}^n \int \frac{N_i \cdot \bar{N}_i}{E_i \cdot A_i} dz,$$

Для заданной стержневой системы интеграл Мора запишется следующим образом:

$$\Delta_c = \int_0^{l_1} \frac{N_1 \cdot \bar{N}_1}{E \cdot A_1} dz + \int_0^{l_2} \frac{N_2 \cdot \bar{N}_2}{E \cdot A_2} dz + \int_0^{l_3} \frac{N_3 \cdot \bar{N}_3}{E \cdot A_3} dz;$$

Нормальные силы в стержнях от внешней нагрузки P определены (см. формулы (2.25)):

$$N_1 = 170 \text{ кН}; N_2 = 320 \text{ кН}; N_3 = 720 \text{ кН}.$$

К стержневой системе, освобожденной от действующей нагрузки прикладываем в точку C в вертикальном направлении безразмерную единичную силу (рис.2.12) и определим $\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3$ так же, как и N_1, N_2, N_3 . В связи с тем, что единичная сила приложена в том же направлении, что и сила P , $\bar{N}_1 = 1,06, \bar{N}_2 = 2,0, \bar{N}_3 = 4,5$, т. е. в P раз меньше.

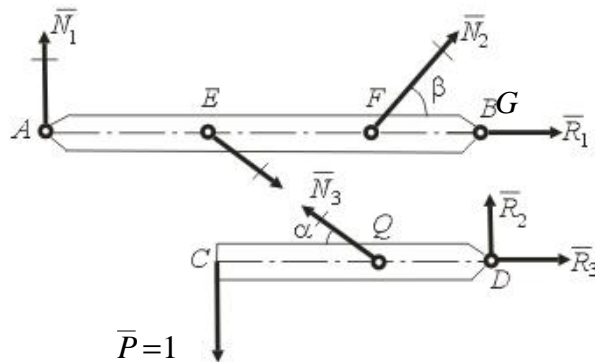


Рис.2.12

Вычисляем вертикальное перемещение:

$$\Delta_c = \int_0^1 \frac{169,1 \cdot 10^3 \cdot 1,06}{2 \cdot 10^{11} \cdot 12 \cdot 10^{-4}} dz + \int_0^{1,41} \frac{320 \cdot 10^3 \cdot 2,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 17,4 \cdot 10^{-4}} dz + \int_0^{1,8} \frac{720 \cdot 10^3 \cdot 4,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 35,2 \cdot 10^{-4}} dz =$$

$$7,5 \cdot 10^{-4} + 25,93 \cdot 10^{-4} + 82,8 \cdot 10^{-4} = 116 \cdot 10^{-4} \text{ м} = 1,16 \text{ см}$$

В горизонтальном направлении точка C не перемещается, т.к. по условию стержень CD абсолютно жесткий и не деформируется. В связи с этим полное перемещение и вертикальное равны. Некоторое отличие величин Δ_c и CC_1 может быть объяснено различной точностью вычислений и различной точностью методов определения перемещений.

2.3.5. Пример 5.

Определить допускаемую нагрузку на статически определимую стержневую систему (рис.2.9).

Исходные данные: $l = 2 \text{ м}; a = 1,5 \text{ м}; b = 1 \text{ м}.$

Стержень I – двутавр №10 площадью поперечного сечения $A_1 = 12 \text{ см}^2$, стержень 2 – двутавр №16

площадью $A_2 = 20,2\text{см}^2$, стержень 3 – швеллер №33, $A_3 = 46,5\text{см}^2$,
 $R = 210\text{МПа}$.

Содержание и порядок выполнения.

1. Вычерчиваем в масштабе схему с указанием численных значений заданных величин (рис.2.9).

2. Для системы, у которой действие отсеченных частей упругих стержней заменено внутренними усилиями, N_1, N_2, N_3 , а действие опорных связей заменено их реакциями R_1, R_2, R_3 (рис.2.10) составляем уравнение равновесия и выражаем нормальные силы через искомую нагрузку P выражения (2.22), (2.23), (2.24).

Получаем $N_1 = 1,06P$; $N_2 = 2P$; $N_3 = 4,5P$.

Определяем допускаемую нагрузку из условия прочности каждого стержня.

Стержень 1:

$$s_1 = \frac{N_1}{A_1} \leq R,$$

$$\frac{1,06 \cdot P}{12 \cdot 10^{-4}} \leq 210 \cdot 10^6 \Rightarrow P \leq \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-4}}{1,06} = 238 \cdot 10^3 \text{ Н} = 238 \text{ кН}.$$

Стержень 2:

$$s_2 = \frac{N_2}{A_2} \leq R,$$

$$\frac{2P}{20,2 \cdot 10^{-4}} \leq 210 \cdot 10^6 \Rightarrow P \leq \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 20,2 \cdot 10^{-4}}{2} = 212 \cdot 10^3 \text{ Н} = 212 \text{ кН}$$

Стержень 3:

$$s_3 = \frac{N_3}{A_3} \leq R,$$

$$\frac{4,5 \cdot P}{46,5 \cdot 10^{-4}} \leq 210 \cdot 10^6 \Rightarrow P \leq \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 46,5 \cdot 10^{-4}}{4,5} = 217 \text{ кН}.$$

Допускаемой нагрузкой будет такая нагрузка, при которой условия прочности всех стержней будут удовлетворяться. Этому требованию отвечает наименьшая из вычисленных $P = 212 \text{ кН}$.

2.3.6. Пример 6.

Подобрать поперечные сечения стальных стержней статически определимой системы и определить перемещения точки A (рис.2.13).

Исходные данные: $l = 3\text{м}$; $a = 2\text{м}$; $b = 2\text{м}$; $P = 700\text{кН}$,
 $R = 210\text{МПа}$.

Решение.

1. Вычерчиваем в масштабе схему с указанием численных значений заданных величин (рис.2.13).

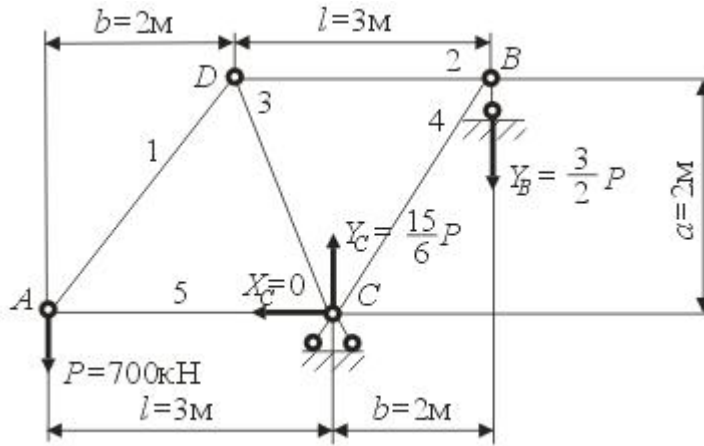


Рис.2.13

2. Составляем уравнения равновесия для всей стержневой системы и для ее узлов, выражая реакции связей и усилия в стержнях через силу P (рис.2.13,2.14,2.15 и 2.16).

$$\sum M_C = P \cdot 3 - Y_B \cdot 2 = 0, \quad Y_B = \frac{3}{2} P \quad (2.26)$$

$$\sum M_A = Y_C \cdot 3 - Y_B \cdot 5 = 0, \quad Y_C = \frac{15}{6} P \quad (2.27)$$

$$\sum P_x = -X_C = 0$$

Для проверки используем уравнение:

$$\sum M_B = P \cdot 5 - X_C \cdot 2 - Y_C \cdot 2 = 5 \cdot P - 0 - \frac{15}{6} \cdot P \cdot 2 = 0.$$

Узел А (рис.2.14); $\tan \alpha = a/b = 1, \Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

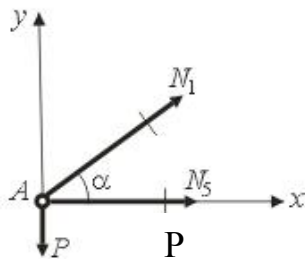


Рис.2.14

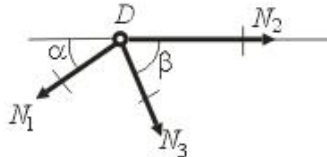


Рис.2.15

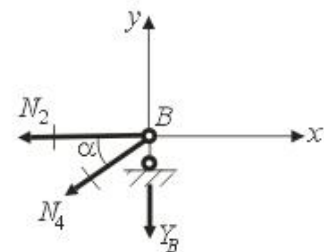


Рис.2.16

$$\sum P_y = N_1 \cdot \sin a - P = 0, \quad N_1 = \frac{P}{\sin a} = 1,41 \cdot P, \quad (2.28)$$

$$\sum P_x = N_5 + N_1 \cdot \cos a = 0, \quad N_5 = -N_1 \cdot \cos a = -P. \quad (2.29)$$

Узел D (рис.2.15); $\operatorname{tg} b = a/(l-b) = 2, \Rightarrow b = 63,4^\circ$.

$$\sum P_y = -N \cdot \sin a - N_3 \cdot \sin b = 0, \quad (2.30)$$

$$\sum P_x = N_2 + N_3 \cdot \sin b - N_1 \cdot \cos a = 0, \quad N_2 = 0,5 \cdot P + P = 1,5 \cdot P. \quad (2.31)$$

Узел B (рис.2.16).

$$\sum P_y = -Y_B - N_4 \cdot \sin a = 0, \quad N_4 = -2,13 \cdot P, \quad (2.32)$$

$$\sum P_x = -N_2 - N_4 \cdot \cos a = 0, \quad N_2 = -N_4 \cdot \cos a = 1,5 \cdot P. \quad (2.33)$$

Величина N_2 , найденная независимо из условия равновесия узла B и D совпала, что свидетельствует о правильности расчетов. Отметим, что стержни 1,2 растянуты, а стержни 3,4,5 сжаты.

3. Подбираем площади сечений стержней из условия прочности каждого стержня.

$$s_1 = \frac{N_1}{A_1} \leq R \Rightarrow A_1 \geq \frac{N_1}{R} = \frac{1,41 \cdot 700 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 4,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$s_2 = \frac{N_2}{A_2} \leq R \Rightarrow A_2 \geq \frac{N_2}{R} = \frac{1,5 \cdot 700 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 5,0 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$s_3 = \frac{N_3}{A_3} \leq R \Rightarrow A_3 \geq \frac{N_3}{R} = \frac{-1,115 \cdot 700 \cdot 10^3}{-210 \cdot 10^6} = 3,72 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

При расчете сечений A_3, A_4, A_5 следует учесть, что стержни сжаты, и использовать в условии прочности расчетное сопротивление на сжатие. Для стали расчетное сопротивление на сжатие равно по абсолютной величине таковому на растяжение.

$$s_4 = \frac{N_4}{A_4} \leq R \Rightarrow A_4 \geq \frac{N_4}{R} = \frac{-2,13 \cdot 700 \cdot 10^3}{-210 \cdot 10^6} = 7,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2,$$

$$s_5 = \frac{N_5}{A_5} \leq R \Rightarrow A_5 \geq \frac{N_5}{R} = \frac{-700 \cdot 10^3}{-210 \cdot 10^6} = 3,33 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

По площадям поперечных сечений подберем из сортамента номера стандартных профилей для стержней 1,2,3 и вычислим диаметры стержней 4,5, имеющих круглое сечение. Согласно сортамента стержню 1 соответствует швеллер №36 с площадью сечения $A_1 = 53,4 \text{ см}^2$, стержню 2 - двутавр №33 с площадью сечения $A_2 = 53,8 \text{ см}^2$, стержню 3 - уголок $160 \times 160 \times 12$ с площадью сечения $A_3 = 37,4 \text{ см}^2$. Определяем диаметры четвертого и пятого стержней:

$$d_4 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_4}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 71}{3,14}} = 9,5 \text{ см}, \quad d_5 = \sqrt{\frac{4 \cdot A_5}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 33,3}{3,14}} = 6,5 \text{ см}.$$

Так как диаметр пятого стержня имеет не стандартный размер, то из таблицы нормальных линейных размеров (стр.39)

принимаем ближайший больший $d_5 = 67 \text{ мм}$. В этом случае

$$A_5 = \frac{p \cdot d_5^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 6,7^2}{4} = 35,2 \text{ см}^2.$$

4. Определим изменение длины каждого стержня.

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot l_1}{E \cdot A_1} = \frac{1,41 \cdot 700 \cdot 10^3 \cdot \frac{2}{\cos a}}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,34 \cdot 10^{-3}} = 2,61 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot l_2}{E \cdot A_2} = \frac{1,5 \cdot 700 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5,38 \cdot 10^{-3}} = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \cdot l_3}{E \cdot A_3} = \frac{-1,115 \cdot 700 \cdot 10^3 \cdot \frac{2}{\sin b}}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,74 \cdot 10^{-3}} = -2,95 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\Delta l_4 = \frac{N_4 \cdot l_4}{E \cdot A_4} = \frac{-2,13 \cdot 700 \cdot 10^3 \cdot 2,83}{2 \cdot 10^{11} \cdot 7,1 \cdot 10^{-3}} = -2,97 \cdot 10^{-3} \text{ м},$$

$$\Delta l_5 = \frac{N_5 \cdot l_5}{E \cdot A_5} = \frac{700 \cdot 10^3 \cdot 3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,52 \cdot 10^{-3}} = -3,15 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

5. Пользуясь интегралом Мора определяем вертикальное, горизонтальное и полное перемещение точки A .

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{N_i \cdot \bar{N}_i \cdot dz}{E \cdot A_i};$$

Вертикальное перемещение.

Нормальные силы N_i в стержнях известны: $N_1 = 1,41P$,

$N_2 = 1,5P$, $N_3 = 1,11P$, $N_4 = -2,13P$, $N_5 = -P$.

Для определения \bar{N}_i прикладываем силу равную 1 в точку A в вертикальном направлении и находим \bar{N}_i также как и N_i (методом вырезания узлов). Очевидно \bar{N}_i будут в P раз меньше N_i , т.е. $\bar{N}_1 = 1,41$, $\bar{N}_2 = 1,5$, $\bar{N}_3 = -1,11$, $\bar{N}_4 = -2,13$, $\bar{N}_5 = -1$.

Следовательно,

$$\Delta_B = \frac{P}{E} \left(\int_0^{2,83} \frac{1,41^2 dz}{7,1 \cdot 10^{-3}} + \int_0^3 \frac{1,5^2 \cdot dz}{5 \cdot 10^{-3}} + \int_0^{2,24} \frac{(-1,15)^2 dz}{3,72 \cdot 10^{-3}} + \right. \\ \left. + \int_0^{2,83} \frac{(-2,13)^2 dz}{7,1 \cdot 10^{-3}} + \int_0^3 \frac{(-1)^2 dz}{3,52 \cdot 10^{-3}} \right) = 19,7 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

Горизонтальное перемещение.

Прикладываем в горизонтальном направлении в точку A силу равную единице (рис.2.17). Определяем \bar{N}_i .

$$\sum P_x = -1 + \bar{N}_5 + \bar{N}_1 \cdot \cos a = 0,$$

$$\sum P_y = \bar{N}_1 \cdot \sin a = 0 \Rightarrow \bar{N}_1 = 0, \bar{N}_5 = 1.$$

Из равновесия остальных узлов легко показать, что $\overline{N}_2 = \overline{N}_3 = \overline{N}_4 = 0$. Нормальные силы от внешней нагрузки N_i останутся без изменения.

Таким образом, согласно интегралу Мора, горизонтальное перемещение точки A равно:

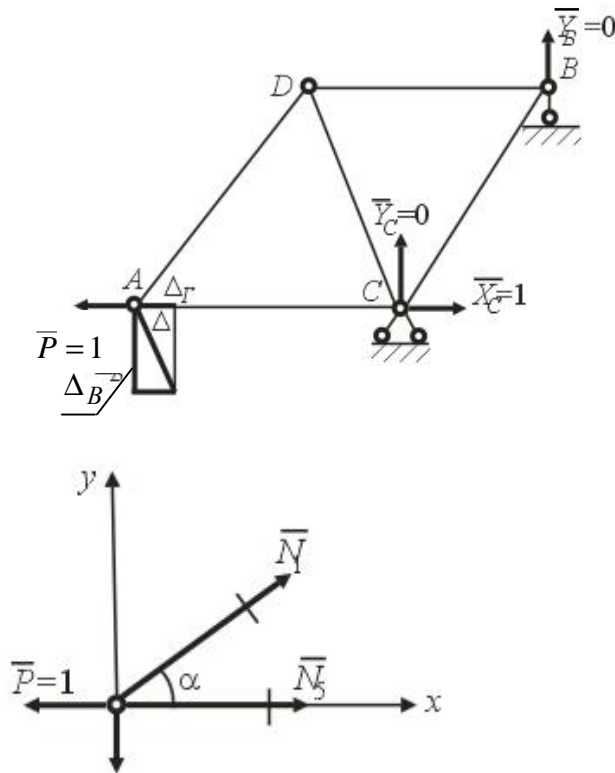


Рис.2.17

$$\Delta_{\Gamma} = \int_0^3 \frac{N_5 \cdot \overline{N}_5 \cdot dz}{E \cdot A_5} = \int_0^3 \frac{-700 \cdot 10^3 \cdot dz}{2 \cdot 10^{11} \cdot 3,52 \cdot 10^{-3}} = -3 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$$

Знак минус результата указывает на то, что точка A переместилась в направлении противоположном направлению с единичной силы.

Полное перемещение точки A :

$$\Delta = \sqrt{\Delta_B^2 + \Delta_{\Gamma}^2} = \sqrt{19,7^2 + 3^2 \cdot 10^{-3}} = 19,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$

2.3.7. Пример 7

Определить допускаемую нагрузку на статически определимую стержневую систему (рис.2.13) примера 6.

Исходные данные: $l = 3\text{ м}$, $a = 2\text{ м}$, $R = 210\text{ МПа}$.

Стержни: 1- швеллер №40, 2 – двутавр №40, 3 – уголок 160×160×16,4 – двутавр №16, 5 – двутавр №10. Пользуясь таблицами стандартных профилей, выписываем площади сечений стержней: $A_1 = 61,6\text{ см}^2$, $A_2 = 71,4\text{ см}^2$, $A_3 = 49,1\text{ см}^2$, $A_4 = 20,2\text{ см}^2$, $A_5 = 12\text{ см}^2$.

Содержание и порядок выполнения:

1. Вычерчиваем в масштабе схему с указанием численных значений заданных величин (рис.2.13 примера 6).

2. Составляем уравнение равновесия и выражаем реакции связей и усилия в стержнях через силу P (см. рис.2.13,2.14,2.15,2.16 и выражения 2.28,2.29,2.30,2.31,2.32 примера 6). Получаем $N_1 = 1,41P$, $N_2 = 1,5P$, $N_3 = -1,115P$, $N_4 = -2,13P$, $N_5 = -P$.

3. Определяем допускаемую нагрузку из условия прочности каждого стержня.

Стержень 1:

$$s_1 = \frac{N_1}{A_1} \leq R,$$

$$\frac{1,41 \cdot P}{61,5 \cdot 10^{-4}} \leq 210 \cdot 10^6 \Rightarrow P \leq \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 61,5 \cdot 10^{-4}}{1,41} = 915 \text{ кН}.$$

Стержень 2:

$$s_2 = \frac{N_2}{A_2} \leq R,$$

$$\frac{1,5 \cdot P}{71,4 \cdot 10^{-4}} \leq 210 \cdot 10^6 \Rightarrow P \leq \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 71,4 \cdot 10^{-4}}{1,5} = 999 \text{ кН}.$$

Стержень 3:

$$s_3 = \frac{N_3}{A_3} \leq R,$$

$$\frac{-1,115 \cdot P}{49,1 \cdot 10^{-4}} \leq (-210 \cdot 10^6) \Rightarrow P \leq \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 49,1 \cdot 10^{-4}}{1,115} = 924 \text{ кН}.$$

Стержень 4:

$$s_4 = \frac{N_4}{A_4} \leq R,$$

$$\frac{2,13 \cdot P}{20,2 \cdot 10^{-4}} \leq 210 \cdot 10^6 \Rightarrow P \leq \frac{210 \cdot 10^6 \cdot 20,2 \cdot 10^{-4}}{2,13} = 199 \text{ кН}.$$

Стержень 5:

$$s_5 = \frac{N_5}{A_5} \leq R,$$

$$\frac{P}{12 \cdot 10^{-4}} \leq 210 \cdot 10^6 \Rightarrow P \leq 210 \cdot 10^6 \cdot 12 \cdot 10^{-4} = 252 \text{ кН}.$$

Наименьшую нагрузку равную 199 кН допускает 4-й стержень. Эта нагрузка является допускаемой для всей системы, т.к. ее превышение приведет к нарушению условия прочности в четвертом стержне.

Таблица нормальных линейных размеров (ГОСТ 6636-69), мм:
10, 10.5, 11, 11.5, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 35, 36, 38, 40, 42, 45, 48, 50, 52, 53, 55, 56, 60, 62, 63, 65, 67, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 120, 125, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200.

2.4. Контрольное задание 1. Расчеты на прочность статически определимых систем растяжения – сжатия

Подобрать из условия прочности поперечные сечения стержней статически определимой системы и определить перемещение точки А. Схема системы и типы сечений (круг, двутавр) приведены на рис.2.18, численные данные в табл.1. Материал: сталь Ст.3.

Таблица 1

Цифра шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я
	схема	l , м	a , м	α , °	β , °	P , кН
1	1, 11, 21	1,8	0,6	30	75	300
2	2, 12, 22	1,9	0,6	35	70	350
3	3, 13, 23	2,0	0,7	40	65	400
4	4, 14, 24	2,1	0,7	45	60	450
5	5, 15, 25	2,2	0,8	50	55	500
6	6, 16, 26	2,3	0,8	55	50	550
7	7, 17, 27	2,4	0,9	60	45	600
8	8, 18, 28	2,5	1,0	65	40	650
9	9, 19, 29	2,6	1,1	70	35	700
0	10, 20, 30	2,8	1,2	75	30	800

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить в масштабе схему, указать численные значения заданных величин.
2. Составить уравнения равновесия и определить усилия в стержнях.
3. Подобрать из условия прочности сечения стержней.
4. Определить изменения длины каждого стержня.
5. Построить в масштабе план перемещения точки А.
6. Найти аналитически и проверить графически горизонтальное, вертикальное и полное перемещение точки А.

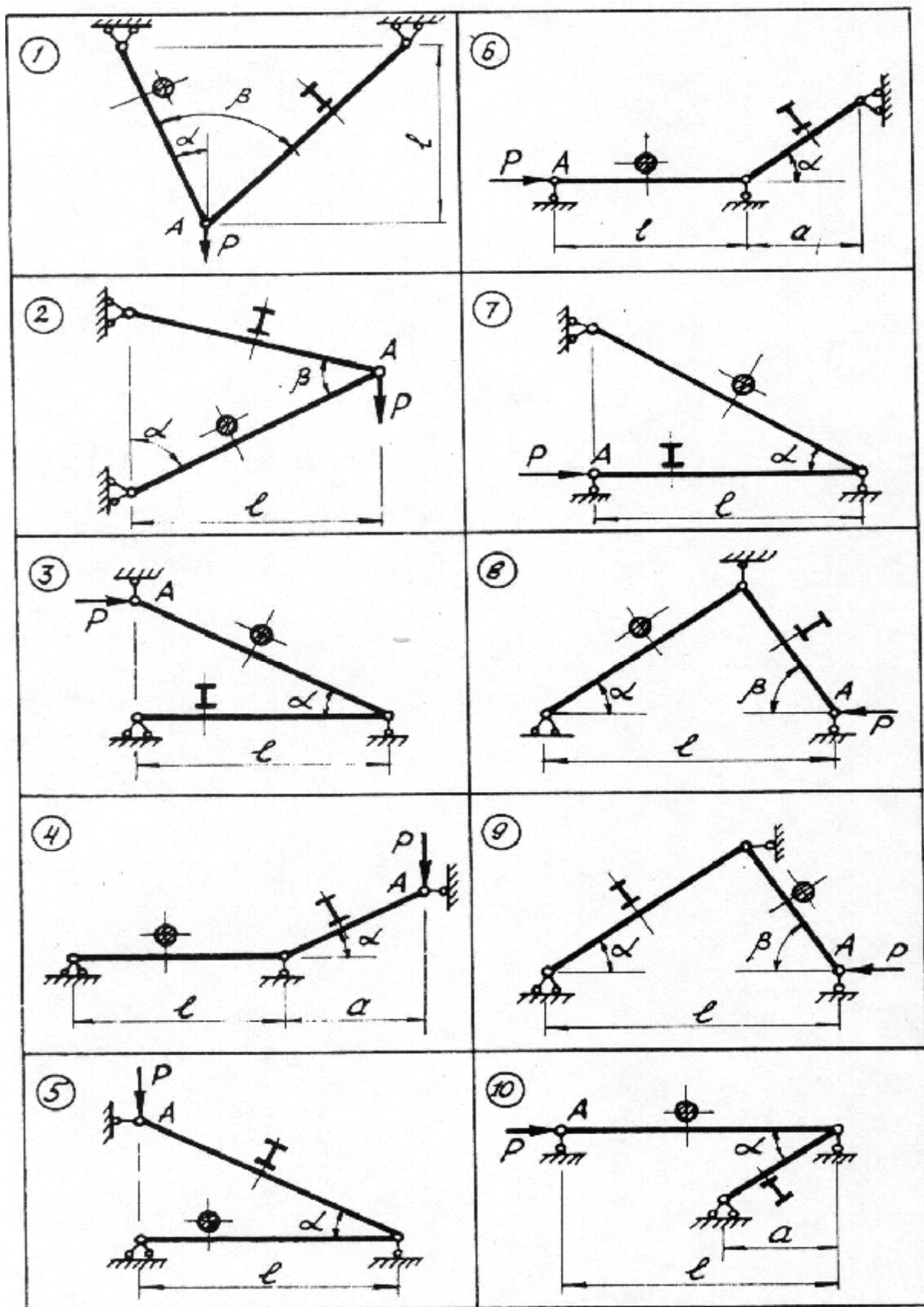


Рис. 2.18

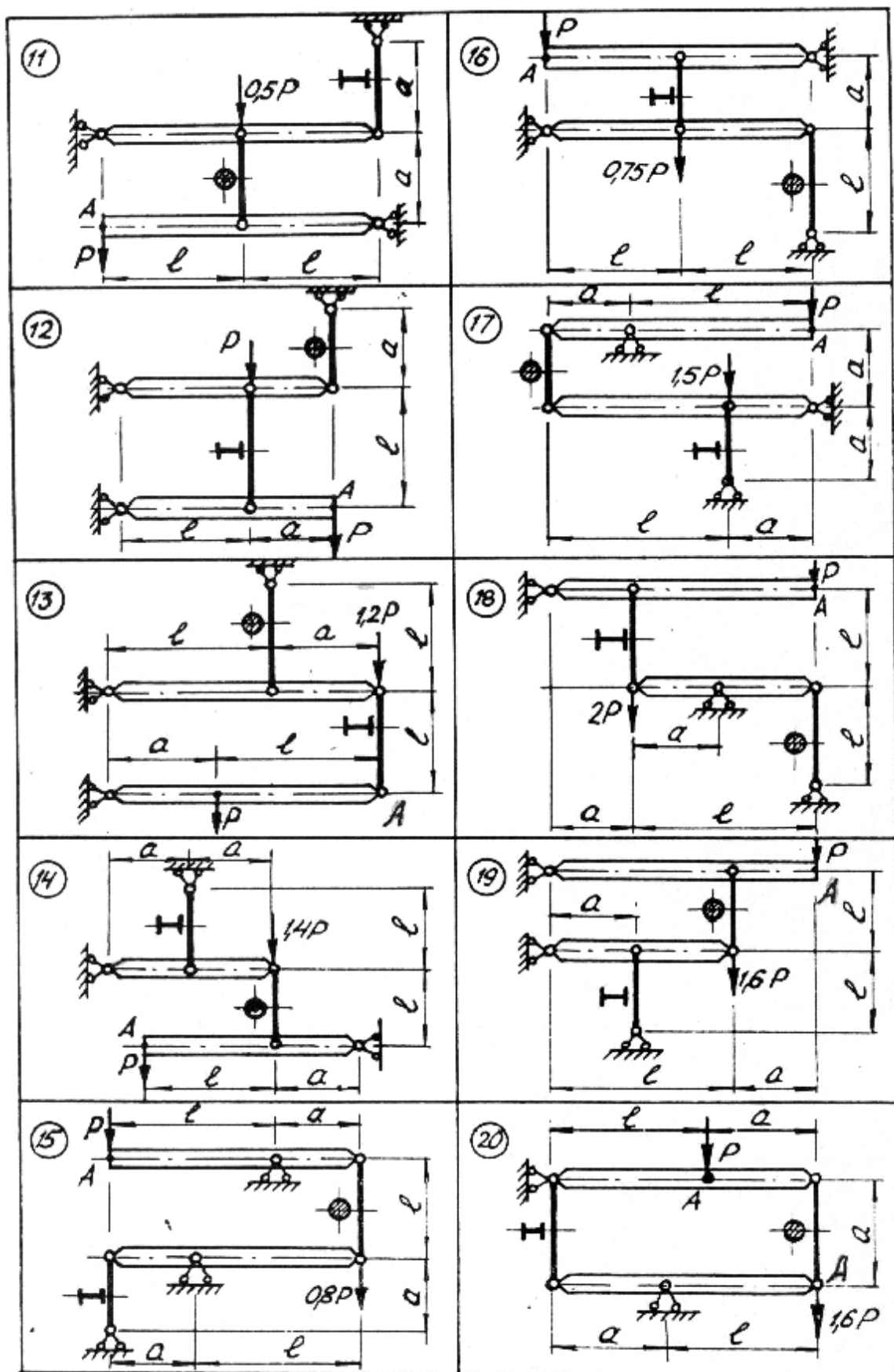


Рис. 2.18 (продолжение)

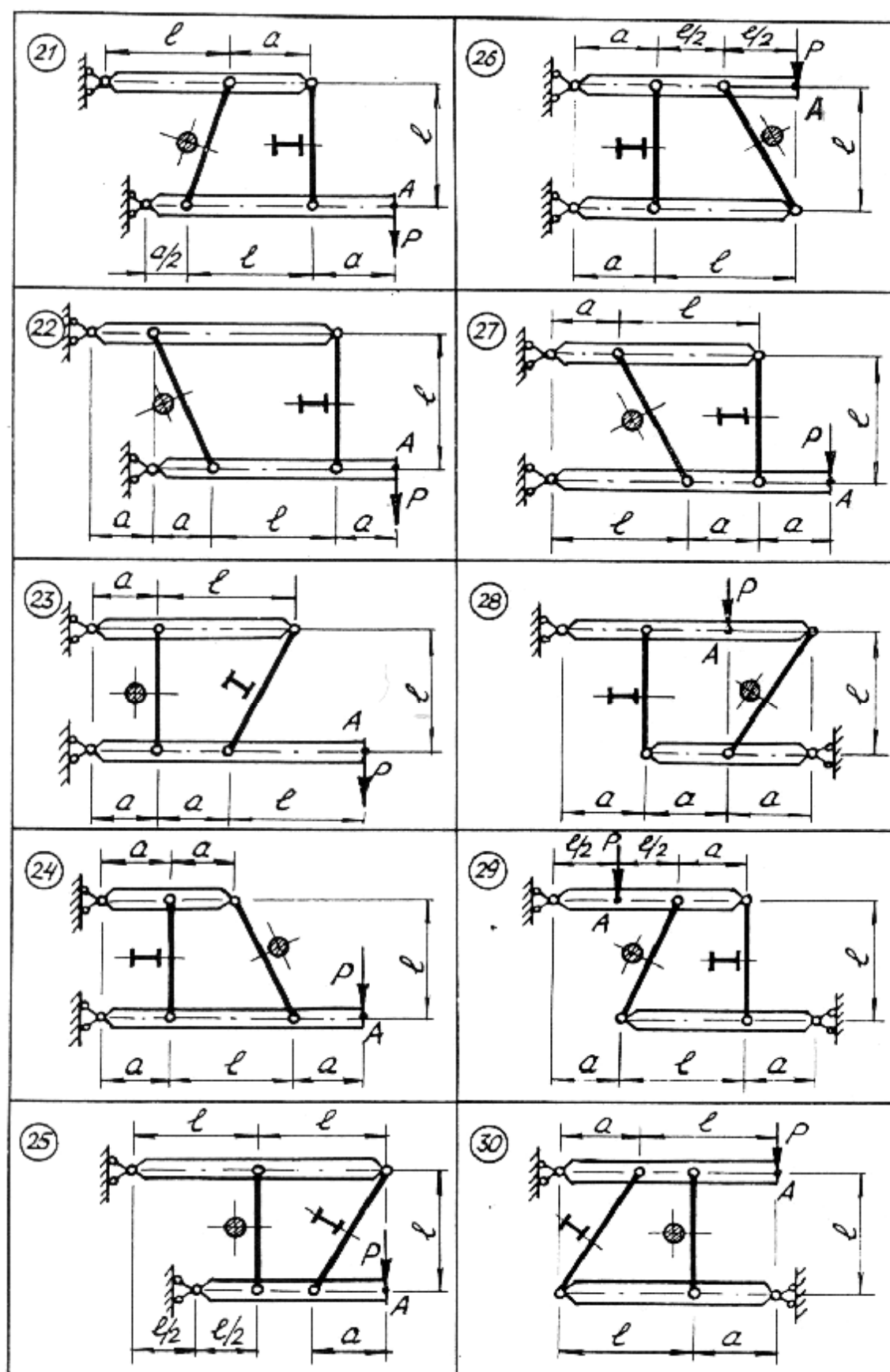


Рис. 2.18 (окончание)

2.5. Контрольное задание 2. Определение грузоподъемности стержневых систем растяжения – сжатия

Определить из условий прочности допускаемую нагрузку на статически определимую стержневую систему (все стержни изготовлены из стали Ст.3).

Схема системы приведена на рис.2.19, численные данные – в табл.2.

Таблица 2

Цифра шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я (номера профилей)				
	схема	l , м	a , м	b , м	α , °	двутавр			швеллер	
						1-й ст.	3-й ст.	5-й ст.	2-й ст.	4-й ст.
1	1, 11, 21	2,0	1,0	1,5	30	12	14	10	10	16
2	2, 12, 22	2,1	1,2	1,0	45	14	16	10	12	10
3	3, 13, 23	2,2	1,4	2,0	60	16	12	14	14	10
4	4, 14, 24	2,3	1,6	2,5	70	18	16	14	16	14
5	5, 15, 25	2,4	1,8	1,5	20	20	18	16	18	16
6	6, 16, 26	2,5	2,0	1,0	30	18	16	14	16	18
7	7, 17, 27	2,6	1,5	2,0	60	16	14	12	14	16
8	8, 18, 28	2,7	1,7	1,8	70	14	10	12	12	10
9	9, 19, 29	2,8	1,9	1,5	45	12	10	14	10	12
0	10, 20, 30	3,0	2,0	1,8	60	18	16	20	20	14

Указания: 6-я цифра шифра определяет номера профилей двутавров и швеллеров для всех пяти стержней соответственно.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить в масштабе схему, указать численные значения заданных величин.
2. Составить уравнения равновесия системы и выразить усилия в стержнях через внешнюю нагрузку.
3. Определить допускаемую нагрузку из условий прочности стержней, составляющих данную систему.

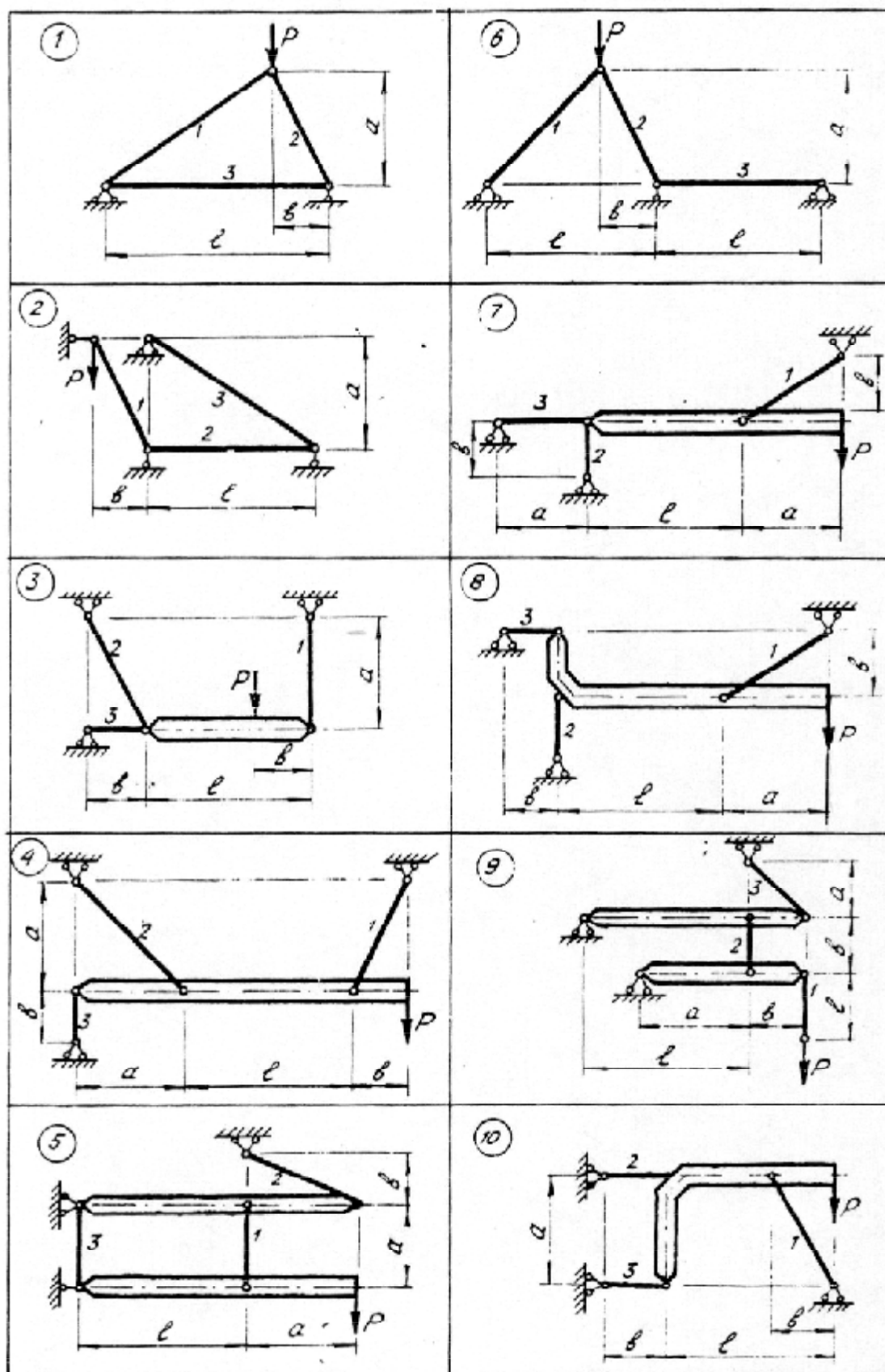


Рис. 2.19

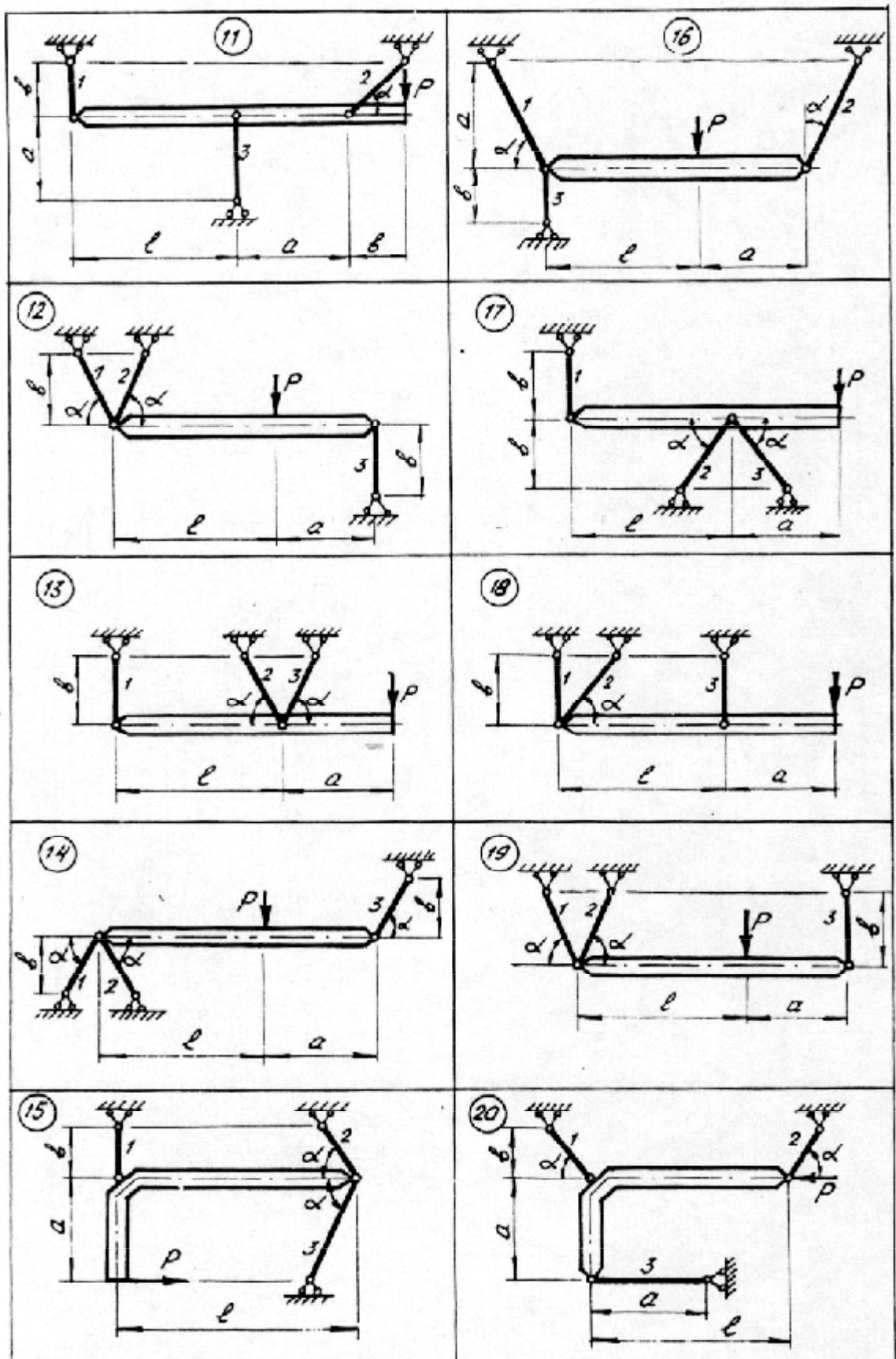


Рис. 2.19 (продолжение)

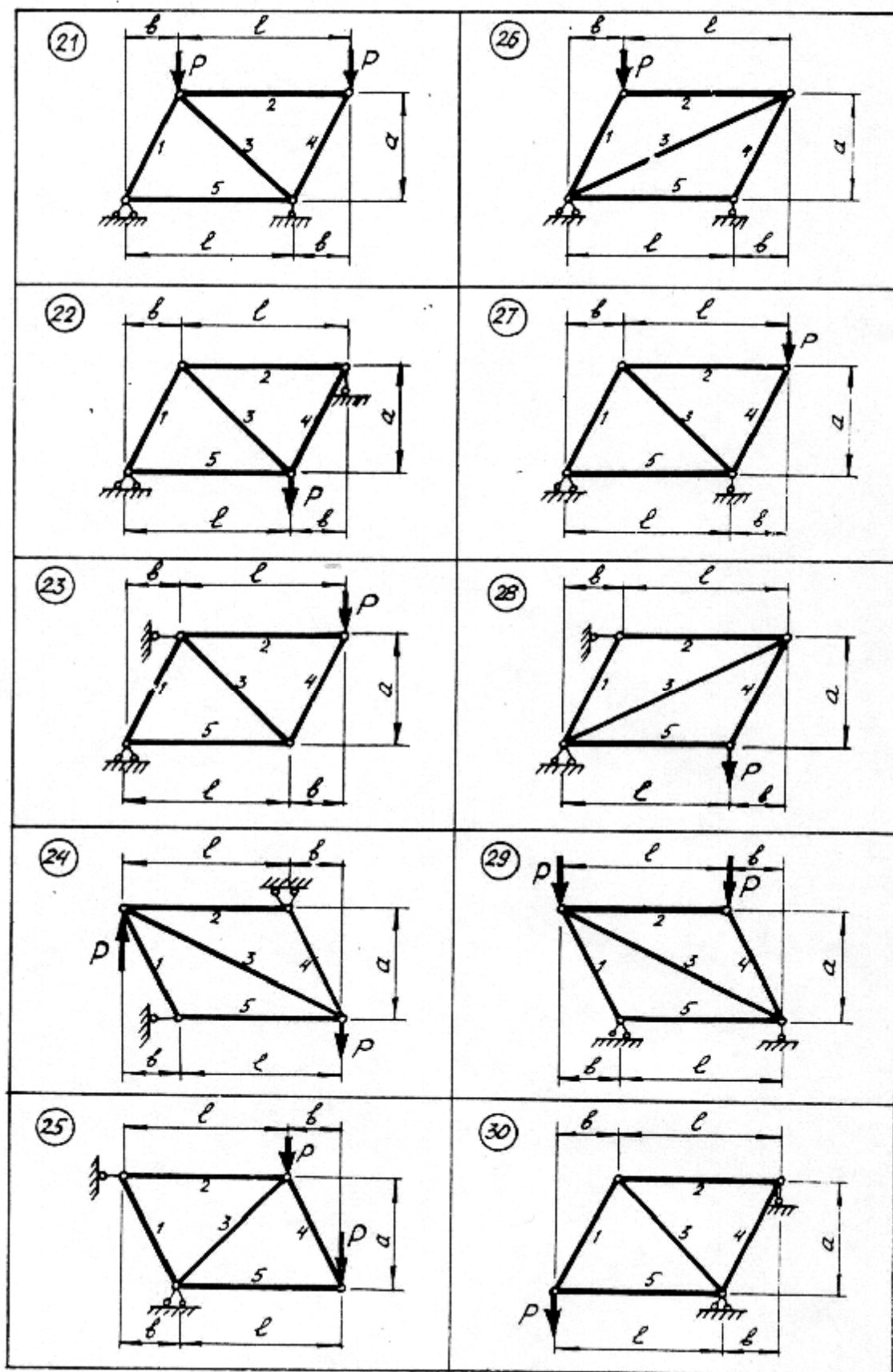


Рис. 2.19 (окончание)

Вопросы для самопроверки.

Какой вид нагружения называют растяжением (сжатием)? Как вычисляется продольная сила в произвольном сечении стержня? Как формулируется закон Гука? Что такое продольная и поперечная деформации стержня? Что называется коэффициентом Пуассона? Какой вид имеет условие прочности, и какие типы задач решаются с помощью этого условия? Как определяется расчётное сопротивление для пластичного и хрупкого материала?

Литература: [1.] Глава 2, § 2.1,2.2; Глава 3, § 3.1,3.4,3.7-3.8,3.10-3.12.

[2.] Глава 2.

[3.] Глава 2, § 6-7, 11-12, 16, 20.

ГЛАВА III. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

3.1 Общие определения

Прочность бруса не всегда зависит только от площади поперечного сечения, как это имеет место при растяжении, сжатии. Как бы вы ни поворачивали стержень относительно продольной оси, условие прочности будет всегда иметь вид $\sigma = \frac{|N|}{A} \leq R$.

Другую картину мы имеем при изгибе. Если стержень подвержен изгибу, то при повороте его относительно продольной оси, напряжения в поперечном сечении стержня будут изменяться. Следовательно, при изгибе условие прочности зависит не только от площади поперечного сечения, но и от какого-то другого геометрического параметра (формы).

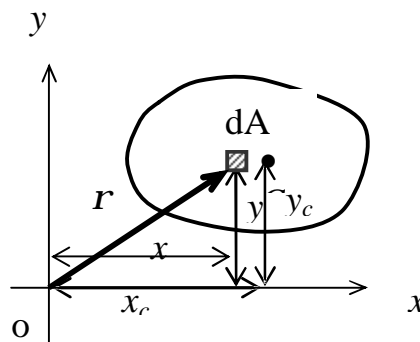


Рис.3.1.

Для плоской фигуры (рис.3.1) наиболее часто рассматриваются следующие геометрические характеристики, кроме известных (площадь – A , длина – l):

Статические моменты

$$S_x = \int_F y dA; \quad S_y = \int_F x dA.$$

Статические моменты могут быть положительными, отрицательными и равными нулю. Они измеряются в единицах длины в кубе [м³, см³, мм³].

Оси, относительно которых статические моменты равны нулю, называются центральными. Они всегда проходят через центр тяжести фигуры. На основании теоремы о моменте равнодействующей:

$$S_x = A \cdot y_c; \quad S_y = A \cdot x_c. \quad (3.1)$$

Из этих соотношений может быть определен центр тяжести для простой фигуры.

$$x_c = \frac{S_y}{A}; \quad y_c = \frac{S_x}{A} \quad (3.2)$$

Координаты центра тяжести сложных фигур будут соответственно равны:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n (S_y)_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i y_i}{\sum_{i=1}^n A_i}; \quad (3.3)$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^n (S_x)_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i x_i}{\sum_{i=1}^n A_i},$$

где n -число простых фигур, на которые разбита сложная фигура
 A_i -площади простых фигур, x_i, y_i -координаты центра тяжести этих фигур.

Осевые моменты инерции

$$J_x = \int_F y^2 dA; \quad J_y = \int_F x^2 dA. \quad (3.4)$$

Полярный момент инерции

$$J_r = \int_F r^2 dA = J_x + J_y. \quad (3.5)$$

Центробежный момент инерции

$$J_{xy} = \int_F x \cdot y dA. \quad (3.6)$$

Осевые моменты инерции всегда больше нуля. Центробежный момент инерции может быть отрицательным, положительным и равным нулю.

Моменты инерции относительно центральных осей называются центральными моментами инерции.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называют главными.

Осевые моменты инерции относительно главных осей называются главными моментами инерции.

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются главными центральными осями.

3.2 Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей

Если оси x, y параллельны центральным осям x_c, y_c (рис.3.2), то справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} J_x &= J_{x_c} + b^2 A; \\ J_y &= J_{y_c} + a^2 A; \\ J_{xy} &= J_{x_c y_c} + abA. \end{aligned} \quad (3.7)$$

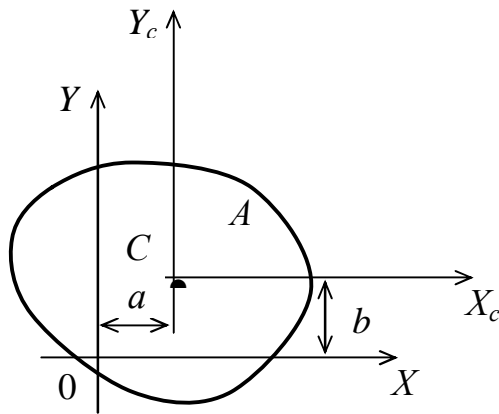


Рис. 3.2.

Здесь, a и b – координаты точки O (с учётом знаков), т.е. нового начала координат в старой системе координат X_c, Y_c .

Первые слагаемые в правых частях равенств (3.7) являются собственными моментами инерции фигуры, а вторые слагаемые переносными моментами инерции. Моменты инерции относительно осей параллельных центральным осям всегда увеличиваются по отношению к собственным на величину, равную произведению площади сечения на квадрат расстояния между рассматриваемыми осями.

Моменты инерции сложных сечений равны сумме моментов инерции простых фигур на которые разбито это сечение:

$$J_x = \sum_{i=1}^n (J_x)_i ; J_y = \sum_{i=1}^n (J_y)_i ; J_{xy} = \sum_{i=1}^n (J_{xy})_i . \quad (3.8)$$

3.3 Изменение моментов инерции при повороте осей координат

При повороте осей $(x_1; y_1)$ на какой-либо угол α по отношению к исходным (рис. 3.3, а) моменты инерции изменяются:

$$\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x \cos^2 a + J_y \sin^2 a - J_{xy} \sin 2a = \frac{J_x + J_y}{2} + \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2a - J_{xy} \sin 2a ; \\ J_{y_1} &= J_x \sin^2 a + J_y \cos^2 a + J_{xy} \sin 2a = \frac{J_x + J_y}{2} - \frac{J_x - J_y}{2} \cos 2a + J_{xy} \sin 2a ; \\ J_{x_1 y_1} &= \frac{J_x - J_y}{2} \sin 2a + J_{xy} \cos 2a . \end{aligned} \quad (3.9)$$

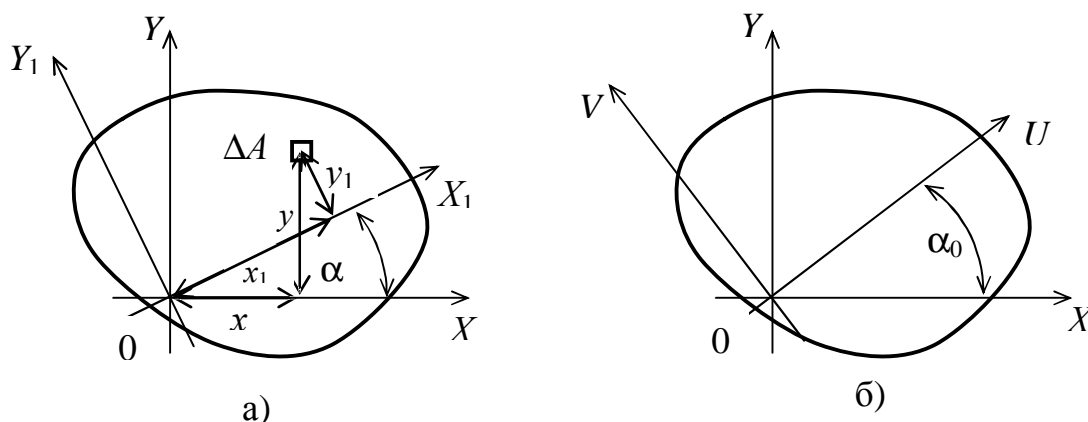


Рис. 3.3

Эти зависимости справедливы только для осей с общим началом координат. Положительный угол α отсчитывается от оси x в направлении кратчайшего поворота ее до совмещения с осью y .

3.4 Определение главных моментов инерции и направления главных осей

Положение главных осей находится по формуле:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}, \quad (3.10)$$

где α_0 – угол, на который нужно повернуть оси x и y , чтобы получить положение главных осей. При $\alpha_0 > 0$ поворот оси x до совмещения с главной осью производится против часовой стрелки.

Главные моменты инерции вычисляются по формуле (3.9), если в них положить $\alpha = \alpha_0$, или по формулам:

$$\begin{aligned} J_U &= \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}; \\ J_V &= \frac{J_x + J_y}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Причем верхние знаки следует брать при $J_x > J_y$, а нижние при $J_x < J_y$. Правило инварианта: $J_x + J_y = J_{x_n} + J_{y_n} = J_{\max} + J_{\min} = \text{const}$. При повороте осей сумма осевых моментов инерции относительно перпендикулярных осей остается величиной постоянной.

Понятие о радиусе инерции: момент инерции фигуры относительно какой-либо оси можно записать в виде произведения площади фигуры на квадрат некоторой величины, которую называют радиусом инерции:

$$J_x = \int_F y^2 dA = A \cdot i_x^2, \quad (3.12)$$

где i_x – радиус инерции относительно оси x .

Тогда

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{A}}, \quad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{A}}. \quad (3.13)$$

Относительно главных осей радиусы инерции будут равны соответственно:

$$i_U = \sqrt{\frac{J_U}{A}}, \quad i_V = \sqrt{\frac{J_V}{A}}. \quad (3.14)$$

3.5 Методика определения положения главных осей, величин главных моментов инерции, радиусов инерции

1. Любая сложная фигура разбивается на простейшие (прямоугольник, квадрат, треугольник, полуокружность, четверть окружности и т.д.), геометрические характеристики которых известны, рис.3.4.

2. Проводится произвольная система прямоугольных координат (вспомогательные оси) относительно которых положение центров тяжести любой простейшей фигуры является величиной известной.

3. По формулам (3.3) определяется центр тяжести всей фигуры и проводятся центральные оси x_c и y_c , которые параллельны центральным осям простейших фигур.

4. Используя зависимость изменения моментов инерции при параллельном переносе осей (формулы 3.7, 3.8), определяют моменты инерции и центробежный момент инерции всей фигуры относительно центральных осей.

5. По формуле (3.10) вычисляют положение главных осей инерции (угол α_0).

6. Определяют по формулам (3.11) главные моменты инерции.

7. По формулам (3.14) вычисляют главные радиусы инерции.

3.6 Геометрические характеристики некоторых плоских сечений

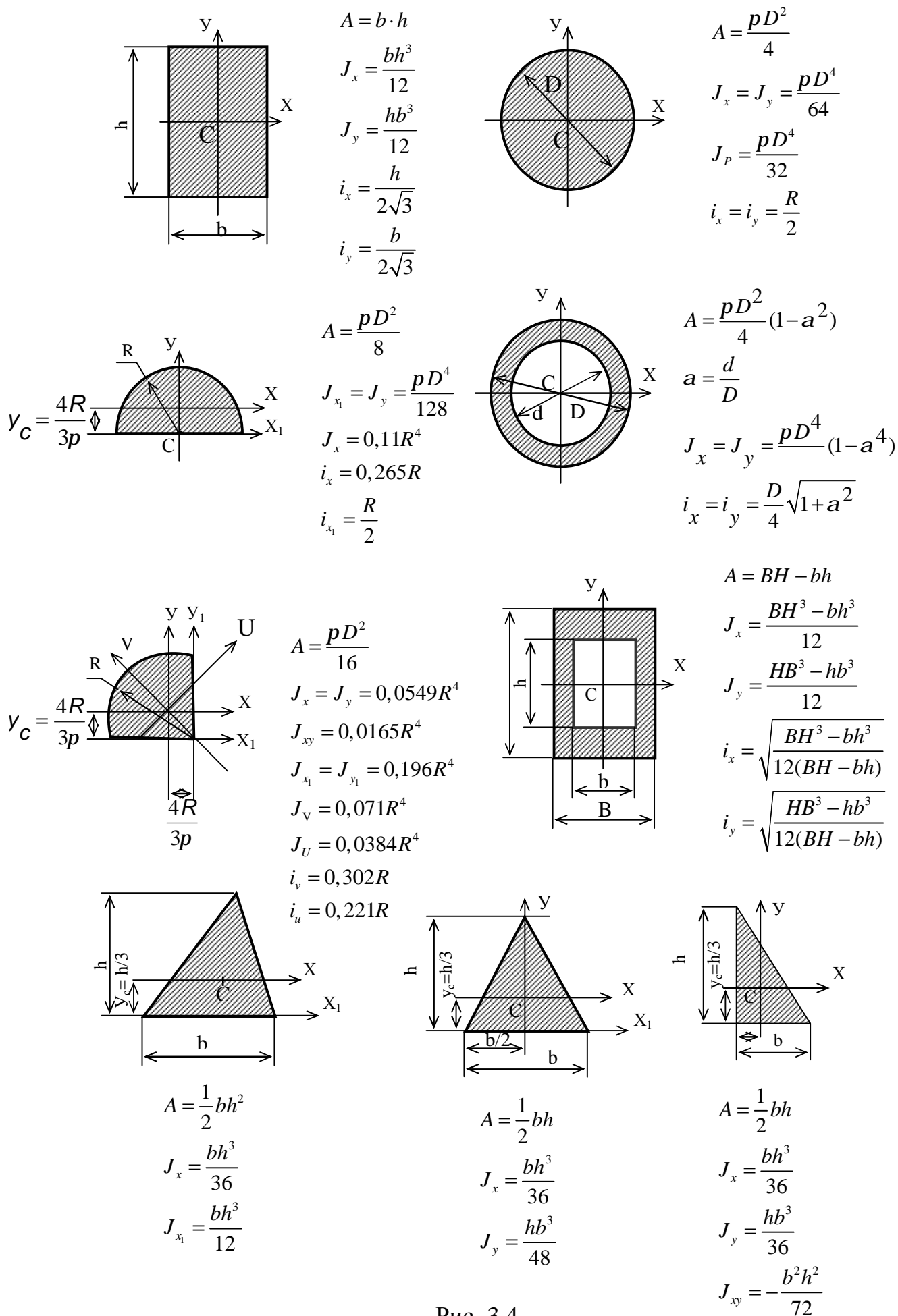


Рис. 3.4

3.7 Примеры определения геометрических характеристик сложных фигур

Пример 1.

Определить для заданного плоского сечения (рис.3.5) положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции и радиусы инерции. $R=5$ см.

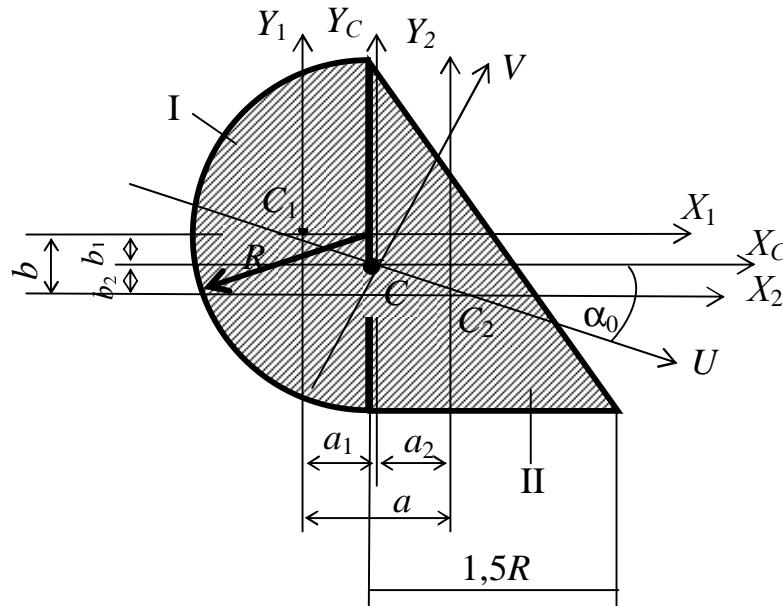


Рис 3.5

1. Определение центра тяжести фигуры.

а) Разобьём фигуру на полуокружность и треугольник, проведем центральные оси x_1-y_1 , x_2-y_2 этих фигур параллельные сторонам треугольника.

б) Проведем вспомогательные оси, относительно которых будем находить смещение центра тяжести всей фигуры. Вспомогательные оси рациональнее совмещать с центральными осями какого-либо из элементов сложной фигуры, т.к. статические моменты этого элемента относительно центральных осей равны нулю. В рассматриваемом примере вспомогательные оси совместим с осями x_1-y_1 (центральные оси полуокруга).

в) Используя зависимости (3.3), определяем центр тяжести фигуры и проводим центральные оси x_c-y_c .

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n (S_y)_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum A_i \cdot x_{C_i}}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_{C_1} + A_2 \cdot x_{C_2}}{A_1 + A_2} = \frac{A_2 \cdot a}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{pD^2}{8} \left(\frac{4R}{3p} + \frac{1}{3} \cdot 1,5R \right)}{\frac{pD^2}{8} + \frac{1}{2} 2R \cdot 1,5R} ;$$

$$x_c = \frac{39,25(2,12 + 2,5)}{39,25 + 37,5} = 2,36 \text{ см} ;$$

$$y_C = \frac{\sum_{i=1}^n (S_X)_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \cdot y_{C_i}}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 \cdot y_{C_1} + A_2 \cdot y_{C_2}}{A_1 + A_2} = \frac{A_2 \cdot b}{A_1 + A_2} = \frac{\frac{pD^2}{8} \left[- \left(R - \frac{1}{3} 2R \right) \right]}{A_1 + A_2};$$

$$y_C = \frac{-39,25 \cdot \frac{5}{3}}{76,75} = -0,85 \text{ см.}$$

Центр тяжести C всей фигуры должен лежать на прямой, соединяющей центры тяжести полукруга и треугольника.

2. Определяем моменты инерции относительно центральных осей, применяя зависимость (3.7).

$$J_{x_C} = \sum_{i=1}^2 (J_{x_C})_i = (J_{x_1} + A_1 \cdot b_1^2) + (J_{x_2} + A_2 b_2^2);$$

$$b_1 = y_C = 0,85 \text{ см} \quad , \quad b_2 = b - y_C = \frac{5}{3} - 0,85 = 0,82 \text{ см.}$$

$$J_{x_C} = \left(\frac{pD^4}{128} + \frac{pD^2}{8} \cdot y_C^2 \right) + \left[\frac{1,5R(2R)^3}{36} + \frac{1}{2} 1,5R \cdot 2R \cdot (b - y_C)^2 \right];$$

$$J_{x_C} = \frac{3,14 \cdot 10^4}{128} + \frac{3,14 \cdot 10^2}{8} \cdot 0,85^2 + \frac{1,5 \cdot 5 \cdot 10^3}{36} + \frac{1}{2} 1,5 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 0,82^2 = 507,2 \text{ см}^4;$$

$$J_{y_C} = \sum_{i=1}^2 (J_{y_C})_i = (J_{y_1} + A_1 \cdot a_1^2) + (J_{y_2} + A_2 \cdot a_2^2) \quad ;$$

$$a_1 = x_C = 2,36 \text{ см} \quad , \quad a_2 = a - x_C = 4,62 - 2,36 = 2,26 \text{ см} \quad ;$$

$$J_{y_C} = (0,11R^4 + \frac{pD^2}{8} \cdot x_C^2) + \left[\frac{2R(1,5R)^3}{36} + \frac{1}{2} 1,5R \cdot 2R(a - x_C)^2 \right];$$

$$J_{y_C} = 0,11 \cdot 5^4 + \frac{3,14 \cdot 10^2}{8} \cdot 2,36^2 + \frac{10 \cdot 7,5^3}{36} + \frac{1}{2} 1,5 \cdot 5^2 \cdot 2 \cdot 2,26^2 = 596,1 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_C y_C} = \sum_{i=1}^2 (J_{x_C y_C})_i = (J_{x_1 y_1} + F_1 a_1 \cdot b_1) + (J_{x_2 y_2} + F_2 a_2 \cdot b_2) \quad ;$$

$$J_{x_1 y_1} = 0;$$

$$J_{x_C y_C} = \frac{pD^2}{8} (-x_C)(y_C) - \frac{(1,5R)^2 (2R)^2}{72} + \frac{1}{2} 1,5R \cdot 2R \cdot (a_2)(-b_2);$$

$$J_{x_C y_C} = -\frac{3,14 \cdot 10^2}{8} 2,36 \cdot 0,85 - \frac{4 \cdot 2,25 \cdot 5^4}{72} - 1,5 \cdot 5^2 \cdot 2,26 \cdot 0,82 = -226,3 \text{ см}^4.$$

3. Определение положения главных центральных осей и величины главных центральных моментов инерции.

$$\operatorname{tg} 2a_0 = -\frac{2J_{x_c y_c}}{J_{x_c} - J_{y_c}} = -\frac{2(-226,3)}{507,2 - 596,1} = -5,09;$$

$$a_0 = -39^\circ 26'.$$

Так как $\alpha_0 < 0$, ось x_c должна быть повернута до совмещения с главной осью U по часовой стрелке. Поскольку $J_{y_c} > J_{x_c}$, то $J_U = J_{\min}$, $J_V = J_{\max}$.

$$\begin{aligned} J_U &= \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2} = \\ &= \frac{507,2 + 596,1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(507,2 - 596,1)^2 + 4 \cdot 226,3^2} = 321,03 \text{ см}^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_V &= \frac{J_{x_c} + J_{y_c}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_c} - J_{y_c})^2 + 4J_{x_c y_c}^2} = 551,65 + 230,62 = 782,27 \text{ см}^4 \\ J_{x_c} + J_{y_c} &= J_U + J_V; \quad 507,2 + 596,1 = 321,0 + 782,3 = 1103,3 \end{aligned}$$

4. Определяем главные радиусы инерции:

$$i_U = \sqrt{\frac{J_U}{F}} = \sqrt{\frac{321,03}{76,75}} = 2,04 \text{ см}; \quad i_V = \sqrt{\frac{J_V}{F}} = \sqrt{\frac{782,27}{76,75}} = 3,19 \text{ см}.$$

Пример 2

Определить для плоского сечения, изображенного на рис.3.6 положение главных центральных осей и вычислить главные моменты инерции и радиусы инерции. Швеллер № 30, уголок 125×80×10.

Справочные данные:

ё № 125×80×10

$B=12,5 \text{ см}$, $b=8 \text{ см}$,

$A=19,7 \text{ см}^2$, $J_x=311,61 \text{ см}^4$,

$J_y=100,47 \text{ см}^4$, $|J_{xy}|=102,0 \text{ см}^4$,

$x_0=1,92 \text{ см}$, $y_0=4,14 \text{ см}$.

[№ 30

$h=30 \text{ см}$, $b=10 \text{ см}$, $A=40,5 \text{ см}^2$,

$J_x=5810 \text{ см}^4$, $J_y=327 \text{ см}^4$,

$z_0=2,52 \text{ см}$.

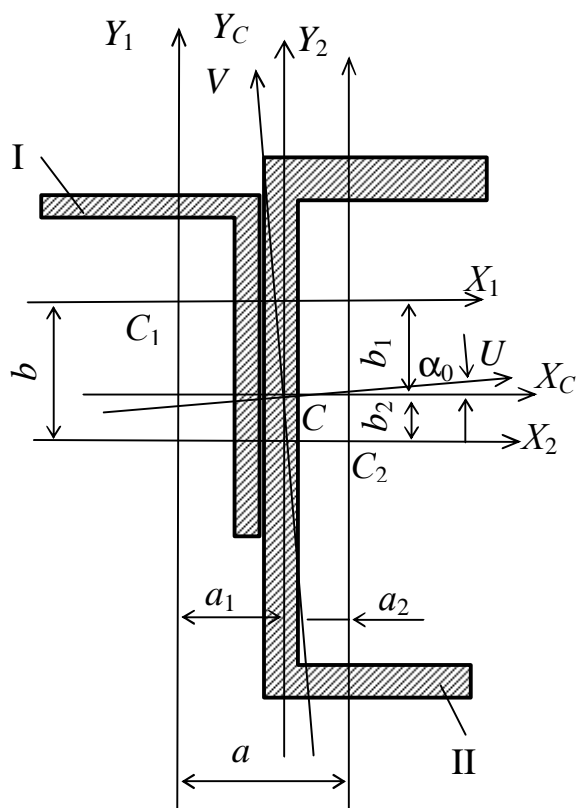


Рис. 3.6

1. Выбираем вспомогательные оси, совпадающие с центральными осями (x_2 - y_2) швеллера, определяем центр тяжести фигуры аналогично предыдущему примеру.

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^2 (S_{y_2})_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot a}{A_1 + A_2} = \frac{19,7(-4,44)}{19,7 + 40,5} = -1,45 \text{ см};$$

$$a = X_0 + Z_0 = 1,92 + 2,52 = 4,44 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^2 (S_{x_2})_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot b}{A_1 + A_2} = \frac{19,7(8,36)}{60,2} = 2,74 \text{ см};$$

$$b = B - y_0 = 12,5 - 4,14 = 8,36 \text{ см}.$$

2. Определяем моменты инерции относительно центральных осей.

$$\begin{aligned} J_{x_c} &= \sum_{i=1}^2 (J_{x_c})_i = J_{x_1} + A_1 \cdot b_1^2 + J_{x_2} + A_2 \cdot b_2^2 = \\ &= 311,61 + 19,7 \cdot 5,62^2 + 5810 + 40,5 \cdot 2,74^2 = 7047,9 \text{ см}^4; \end{aligned}$$

$$b_1 = b - y_C = 8,36 - 2,74 = 5,62 \text{ см}; \quad b_2 = y_C = 2,74 \text{ см}.$$

$$J_{y_C} = \sum_{i=1}^2 (J_{y_C})_i = J_{y_1} + A_1 \cdot a_1^2 + J_{y_2} + A_2 \cdot a_2^2 =$$

$$= 100,47 + 19,7 \cdot 2,99^2 + 327 + 40,5 \cdot 1,45^2 = 688,74 \text{ см}^4;$$

$$a_1 = a - x_C = 4,44 - 1,45 = 2,99 \text{ см}, \quad a_2 = x_C = 1,45 \text{ см}.$$

$$J_{x_C y_C} = \sum_{i=1}^2 (J_{x_C y_C})_i = J_{x_1 y_1} + A_1 b_1 (-a_1) + J_{x_2 y_2} + A_2 (-b_2) a_2 =$$

$$= -102 - 19,7 \cdot 5,62 \cdot 2,99 - 40,5 \cdot 2,74 \cdot 1,45 = -593,94 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_2 y_2} = 0.$$

3. Определяем направление главных центральных осей и величину главных центральных моментов инерции.

$$\operatorname{tg} 2a_0 = -\frac{2J_{x_C y_C}}{J_{x_C} - J_{y_C}} = -\frac{2 \cdot (-593,94)}{7047,9 - 688,7} = 0,1868;$$

$$a_0 = 5^\circ 18'.$$

Ось x необходимо повернуть против часовой стрелки на угол α_0 до совмещения с главной осью U .

$$J_U = J_{\max} = \frac{J_{x_C} + J_{y_C}}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(J_{x_C} - J_{y_C})^2 + 4J_{x_C y_C}^2} =$$

$$= \frac{7047,9 + 688,7}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(7047,9 - 688,7)^2 + 4 \cdot 593,9^2} = 7103 \text{ см}^4$$

$$;$$

$$J_V = J_{\min} = \frac{7047,9 + 688,7}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(7047,9 - 688,7)^2 + 4 \cdot 593,9^2} = 633,7 \text{ см}^4;$$

$$J_{x_C} + J_{y_C} = J_U + J_V; \quad 7047,9 + 688,74 = 7103 + 633,7 = 7737.$$

4. Определяем главные радиусы инерции:

$$i_U = \sqrt{\frac{J_U}{A}} = \sqrt{\frac{7103}{60,2}} = 10,86 \text{ см}; \quad i_V = \sqrt{\frac{J_V}{A}} = \sqrt{\frac{633,7}{60,2}} = 3,24 \text{ см}.$$

Пример 3.

Для сечения, показанного на рис.3.7, определить геометрические характеристики относительно главных центральных осей.

Исходные данные: $a = 25\text{ мм}$.

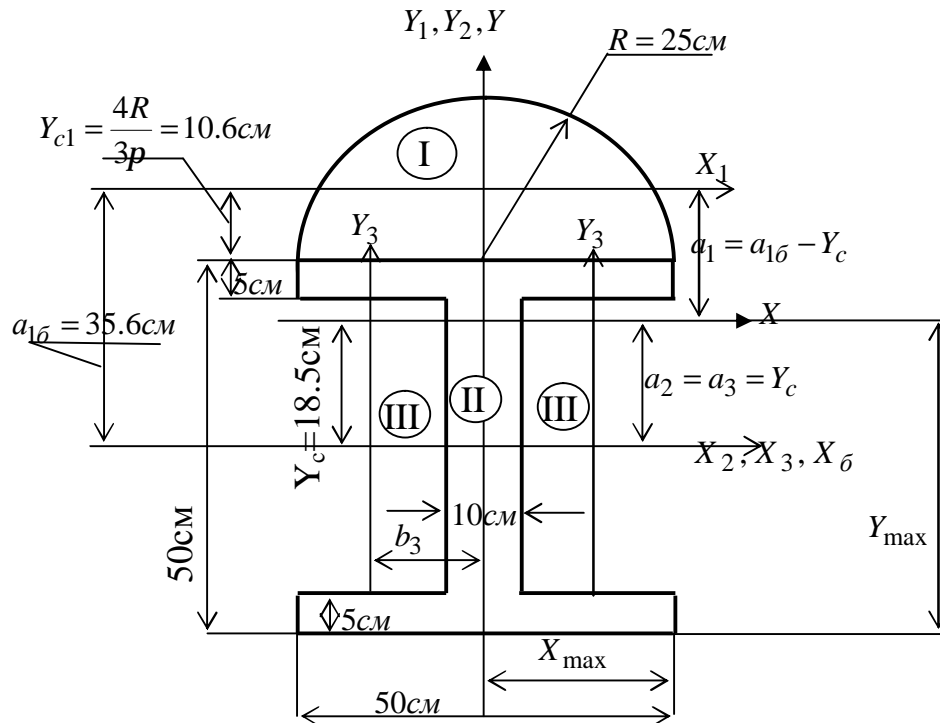


Рис.3.7

Решение.

Изображаем в масштабе сечение с указанием численных значений его размеров (рис.3.7).

Разбиваем сечение на следующие фигуры: 1-полуокружность радиусом $R = 10a = 25\text{ см}$ и площадью $A_1 = \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3.14 \cdot 25^2}{2} = 981.25\text{ см}^2$, 2-квадрат, размеры которого $h_2 = 20a = 50\text{ см}$, $b_2 = 20a = 50\text{ см}$, а площадь $A_2 = 2500\text{ см}^2$, 3-два прямоугольника, каждый из которых имеет размеры $h_3 = 40\text{ см}$, $b_3 = 20\text{ см}$, а их площадь $A_3 = 40 \times 20 \times 2 = 1600\text{ см}^2$.

Площадь всего сечения $A = A_1 + A_2 - A_3 = 981.25 + 2500 - 1600 = 1881.25\text{ см}^2$.

Показываем положение центральных осей каждой фигуры (рис.3.7).

Определяем положение центра тяжести сечения.

Ось симметрии Y является главной центральной осью и центр тяжести расположен на этой оси. Принимая в качестве базовой оси X_0 ось, совпадающую с центральными осями второй и третьей фигур (рис.3.7), вычисляем Y_c -координату центра тяжести сечения по отношению к оси X_0 :

$$Y_c = \frac{S_{X_{\bar{o}}}}{A} = \frac{S_{X_{\bar{o}}}^I + S_{X_{\bar{o}}}^{II} - S_{X_{\bar{o}}}^{III}}{A},$$

где $S_{X_{\bar{o}}}^I = A_1 a_{1\bar{o}} = 981.25 \cdot 35.6 = 34932.5 \text{ см}^3$ - статический момент площади первой фигуры относительно базовой оси $X_{\bar{o}}$ (рис.3.7),

$a_{1\bar{o}} = 25 + 0.424R = 25 + 10.6 = 35.6 \text{ см}$ - расстояние от центра тяжести A_1 до базовой оси (рис.3.7),

$S_{X_{\bar{o}}}^{II} = S_{X_{\bar{o}}}^{III} = 0$ - статические моменты площади второй фигуры и третьей относительно базовой оси $X_{\bar{o}}$ равны нулю, так как базовая ось является центральной осью этих фигур (рис.3.7).

Следовательно,

$$Y_c = \frac{S_{X_{\bar{o}}}}{A} = \frac{S_{X_{\bar{o}}}^I}{A} = \frac{34932.5}{1881.25} = 18.5 \text{ см}.$$

Проводим главные центральные оси сечения X, Y (рис.3.7).

Определяем осевые моменты инерции сечения относительно главных центральных осей:

$$I_X = I_X^I + I_X^{II} - I_X^{III} = I_{X_1}^I + a_1^2 A_1 + I_{X_2}^{II} + a_2^2 A_2 - I_{X_3}^{III} - a_3^2 A_3,$$

где $I_{X_1}^I = 0.11R^4 = 0.11 \cdot 25^4 = 42969 \text{ см}^4$; $a_1 = a_{1\bar{o}} - Y_c = 35.6 - 18.5 = 17.1 \text{ см}$,

$$I_{X_2}^{II} = \frac{b_2 h_2^3}{12} = \frac{50 \cdot 50^3}{12} = 520823 \text{ см}^4; a_2 = a_3 = Y_c = 18.5 \text{ см},$$

$$I_{X_3}^{III} = \frac{2b_3 h_3^3}{12} = \frac{2 \cdot 20 \cdot 40^3}{12} = 213333 \text{ см}^4;$$

$$I_X = 42969 + 17.1^2 981.25 + 520823 + 18.5^2 \cdot 2500 - 213333 - 18.5^2 \cdot 1600 = 945420 \text{ см}^4$$

$$I_Y = I_Y^I + I_Y^{II} - I_Y^{III} = I_{Y_1}^I + I_{Y_2}^{II} - 2(I_{Y_3}^{III} + b^2 A_3 / 2),$$

где $I_Y^I = I_{Y_1}^I = \frac{p d^4}{128} = \frac{3.14 \cdot 50^4}{128} = 153320 \text{ см}^4$;

$$I_Y^{II} = I_{Y_2}^{II} = \frac{b_2^3 h_2}{12} = \frac{50^3 50}{12} = 520823 \text{ см}^4;$$

$$I_Y^{III} = 2(I_{Y_3}^{III} + b_3^2 A_3 / 2) = 2(\frac{b_3^3 h_3}{12} + b_3^2 A_3 / 2) = 2(\frac{20^3 40}{12} + 15^2 \cdot 1600 / 2) = 413334 \text{ см}^4,$$

$$J_Y = I_Y^I + I_Y^{II} - I_Y^{III} = 153320 + 520823 - 413334 = 260809 \text{ см}^4.$$

Вычисляем радиусы инерции:

$$i_X = \sqrt{\frac{I_X}{A}} = \sqrt{\frac{945420}{1881}} = 22.4 \text{ см}$$

$$i_Y = \sqrt{\frac{I_Y}{A}} = \sqrt{\frac{260809}{1881}} = 11.8 \text{ см}.$$

Определяем моменты сопротивления сечения изгибу:

$$W_x = \frac{I_x}{Y_{\max}} = \frac{945420}{43.5} = 21734 \text{ см}^3,$$

$$W_y = \frac{I_Y}{X_{\max}} = \frac{260809}{25} = 10432.4 \text{ см}^3,$$

где $Y_{\max} = Y_c + 25 = 18.5 + 25 = 43.5 \text{ см}$ - расстояние от оси X до наиболее удаленной точки сечения (рис.3.7),

$X_{\max} = 25 \text{ см}^3$ - расстояние от оси Y до наиболее удаленной точки сечения (рис.3.7).

3.8 Контрольное задание 3. Геометрические характеристики плоских сечений

Для заданного плоского сечения определить положение главных центральных осей и вычислить основные геометрические характеристики.

Типы сечений приведены на рис.3.8, размеры составных элементов и номера прокатных профилей указаны в табл.3.1. Сведения о геометрических характеристиках прокатных профилей даны в ГОСТ: 8239-72 (двутавры), 8240-72 (швеллеры), 8509-86 (уголки равнополочные), 8510-86 (уголки неравнополочные).

Таблица 3.1

Цифра шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
	тип сечения	Номер швеллера или двутавра	Размеры неравнополоч. уголка	Размеры равнополочного уголка	b , мм
1	1, 11, 21	10	70x45x5	45x45x4	25
2	2, 12, 22	12	80x50x6	50x50x5	30
3	3, 13, 23	14	90x56x8	56x56x5	35
4	4, 14, 24	16	100x63x10	60x60x5	40
5	5, 15, 25	18	110x70x8	63x63x6	45
6	6, 16, 26	18a	125x80x12	70x70x6	50
7	7, 17, 27	20	140x90x10	75x75x7	55
8	8, 18, 28	20a	160x100x14	80x80x7	60
9	9, 19, 29	22	180x110x12	90x90x8	65
0	10, 20, 30	22a	200x125x16	100x100x10	70

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить сечение в масштабе, указать размеры.
2. Определить положение центра тяжести сечения.
3. Вычислить моменты инерции относительно центральных осей.
4. Определить положение главных центральных осей и величину главных центральных моментов инерции.
5. Вычислить моменты сопротивления относительно главных центральных осей и главные радиусы инерции.

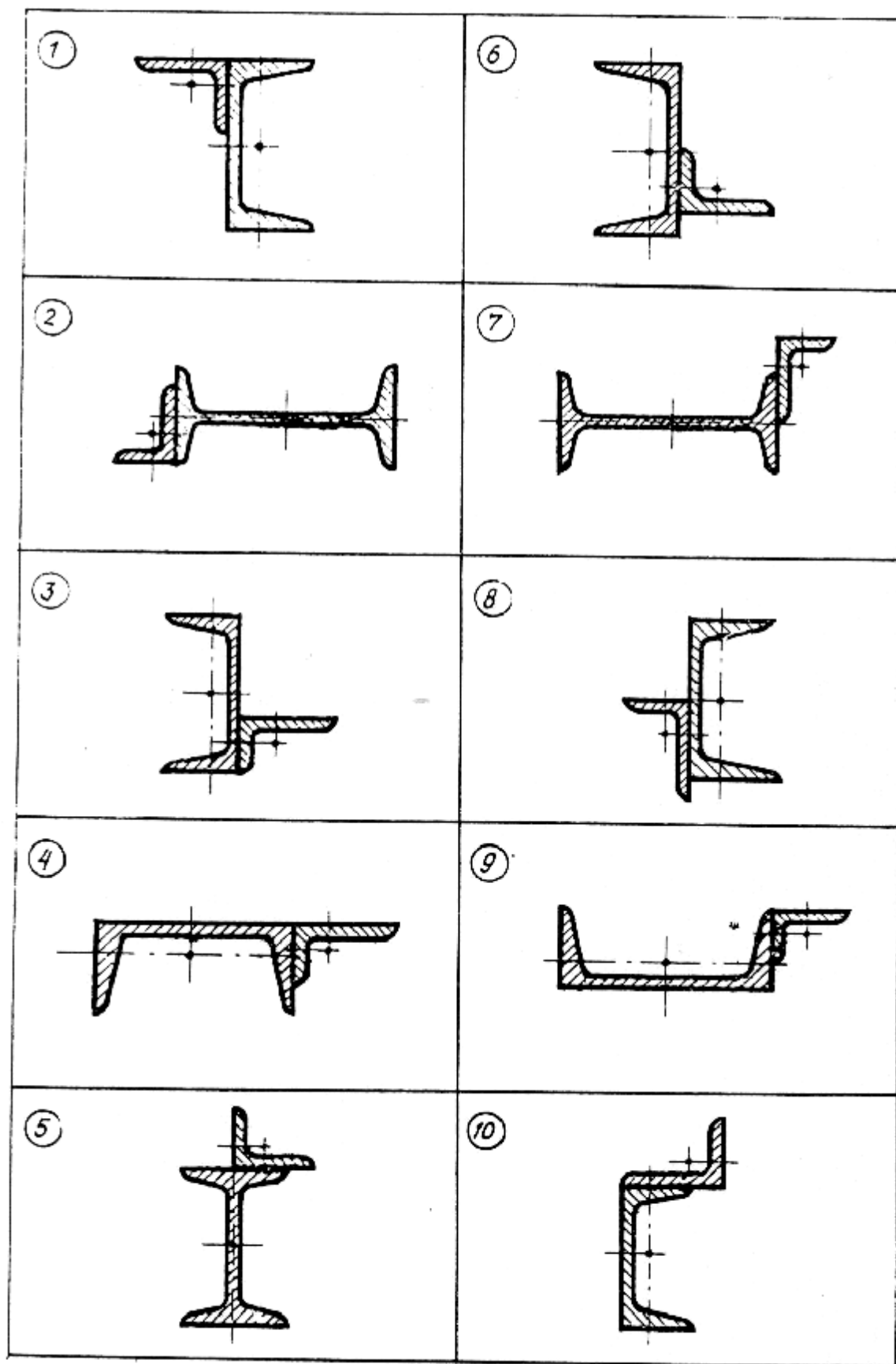


Рис. 3.8

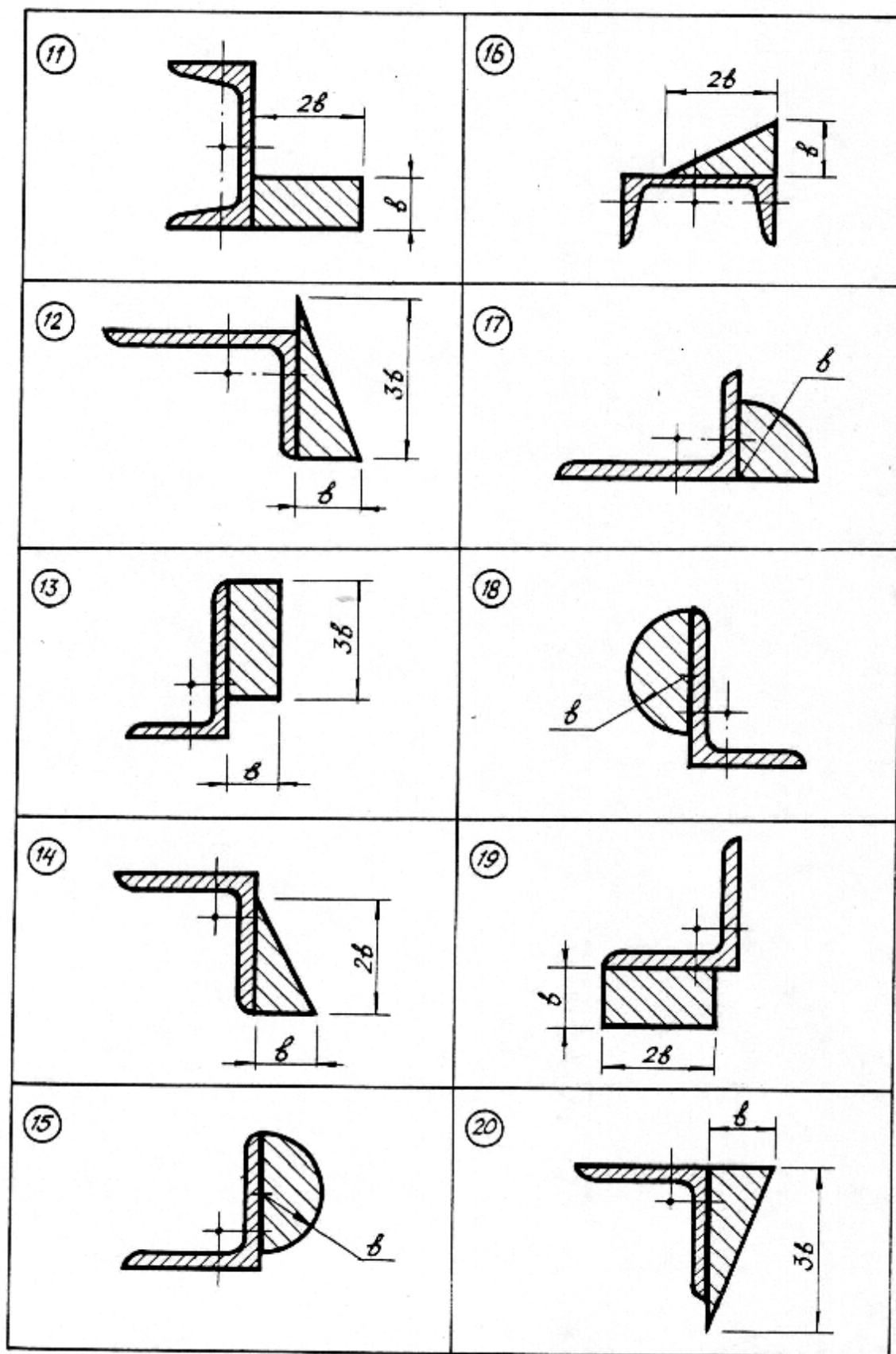


Рис. 3.8 (продолжение)

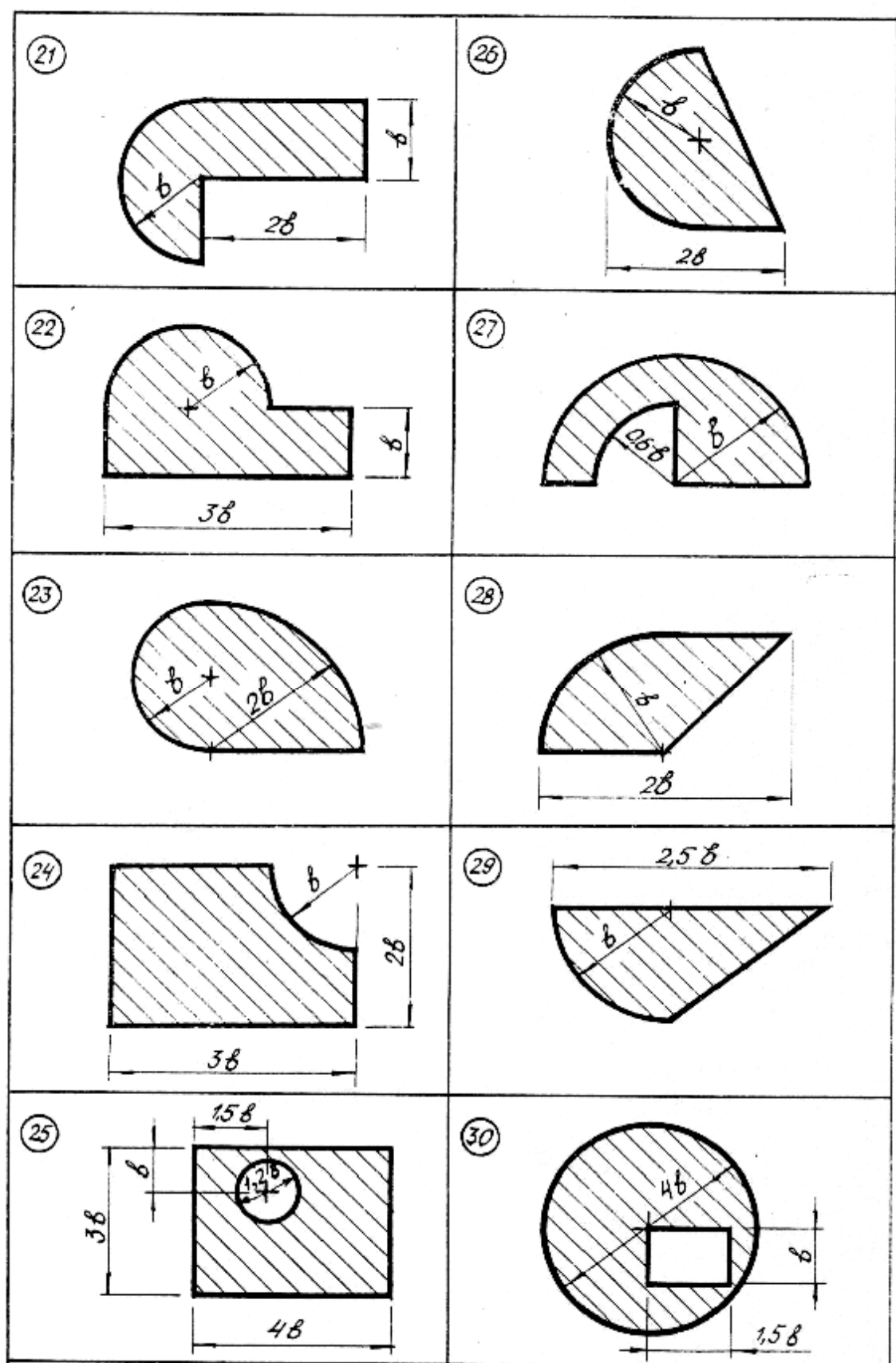


Рис. 3.8 (окончание)

3.9 Контрольное задание 4. Геометрические характеристики плоских симметричных сечений

Для заданных сечений определить положение главных центральных осей и вычислить основные геометрические характеристики.

Типы сечений приведены на рис.3.9 (выбор варианта сечений – по указанию преподавателя).

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить сечение в масштабе, указать размеры.
2. Определить положение центра тяжести сечения.
3. Вычислить моменты инерции, моменты сопротивления и радиусы инерции относительно главных центральных осей.

Примечание: рассмотренные в данном задании сечения в дальнейшем могут быть использованы при расчетах на изгиб.

Вопросы для самопроверки

Как определяются осевой, центробежный и полярный моменты инерции? Основные свойства статического момента площади и центробежного момента. Изменение моментов инерции при параллельном переносе осей. Какие оси называются центральными, главными и главными центральными? Как изменяются моменты инерции при повороте осей? Что такое радиусы инерции?

Литература: [1.] Глава 4, § 4.1-4.2,4.4,4.6.

[2.] Глава 3.

[3.] Глава 6.

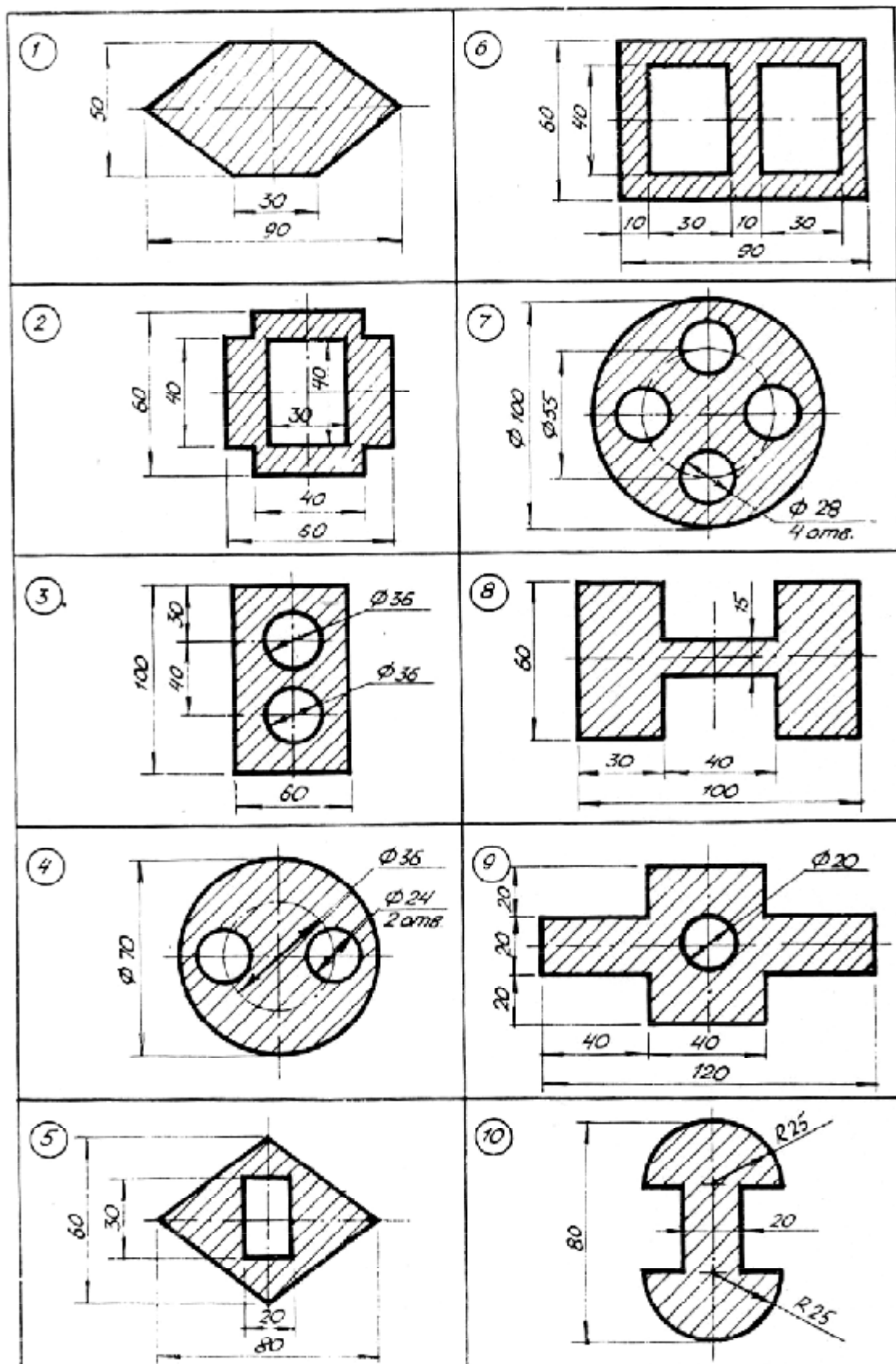


Рис. 3.9

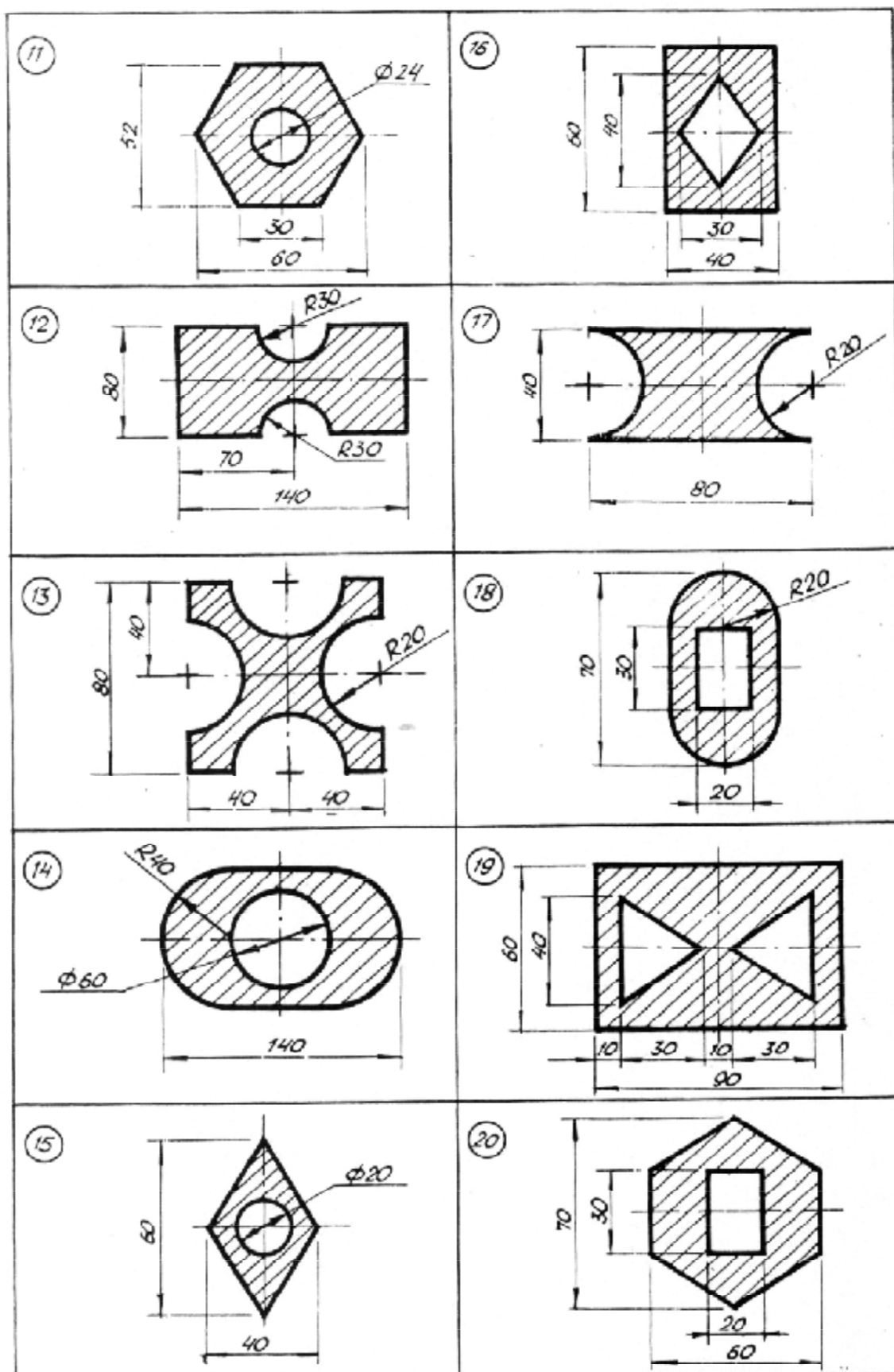


Рис. 3.9 (продолжение)

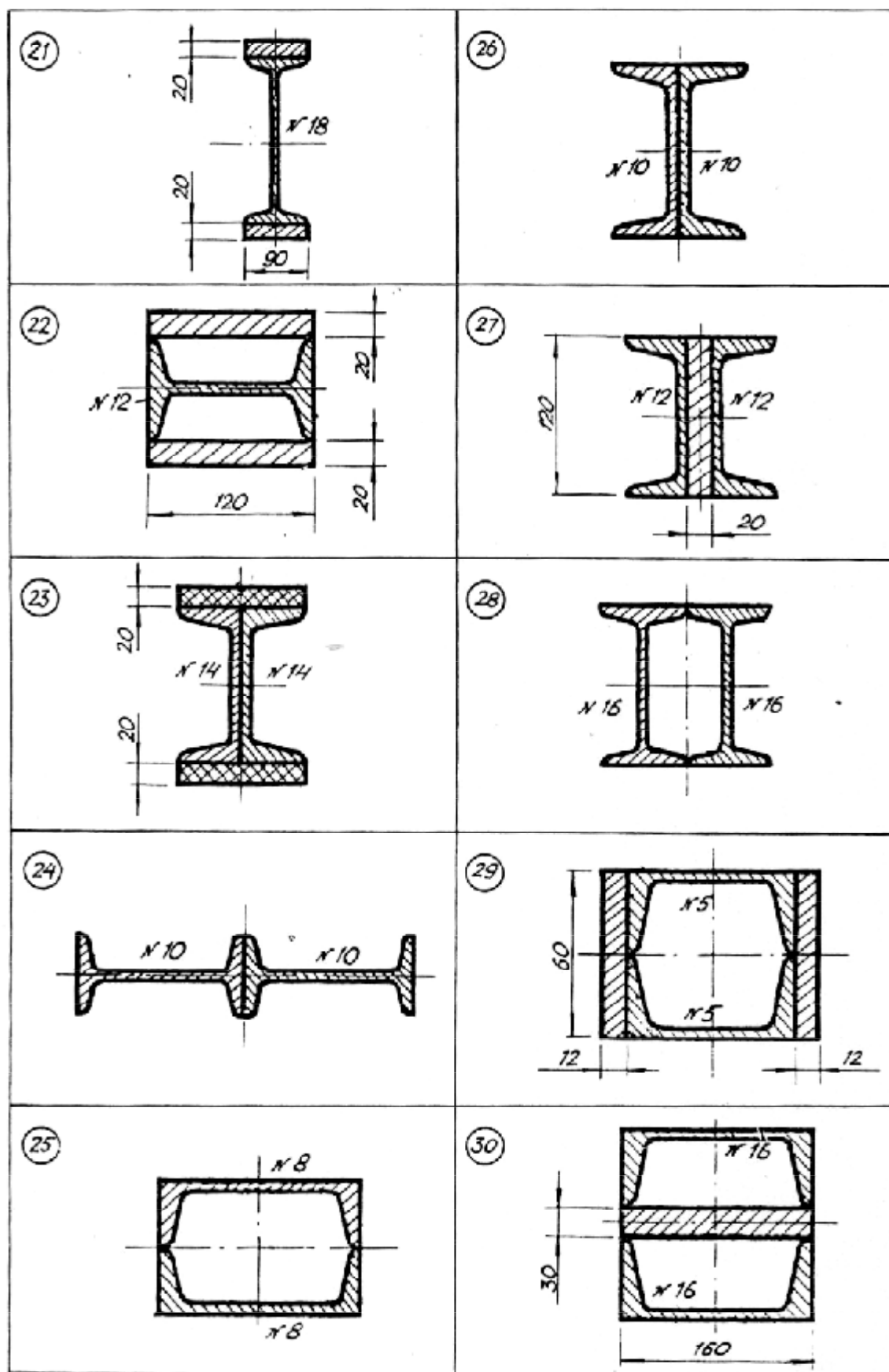


Рис. 3.9 (окончание)

ГЛАВА IV. КРУЧЕНИЕ

4.1 Понятие о крутящем моменте, внешние нагрузки, вызывающие кручение

Под кручением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает единственный силовой фактор – крутящий момент M_k . Стержни, работающие на кручение, называют валами.

Кручение возникает под действием внешних моментов (пар сил), действующих в плоскостях, перпендикулярных продольной оси вала. Внешние моменты передаются на вал в местах посадки на него шкивов, зубчатых колес, турбин и т.п.

Часто в технических задачах известны мощность, передаваемая валом, и число оборотов вала. По этим данным может быть вычислен скручивающий внешний момент:

$$M = \frac{N}{w} [\text{Н} \cdot \text{м}], \quad (4.1)$$

где $w = \frac{p \cdot n}{30}$,

или

$$M = 9,736 \frac{N}{n} [\text{Н} \cdot \text{м}]. \quad (4.2)$$

N – мощность выражена в ваттах, n – в об/мин.

4.2 Внутренние силовые факторы, эпюра крутящих моментов

Для определения крутящих моментов, возникающих в поперечных сечениях вала под действием внешних скручивающих моментов, применяют метод сечений.

Примем следующее правило знаков при анализе крутящих моментов в сечении: крутящий момент в сечении a - a будем считать положительным, если при взгляде со стороны внешней нормали к сечению скручивающий момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке. На рис. 4.1 изображен вал, защемленный одним концом и нагруженный на свободном конце внешним моментом M , который вращает отсеченную часть по часовой стрелке.

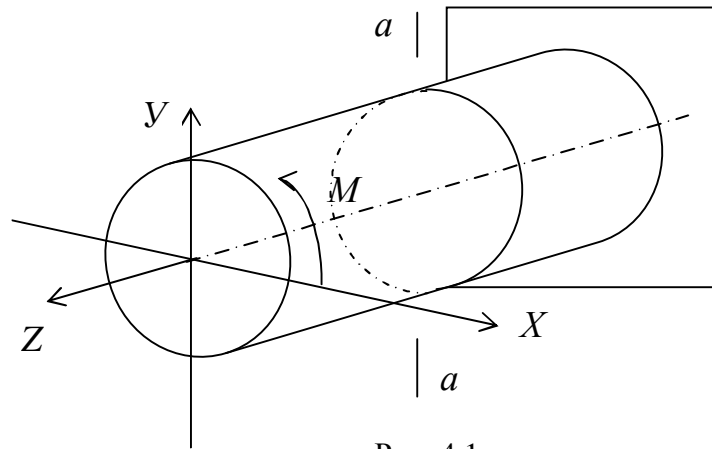


Рис. 4.1

Следовательно, согласно принятому правилу знаков, крутящий момент M_k в сечении $a - a$ будет положительным.

При действии на отсеченную часть нескольких внешних моментов, крутящий момент в сечении находится как алгебраическая сумма внешних скручивающих моментов, действующих по одну сторону от сечения.

Для того чтобы судить о характере распределения крутящих моментов по длине вала, строят эпюру этих силовых факторов.

Для упрощения внешние моменты будем условно обозначать в виде двух кружков, соединенных линией. Кружок с точкой обозначает силу, направленную на наблюдателя, с крестиком - от наблюдателя (рис. 4.2, a).

Поясним построение эпюры крутящих моментов на следующем примере: рассмотрим вал AE (рис. 4.2, b), опирающийся на подшипники и нагруженный в сечениях A, B, C, D, E сосредоточенными крутящими моментами, а на участке CD – распределенным крутящим моментом (m). Вал под действием указанных моментов находится в равновесии.

Проведем сечение $a-a$ на участке AB . Из условия равновесия левой от сечения части получаем $M_k = 200$ Н·м.

В сечении $b - b$ на участке BC $M_k = 200 - 400 = - 200$ Н·м.

В сечении $c - c$ на участке CD $M_k = 200 - 400 - 600 + 100 \cdot z$, $0 \leq z \leq 1$ м.

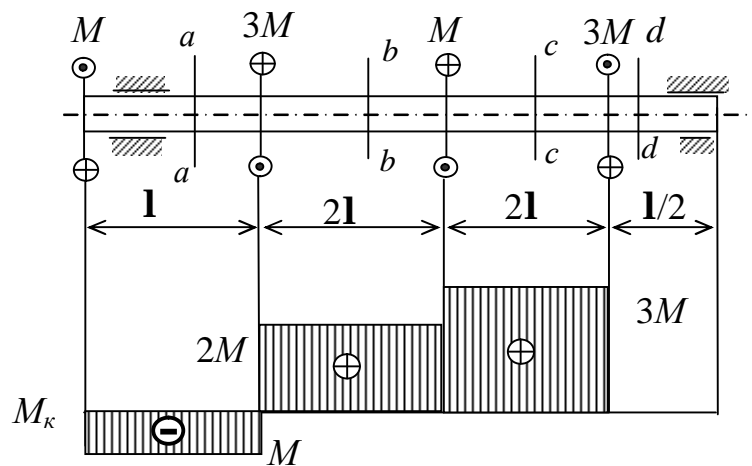
При $z = 0$ $M_k = - 800$ Н·м, при $z = 1$ м $M_k = - 700$ Н·м.

В сечении $d - d$ на участке DE

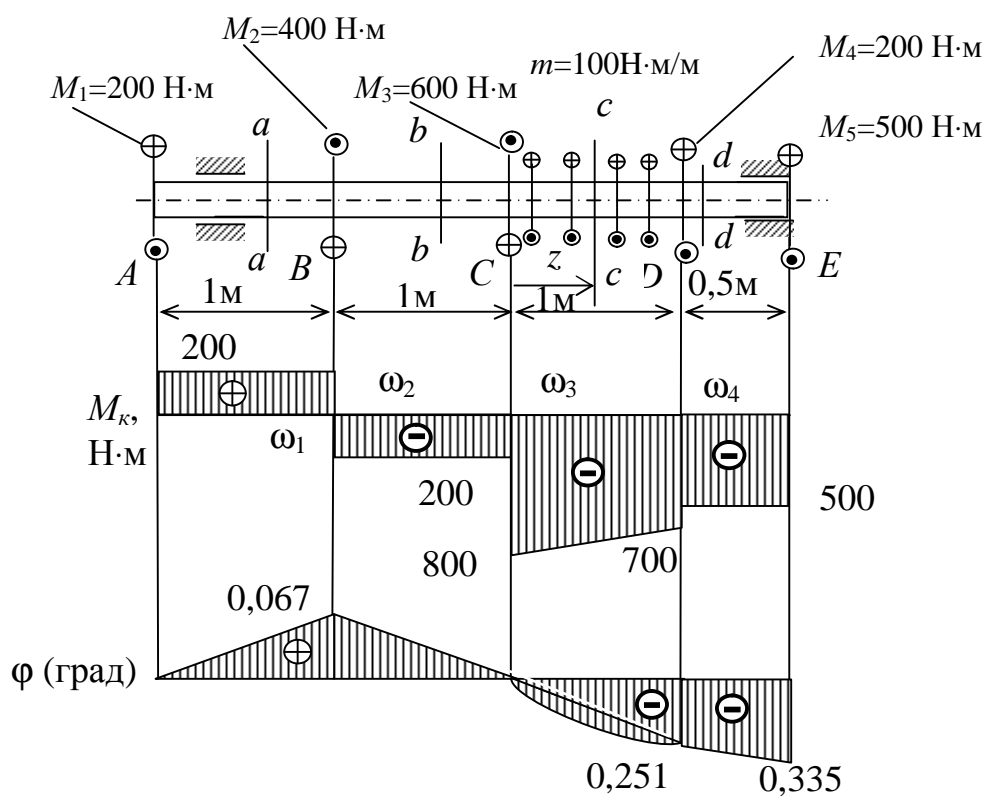
$$M_k = 200 - 400 - 600 + 100 + 200 = - 500 \text{ Н·м.}$$

Эпюра крутящих моментов имеет форму прямоугольников, за исключением участка, на котором приложен распределенный

крутящий момент. Следует отметить, что в том сечении, где имеется сосредоточенный крутящий момент, ордината эпюры скачкообразно изменяется на величину приложенного здесь момента.



a



б

Рис.4.2

4.3 Определение напряжений и деформаций при кручении вала круглого сечения

При анализе деформаций кручения будем основываться на следующих гипотезах:

1 При кручении круглого вала поперечные сечения, плоские до деформации вала, остаются плоскими и перпендикулярными к его продольной оси и после деформации (гипотеза плоских сечений).

2 Радиусы сечения, прямые до кручения, остаются прямыми и при кручении.

3 Расстояния между поперечными сечениями не изменяются, но поперечные сечения, вследствие деформации сдвига, поворачиваются друг относительно друга как жесткое целое.

4 Касательные напряжения пропорциональны деформациям сдвига.

Касательные напряжения при кручении вала круглого сечения распределяются по линейному закону пропорционально расстоянию от центра сечения (рис.4.3):

$$t = \frac{M_K \cdot r}{J_p}$$

Условие прочности для круглого сечения записывается в виде:

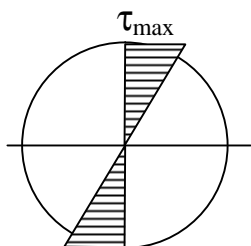
$$t_{\max} = \frac{M_K \cdot r_{\max}}{J_p} \leq R_{cp} \quad (4.3)$$

где M_K - максимальный крутящий момент на участке, J_p - полярный момент инерции на том же участке; r_{\max} - радиус внешней окружности, R_{cp} - расчётное сопротивление срезу.

Учитывая, что $W_p = \frac{J_p}{r_{\max}}$ - полярный момент сопротивления,

условие прочности приобретает следующий вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \leq R_{cp} \quad (4.4)$$



По четвертой теории прочности $R_{cp} \approx 0,6R$.

Относительный угол закручивания - θ зависит от крутящего момента и жесткости поперечного сечения вала.

Рис. 4.3

$$\theta = \frac{M_K}{GJ_p}, \quad (4.5)$$

где GJ_p – жесткость поперечного сечения вала круглого сечения при кручении.

Учитывая, что $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$, определяем величину абсолютного угла закручивания (взаимный угол поворота сечений) $\varphi = \int_0^l \frac{M_K dz}{GJ_p}$.

Если в пределах цилиндрического участка вала длиной l крутящие моменты в сечениях не изменяются, то $\varphi = \frac{M_K l}{GJ_p}$.

Условия жесткости при кручении имеет вид

$$\theta_{\max} = \frac{M_K}{GJ_p} \leq [\theta], \quad (4.6)$$

где $[\theta]$ – допускаемый относительный угол закручивания.

4.4. Кручение вала прямоугольного сечения

Задача об определении касательных напряжений и углов закручивания для вала с некруглым поперечным сечением не может быть решена методами сопротивления материалов. В данном случае гипотеза плоских сечений не применима. Это подтверждают экспериментальные исследования.

В случае кручения вала прямоугольного сечения наибольшие касательные напряжения возникают в серединах длинных сторон прямоугольника, т.е. в точках A и B , рис. 4.4, б. Результаты решения, полученные Сен-Венаном, дают следующие зависимости:

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K}, \quad (4.7)$$

где $W_K = \alpha hb^2$; h – большая сторона; b – малая сторона прямоугольника.

В точке C $\tau_c = \gamma \cdot \tau_{\max}$.

Угол закручивания на длине l находят по формул

$$\varphi = \frac{M_K l}{GJ_K}, \quad (4.8)$$

где $J_K = \beta hb^3$.

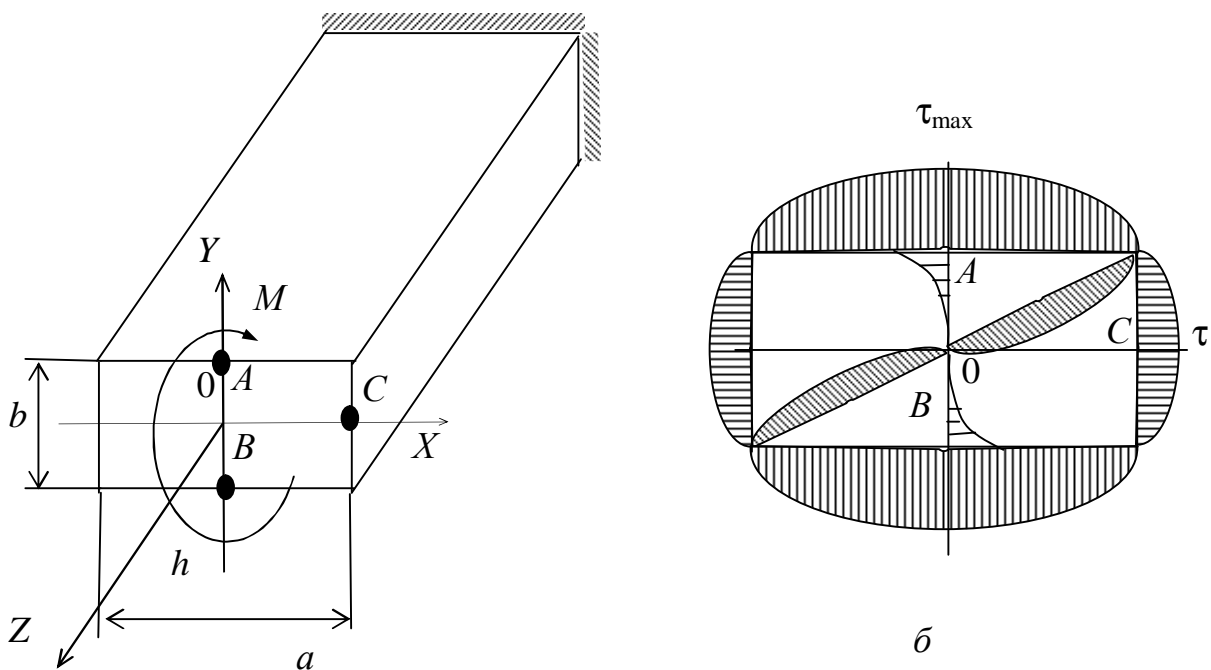


Рис. 4.4

Коэффициенты α , β , γ зависят от отношения h/b и находятся по справочным таблицам (табл. 4.1).

Таблица 4.1

h/b	α	β	γ
1,00	0,208	0,141	1,000
1,50	0,231	0,196	0,859
1,75	0,239	0,214	0,820
2,00	0,246	0,229	0,795
2,50	0,258	0,249	0,766
3,00	0,267	0,263	0,753
4,00	0,282	0,281	0,745
6,00	0,299	0,299	0,743
8,00	0,313	0,313	0,742
10,00	0,313	0,313	0,742
> 10	0,333	0,333	0,742

Условия прочности и жесткости для прямоугольного сечения имеют следующий вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} \leq R_{\text{ср}}, \quad \theta = \frac{M_K}{GJ_K} \leq [\theta]. \quad (4.9)$$

4.5 Пример расчета стального вала на прочность и жесткость

Определить размеры стального вала сплошного круглого, трубчатого и прямоугольного сечения из условий прочности и жесткости для схемы нагружения, изображенной на рис.4.2, б.

Расчётное сопротивление срезу $R_{cp}=126$ МПа, допускаемый относительный угол закручивания $[\theta]=0,5$ град/м. Отношение внутреннего диаметра к наружному у трубчатого сечения $\alpha = \frac{d}{D} = 0,8$, отношение большей стороны прямоугольного сечения

к меньшей $\frac{h}{b} = 2$.

Решение:

Определить размеры вала, удовлетворяющие условиям прочности и жесткости, и округлить их до нормализованного значения по ГОСТ 6636-99 (см. стр. 38).

Для вала постоянного сечения опасным будет сечение С, где $M_K=800$ Н·м имеет наибольшее значение (Рис.4.2,б).

Сплошное круглое сечение

Определение диаметра вала из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \leq R_{cp}, \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16},$$
$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_K \cdot 16}{\pi R_{cp}}} = \sqrt[3]{\frac{800 \cdot 16}{3,14 \cdot 126 \cdot 10^6}} = 3,19 \cdot 10^{-2} \text{ м},$$

из условия жесткости:

$$\theta_{\max} = \frac{M_K}{GJ_p} \leq [\theta], \quad [\theta] = 0,5 \frac{\text{град}}{\text{м}} = 0,0087 \frac{\text{рад}}{\text{м}},$$
$$J_p \geq \frac{M_K}{G[\theta]}, \quad J_p = \frac{\pi D^4}{32},$$

модуль сдвига для стали принимаем $G=8 \cdot 10^4$ МПа.

$$D = \sqrt[4]{\frac{M_K \cdot 32}{\pi G[\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{800 \cdot 32}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,0087}} = 5,85 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Наибольшее значение диаметра получилось из условия жесткости. Из нормального ряда линейных размеров (стр.37) принимаем ближайшее значение $D=60$ мм.

Трубчатое сечение

Из условия прочности $W_p \geq \frac{M_K}{R_{cp}}, \quad W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4),$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{M_K \cdot 16}{\pi R_{cp} (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[3]{\frac{800 \cdot 16}{3,14 \cdot 126 \cdot 10^6 (1 - 0,8^4)}} = 3,80 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Из условия жесткости $J_p \geq \frac{M_K}{G[\theta]}, \quad J_p = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4),$

тогда

$$D \geq \sqrt[4]{\frac{M_K \cdot 32}{\pi G[\theta] (1 - \alpha^4)}} = \sqrt[4]{\frac{800 \cdot 32}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^{10} \cdot 0,0087 \cdot 0,59}} = 6,67 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Принимаем $D = 67$ мм.

Прямоугольное сечение

Из условия прочности

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_K} \leq R_{cp}, \quad W_K = \alpha h b^2 = \alpha \cdot 2b^3, \quad \text{из табл. 4.1}$$

$$\alpha = 0,246,$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{M_K}{2\alpha R_{cp}}} = \sqrt[3]{\frac{800}{2 \cdot 0,246 \cdot 126 \cdot 10^6}} = 2,35 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Из условия жесткости

$$\theta = \frac{M_K}{GJ_K} \leq [\theta], \quad J_K = \beta h b^3, \quad \text{из табл. 5.1 } \beta = 0,229,$$

$$J_K = 2\beta b^4 = 2 \cdot 0,229 b^4,$$

$$b \geq \sqrt[4]{\frac{M_K}{G \cdot 0,458 \cdot [\theta]}} = \sqrt[4]{\frac{800}{8 \cdot 10^{10} \cdot 0,458 \cdot 0,0087}} = 3,98 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Принимаем $b = 40$ мм, $h = 80$ мм.

2. Дать эскиз опасного сечения вала и построить эпюру касательных напряжений, рис. 4.5 а, б, в.

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} = \frac{800 \cdot 16}{3,14 \cdot 0,06^3} = 18,9 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\tau_{\max} = \frac{800 \cdot 16}{3,14 \cdot 0,067^3 \cdot 0,59} = 23 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\tau_{\max}^A = \frac{800}{2 \cdot 0,246 \cdot 0,04^3} = 25,4 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

$$\tau^B = \gamma \cdot \tau_{\max}^A = 0,795 \cdot 25,4 \cdot 10^6 = 20,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$$

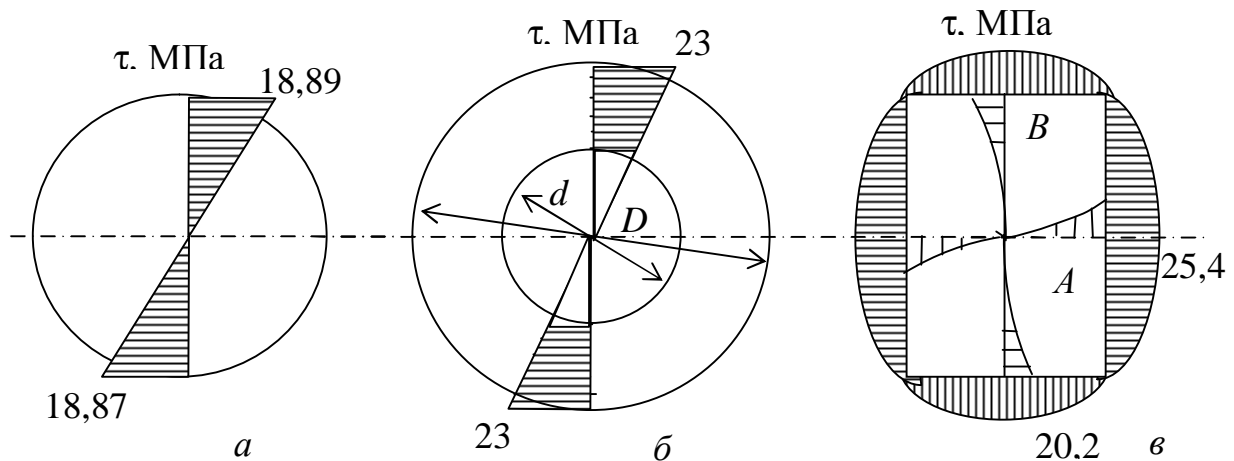


Рис. 4.5

3. Оценить рациональность рассматриваемых сечений.

За критерий рациональности принимается удельный момент сопротивления $w_p = \frac{W_p}{\sqrt{A^3}}$ ($w_k = \frac{W_k}{\sqrt{A^3}}$, для некруглого сечения) с позиции прочности и удельный радиус инерции $j_p = \frac{J_p}{A^2}$ ($j_k = \frac{J_k}{A^2}$, для некруглого сечения) с позиции жесткости.

Чем больше эти параметры, тем рациональнее сечение.

Оценим критерии рациональности с позиции жесткости и прочности.

Сплошное круглое сечение

С позиции прочности:

$$w_p = \frac{W_p}{\sqrt{A^3}} = \frac{pD^3}{16\sqrt{\left(\frac{pD^2}{4}\right)^3}} = \frac{4}{2\sqrt{3,14}} = 0,282 \quad .$$

С позиции жесткости

$$j_p = \frac{J_p}{A^2} = \frac{pD^4}{32\left(\frac{pD^2}{4}\right)^2} = \frac{1}{2 \cdot 3,14} = 0,158.$$

Трубчатое сечение

$$w'_p = \frac{\pi D^3(1-\alpha^4)}{16\sqrt{\left[\frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2)\right]^3}} = \frac{1+\alpha^2}{2\sqrt{\pi(1-\alpha^2)}} = \frac{1,64}{2\sqrt{3,14 \cdot 0,36}} = 0,771$$

$$j'_p = \frac{\pi D^4(1-\alpha^4)}{32\left[\frac{\pi D^2}{4}(1-\alpha^2)\right]^2} = \frac{1+\alpha^2}{2\pi(1-\alpha^2)} = \frac{1,64}{2 \cdot 3,14 \cdot 0,36} = 0,725.$$

Прямоугольное сечение

$$w_K = \frac{W_K}{\sqrt{F^3}} = \frac{2\alpha h^3}{\sqrt{(2 \cdot h^2)^3}} = \frac{\alpha}{\sqrt{2}} = \frac{0,246}{1,41} = 0,174$$

$$j_K = \frac{J_K}{F^2} = \frac{2\beta h^4}{4h^4} = \frac{\beta}{2} = \frac{0,229}{2} = 0,114$$

Отношения критериев рациональности для трубчатого, сплошного круглого и прямоугольного сечений с позиции прочности следующие:

$$w'_p : w_p : w_K = 0,771 : 0,282 : 0,174 = 4,43 : 1,62 : 1$$

С позиции жесткости:

$$j'_p : j_p : j_K = 0,725 : 0,158 : 0,114 = 6,36 : 1,39 : 1.$$

Следовательно, наиболее рациональным сечением из рассмотренных является трубчатое, наименее рациональным – прямоугольное.

Отношение весов $Q = g \cdot A \cdot l$ этих валов

$$Q^a : Q^b : Q^c = \frac{\pi D_{TP}^2}{4} (1 - \alpha^2) : \frac{\pi D_{cнл}^2}{4} : 2b^2 = \frac{3,14 \cdot 6,7^2}{4} \cdot 0,36 : \frac{3,14 \cdot 6^2}{4} : 2 \cdot 4^2 = 0,40 : 0,88 : 1.$$

Из отношения весов следует, что вес вала с трубчатым сечением в 2,5 раза легче вала с прямоугольным сечением и в 2,2 раза легче вала со сплошным круглым сечением.

4. Определить углы закручивания участков вала трубчатого сечения и построить эпюру углов закручивания.

Обозначим площади эпюры крутящих моментов на участках за $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$, которые представляют собою произведение M_K на длину участка (ω_3 – произведение средней линии трапеции на длину участка).

Тогда, принимая за начало отсчета сечение A (рис.4.2, б), получим:

$$\varphi_{B-A} = \frac{\omega_1}{GJ_p} = \frac{200 \cdot 1 \cdot 180^0}{8 \cdot 10^{10} \cdot \frac{3,14}{32} 0,067^4 (1 - 0,8^4) \cdot 3,14} = 0,067^0,$$

$$\varphi_{C-A} = \varphi_{B-A} - \frac{\omega_2}{GJ_p} = \frac{200 \cdot 1}{GJ_p} - \frac{200 \cdot 1}{GJ_p} = 0,$$

$$\varphi_{D-A} = \varphi_{C-A} - \frac{\omega_3}{GJ_p} = -\frac{\frac{800 + 700}{2} \cdot 1 \cdot 180^0 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14^2 \cdot 0,067^4 \cdot 0,59} = -0,251^0$$

$$\varphi_{E-A} = \varphi_{D-A} - \frac{\omega_4}{GJ_p} = -0,251^0 - \frac{500 \cdot 0,5 \cdot 180^0 \cdot 32}{8 \cdot 10^{10} \cdot 3,14^2 \cdot 0,067^4 \cdot 0,59} = -0,404^0$$

На основании расчетов строим эпюру углов закручивания (рис. 4.2б).

На тех участках, где $M_k = \text{const}$, углы закручивания меняются по линейному закону. На тех участках, где есть распределенный крутящий момент постоянной интенсивности, эпюра - φ выражена параболой второго порядка. В тех сечениях, где приложены сосредоточенные крутящие моменты, на эпюре φ наблюдается излом.

4.6 Контрольное задание 5. Расчет вала на прочность и жесткость

Определить размеры стального вала из условий прочности и жесткости. На рис.4.6 приведены схема вала и вид с левого торца, в табл.4.1 даны численные значения.

Таблица 4.1

Цифры шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я		
	схема	l , м	M_1 , Нм	M_2 , Нм	M_3 , Нм	k	h/b	d/D
1	1	0,3	20	50	160	1	2	0,8
2	2	0,4	30	100	240	1,1	1,5	0,6
3	3	0,5	40	150	320	1,2	1,0	0,4
4	4	0,6	50	200	400	1,3	2,5	0,5
5	5	0,7	60	50	350	1,4	2,0	0,6
6	6	0,3	70	100	240	1,5	3,0	0,7
7	7	0,4	80	150	100	1,6	1,0	0,8
8	8	0,5	90	200	320	1,7	1,5	0,4
9	9	0,6	100	220	350	1,8	2,5	0,5
0	10	0,7	110	250	400	1,9	3,0	0,6

Общие данные: $R_{\text{ср}} = 0,6R$; $\theta_{\text{расч}} = 0,5$ град/м; материал: сталь Ст.3.

Указание: скручивающий момент, направление и значение которого на рис.5 не указаны, определяется из условия равновесия вала.

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить в масштабе схему вала, указать численные значения заданных величин.
2. Составить уравнения крутящих моментов по участкам и построить эпюру крутящих моментов.
3. Определить размеры вала, удовлетворяющие условиям прочности и жесткости, и округлить их до нормализованного значения по ГОСТ 6636-69 (приложение).
4. Определить углы закручивания участков вала и построить эпюру углов закручивания.
5. Дать эскиз опасного сечения вала и показать для этого сечения эпюру фактических касательных напряжений.

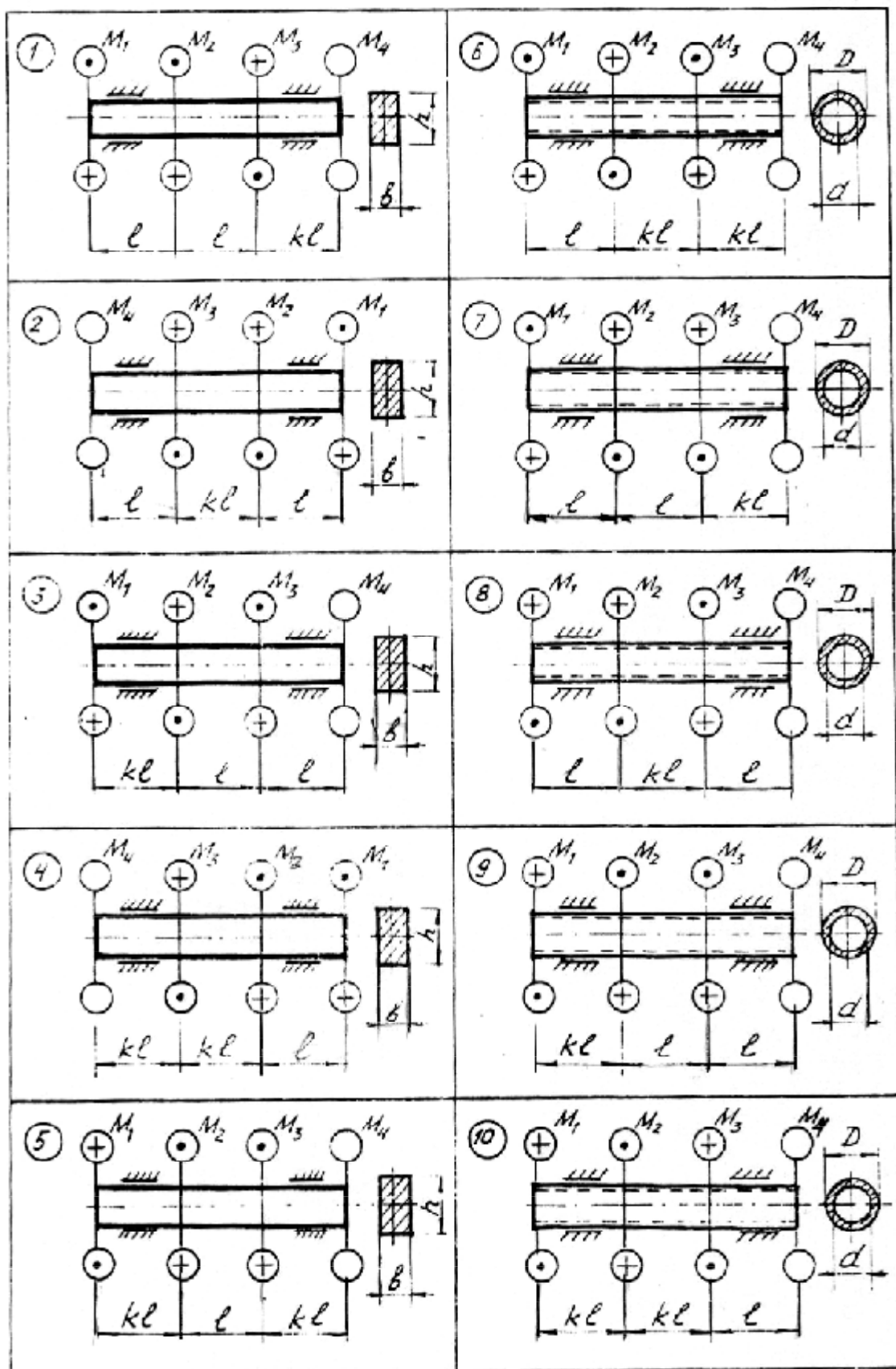


Рис. 4.6

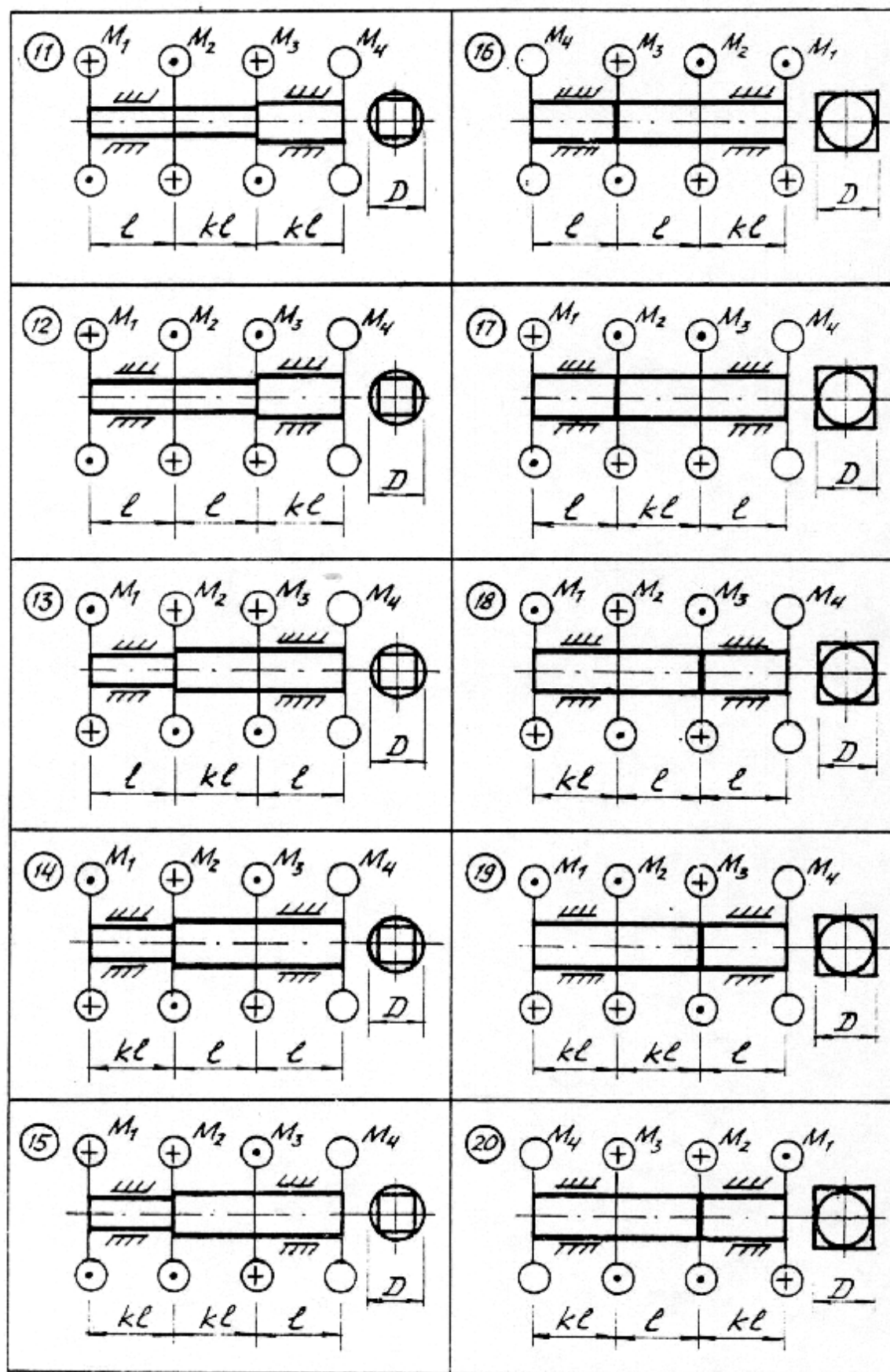


Рис.4.6 (окончание)

Вопросы для самопроверки

Понятие о чистом сдвиге, закон Гука для сдвига, напряженное состояние при чистом сдвиге. Что называется кручением? Эпюра крутящих моментов. Как записывается условие прочности для валов круглого и прямоугольного сечений? Как записывается условие жесткости для валов круглого и прямоугольного сечений? Полярный момент сопротивления и полярный момент инерции для вала круглого (сплошного) и трубчатого сечений.

Эпюра касательных напряжений при кручении валов круглого и прямоугольного сечений.

Понятие о критериях рациональности сечений при кручении.

Литература: [1.] Глава 2, § 2.3; Глава 5, § 5.1-5.3; Глава 11 § 11.5.

[2.] Глава 4.

[3.] Глава 7, § 51-52, 56.

ГЛАВА V. ПЛОСКИЙ ПОПЕРЕЧНЫЙ ИЗГИБ

5.1 Понятие об изгибе

Изгиб – такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникают изгибающие моменты. Если в сечении действует один изгибающий момент, а остальные внутренние силовые факторы отсутствуют, изгиб называют чистым. Однако обычно вместе с изгибающими моментами возникают и поперечные силы. Такой изгиб называют поперечным. Стержень, работающий в основном на изгиб, называется балкой. Если все силы, включая опорные реакции, действуют в плоскости, проходящей через главную центральную ось сечения, то ось изогнутой балки также лежит в этой плоскости, а сам изгиб называют плоским. Стержневая система, элементы которой во всех или в некоторых узлах жестко соединены между собой, называется рамой. Ось такой системы представляет собой ломаную линию. Вертикально расположенные стержни называются стойками, горизонтально – ригелями. Рама называется плоской, если: а) оси стоек и ригелей находятся в одной плоскости; б) все внешние нагрузки действуют в этой же плоскости; в) сечения всех стержней имеют оси симметрии, которые лежат в плоскости нагружения. В настоящем разделе мы будем рассматривать только плоский изгиб.

5.2 Расчет на прочность балок и рам

5.2.1 Определение реакций опор

Внешняя нагрузка обычно задана, поэтому для нахождения всех действующих на балку сил необходимо вычислить реакции опор. Напомним, что наименьшее число связей, обеспечивающее неподвижность балки по отношению к основанию в одной плоскости, равна трем. Уравнения равновесия, из которых определяются опорные реакции, могут быть записаны при этом тремя различными способами:

$$1. \sum P_Z = 0; \sum P_Y = 0; \sum M_A = 0.$$

здесь сумма моментов берется относительно любой точки A , лежащей в плоскости действия сил.

$$2. \sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum P_Z = 0,$$

здесь ось OZ не должна быть перпендикулярна прямой AB .

$$3. \sum M_A = 0; \sum M_B = 0; \sum M_C = 0,$$

в этом случае точки A , B и C не должны лежать на одной прямой.

При работе составных балок, состоящих из нескольких шарнирно соединенных частей, следует иметь в виду, что уравнения равновесия можно записать как для всей системы в целом, так и для каждой из частей в отдельности. В таких задачах общее число опорных реакций больше трех, но зато и независимых уравнений статики также больше. Системы, в которых число уравнений равновесия достаточно для определения всех опорных реакций, называются статически определимыми.

5.2.2 Расчёт балок на прочность

При расчетах на прочность балок необходимо знать, как меняются по длине балки внутренние усилия, и уметь строить их эпюры. Эта задача решается на основе метода сечений, согласно которому поперечная сила в произвольном сечении балки находится как алгебраическая сумма внешних сил, действующих на

отсеченную часть балки. Аналогично определяется изгибающий момент в сечении, который вычисляется как алгебраическая сумма моментов относительно центра тяжести данного сечения всех внешних сил, приложенных к отсеченной части балки. Используются следующие правила знаков:

Изгибающий момент считается положительным, если он вызывает сжатие верхних волокон балки и растяжение нижних, как это показано на верхнем рис. 5.1. На нижнем рисунке показана деформация балки, изгибающий момент в которой отрицателен. Эпюра моментов строится на оси балки, при этом положительные ординаты эпюры откладываются вниз, т.е. в сторону выпуклости оси балки. Поэтому иногда говорят, что эпюра моментов строится на растянутых волокнах балки.

Поперечная сила в сечении считается положительной, если равнодействующая внешних сил, приложенных слева от сечения, направлена вверх, а справа от сечения – вниз. Если же равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена вниз, а справа – вверх, поперечная сила отрицательна, как это показано на рис. 5.2.

При построении эпюр внутренних усилий и их проверке неоценимую помощь оказывает знание дифференциальных зависимостей между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки:

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y; \quad \frac{dQ_y}{dz} = q; \quad \frac{d^2 M_x}{dz^2} = q. \quad (5.1)$$

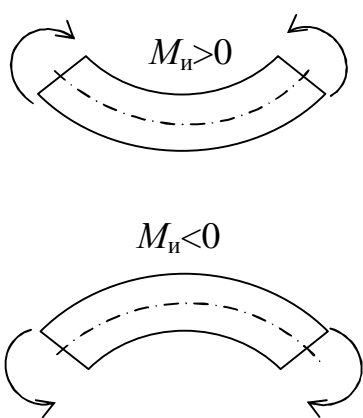


Рис. 5.1

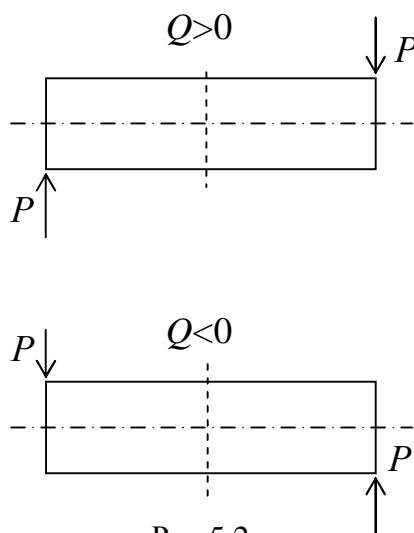


Рис.5.2

Таким образом, поперечная сила представляет собой производную от изгибающего момента по длине балки. Производная же от поперечной силы равна интенсивности внешней

распределенной нагрузки q . Одновременно интенсивность распределенной нагрузки является второй производной от функции изгибающих моментов. Из приведенных соотношений можно сделать некоторые общие выводы о характере эпюр внутренних усилий при изгибе.

Если балка нагружена равномерно распределенной нагрузкой, то, очевидно, Q_y будет линейной, а M_x – квадратичной функцией координаты z . Если балка нагружена сосредоточенными силами и моментами ($q=0$), то поперечная сила будет постоянной, а момент – линейной функцией координаты z . В точках приложения сосредоточенных сил эпюра Q_y претерпевает скачок на величину внешней силы, а на эпюре M_x возникает излом, поскольку производные момента слева и справа от этих точек имеют различные значения. В точках приложения сосредоточенных моментов эпюра M_x претерпевает скачок на величину внешнего момента. В сечениях, в которых поперечная сила Q_y равна нулю на эпюре M_x наблюдается максимум (при $q<0$) или минимум (при $q>0$). Распределенная нагрузка, направленная вверх положительна.

Имея эпюры внутренних усилий, несложно выбрать опасные сечения и приступить к расчету балки на прочность. Наибольший интерес при этом представляют нормальные напряжения, которые связаны с изгибающим моментом следующим образом:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y, \quad (5.2)$$

где J_x – момент инерции сечения относительно главной центральной оси, перпендикулярной плоскости нагружения, y – расстояние от этой оси до рассматриваемой точки сечения.

Наибольшего значения напряжение σ достигает в точках сечения, наиболее удаленных от нейтральной линии:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}. \quad (5.3)$$

Отношение $\frac{J_x}{|y|_{\max}}$ называется моментом сопротивления сечения при изгибе и обозначается W_x . Таким образом, для обеспечения прочности балки необходимо потребовать, чтобы в опасном сечении максимальное напряжение не превышало расчетного сопротивления:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x} \leq R. \quad (5.4)$$

Здесь $|M_X|$ - абсолютная величина изгибающего момента в опасном сечении, R - расчётное сопротивление материала балки.

Наиболее рациональными являются такие формы поперечных сечений, для которых с наименьшим расходом материала обеспечивается наибольшая величина момента сопротивления W_x . Очевидно, что для этого необходимо распределять основную часть площади сечения как можно дальше от нейтральной оси. В качестве критерия рациональности принимается удельный момент сопротивления $w_x = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}}$. Чем больше этот параметр, тем рациональнее сечение. Из этих соображений появились тонкостенные сечения в форме стандартных двутавров и швеллеров, которые оказались значительно экономичнее сечений другой формы.

Однако, если для сплошных сечений прочность определяется исключительно нормальными напряжениями, то для тонкостенных необходимы дополнительные проверки прочности. Это связано с тем, что в тонкостенных профилях разрушение при поперечном изгибе может произойти срезом за счет появления значительных по величине касательных напряжений, достигающих максимума на центральной оси сечения. Поскольку ширина сечения в этом месте у стандартных профилей невелика, в число опасных необходимо включить сечение, в котором поперечная сила достигает наибольшего по модулю значения.

Касательные напряжения находятся по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q_Y S_X^{omc}}{J_X \delta}, \quad (5.5)$$

где S_X^{omc} - статический момент части сечения, отсеченной горизонтальной плоскостью, проходящей через слой, в котором вычисляется напряжение; δ – ширина этого слоя.

Применительно к двутавровому сечению условие прочности по наибольшим касательным напряжениям принимает вид:

$$|\tau|_{\max} = \frac{|Q_Y|_{\max} S_X^*}{J_X \cdot d} \leq R_{cp} \quad (5.6)$$

Здесь $|Q_Y|_{\max}$ - наибольшее по модулю значение поперечной силы; S_X^* - статический момент половины сечения относительно

оси x (приведен в справочных таблицах для стандартных профилей); R_{cp} - расчётное сопротивление срезу материала балки.

Если условие прочности по касательным напряжения не выполняется, то необходимо изменить номер двутавра и повторить расчет. Это делается последовательным перебором стандартных сечений до тех пор, пока условие прочности по касательным напряжениям не будет выполнено. Условие прочности по нормальным напряжениям при этом можно не проверять, поскольку оно заведомо выполняется.

Но даже выполнение обоих условий прочности при использовании тонкостенных профилей не избавляет от опасности разрушения. Для двутавра существуют опасные точки, расположенные в месте перехода от полки к стенке. Хотя нормальные и касательные напряжения здесь не достигают максимума, но они достаточно большие и действуют одновременно. Следует иметь в виду, что обеспечить прочность в этих точках необходимо для всех сечений, в которых одновременно велики изгибающий момент и поперечная сила. Причем эти сечения могут не совпадать с принятыми ранее в качестве опасных. Напряженное состояние в этих точках является плоским, что приводит к необходимости использования теорий прочности. Поведение изотропного пластичного материала наилучшим образом описывается в этом случае третьей или четвертой теориями прочности:

$$\sigma_{\text{Э}}^{\text{III}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R, \quad \sigma_{\text{Э}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R \quad (5.7)$$

Здесь $\sigma_{\text{Э}}^{\text{III}}$ и $\sigma_{\text{Э}}^{\text{IV}}$ - эквивалентные напряжения по соответствующим теориям, сравниваемые с расчётным сопротивлением; σ , τ – нормальное и касательное напряжение в опасной точке:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y_{\text{оп}}, \quad \tau = \frac{Q_y S_x^{\text{омс}}}{J_x \cdot d}.$$

Здесь $y_{\text{оп}}$ – координата опасной точки, d – толщина стенки, $S_x^{\text{омс}}$ - статический момент площади полки двутавра относительно оси x . Размеры полки двутавра, форма которой близка к прямоугольнику, приведены в справочных таблицах. В свою очередь, статический момент прямоугольника относительно оси x легко вычисляется как произведение его площади на расстояние от оси x до центра тяжести прямоугольника.

5.2.3 Расчет рамы на прочность

В сечениях стержней плоской рамы возникают три внутренних усилия: продольная сила N , поперечная сила Q , изгибающий момент M относительно оси, перпендикулярной плоскости изгиба (плоскости нагружения) рамы. Поэтому в плоских рамах строят три эпюры – N , Q и M .

Правила знаков для нормальных и поперечных сил остаются такими же, как в балках. Правило знаков для изгибающего момента обычно не вводят, но ординаты эпюры M откладывают со стороны растянутых волокон, что позволяет судить по эпюре M о форме изгиба и действии изгибающих моментов.

В рамах следует проводить проверку статического равновесия узлов: сумма моментов, действующих во всех сечениях стержней, составляющих данный узел, равна нулю. Из условия равновесия узла следует правило: если узел соединяет два стержня, то при переходе через него момент не изменяется (или изменяется на величину внешнего сосредоточенного момента, приложенного к этому узлу).

Расчет рам на прочность обычно производится с учетом напряжений только от изгибающего момента $\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} \leq R$.

Влияние продольной силы, как правило, несущественно. Оценить степень влияния напряжений от продольной силы можно, вычислив их по известной формуле $\sigma = \frac{N}{A}$ и сравнив с напряжением

от момента $|M|_{\max}$. При необходимости сечение рамы следует увеличить так, чтобы выполнялось условие прочности

$|\sigma|_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} + \frac{|N|}{A} \leq R$, где N берется в том же сечении, где действует $|M|_{\max}$.

5.3 Пример расчета балки на прочность по нормальным напряжениям

Для заданной балки из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры различных по форме поперечных сечений: двутавра, прямоугольника (с соотношением сторон $\frac{h}{b}=1,8$), квадрата, круга, кольца (при $\frac{d}{D}=0,8$) и оценить их рациональность.

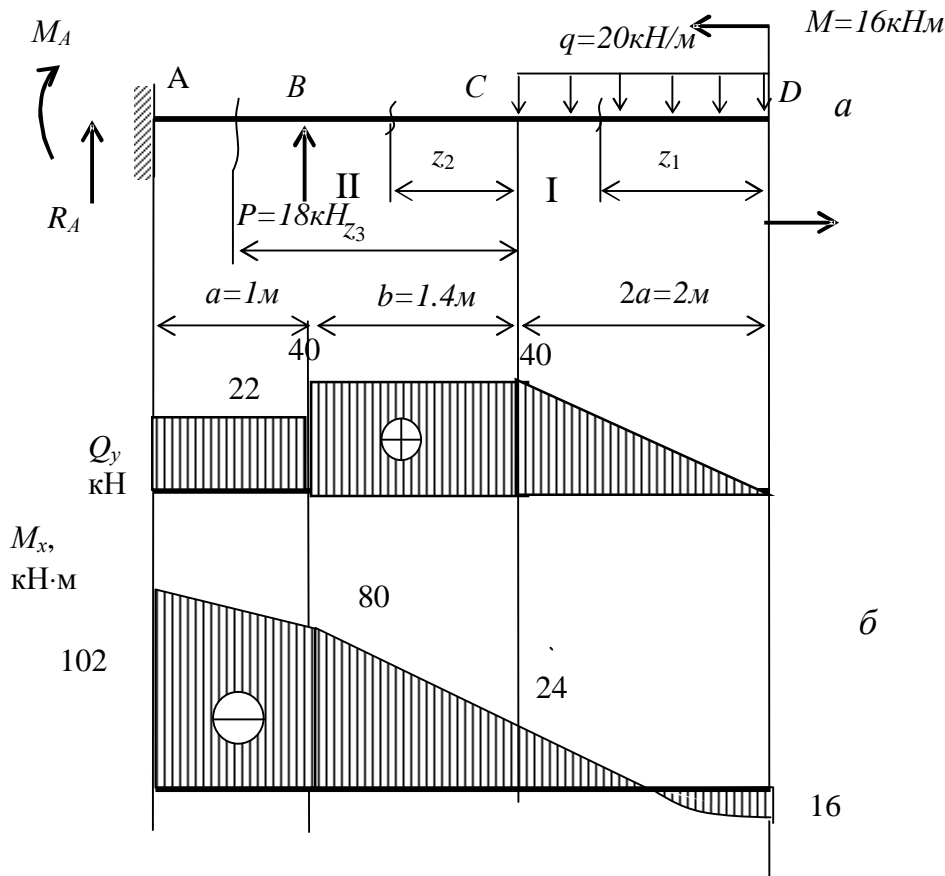


Рис. 5.3

$a=1,0$ м, $b=1,4$ м, $P=18$ кН, $q=20$ кН/м, $M=16$ кН·м, $R=210$ МПа

1. Составить уравнения поперечных сил и изгибающих моментов по участкам и построить их эпюры.

Запишем уравнения статики и определим опорные реакции:

$$\sum M_A = 0: -M_A + P \cdot a - q \cdot 2 \cdot a \cdot (b + 2 \cdot a) + M = 0;$$

$$M_A = -102 \text{ [кН} \cdot \text{м]};$$

$$\sum P_Y = 0: R_A + P - q \cdot 2 \cdot a = 0; R_A = 22 \text{ [кН]}.$$

Проверка: $\sum M_B = 0: -M_A - R_A \cdot a - q \cdot 2 \cdot a \cdot (a + b) + M = 0.$

Выражения для внутренних усилий Q_y , M_x получим с помощью метода сечений. Поперечная сила в произвольном сечении балки равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения. При этом поперечная сила считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена вверх, а справа – вниз, т.е.

стремится сдвинуть левую отсеченную часть балки относительно правой вверх.

Изгибающий момент в сечении балки равен алгебраической сумме моментов относительно данного сечения всех внешних сил, приложенных к отсеченной части. Момент считается положительным, если сжатые волокна находятся в верхней части сечения балки.

На рис. 5.3, *a* показаны выделенные участки балки. Запишем для каждого из них выражения внутренних усилий и найдем их значения на границах участков.

$$1. 0 \leq z_1 \leq 2,0 \text{ м}$$

$$Q_Y = qz_1 = 20z_1; Q_Y(0) = 0; Q_Y(2) = 40 \text{ [к Н]}.$$

$$M_X = M - qz_1^2 = 16 - 10z_1^2; M_X(0) = 16 \text{ [к Н} \cdot \text{м]};$$

$$M_X(2) = 40 \text{ [к Н} \cdot \text{м]}.$$

$$2. 0 \leq z_2 \leq 1,4 \text{ м}$$

$$Q_Y = q \cdot 2a = 40 \text{ [к Н]};$$

$$M_X = M - q \cdot 2a \cdot (z_2 + a) = -24 - 40z_2 \text{ [к Н} \cdot \text{м]};$$

$$M_X(0) = -24 \text{ [к Н} \cdot \text{м]}; M_X(1,4) = -80 \text{ [к Н} \cdot \text{м]}.$$

$$3. 1,4 \leq z_3 \leq 2,4 \text{ м}$$

$$Q_Y = q \cdot 2a - P = 22 \text{ [к Н]}.$$

$$M_X = M - q \cdot 2a \cdot (z_3 + a) + P \cdot (z_3 - b) = -49,2 - 22z_3;$$

$$M_X(1,4) = -80 \text{ [к Н} \cdot \text{м]};$$

$$M_X(2,4) = -102 \text{ [к Н} \cdot \text{м]}.$$

Построение эпюр Q_y , M_x проводится по участкам на основе полученных уравнений. Положительные значения ординат эпюры Q_y откладываются выше оси, отрицательные – ниже. Положительные значения ординат эпюры M_x откладываются ниже оси, отрицательные – выше. На первом участке поперечная сила линейно зависит от координаты, возрастая от нуля в начале участка до 40кН в конце. Эпюра Q_y на этом участке ограничена отрезком прямой, проходящей через указанные значения. Изгибающий момент имеет на данном участке уравнение квадратной параболы с вершиной в сечении $z_1=0$, т.е. там, где равна нулю поперечная сила, являющаяся производной от M_x по координате z . Эпюра изгибающего момента ограничена кривой второго порядка, проходящей через точки с координатами 16 кН·м и –24 кН·м, соответственно на правой и левой границах участка. Парабола

имеет выпуклость, направленную в сторону распределенной нагрузки.

На втором и третьем участках поперечная сила имеет постоянные значения, соответственно 40 кН и 22 кН. Изгибающий момент меняется по линейному закону – эпюра M_x ограничена на участках отрезками прямых, проходящих через точки с ординатами -24 кН·м, -80 кН·м на втором, и -80 кН·м, -102 кН·м на третьем участках. Результаты построения эпюр Q_y , M_x приведены на рис. 5.3 а, б.

Наиболее опасным является сечение A , в котором изгибающий момент достигает наибольшего по модулю значения $M_x = 102$ кН·м.

2. Произвести проверку с помощью дифференциальных зависимостей.

Построению эпюры проводится на основе известных дифференциальных зависимостей между Q_y , M_x и интенсивностью распределенной нагрузки q (5.1).

В нашем случае на первый участок действует распределенная нагрузка $q = \text{const}$, следовательно, поперечная сила должна быть линейной функцией координаты z_1 , а изгибающий момент меняться по закону квадратной параболы. Эпюра изгибающих моментов не имеет экстремумов, поскольку эпюра ее производной – Q_y не пересекает ось. Второй и третий участки свободны от распределенной нагрузки, т.е. производная функции Q_y тождественно равна нулю, следовательно, сама поперечная сила должна быть постоянна в границах каждого участка, а эпюра изгибающего момента описывается прямой наклонной линией.

В тех сечениях, где балка нагружена сосредоточенными внешними силами, на эпюре Q_y должно скачком меняться значение ординаты на величину этой силы с учетом ее направления. В нашем случае это происходит в сечении A , где возникает реакция R_A , и в сечении B , где приложена нагрузка P . На эпюре M_x аналогичные скачки имеют место в сечениях A и D , где действует сосредоточенные внешние моменты. Анализируя все перечисленное, делаем вывод о правильности построения эпюр.

3. Подобрать размеры указанных выше сечений из условия прочности по нормальным напряжениям.

$$\text{Из условия прочности при изгибе} \quad |s|_{\max} = \frac{|M_x|_{\max}}{W_x} \leq R$$

определим требуемое значение момента сопротивления сечения балки:

$$W_x \geq \frac{|M_x|_{\max}}{R} = \frac{102 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 486 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 486 \text{ см}^3.$$

Определим размеры указанных сечений, обеспечивающие прочность балки.

1) Подбираем по ГОСТ 8239-72 номер двутавра, момент сопротивления которого наиболее близок к расчетному. В данном случае подходит двутавр № 30а, у которого $W_x=518 \text{ см}^3$, площадь сечения

$$A=49 \text{ см}^2.$$

Определим наибольшее значение возникающих при этом напряжений:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{102 \cdot 10^3}{743 \cdot 10^{-6}} = 137,3 \cdot 10^6 \text{ Па} = 137,3 \text{ МПа} < R.$$

2) Определяем размеры прямоугольного сечения с отношением сторон $h/b = 1,8$.

$$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{b \cdot (1,8b)^2}{6} = 0,54b^3;$$

$$0,54b^3 \geq 486 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{486 \cdot 10^{-6}}{0,54}} = 0,0965 \text{ м}.$$

Окончательно выбирает размер по ГОСТ 6636-69: $b=100 \text{ мм}$, $h=180 \text{ мм}$, $A=bh=180 \text{ см}^2$.

Вычислим наибольшее напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{102 \cdot 10^3}{0,54 \cdot (0,10)^3} = 189 \cdot 10^6 \text{ Па} = 189 \text{ МПа} < R.$$

3) Определим размер квадратного сечения.

$$W_x = \frac{a^3}{6}; \quad \frac{a^3}{6} \geq 486 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3; \quad a \geq \sqrt[3]{6 \cdot 486 \cdot 10^{-6}} = 0,143 \text{ м}.$$

Окончательно: $a = 150 \text{ мм}$, $A = a^2 = 225 \text{ см}^2$.

Определим наибольшее напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{102 \cdot 10^3 \cdot 6}{0,15^3} = 181 \cdot 10^6 \text{ Па} = 181 \text{ МПа} < R.$$

4) Определим размеры круглого сечения.

$$W_X = \frac{\pi d^3}{32}; \quad \frac{\pi d^3}{32} = 486 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 486 \cdot 10^{-6}}{3,14}} = 0,170 \text{ м}.$$

Принимаем по ГОСТу $d=180\text{мм}$, площадь сечения

$$A = \frac{\pi d^2}{4} = 254 \text{ см}^2.$$

Определим наибольшее напряжение:

$$|\sigma|_{\max} = \frac{102 \cdot 10^3}{\frac{3,14}{32} \cdot (0,18)^3} = 179 \cdot 10^6 \text{ Па} = 179 \text{ МПа} < R.$$

5) Определим размеры кольцевого сечения с отношением внутреннего и внешнего диаметров $\alpha = \frac{d}{D} = 0,8$.

$$W_X = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4); \quad \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \geq 486 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3;$$

$$D \geq \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 486 \cdot 10^{-6}}{3,14 \cdot (1 - 0,8^4)}} = 0,203 \text{ м}.$$

Принимаем $D=225 \text{ мм}$, $d=180 \text{ мм}$.

Площадь сечения $A = \frac{\pi D^2}{4} (1 - \alpha^2) = 143 \text{ см}^2$.

Вычислим наибольшее напряжение:

$$\sigma_{\max} = \frac{102 \cdot 10^3}{\frac{3,14}{32} \cdot (0,225)^3 \cdot (1 - 0,8^4)} = 155 \cdot 10^6 \text{ Па} = 155 \text{ МПа} < R$$

4. Оценить рациональность подобранных сечений.

$$\S \text{ двутавр: } w_x = \frac{W_x}{\sqrt{A^3}} = \frac{518}{\sqrt{49^3}} = 1,47,$$

$$\S \text{ прямоугольник: } \frac{540}{\sqrt{180^3}} = 0,224,$$

$$\S \text{ квадрат: } \frac{562,5}{\sqrt{225^3}} = 0,167,$$

$$\S \text{ круг: } \frac{572}{\sqrt{254^3}} = 0,141,$$

$$\S \text{ кольцевое сечение: } \frac{660}{\sqrt{143^3}} = 0,386.$$

Как видим, наиболее рациональными при изгибе являются тонкостенные сечения: двутавр, кольцевое сечение.

5. Построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении (для двутавра, кольца).

Напряжения в опасном сечении меняются по линейному закону:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y,$$

достигая максимума в наиболее удаленных от оси точках.

На рис.5.4 показаны эпюры напряжений для указанных сечений.

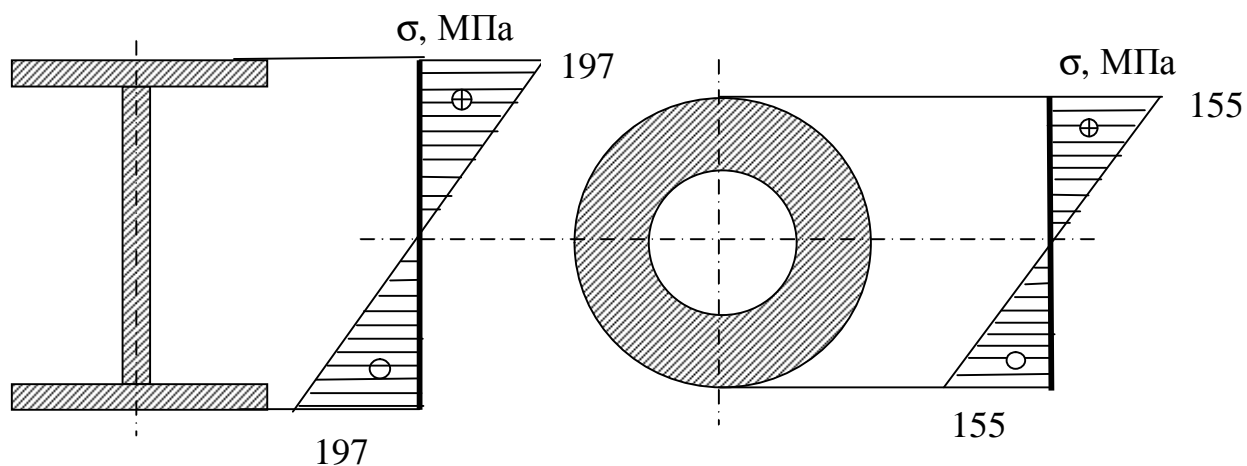


Рис.5.4

5.4 Пример расчета на прочность двутавровой балки

Для заданной стальной балки из условия прочности подобрать номер двутавра по ГОСТ 8239-72 и произвести полную проверку прочности.

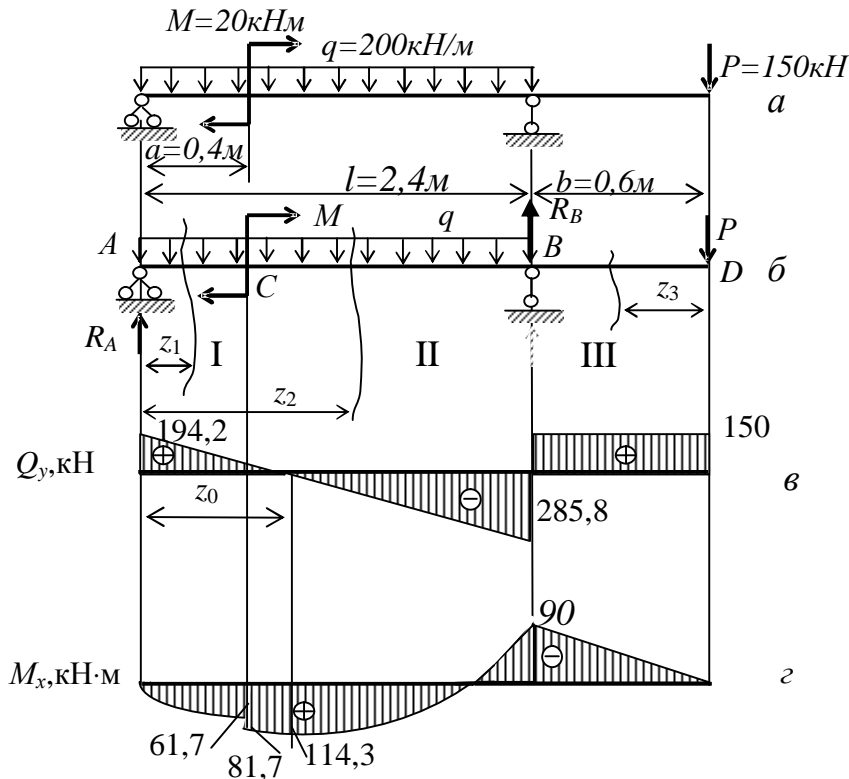


Рис. 5.5

$a=0,4\text{ м}$, $b=0,6\text{ м}$, $l=2,4\text{ м}$, $P=150\text{ кН}$, $q=200\text{ кН/м}$, $M=20\text{ кН·м}$, $R=210\text{ МПа}$
 $R_{cp}=126\text{ МПа}$.

1. Составить уравнение поперечных сил и изгибающих моментов по участкам и построить их эпюры.

Запишем уравнения статики и определим опорные реакции, показанные на рис. 5.5, б.

$$\sum M_A = 0: -q \cdot \frac{1^2}{2} - M + R_B \cdot 1 - P \cdot (1 + b) = 0; R_B = 435,8 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0: -R_A \cdot 1 + q \cdot \frac{1^2}{2} - M - P \cdot b = 0; R_A = 194,2 \text{ кН}.$$

Реакции получились положительные, это означает, что их направление выбрано верно. Для проверки спроектируем все силы на вертикальную ось:

$$\sum P_Y = R_A - q \cdot 1 + R_B - P = 194,2 - 200 \cdot 2,4 + 435,8 - 150 = 0.$$

Выделим и обозначим участки балки так, как это показано на рис. 5.5, б. Используя уже известный метод сечений, для каждого участка запишем выражения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x и вычислим их значения в характерных сечениях.

$$1. 0 \leq z_1 \leq 0,4 \text{ м}$$

$$Q_Y = R_A - q \cdot z_1 = 194,2 - 200z_1; Q_Y(0) = 194,2 \text{ кН};$$

$$Q_Y(0,4) = 114,2 \text{ кН}.$$

$$M_X = R_A \cdot z_1 - q \frac{z_1^2}{2} = 194,2z_1 - 100z_1^2; M_X(0) = 0;$$

$$M_X(0,4) = 61,7 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$2. 0,4 \leq z_2 \leq 2,4 \text{ м}$$

$$Q_Y = R_A - q \cdot z_2 = 194,2 - 200z_2; Q_Y(0,4) = 114,2 \text{ кН};$$

$$Q_Y(2,4) = -285,8 \text{ кН}.$$

Значения поперечной силы на левой и правой границах участка имеют разные знаки, следовательно, имеется такое значение координаты z_0 , при котором Q_y обращается в нуль, а момент M_x имеет экстремум. Найдём величину z_0 :

$$R_A - q \cdot z_0 = 194,2 - 200z_0 = 0, \quad z_0 = 0,971 \text{ м};$$

$$M_X = M + R_A \cdot z_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = 20 + 194,2z_2 - 100z_2^2.$$

$$M_X(0,4) = 81,7 \text{ кН} \cdot \text{м}; M_X(2,4) = -90,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_X(0,971) = M_X^{\max} = 114,3 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$$3. 0 \leq z_3 \leq 0,6 \text{ м}$$

$$Q_Y = P = 150 \text{ кН};$$

$$M_X = -P \cdot z_3 = -150z_3; M_X(0) = 0; M_X(0,6) = -90 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

По вычисленным значениям Q_y , M_x построим их эпюры. При этом будем учитывать вид этих функций, а также дифференциальные зависимости между ними и интенсивностью

распределенной нагрузки q . Результат построения показан на рис. 5.5 в, г.

2. Определить положение опасных сечений и показать опасные точки на чертеже балки.

К опасным, прежде всего, относится сечение, в котором изгибающий момент принимает наибольшее по модулю значение $|M_X|_{\max}$, т.е. сечение, расположенное на расстоянии z_0 от левого торца балки. Кроме того, опасным может оказаться сечение B , в котором наибольшего значения достигает поперечная сила. К тому же, в данном сечении действует изгибающий момент, лишь немного уступающий максимальному. В первом сечении опасными будут точки, наиболее удаленные от оси – на рис. 5.6, а они помечены цифрой 1. В этих точках нормальные напряжения достигают наибольшей величины. В сечении B имеется два типа опасных точек. В точках на оси сечения, помеченных на рисунке цифрой 2, наибольшего значения достигают касательные напряжения, что может привести к разрушению срезом. В опасных точках третьего типа (см. рис. 5.6, а) ни нормальные, ни касательные напряжения не являются максимальными, однако их совместное действие может оказаться опасным.

3. Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать двутавровое сечение.

Определим минимальную величину момента сопротивления из указанного условия прочности в опасном сечении:

$$s_{\max} = \frac{|M_X|_{\max}}{W_X} \leq R, \quad W_X \geq \frac{|M_X|_{\max}}{R} = \frac{114,3 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 544 \cdot 10^{-6} [\text{м}^3].$$

Наилучшим образом подходит двутавр №33 с моментом сопротивления $W_x=597 \text{ см}^3$, моментом инерции $J_x=9840 \text{ см}^4$, статическим моментом половины сечения $S_x=339 \text{ см}^3$ и толщиной стенки $d=7,0 \text{ мм}$.

4. Произвести проверку прочности по максимальным касательным напряжениям и при необходимости усилить сечение.

Поперечная сила достигает наибольшего значения

$$|Q_y|_{\max} = 285,8 \text{ кН над правой опорой (сечение } B).$$

Найти максимальное касательное напряжение:

$$t_{\max} = \frac{|Q_y|_{\max} \cdot S_x^*}{J_x d} = \frac{285,8 \cdot 10^3 \cdot 339 \cdot 10^{-6}}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 7,0 \cdot 10^{-3}} = 141 \cdot 10^6 \text{ Па} > R_{\text{сп}} = 126 \text{ МПа}.$$

Условие прочности не выполняется, следовательно, необходимо увеличить номер двутавра. Для следующего по ГОСТу двутавра №36 $W_x=734 \text{ см}^3$, $J_x=13380 \text{ см}^4$, $S_x^*=423 \text{ см}^3$, $d=7,5 \text{ мм}$.

Вновь вычислим наибольшее касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{235,8 \cdot 10^3 \cdot 423 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}} = 120,5 \cdot 10^6 \text{ Па} < R_{\text{ср}}.$$

Условие прочности по максимальным касательным напряжениям выполняется.

5. С учетом совместного действия нормальных и касательных напряжений, используя четвертую теорию прочности, проверить прочность балки и при необходимости подобрать новое сечение. Вычислить нормальное и касательное напряжения в сечении B в точках, помеченных на рис. 5.6, a цифрой 3.

Расстояние от этих точек до оси $y_{(3)} = h/2 - t = 180 - 12,3 = 167,7 \text{ мм}$. Здесь h – высота сечения, t – толщина полки. Нормальное напряжение:

$$\sigma_{(3)} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{(3)} = \frac{90 \cdot 10^3}{13380 \cdot 10^{-8}} \cdot 0,1677 = 113 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Касательное напряжение можно найти по формуле:

$$\tau_{(3)} = \frac{Q_y S_y^{\text{омс}}}{J_x d}.$$

Здесь $S_x^{\text{омс}}$ – статический момент части сечения, отсеченной горизонтальной плоскостью, проходящей через точку 3. Эту часть сечения можно без большой погрешности считать прямоугольником размерами $b \times t$, где t – уже упоминавшаяся толщина полки, а $b=155 \text{ мм}$ – ширина полки указанного двутавра. Вычислим статический момент отсеченной части сечения, как произведение ее площади $A_{\text{омс}}$ на расстояние от оси x до центра тяжести прямоугольника.

$$y_c = \frac{h}{2} - \frac{t}{2} = 174 \text{ мм}.$$

$$S_x^{\text{омс}} = A_{\text{омс}} \cdot y_c = b \cdot t \cdot \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) = 300 \cdot 10^{-6} [\text{м}^3].$$

Определим касательное напряжение в точке 3.

$$\tau_{(3)} = \frac{285,8 \cdot 10^3 \cdot 300 \cdot 10^{-6}}{13380 \cdot 10^{-8} \cdot 7,5 \cdot 10^{-3}} = 85,4 \cdot 10^6 \text{ Па.}$$

В соответствии с четвертой теорией прочности вычислим эквивалентное напряжение в точке 3 сечения *B* и сравним его с расчётным сопротивлением.

$$\sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}} = \sqrt{\sigma_{(3)}^2 + 3 \cdot \tau_{(3)}^2} = \sqrt{111,3^2 + 3 \cdot 85,4^2} = 186 \text{ МПа} < R.$$

Таким образом, двутавр № 36 обеспечивает прочность балки.

6. В опасном сечении построить эпюры нормальных и касательных напряжений.

Эпюры напряжений построим в сечении *B*. Нормальные напряжения при изгибе линейно зависят от расстояния до оси балки, принимая в точке 3 значение 113 МПа.

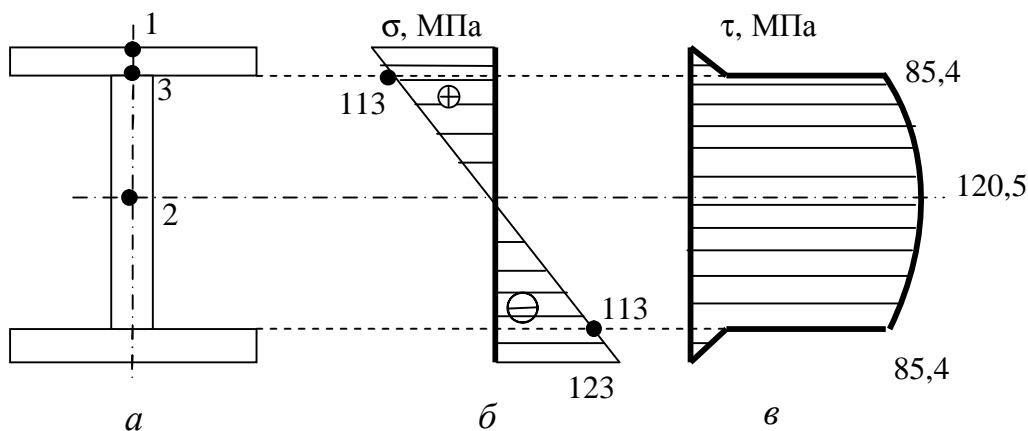


Рис. 5.6

У верхней и нижней кромок сечения напряжения равны:

$$\sigma = \frac{M_X}{W_X} = \frac{90 \cdot 10^3}{734 \cdot 10^{-6}} = 123 \cdot 10^6 \text{ П} \quad a = 123 \text{ МПа.}$$

На рис. 5.6,б показана эпюра нормальных напряжений σ . Поскольку момент в опасном сечении отрицательный, верхняя часть сечения находится в растянутом состоянии, т.е. напряжения положительны.

Формула Журавского достоверно описывает распределение напряжений лишь в стенке двутавра, поэтому приведенная на рис. 5.6, в эпюра τ построена для центральной части сечения.

Наибольшего значения 120,5 МПа касательное напряжение достигает на оси сечения.

5.5 Пример расчёта балки из неравнопрочного материала

Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать размеры заданного типа сечения балки.

Материал: чугун Сч 12-28.

Схема балки и тип сечения приведены на рисунке 5.7.

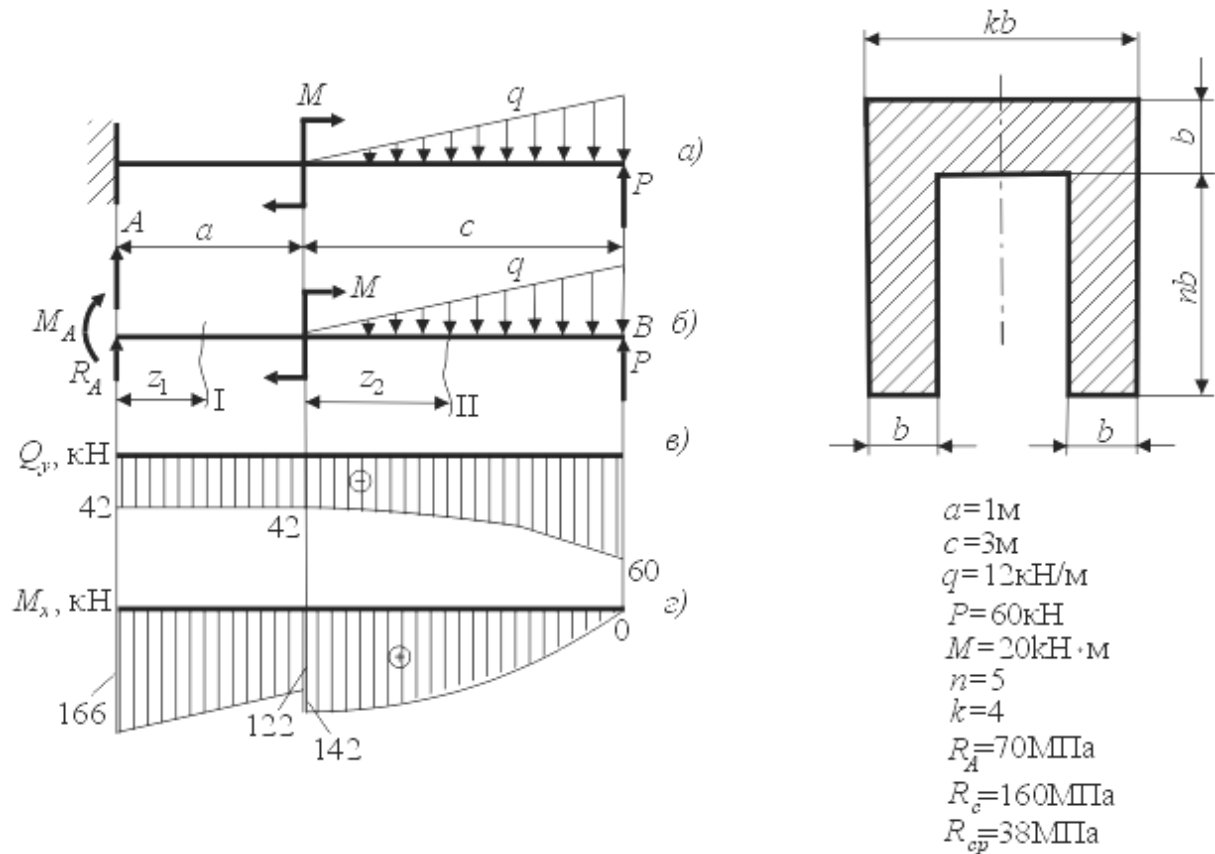


Рис.5.7

1. Составить уравнения поперечных сил и изгибающих моментов по участкам и построить их эпюры.

Запишем, как и в ранее рассмотренных задачах, уравнения статики и найдем опорные реакции

$$\sum m_A=0: \quad M_A - M - \frac{q \cdot c}{2} \left(a + \frac{2}{3}c\right) + P(a+c) = 0$$

$$M_A = 60 \cdot 4 - 20 - 18 \cdot 3 = 166 [\text{кН} \cdot \text{м}]$$

$$\sum P_y=0: \quad R_A - \frac{q \cdot c}{2} + P = 0; \quad R_A = -42 \text{ кН}$$

Знак минус означает, что реакция R_A направлена в противоположную сторону, т. е. вниз. Для контроля правильности

найденных реакций убедимся, что сумма моментов относительно сечения В равна нулю.

$$\sum m_B = 0: -M_A - R_A(a+c) + M + \frac{q \cdot c}{2} \cdot \frac{c}{3} = -166 + 42 \cdot 4 - 20 + 18 = 0$$

Силовые участки выделим так, как это показано на рис. 5.7.б. Для каждого из участков с помощью метода сечений запишем выражения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x , а также вычислим их значения на границах участков.

Для правого участка получим:

$$I. \quad 0 \leq Z_1 \leq 1 \text{ м}$$

$$Q_y = R_A = -42 \text{ кН}$$

$$M_x = M_A + R_A \cdot Z_1 = 166 - 42 \cdot Z_1, \quad M_x(0) = 166 \text{ кНм}; \quad M_x(1) = 124 \text{ кНм}.$$

На втором участке действует распределенная нагрузка, интенсивность которой линейно возрастает от нуля в начале участка до значения q в конце.

Обозначим интенсивность в произвольном сечении Z_2 через q_z и выразим ее величину:

$$q_z = q \cdot \frac{Z_2}{c}$$

Внутренние усилия на этом участке примут следующий вид:

$$II. \quad 0 \leq Z_2 \leq 3 \text{ м}$$

$$Q_y = R_A - \frac{q_z \cdot Z_2}{2} = R_A - \frac{q \cdot Z_2^2}{2 \cdot c} = -42 - 2 \cdot Z_2^2;$$

$$Q_y(0) = -42 \text{ кН}; \quad Q_y(3) = -60 \text{ кН}.$$

$$M_x = M_A + R_A(Z_1 + a) + M - \frac{q_z \cdot Z_2}{2} \cdot \frac{Z_2}{3} = 166 - 42 \cdot Z_2 - 42 + 20 - \frac{2 \cdot Z_2^3}{3};$$

$$M_x(0) = 144 \text{ кНм}; \quad M_x(3) = 0 \text{ кНм}.$$

При записи слагаемых от распределенной нагрузки учтено, что ее равнодействующая численно равна площади эпюры интенсивности и проходит через ее центр тяжести. В нашем случае эпюра интенсивности представляет собой треугольник высотой q_z с основанием Z_2 , центр тяжести которого находится на расстоянии $2/3 \cdot Z_2$ от начала участка.

Эпюры Q_y и M_x , построенные на основе полученных значений и дифференциальных зависимостей, представлены на рис. 5.7. в, г.

2. Определить положение опасных сечений и показать опасные точки на чертеже балки.

Наибольшую опасность разрушения представляет сечение А, в котором максимален изгибающий момент, и сечение В, где наибольшего по абсолютной величине значения достигает поперечная сила.

На рис. 5.9 а показаны опасные точки в сечениях. В точках типа 1 и 2 достигают наибольшего значения нормальные напряжения, а в точках типа 3 - касательные.

3. Определить момент инерции сечения относительно нейтральной оси (через параметр b).

Найдем положение центра тяжести сечения, через который проходит нейтральная ось X . Разобьем сечения на прямоугольники, как это показано на рис. 5.8 и выберем вспомогательную ось X_0 .

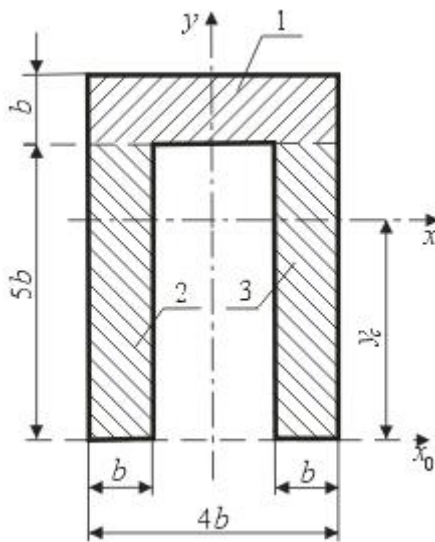


Рис. 5.8

Расстояние от нее до центра тяжести Y_c определим с помощью статических моментов S_{x0i} показанных прямоугольников, площади которых обозначим A_i , а расстояние до центров тяжести от оси X_0 - Y_{ci}

$$Y_c = \frac{\sum_{i=1}^3 S_{x0i}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{\sum_{i=1}^3 A_i \cdot y_{ci}}{\sum_{i=1}^3 A_i} = \frac{4b^2 \cdot 5,5b + 5b^2 \cdot 2,5b + 5b^2 \cdot 2,5b}{4b^2 + 5b^2 + 5b^2} = 3,36 \cdot b$$

Момент инерции сечения относительно оси X найдем как сумму моментов составляющих прямоугольников

$$J_x = \sum_{i=1}^3 J_{xi} = \frac{4b^4}{12} + (2,14b)^2 \cdot 4b^2 + 2\left(\frac{25b^4}{12} + (0,86b)^2 \cdot 5b^2\right) = 30,2b^4$$

4. Решить вопрос о рациональном положении сечения.

Нормальные напряжения при изгибе меняются по высоте сечения линейно, увеличиваясь с расстоянием от нейтральной оси. Поэтому для балок из неравнопрочных материалов рациональным будет такое

положение сечения, при котором напряжения в зоне сжатия будут больше, чем напряжения в растянутой зоне сечения. Поскольку изгибающий момент в опасном сечении положителен, сжата будет верхняя относительно нейтральной оси X часть сечения и рациональным будет положение, обратное исходному (см. рис. 5.9а).

5. Определить величину параметра b поперечного сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям.

Запишем условие прочности в растянутой зоне сечения

$$\sigma_{\max}^p = \frac{M_x^{\max}}{J_x} \cdot y_{\max}^p \leq R_p$$

Здесь $y_{\max}^p = 2,64b$ - расстояние от оси до наиболее удаленной точки сечения в зоне растяжения.

$$\frac{M_x^{\max}}{30,2b^4} \cdot 2,64b \leq R_p$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{2,64}{30,2} \cdot \frac{M_x^{\max}}{R_p}} = \sqrt[3]{\frac{2,64 \cdot 166 \cdot 10^3}{30,2 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,0592 \text{ [м]}$$

Определим параметр b из условия прочности в сжатой зоне сечения

$$\sigma_{\max}^c = \frac{M_x^{\max}}{J_x} \cdot y_{\max}^c \leq R_c$$

где $y_{\max}^c = 3,36b$ - расстояние от оси до наиболее удаленной точки сечения в зоне сжатия.

$$\frac{M_x^{\max}}{30,2b^4} \cdot 3,36b \leq R_c$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3,36 \cdot 166 \cdot 10^3}{30,2 \cdot 160 \cdot 10^6}} = 0,0486 \text{ [м]}$$

Окончательно принимаем по ГОСТу 6636-69 $b=60$ мм.

6. Проверить прочность подобранного сечения по касательным напряжениям.

Воспользуемся формулой Журавского для касательных напряжений.

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{o mc}}{J_x b_y}$$

Здесь $Q_y = Q_y^{\max} = 60 \text{ кН}$ - поперечная сила в сечении B;

$S_x^{o mc}$ - статический момент отсеченной части сечения;

b_y - ширина сечения, в нашем случае $b_y = 2b$.

Статический момент вычислим как произведение площади заштрихованных прямоугольников (рис. 5.9а), на расстояние от оси до их центра тяжести:

$$S_x^{o mc} = 2(3,36b)(1,68b) = 11,29b^3.$$

Таким образом, наибольшее касательное напряжение:

$$\tau_{\max} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 11,29(0,06)^3}{30,2(0,06)^4 \cdot 2 \cdot 0,06} = 3,12 \cdot 10^6 \text{ Па}.$$

Подобранные размеры сечения обеспечивают прочность и по касательным напряжениям.

7. Построить эпюры σ и τ в опасном сечении.

Эпюру нормальных напряжений построим в сечении А, где максимален изгибающий момент, эпюру касательных - в сечении В, где больше поперечная сила.

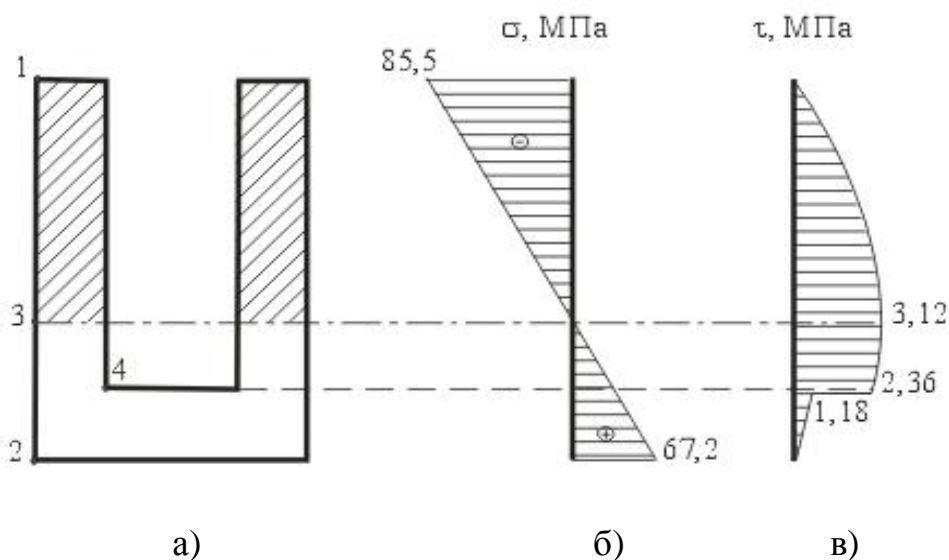


Рис. 5.9

Нормальные напряжения вычисляются по формуле

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} y$$

Для построения эпюры, имеющей линейный вид, достаточно вычислить напряжения в двух точках.

$$\sigma_{(1)} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{(1)} = \frac{166 \cdot 10^3}{30,2 \cdot (0,06)^4} \cdot 3,36 \cdot 0,06 = 85,5 \cdot 10^6 \text{ [Па]}$$

$$\sigma_{(2)} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{(2)} = \frac{166 \cdot 10^3}{30,2 \cdot (0,06)^4} \cdot 2,64 \cdot 0,06 = 67,2 \cdot 10^6 \text{ [Па]}$$

Эпюра нормальных напряжений показана на рис. 5.9б. При построении учтено, что верхние волокна балки находятся в сжатом состоянии, а нижние - в растянутом.

Касательные напряжения меняются по высоте сечения нелинейно. В точках 1 и 2 напряжения τ равна нулю, наибольшего значения 3,12 МПа они достигают на оси сечения.

В точках типа 4 (рис. 5.9а) на эпюре имеется скачкообразное изменение значения за счет увеличения ширины сечения с $2b$ до $4b$. Вычислим напряжения в данной точке по формуле Журавского, учитывая, что статический момент

$$S_x^{o mc} = 4b \cdot b(2,64b - 0,5b) = 8,56b^3.$$

Таким образом:

$$\tau_{(4)} = \frac{60 \cdot 10^3 \cdot 8,56b^3}{30,2b \cdot 4 \cdot 2b} = 2,36 \cdot 10^6 \text{ [Па]} = 2,36 \text{ [МПа]}$$

$$\tau_{(4)}' = \frac{t_{(4)}}{2} = 1,18 \cdot 10^6 \text{ [Па]} = 1,18 \text{ [МПа]}$$

Эпюра касательных напряжений показана на рис. 5.9в.

5.6 Пример расчета рамы на прочность

Для заданной плоской рамы из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать двутавровое сечение ($R=210$ МПа).

1 Вычертим в масштабе расчетную схему рамы с указанием численных значений заданных величин (рис. 5.10, а).

2 Запишем уравнения равновесия рамы и определим опорные реакции:

$$\Sigma X = 0: H_A - q \cdot a = 0, H_A = q \cdot a = 12 \cdot 5 = 60 \text{ кН} \quad ;$$

$$\Sigma M_A = 0: R_B \cdot b + q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - P(b + c) = 0,$$

$$R_B = \frac{-12 \cdot 5 \cdot 2,5 + 9 \cdot 8}{6} = -13 \text{ кН};$$

$$\Sigma Y = 0: R_A + R_B - P = 0, R_A = -R_B + P = 13 + 9 = 22 \text{ кН}.$$

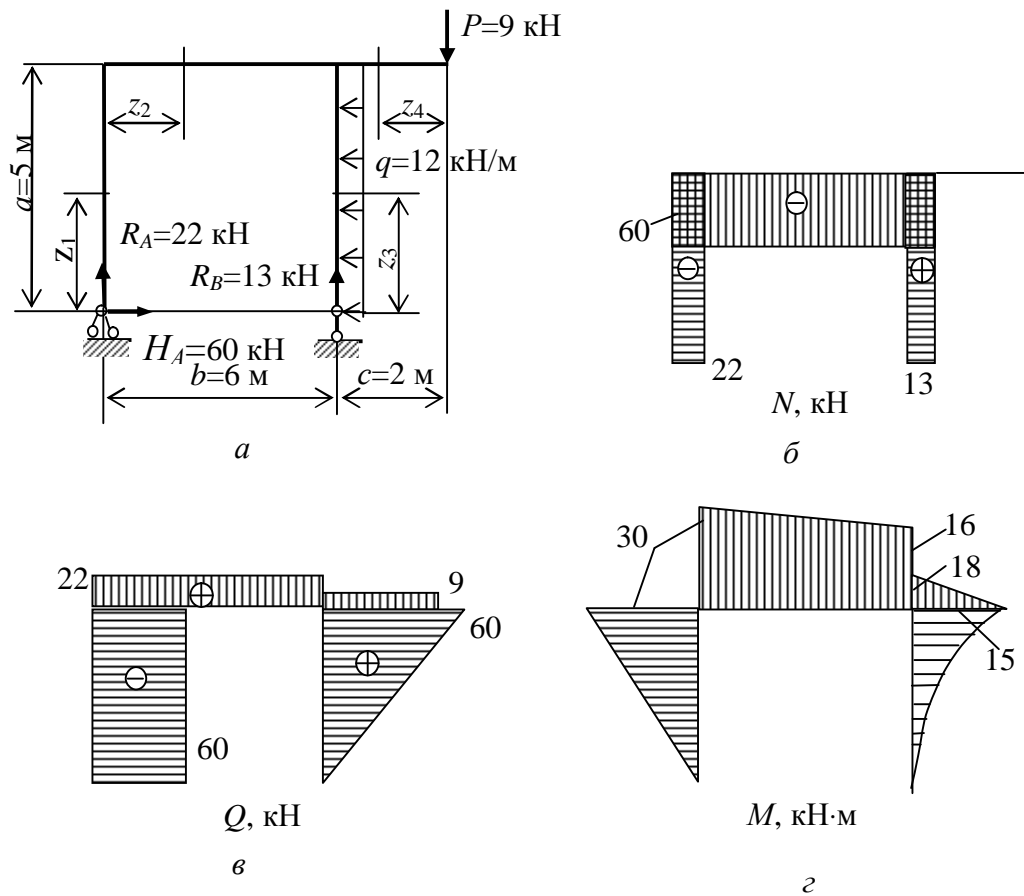


Рис. 5.10

Указываем на расчетной схеме величину и фактическое направление всех реакций. При составлении уравнений реакцию R_B направили вверх. Так как реакция R_B получилась отрицательной, её направление на расчетной схеме необходимо сменить на противоположное, т.е. вниз.

3. Выделим на расчетной схеме четыре участка. Запишем для каждого из них выражения внутренних усилий и найдем их значения на границах участков.

1. $0 \leq z_1 \leq 5\text{ м};$

$$N = -R_A = -22 \text{ кН}; \quad Q = -H_A = -60 \text{ кН}; \quad M = -H_A \cdot z_1 = -60 \cdot z_1;$$

$$M(0) = 0; \quad M(5) = -300 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

2. $0 \leq z_2 \leq 6\text{ м};$

$$N = -H_A = -60 \text{ кН}; \quad Q = R_A = 22 \text{ кН}; \quad M = R_A \cdot z_2 - H_A \cdot 5 = 22 \cdot z_2 - 300;$$

$$M(0) = -300 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M(6) = -168 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. $0 \leq z_3 \leq 5;$

$$N = R_B = 13 \text{ кН}; \quad Q = q \cdot z_3 = 12 \cdot z_3; \quad Q(0) = 0; \quad Q(5) = 60 \text{ кН};$$

$$M = -q \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2} = -6z_3^2; \quad M(0) = 0; \quad M(5) = -150 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

4. $0 \leq z_4 \leq 2;$

$$N = 0; \quad Q = P = 9 \text{ кН}; \quad M = -P \cdot z_4 = -9z_4; \quad M(0) = 0; \quad M(2) = -18 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюры N (рис. 5.10, б), Q (рис. 5.10, в), M (рис. 5.10, г). Положительные ординаты N и Q на ригеле откладываем вверх, на стойках – снаружи рамы. Эпюру M строим на растянутых волокнах.

Указание: расчетную схему рамы и эпюры N , Q , M разместить на одном листе.

4. Подбираем номер двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям от максимального изгибающего момента $|M|_{\max}=300 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $W_x \geq \frac{|M|_{\max}}{R} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{210} \cdot 10^6 = 1429 \text{ см}^3$.

Назначаем двутавр №50, у которого $W_x=1589 \text{ см}^3$, а площадь сечения $A=100 \text{ см}^2$.

5. Проверим прочность выбранного двутавра с учетом действия продольной силы в наиболее опасном сечении (ригель при $z_2=0$), где $M=300 \text{ кН}\cdot\text{м}$, а $N=60 \text{ кН}$.

$$\sigma_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} + \frac{|N|_{\max}}{A} = \frac{300 \cdot 10^{-3}}{1589 \cdot 10^{-6}} + \frac{60 \cdot 10^{-3}}{100 \cdot 10^{-4}} = 189 + 6 = 195 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}$$

Как видим, нормальные напряжения от продольной силы составляют 3,17 % от напряжений, возникающих под действием изгибающего момента и поэтому, как правило, могут не учитываться.

5.7 Контрольное задание 6. Расчет балки на прочность по нормальным напряжениям

Для заданной балки из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры различных по форме поперечных сечений: двутавра, прямоугольника (с отношением сторон $h/b=1,8$), квадрата, круга, кольца (при $d/D=0,8$) и оценить их рациональность.

Схемы балок приведены на рис.5.11, численные данные – в табл.5.1.

Материал балки: сталь Ст.3.

Таблица 5.1

Цифры шифра	1-я схема	2-я a , м	3-я b , м	4-я P , кН	5-я q , кН/м	6-я M , кН·м
1	1, 11, 21	0,4	1,4	10	10	20
2	2, 12, 22	0,5	1,5	12	12	22
3	3, 13, 23	0,6	1,6	15	14	24
4	4, 14, 24	0,7	1,7	18	16	26
5	5, 15, 25	0,8	1,8	20	18	28
6	6, 16, 26	0,9	1,9	24	20	30
7	7, 17, 27	1,0	2,0	28	22	32
8	8, 18, 28	1,1	2,1	30	24	18
9	9, 19, 29	1,2	2,2	32	15	16
0	10, 20, 30	1,3	2,4	35	25	14

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить схему балки, указать численные значения заданных величин.
2. Составить уравнения поперечных сил и изгибающих моментов по участкам и построить их эпюры.
3. Произвести проверку с помощью дифференциальных зависимостей.
4. Подобрать размеры указанных выше сечений из условия прочности по нормальным напряжениям.
5. Оценить рациональность подобранных сечений.
6. Построить эпюру нормальных напряжений в опасном сечении (для двутавра, кольца).

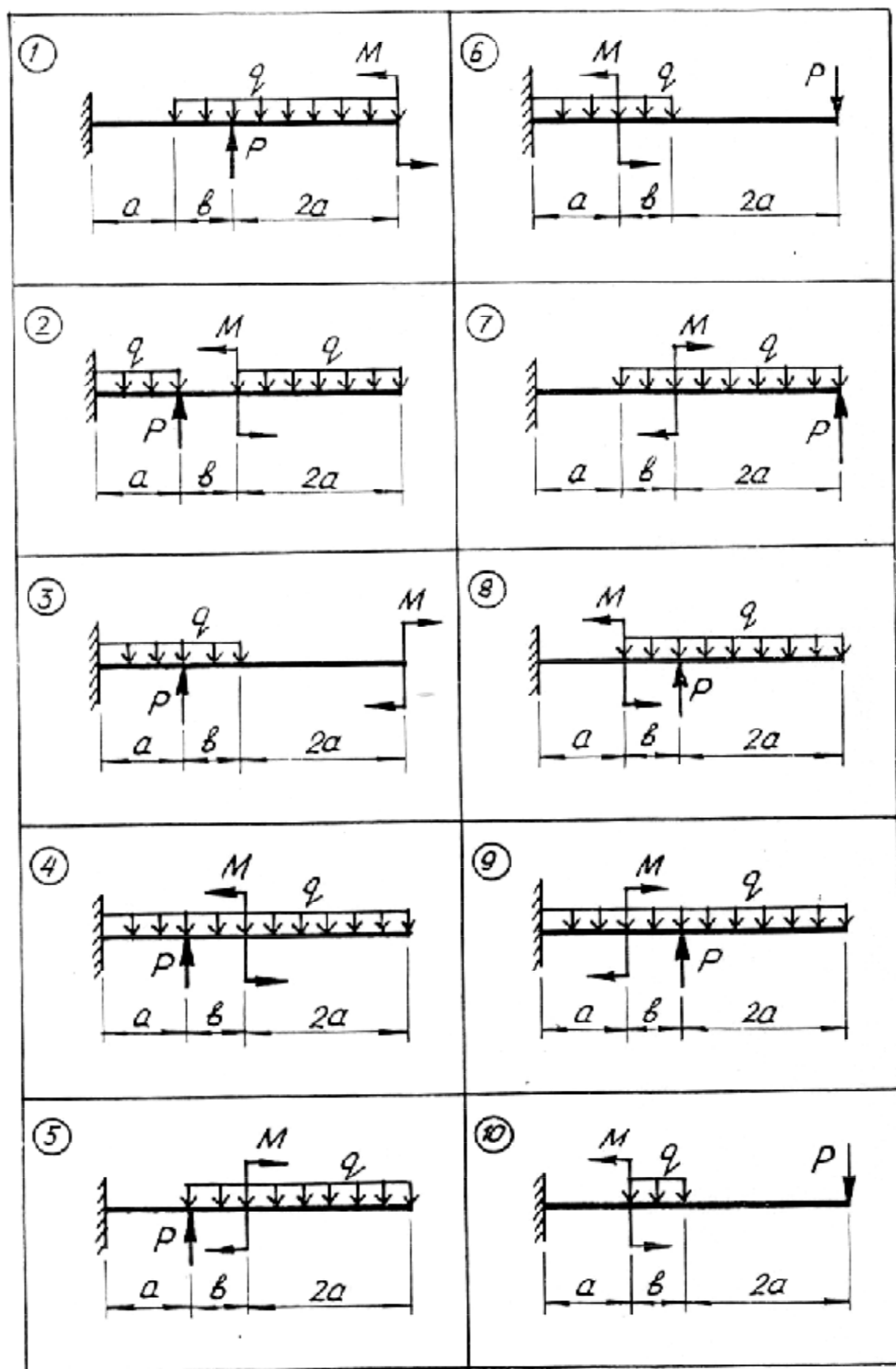


Рис. 5.11

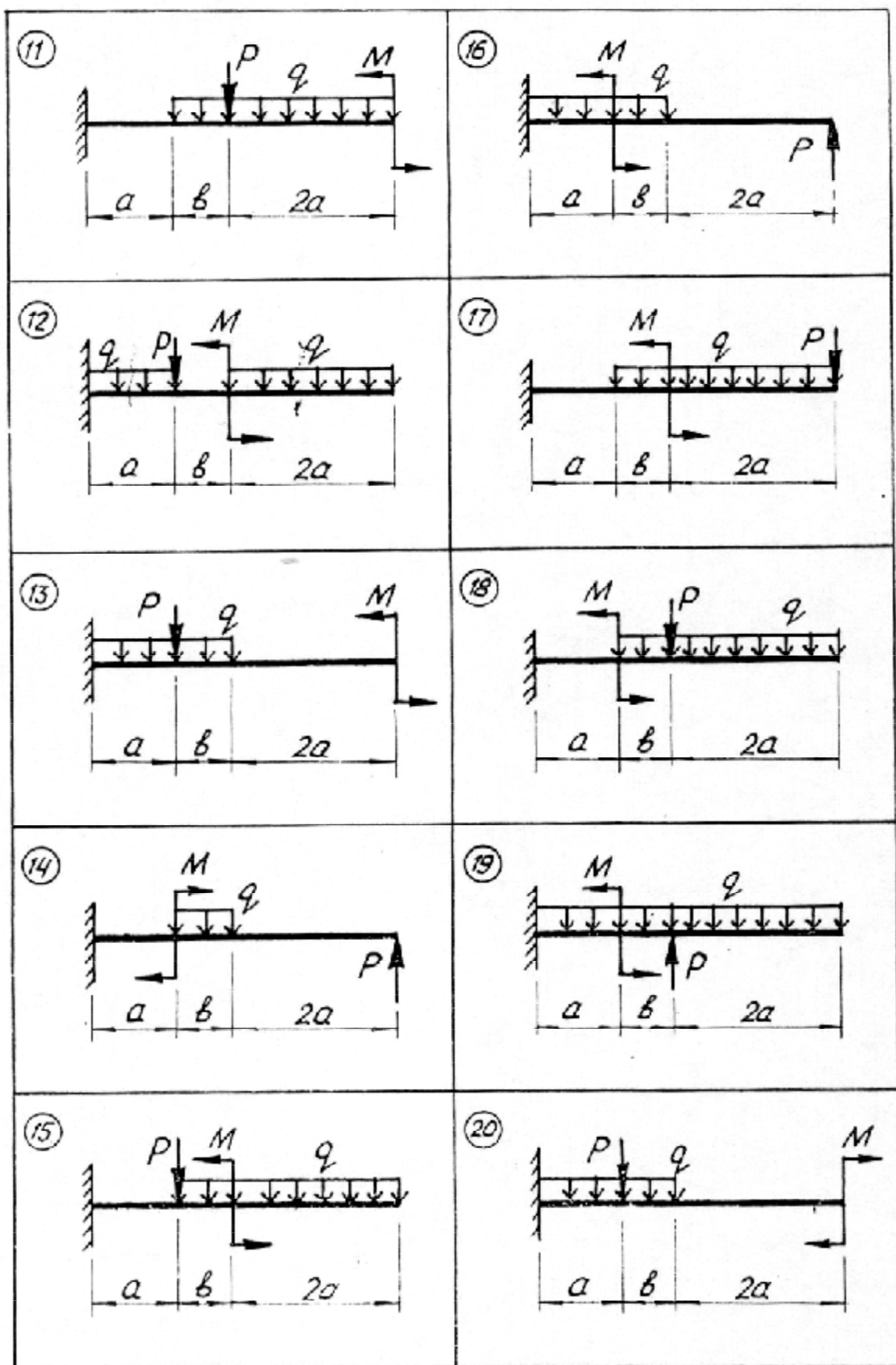


Рис. 5.11 (продолжение)

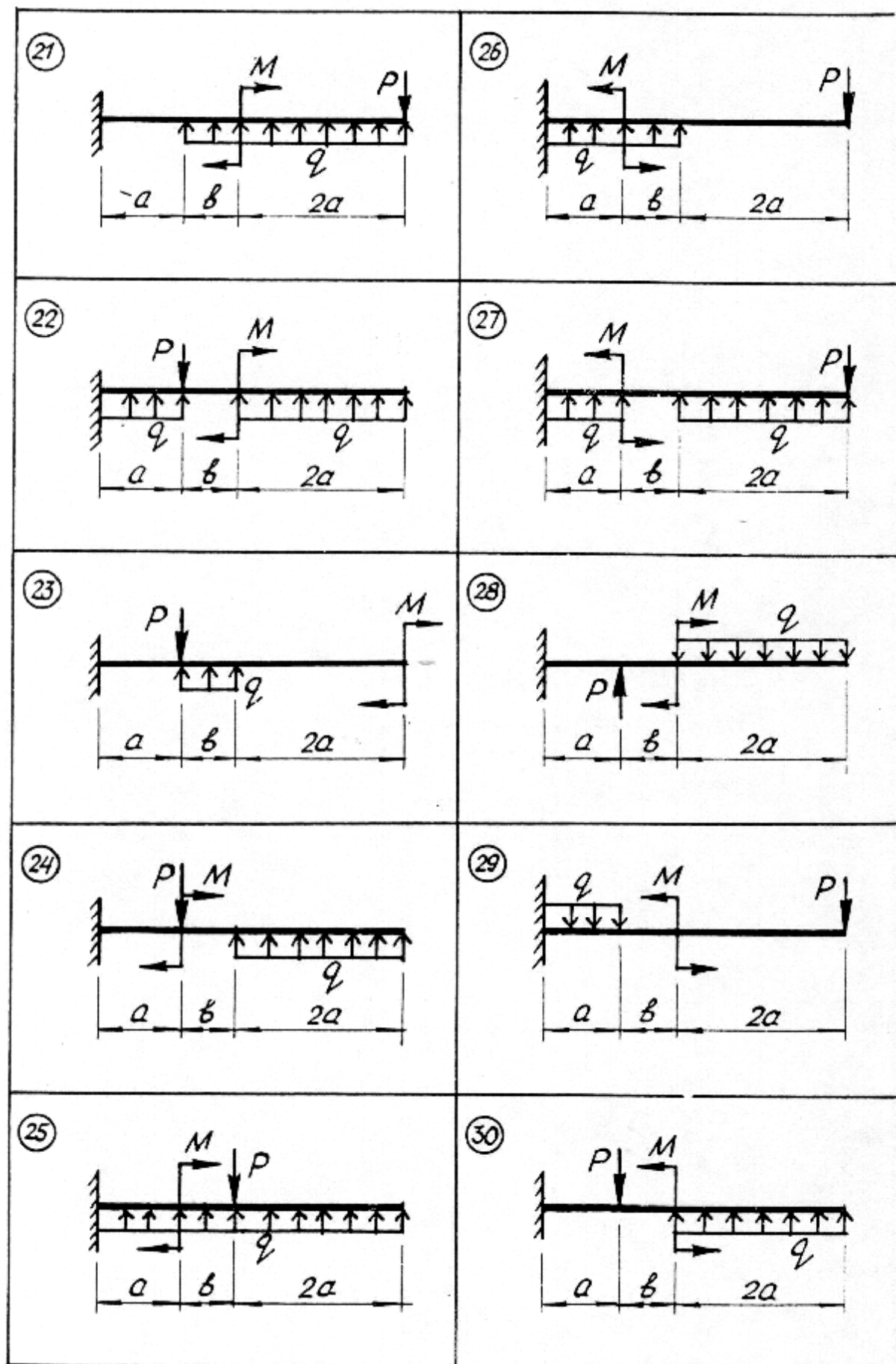


Рис.5.11(окончание)

5.8 Контрольное задание 7. Расчет на прочность двутавровой балки

Для заданной стальной балки из условия прочности подобрать номер двутавра по ГОСТ 8239-72 и произвести полную проверку прочности.

Схемы балки приведены на рис.5.12, численные данные – в табл.5.2.

Таблица 5.2

Цифры шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я	
	схема	l , м	a , м	b , м	P , кН	q , кН/м	M , кН·м
1	1, 11, 21	1,6	0,20	0,30	150	400	10
2	2, 12, 22	1,8	0,30	0,20	160	450	12
3	3, 13, 23	2,0	0,40	0,50	180	500	14
4	4, 14, 24	2,2	0,35	0,55	190	550	15
5	5, 15, 25	2,4	0,45	0,40	200	300	16
6	6, 16, 26	2,6	0,50	0,25	210	350	18
7	7, 17, 27	2,8	0,55	0,35	220	450	20
8	8, 18, 28	3,0	0,15	0,15	230	460	22
9	9, 19, 29	1,5	0,25	0,60	250	360	24
0	10, 20, 30	2,5	0,30	0,45	240	380	26

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить схему балки в масштабе, указать численные значения заданных величин.
2. Составить уравнения поперечных сил и изгибающих моментов по участкам и построить их эпюры.
3. Определить положение опасных сечений и показать опасные точки на чертеже балки.
4. Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать двутавровое сечение.
5. Произвести проверку прочности по максимальным касательным напряжениям и при необходимости усилить сечение.
6. В опасных сечениях построить эпюры нормальных и касательных напряжений.
7. С учетом совместного действия нормальных и касательных напряжений, используя четвертую теорию прочности, проверить прочность балки и при необходимости подобрать новое сечение.

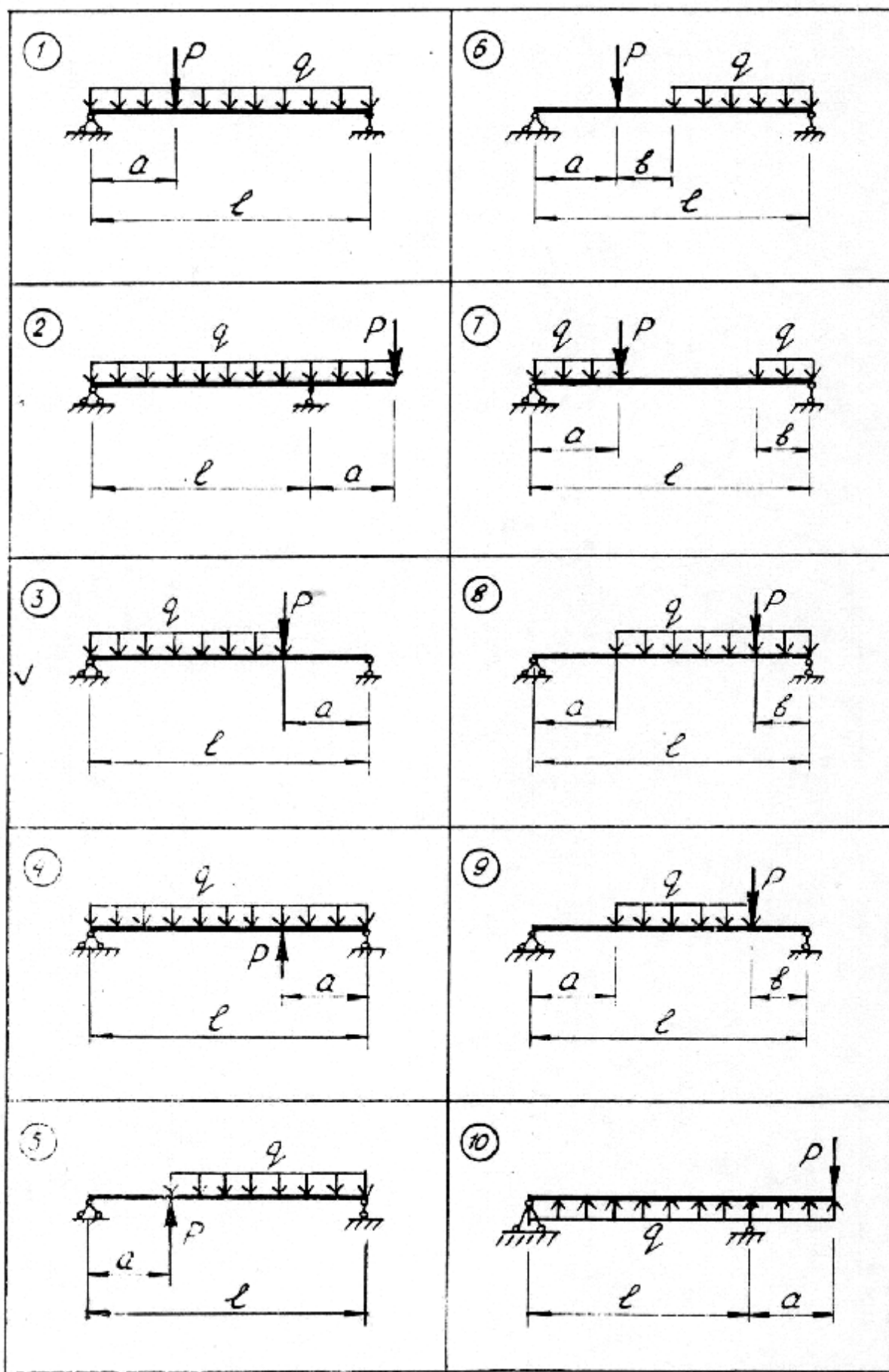


Рис. 5.12

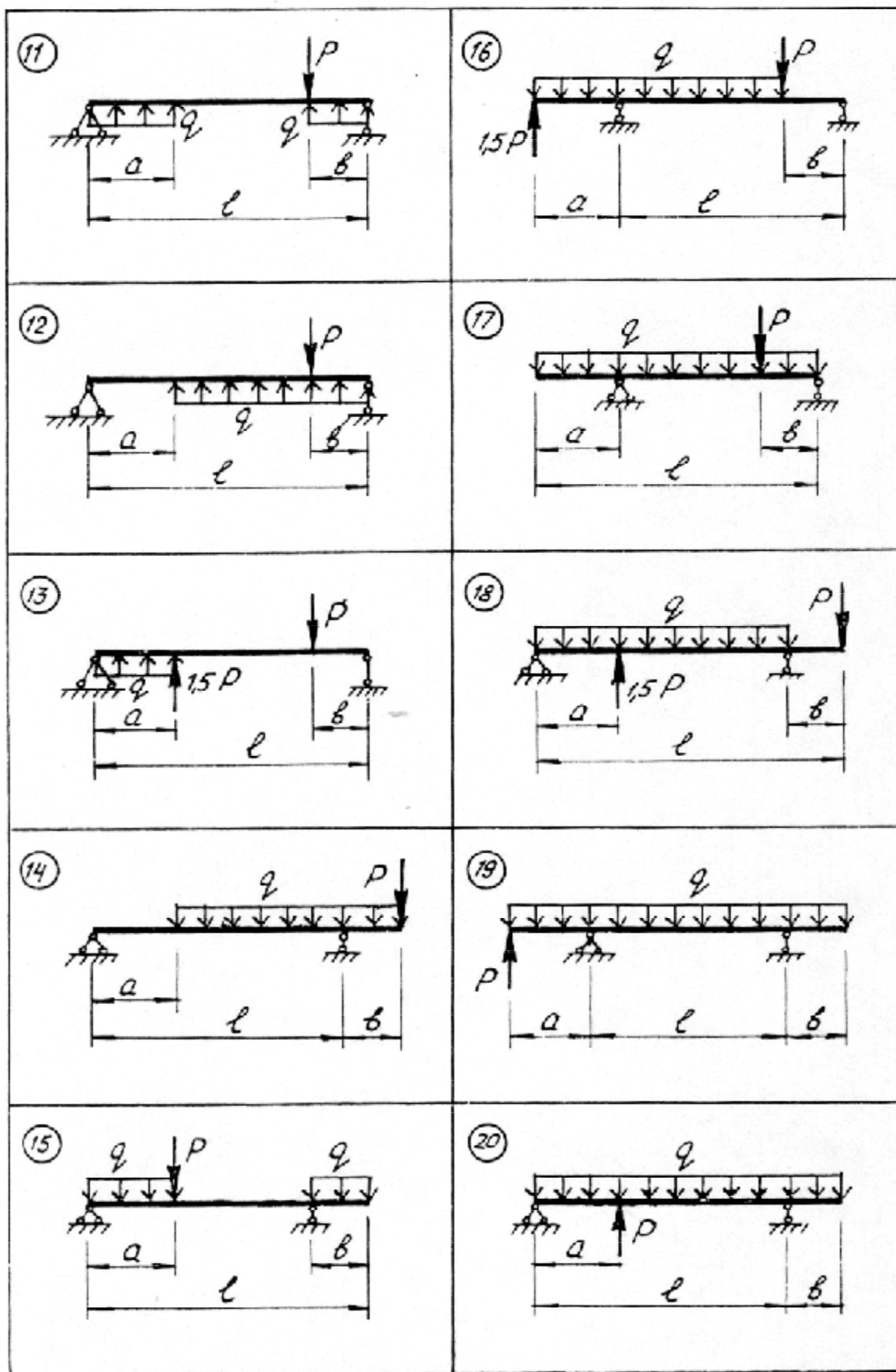


Рис. 5.12 (продолжение)

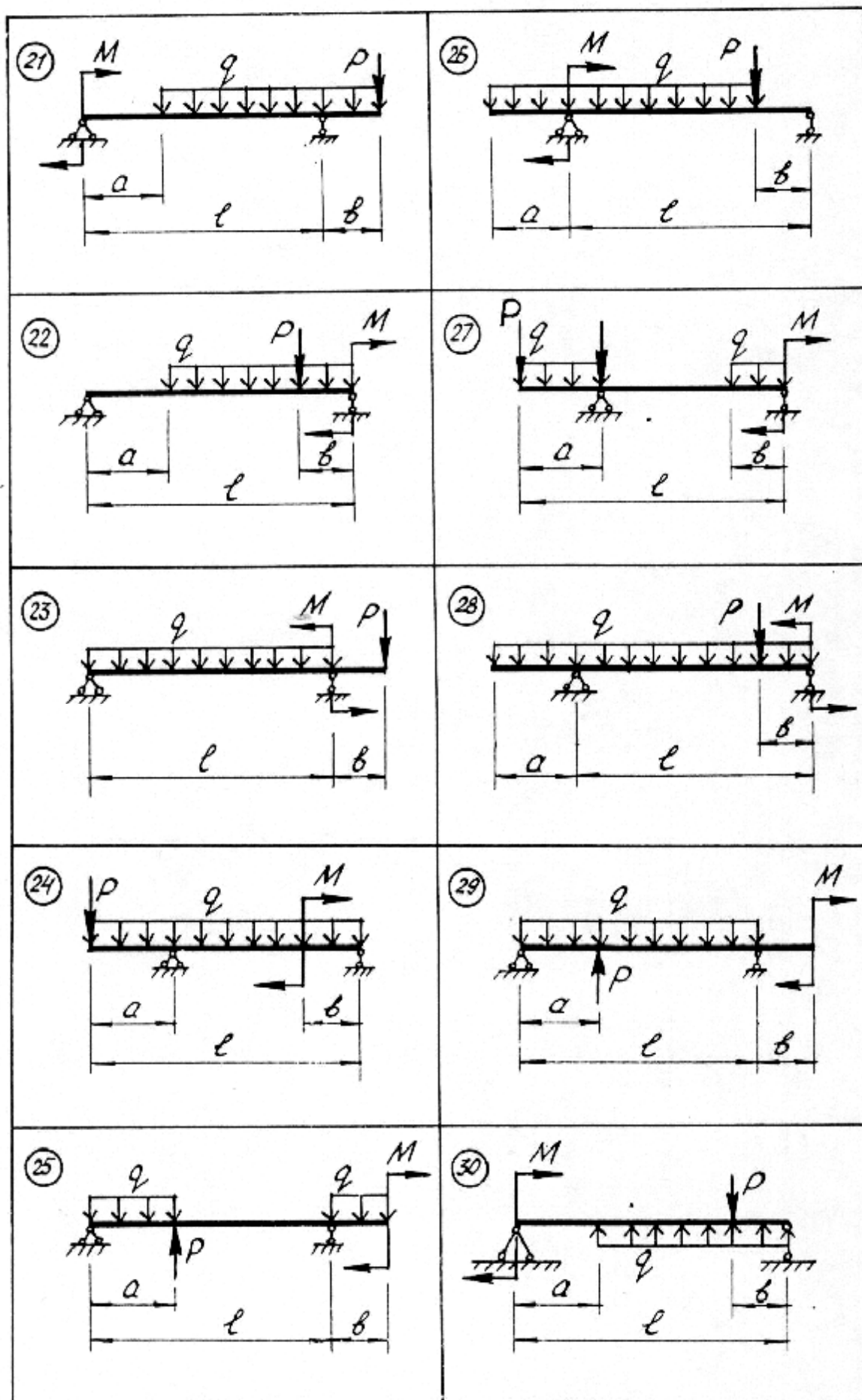


Рис 5.12(окончание)

5.9 Контрольное задание 8. Расчет балки из неравнопрочных материалов

Из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать размеры заданного типа сечения балки. Материал: чугун СЧ 12-28.

Схема балки и тип сечения приведены на рис.5.13, численные данные – в табл.5.3.

Таблица 5.3

Цифры шифра	1-я	2-я		3-я		4-я	5-я	6-я	
	схема	a , м	c , м	q , кН/м	q_1 , кН/м	P , кН	M , кН·м	n	k
1	1, 11, 21	1,0	3,6	10	15	100	20	2,0	5,0
2	2, 12, 22	1,2	3,0	12	17	90	30	2,2	6,0
3	3, 13, 23	1,5	3,2	13	18	80	40	3,0	7,0
4	4, 14, 24	1,8	2,0	14	20	70	50	3,2	8,0
5	5, 15, 25	2,0	2,6	15	20	60	30	2,4	7,5
6	6, 16, 26	1,6	2,1	16	22	50	26	4,0	8,5
7	7, 17, 27	2,2	2,4	14	21	40	42	3,5	5,4
8	8, 18, 28	3,0	2,5	13	19	39	28	2,5	5,6
9	9, 19, 29	2,4	2,7	12	17	20	32	4,2	6,4
0	10, 20, 30	2,8	1,8	10	15	10	24	3,6	6,6

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить схему балки, указать численные значения заданных величин.
2. Составить уравнение поперечных сил и изгибающих моментов по участкам и построить их эпюры.
3. Определить положение опасных сечений и показать опасные точки на чертеже балки.
4. Определить момент инерции сечения относительно нейтральной оси (через параметр b).
5. Решить вопрос о рациональном положении сечения.
6. Определить величину параметра b поперечного сечения балки из условия прочности по нормальным напряжениям.
7. Проверить прочность подобранного сечения по касательным напряжениям.
8. Построить эпюры σ и τ в опасном сечении.

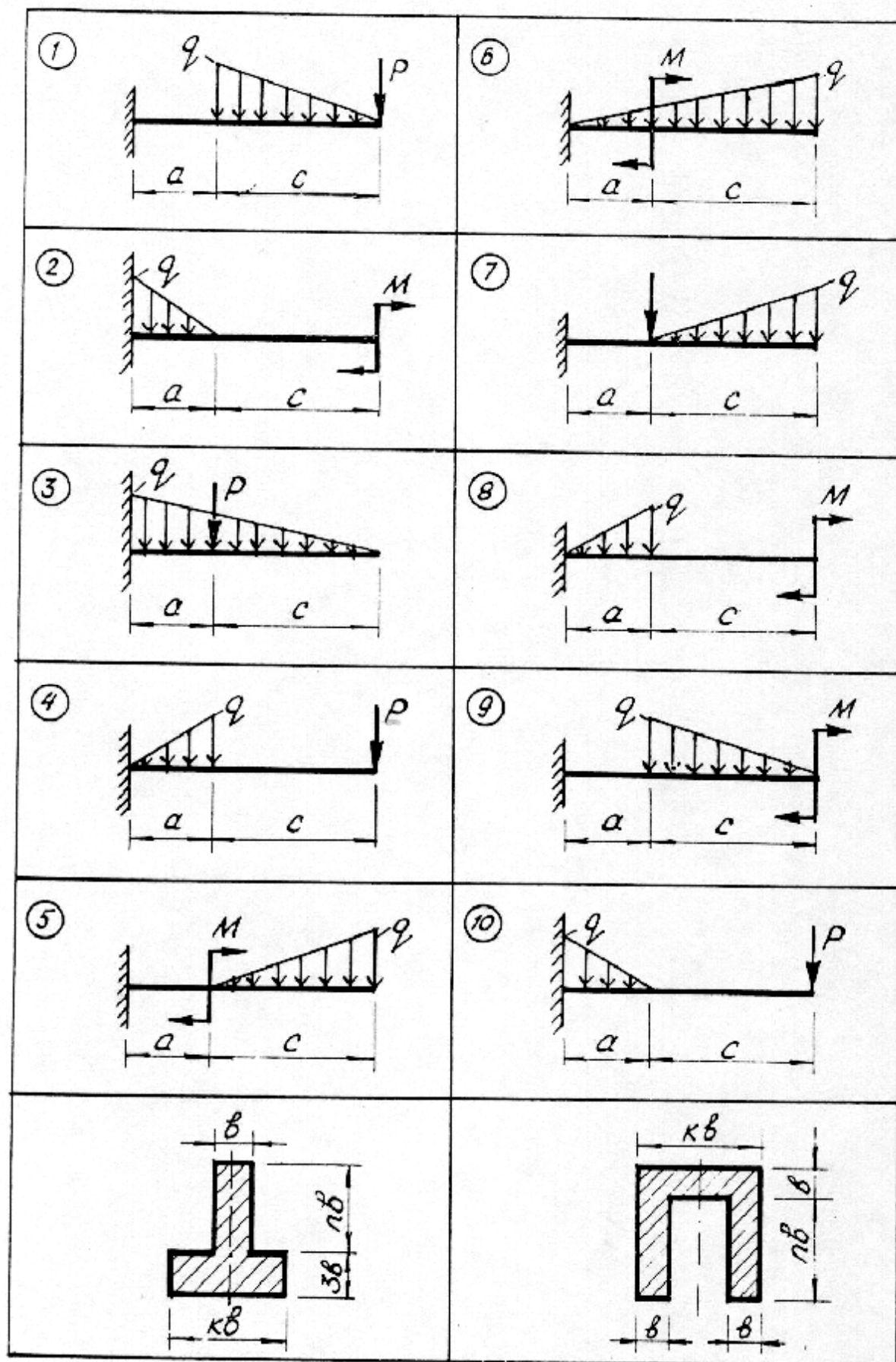


Рис. 5.13

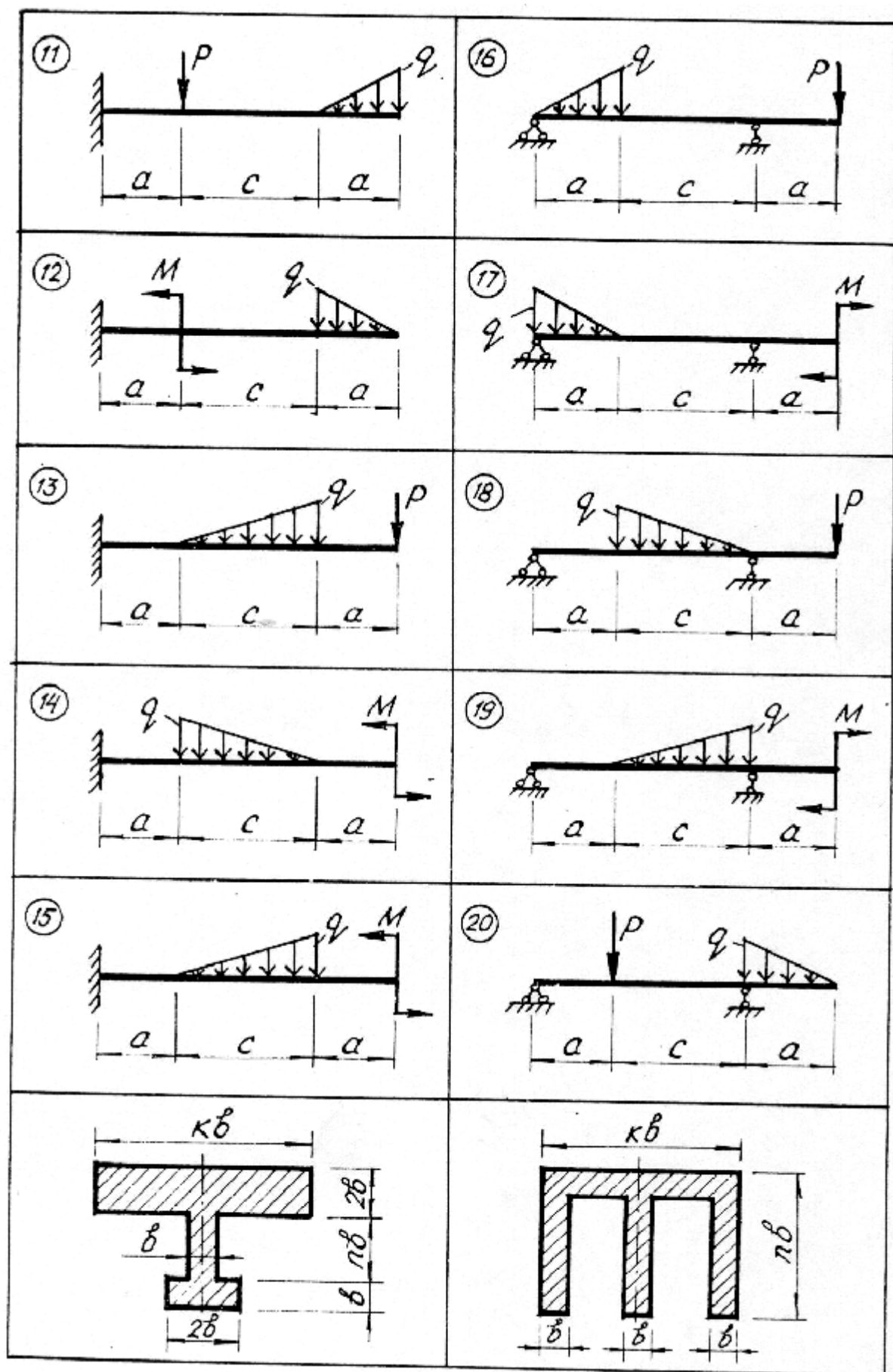


Рис. 5.13 (продолжение)

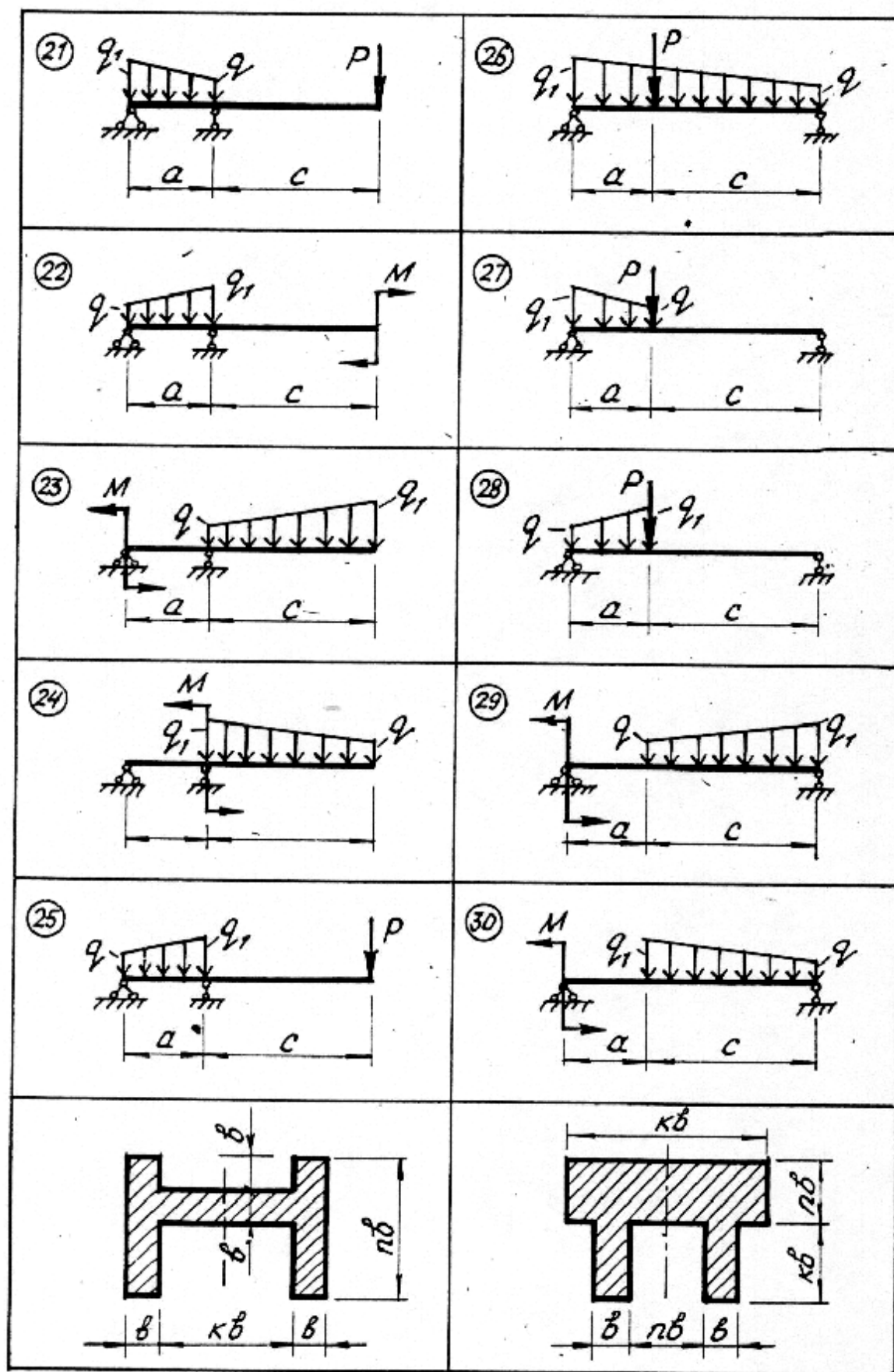


Рис. 5.13 (окончание)

5.10 Контрольное задание 9. Расчет деревянной балки на прочность

Для заданной балки из условия прочности по нормальным напряжениям определить размеры различных по форме поперечных сечений (прямоугольника с отношением сторон $h/b=1,8$, квадрата, круга) и оценить их рациональность.

Схемы представлены на рис.5.14, численные данные – в табл.5.4.

Таблица 5.4

Цифры шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я	6-я
	схема	a , м	c , м	q , кН/м	P , кН	M , кН·м
1	1, 11, 21	1,0	1,0	3,0	3,0	3,5
2	2, 12, 22	1,2	1,2	3,2	4,0	4,0
3	3, 13, 23	1,3	1,3	3,3	3,5	3,2
4	4, 14, 24	1,4	1,4	3,4	4,5	2,0
5	5, 15, 25	1,5	1,5	3,5	5,0	1,0
6	6, 16, 26	1,6	1,6	3,6	2,0	3,6
7	7, 17, 27	1,7	1,7	3,7	4,2	2,8
8	8, 18, 28	1,8	1,8	3,8	3,2	4,2
9	9, 19, 29	1,9	1,9	3,9	2,8	5,0
0	10, 20, 30	2,0	2,0	4,0	1,6	4,8

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить схему балки, указать числовые значения заданных величин.
2. Составить уравнения поперечных сил и изгибающих моментов и построить их эпюры.
3. Определить положение опасных сечений и указать их на чертеже балки.
4. Подобрать из условия прочности по нормальным напряжениям стандартные круглое, квадратное и прямоугольное сечение деревянной балки.
5. Проверить подобранные сечения на прочность по касательным напряжениям и при необходимости подобрать новые сечения.
6. Вычислить σ и τ в опасных сечениях и построить их эпюры.
7. Сравнить подобранные сечения по рациональности формы.

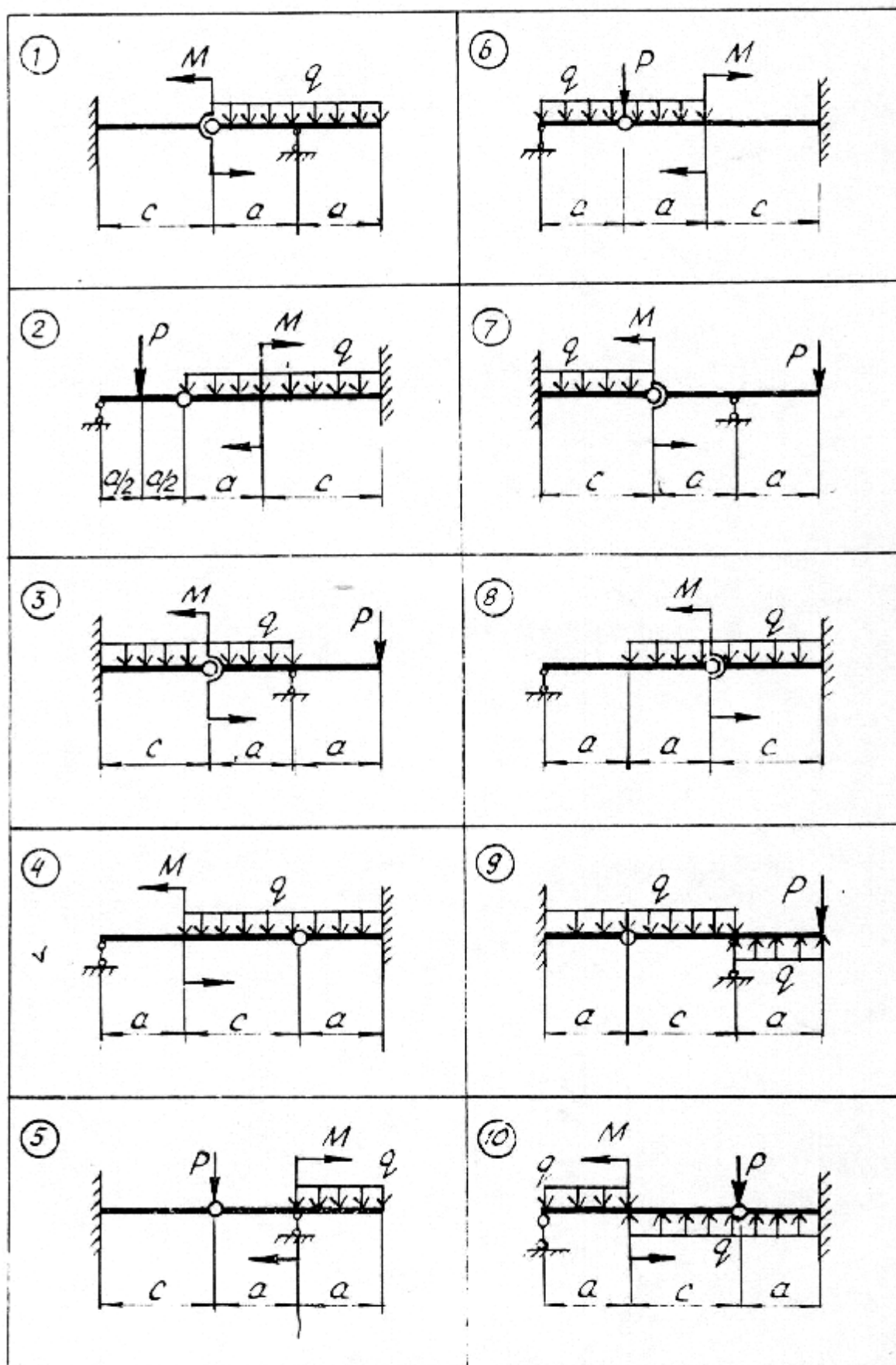


Рис. 5.14

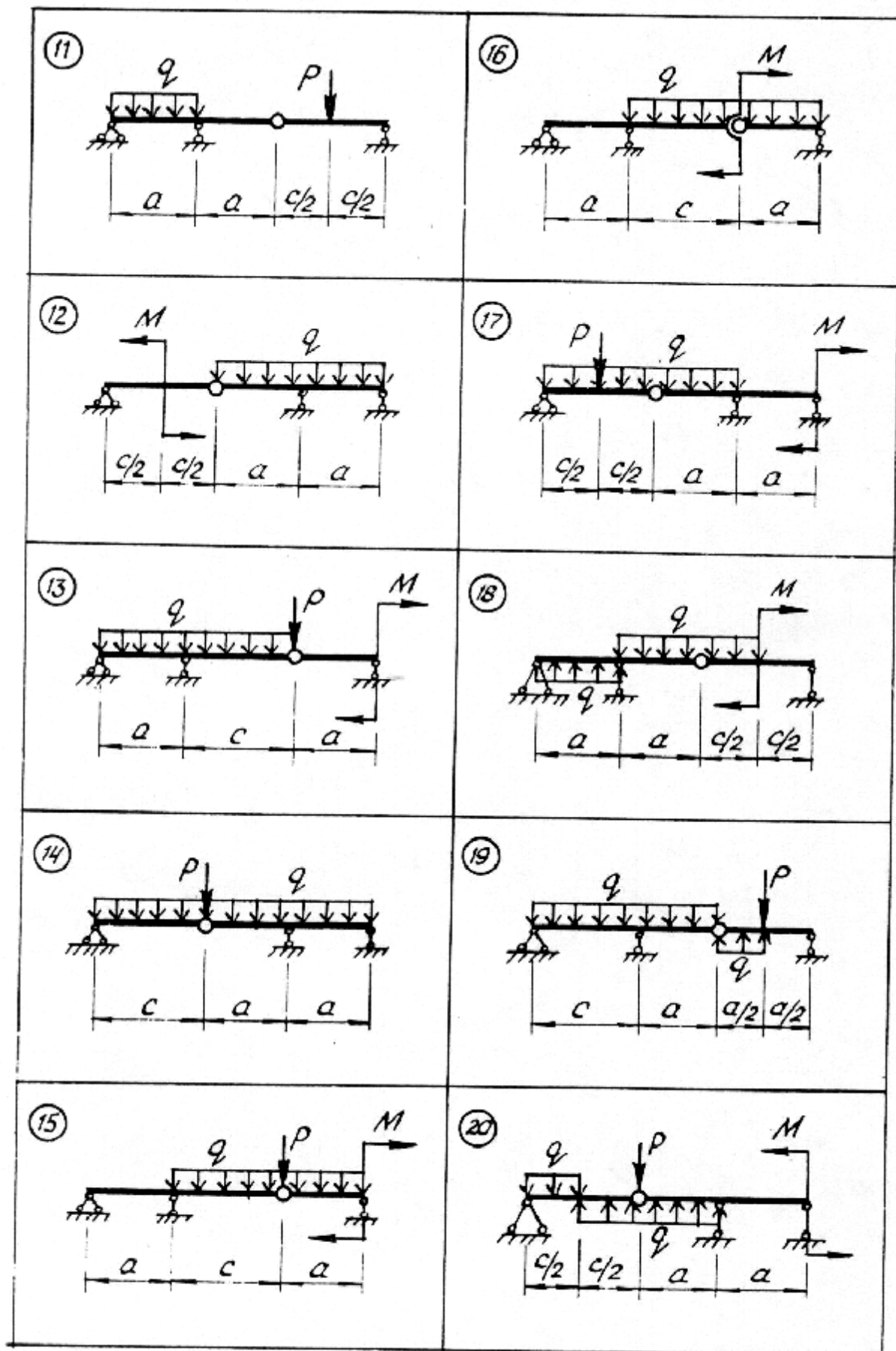


Рис. 5.14 (продолжение)

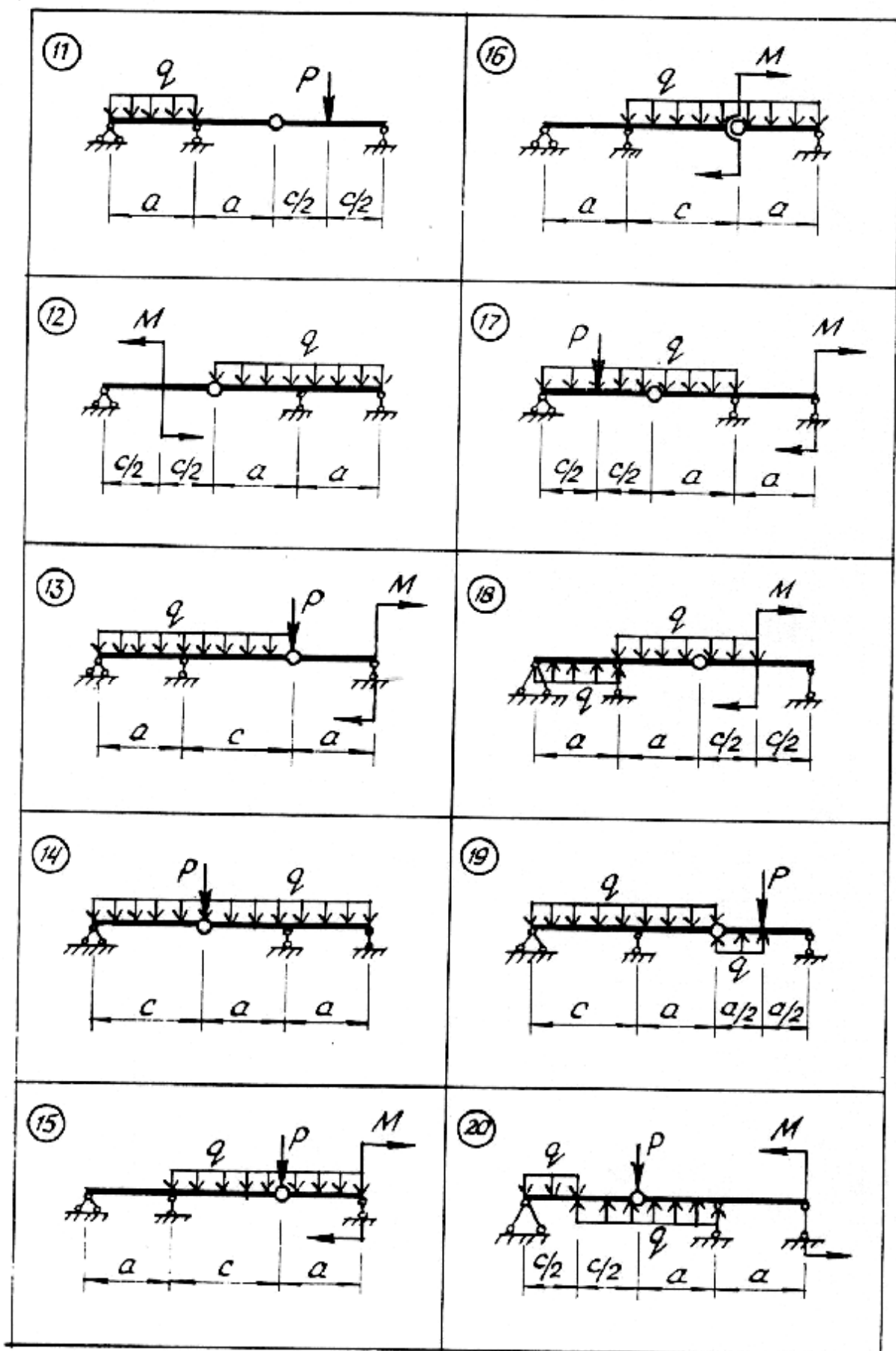


Рис. 5.14 (окончание)

5.11 Контрольное задание 10. Расчет рамы на прочность

Для заданной плоской рамы построить эпюры внутренних силовых факторов и из условия прочности по нормальным напряжениям подобрать двутавр.

Схема рамы приведена на рис.5.15, численные данные – в табл.5.5.

Таблица 5.5

Цифры шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я		6-я
	схема	a , м	b , м	c , м	q , кН/м	P , кН	M_0 , кН·м
1	1, 11, 21	1,2	1,0	1,8	10	10	5
2	2, 12, 22	1,4	2,8	1,2	12	25	25
3	3, 13, 23	1,6	2,6	1,4	14	35	10
4	4, 14, 24	1,8	2,4	1,6	16	20	45
5	5, 15, 25	2,0	2,2	1,5	18	50	20
6	6, 16, 26	2,2	2,0	2,0	20	30	50
7	7, 17, 27	2,4	1,8	2,2	22	60	30
8	8, 18, 28	2,6	1,6	2,4	24	40	40
9	9, 19, 29	2,8	1,4	2,6	26	80	35
0	10, 20, 30	1,0	1,2	2,8	15	70	15

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить в масштабе схему рамы, указать численные значения заданных величин.
2. Составить по участкам уравнения продольных и поперечных сил, изгибающих моментов и построить их эпюры.
3. Подобрать номер профиля двутавра из условия прочности по нормальным напряжениям с учетом только изгибающего момента.
4. Оценить влияние продольных и поперечных сил на прочность рамы.

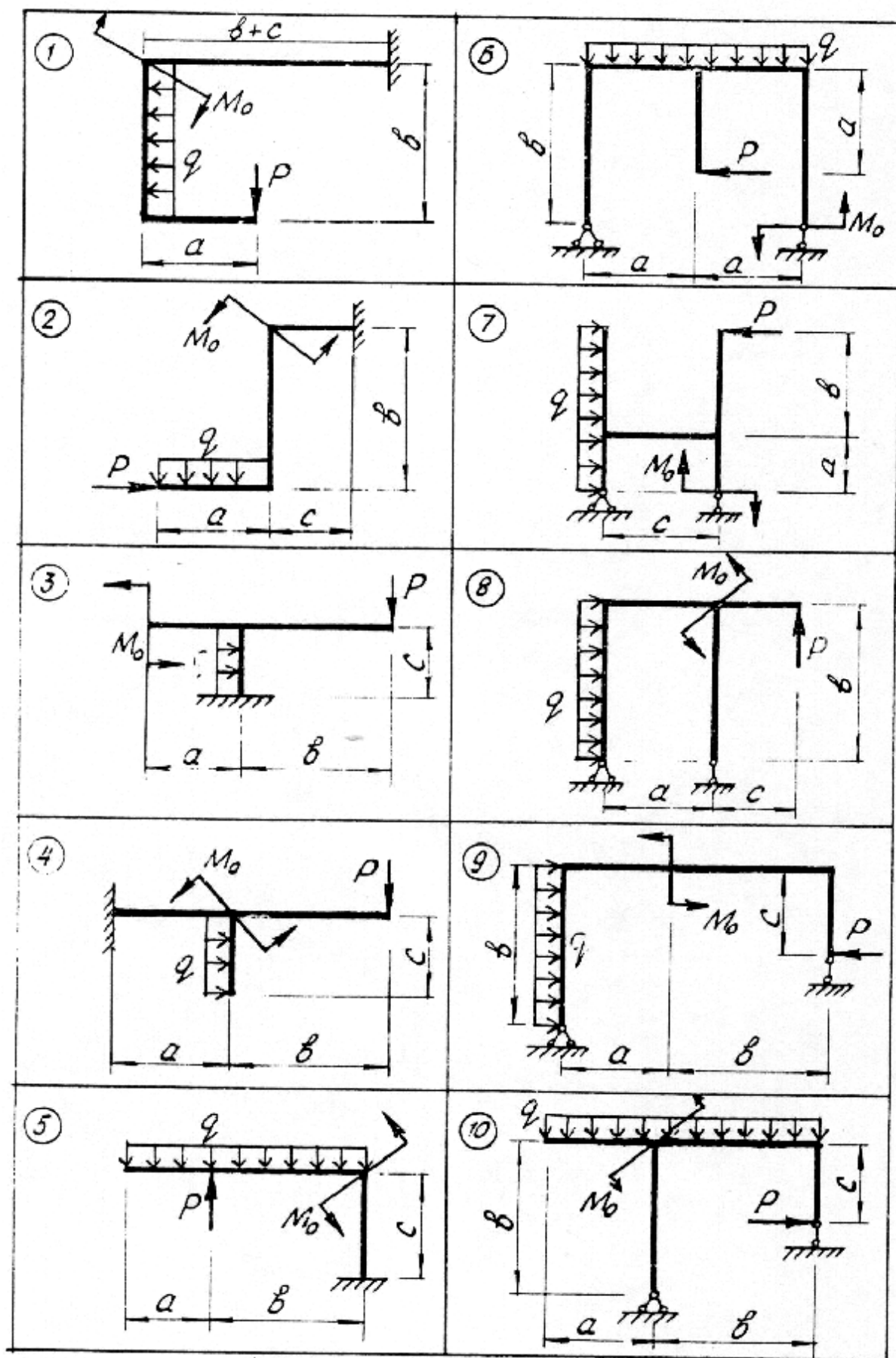


Рис. 5.15

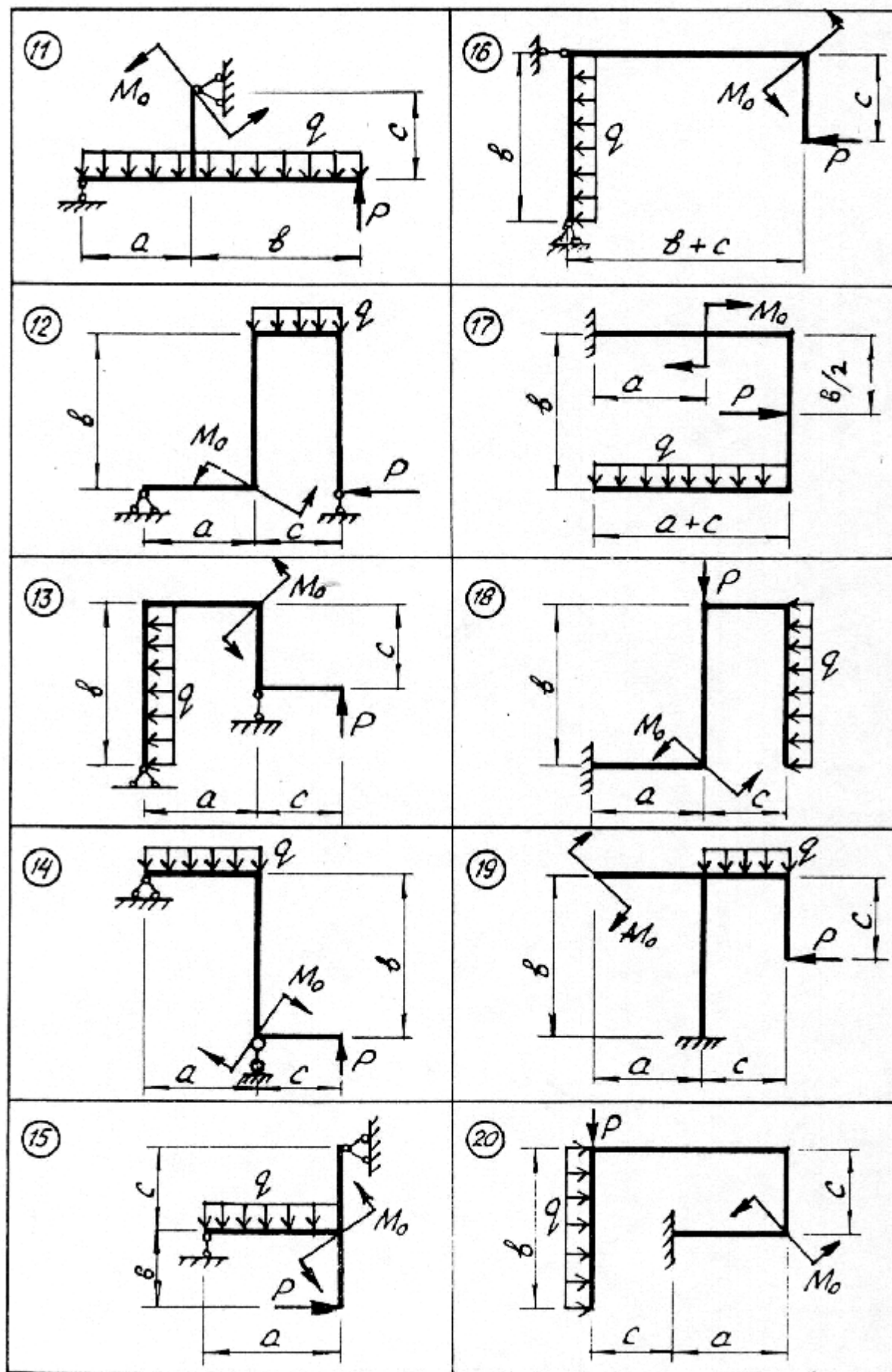


Рис. 5.15 (продолжение)

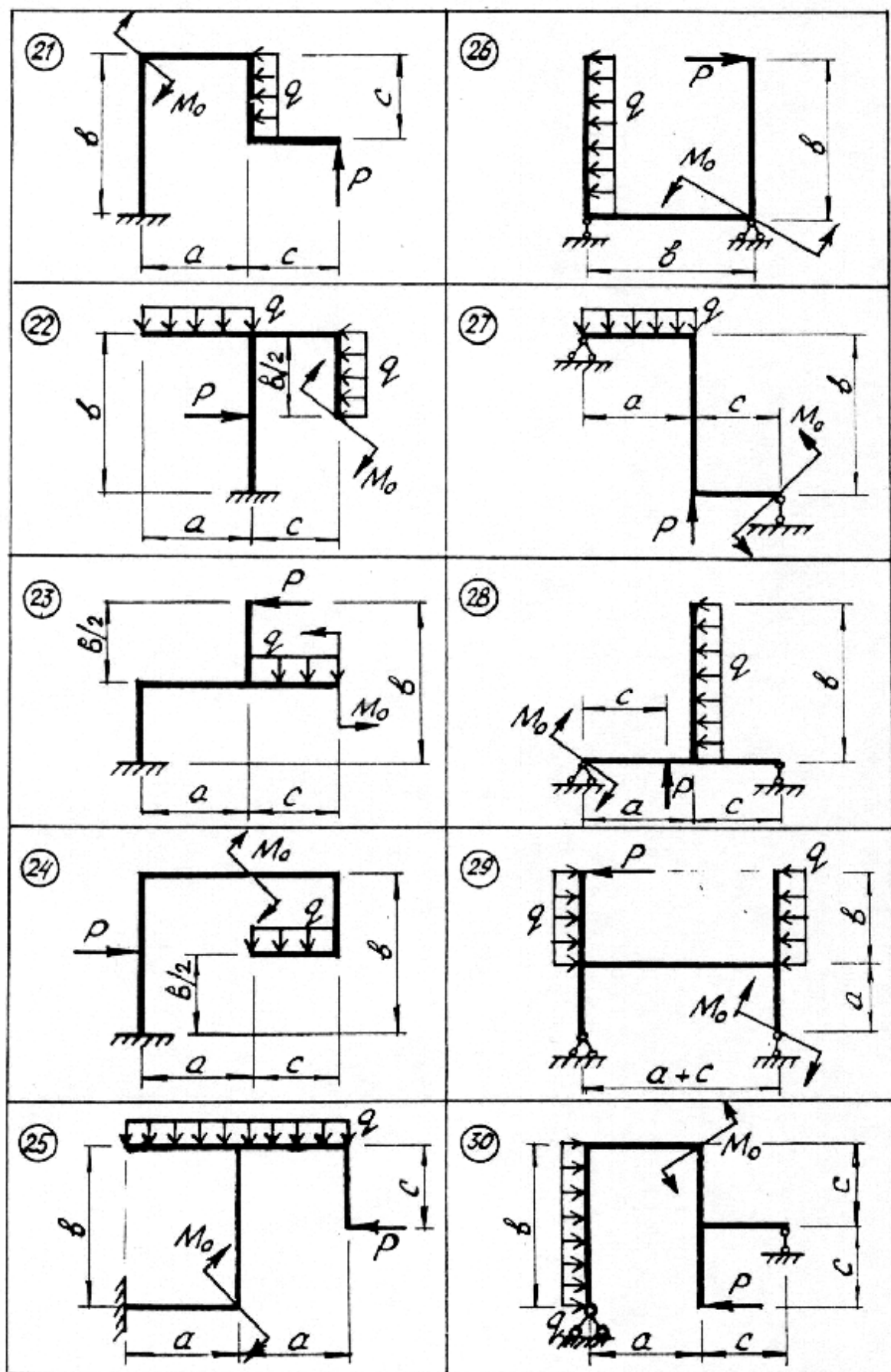


Рис. 5.15 (окончание)

Вопросы для самопроверки

Что называется плоским поперечным изгибом? Чем отличается балка от рамы? Какие внутренние силовые факторы возникают при плоском изгибе балок и рам? Правило знаков для внутренних силовых факторов. Дифференциальные зависимости при изгибе. Как определяются нормальные и касательные напряжения от соответствующих силовых факторов? Как проводится расчет на прочность с учетом возникающих в сечении поперечных сил и изгибающих моментов?

Литература: [1.] Глава 2, § 2.4-2.5; Глава 6, § 6.1-6.3; Глава 7, § 7.1-7.2.

[2.] Глава 5, § 5.1-5.6.

[3.] Глава 8, § 58-63, 66.

ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В БАЛКАХ И РАМАХ

6.1. Определение перемещений непосредственным интегрированием упругой линии балки

Как показывает опыт, реальные стержни, работающие в составе строительных конструкций, испытывают очень малые искривления. Основной вклад в эти деформации вносят изгибающие моменты, поэтому влиянием поперечных сил, как правило, пренебрегают. Деформации от изгиба характеризуются прогибами $v(z)$ и углами поворота сечений $\Theta(z)$, которые являются функциями от z (рис. 6.1).

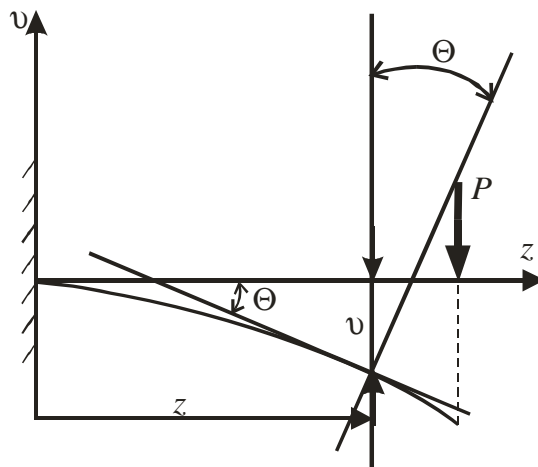


Рис. 6.1.

При малых углах поворота сечений Θ $\operatorname{tg}\Theta \approx \Theta \approx \frac{du}{dz} = u'$, а изогнутая ось балки или упругая линия балки может быть представлена приближенным дифференциальным уравнением

$$EI_x v'' = M, \quad (6.1)$$

где EI_x – жесткость балки; $v'' = \frac{d^2 v}{dz^2}$ – производная второго порядка от прогиба u ; M – изгибающий момент на участке.

Интегрируя (6.1) дважды можно получить выражения углов поворота и прогибов

$$\begin{aligned} EI_x v' &= EI_x \Theta = \int M dz + C_1, \\ EI_x v &= \int dz \int M dz + C_1 z + C_2, \end{aligned}$$

которые после определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 из условий закрепления балки, могут быть использованы для определения u и Θ .

6.2. Метод начальных параметров

Очевидно, что для балки с n участками необходимо определить $2n$ постоянных интегрирования и их вычисление становится громоздким. Однако путем искусственных приемов составления и интегрирования дифференциального уравнения упругой линии балки можно добиться равенства постоянных на всех участках и свести число постоянных к двум.

К таким приемам относятся:

1. Начало координат необходимо выбирать в крайней левой точке балки и делать его общим для всех участков.

2. Выражение для изгибающего момента $M(z)$ составлять, вычисляя моменты сил, расположенных слева от рассматриваемого сечения.

3. При включении в уравнение внешнего сосредоточенного момента M его нужно умножить на множитель $(z-a)^0$ равный единице. Здесь a – абсцисса точки, где приложен момент M .

4. В случае обрыва распределенной нагрузки (например, в сечении $z=d$, (рис. 6.2)) ее продлевают до конца балки, а для восстановления действительных грузовых условий вводят «компенсирующую» нагрузку обратного направления. «Продленную» и «компенсирующую» нагрузки принято показывать штриховыми линиями.

5. Интегрировать уравнение на всех участках следует, не раскрывая скобки.

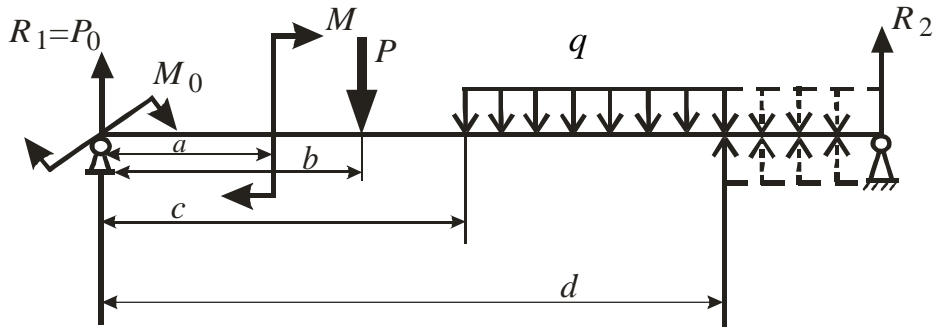


Рис. 6.2.

На рис. 6.2 изображена балка, нагруженная произвольной нагрузкой. Запишем для нее дифференциальное уравнение, используя перечисленные приемы.

$$EI_x u'' = M_0 + P_0 z \Big|_I + M(z-a) \Big|_II - P(z-b) \Big|_III - q \frac{(z-c)^2}{2} \Big|_IV + q \frac{(z-d)^2}{2} \Big|_V \quad (6.2)$$

Вертикальные линии с цифрами *I*, *II*, *III*, *IV*, *V* ограничивают моменты на первом, втором, третьем, четвертом и пятом участках балки. Моменты от каждого вида нагрузки записывают в порядке их расположения на балке.

Интегрируя уравнение (6.2) получим уравнение углов поворота:

$$EI_x u' = EI_x \Theta = EI_x \Theta_0 + M_0 z + P_0 \frac{z^2}{2} \Big|_I + M(z-a) \Big|_II - P \frac{(z-b)^2}{2} \Big|_III - q \frac{(z-c)^3}{6} \Big|_IV + q \frac{(z-d)^3}{6} \Big|_V \quad (6.3)$$

где Θ_0 – постоянная интегрирования, физический смысл которой – угол поворота в начале координат, т.е. при $z=0$.

Интегрируя уравнение (6.3) получим уравнение прогибов, называемое универсальным уравнением упругой линии балки.

$$EI_x u = EI_x u_0 + EI_x \Theta_0 z + M_0 \frac{z^2}{2} + P_0 \frac{z^3}{6} \Big|_I + M \frac{(z-a)^2}{2} \Big|_II - P \frac{(z-b)^3}{6} \Big|_III - q \frac{(z-c)^4}{24} \Big|_IV + q \frac{(z-d)^4}{24} \Big|_V \quad (6.4)$$

где u_0 – постоянная интегрирования, физической смысл которой – прогиб в начале координат.

u_0 , Θ_0 , M_0 , P_0 называются начальными параметрами. u_0 и Θ_0 определяют из условий закрепления балки, M_0 и P_0 – момент и сила в начале координат.

6.3. Интеграл Мора

На практике использовать аппарат дифференциальных уравнений для произвольной стержневой системы довольно громоздко. Кроме того, в большинстве случаев требуется вычислить только перемещения в конкретных точках конструкции по фиксированным направлениям. Эту задачу успешно решает метод немецкого ученого Мора.

Линейное или угловое перемещение сечения стержневой системы подверженной изгибу согласно этому методу может быть определено следующим интегралом:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \int_{l_i} \frac{M_{xi} \cdot \overline{M}_{xi}}{EJ_{xi}} dz, \quad (6.5)$$

где n – число участков упругой системы; M_{xi} -изгибающий момент на i -м участке от внешней нагрузки; \overline{M}_{xi} -изгибающий момент на i -м участке от силы равной безразмерной единице, приложенной в точку определения линейного перемещения или от момента равного единице, приложенного в точку определения углового перемещения; l_i – длина i -го участка; E -модуль продольной упругости; J_{xi} -осевой момент инерции сечения на i -м участке.

Для определения перемещения методом Мора необходимо проделать следующее:

1. Определить реакции опор от внешней нагрузки.
2. Разбить систему на участки. При разбиении системы на участки следует помнить, что точка определения перемещения рассматривается как граница участка.
3. На каждом участке определить выражения изгибающих моментов от внешней нагрузки M_{xi} .
4. Составить схему единичного нагружения, освободив систему от внешней нагрузки а в точку определения перемещения приложив единичную силу, если вычисляется линейное перемещение или единичный момент, если вычисляется угловое перемещение, и для тех же участков, что и для M_{xi} определить выражения изгибающих моментов от единичной нагрузки \overline{M}_{xi} . Составить интеграл Мора и вычислить искомое перемещение. Знак плюс полученного результата указывает на совпадение направления единичного усилия и перемещения, знак минус свидетельствует о противоположном направлении единичного усилия и перемещения.

6.4. Способ Верещагина

А.Н. Верещагин показал, что интеграл Мора, имеющий вид

$$J = \int M_i \overline{M}_i dz$$

где M_i – выражение грузового силового фактора, представленное линейной или параболической функцией, а \overline{M}_i – выражение единичного силового фактора, представленное линейной функцией, проще вычислять графоаналитическим способом. В этом случае

$$J = \int M_i \overline{M}_i dz = \omega_i \overline{M}_{ci},$$

где ω_i – площадь эпюры грузового силового фактора, \overline{M}_{ci} – значение единичного силового фактора под центром тяжести ω_i .

Тогда в упругих системах, подверженных изгибу перемещение определяется по формуле

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\omega_i \overline{M}_{ci}}{EI_{xi}} \quad (6.6)$$

где n – число площадей, на которые разбита эпюра моментов от нагрузки; ω_i – площади, на которые разбита грузовая эпюра; \overline{M}_{ci} – значение единичного момента под центром тяжести ω_i .

6.5. Пример определения перемещений в балке

Для заданной балки, схема которой с указанными на ней численными значениями нагрузок и размеров приведена на рис. 6.3, а, подобрать стандартный двутавр из условия прочности по нормальным напряжениям и, определив углы поворота и прогибы на конце консоли в середине пролета различными методами, провести проверку на жесткость. Если условие жесткости не удовлетворяется, то подобрать новое сечение из условия жесткости.

Решение:

Определяем реакции связей:

$$\sum M_A = P \cdot 6 - R_2 \cdot 4 - q \cdot 4 \cdot 2 + M_0 = 0,$$

$$R_2 = \frac{6P + M_0 - q \cdot 8}{4} = \frac{120 + 16 - 80}{4} = 14 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = P \cdot 2 + q \cdot 4 \cdot 2 + M_0 - R_1 \cdot 4 = 0,$$

$$R_1 = \frac{P \cdot 2 + q \cdot 8 + M_0}{4} = \frac{40 + 80 + 16}{4} = 34 \text{ кН}.$$

Проверка реакций:

$$\sum P_{iy} = R_1 - q \cdot 4 - R_2 + P = 34 - 40 - 14 + 20 = 0.$$

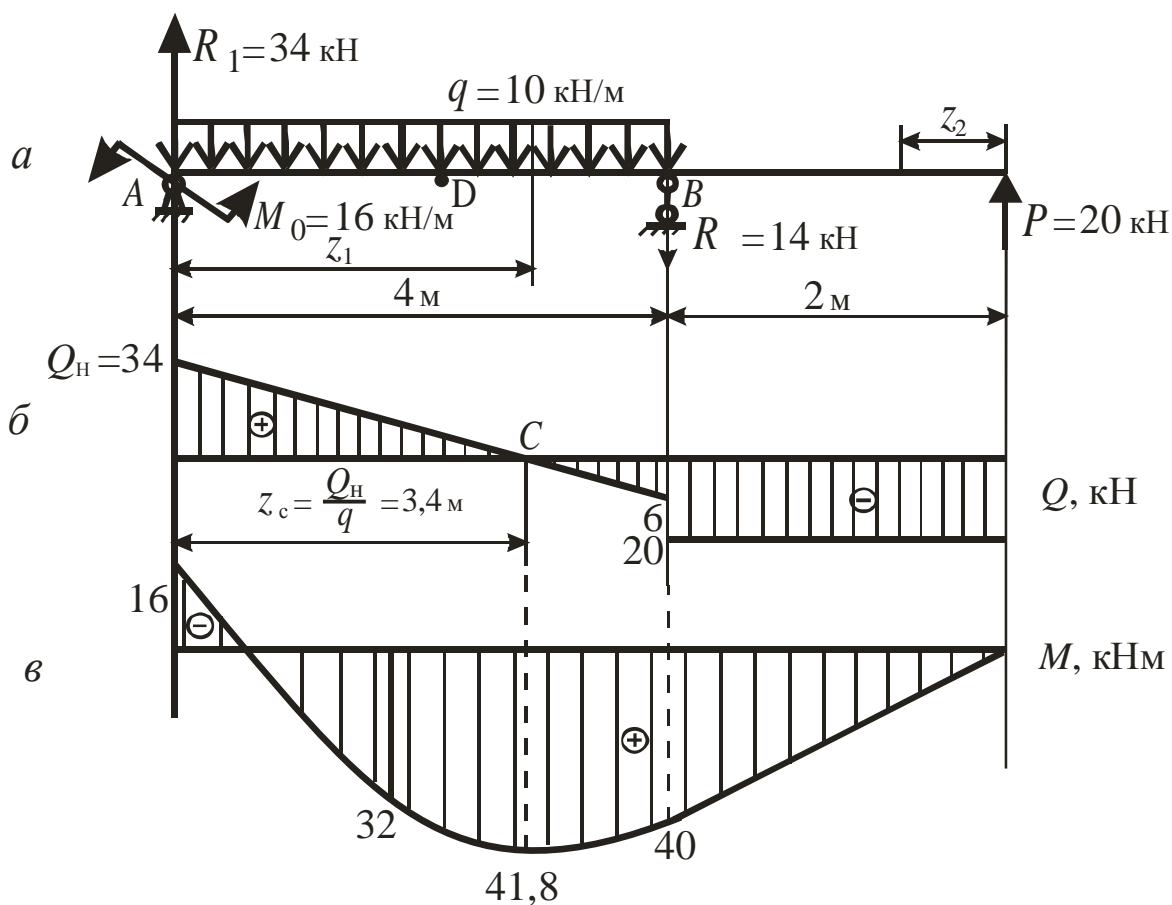


Рис. 6.3.

Строим эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (см. рис. 6.3, б, в):

1-й участок $0 < Z_1 < 4$

$$Q_1 = R_1 - qz_1; \quad Q_1(0) = R_1 = 34 \text{ кН}; \quad Q_1(4) = R_1 - q \cdot 4 = 34 - 40 = -6 \text{ кН};$$

$$M_1 = -M_0 + R_1 \cdot z_1 - q \frac{z_1^2}{2}; \quad M_1(0) = -M_0 = -16 \text{ кНм};$$

$$M_1(4) = -16 + 34 \cdot 4 - 10 \frac{16}{2} = 40 \text{ кНм};$$

$$z_c = \frac{Q_H}{q} = \frac{34}{10} = 3,4 \text{ м};$$

$$M_1(z_c) = M_1(3,4) = -16 + 34 \cdot 3,4 - 10 \frac{3,4^2}{2} = 41,8 \text{ кНм}$$

$$M_1(2) = -16 + 34 \cdot 2 - 10 \frac{4}{2} = 3 \text{ кНм};$$

2-й участок $0 < z_2 < 2$

$$Q_2 = -P = -20 \text{ кН};$$

$$M_2 = Pz_2; \quad M_2(0) = 0; \quad M_2(2) = 40 \text{ кНм}.$$

Подбираем двутавровое сечение из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$|S_{\max}| = \frac{|M|_{\max}}{W_x} \leq R, \quad |M|_{\max} = 41,8 \text{ кНм}, \quad R = 210 \text{ МПа}$$

для стали Ст. 3.

$$W_x \geq \frac{|M|_{\max}}{R} = \frac{41,8 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,199 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 199 \text{ см}^3.$$

Из сортамента ГОСТ 8239-89 ближайший номер двутавра с $W_x = 203 \text{ см}^3$. №20а и $I_x = 2030 \text{ см}^4$.

Определяем углы поворота и прогибы на конце консоли и в середине пролета методом начальных параметров (рис. 6.4).

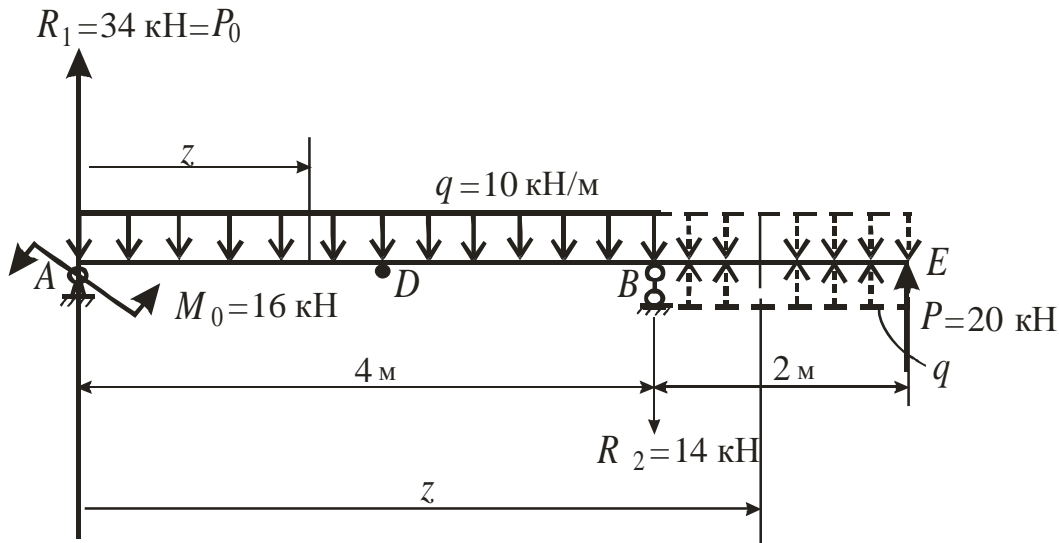


Рис. 6.4

Записываем дифференциальное уравнение упругой линии балки, соблюдая условия, при которых постоянных интегрирования будет только две и по смыслу они будут равны углу поворота и прогибу в начале балки (начало координаты z).

$$EI_x u'' = -M_0 + R_1 z - q \frac{z^2}{2} \Big|_I - R_2 (z-4) + q \frac{(z-4)^2}{2} \Big|_{II}$$

Интегрируем уравнение дважды

$$EI_x u' = EI_x \Theta = EI_x \Theta_0 - M_0 z + R_1 \frac{z^2}{2} + q \frac{z^3}{6} \Big|_I - R_2 \frac{(z-4)^2}{2} + q \frac{(z-4)^3}{6} \Big|_{II} \quad (6.7)$$

$$EI_x u = EI_x u_0 + EI_x \Theta_0 z - M_0 \frac{z^2}{2} + R_1 \frac{z^3}{6} - q \frac{z^4}{24} \Big|_I - R_2 \frac{(z-4)^3}{6} + q \frac{(z-4)^4}{24} \Big|_{II} \quad (6.8)$$

Определяем $EI_x \Theta_0$ и $EI_x u_0$ из условий закрепления балки:

при $z = 0$ $EI_x u(0) = 0 = EI_x u_0$;

при $z = 4$ м $EI_x u(4) = EI_x \Theta_0 \cdot 4 - M_0 \frac{4^2}{2} + R_1 \frac{4^3}{6} - q \frac{4^4}{24} = 0$,

откуда

$$EI_x \Theta_0 \cdot 4 = 16 \frac{16}{2} - 34 \frac{64}{6} + 10 \frac{256}{2} = -128.$$

$$EI_x \Theta_0 = -\frac{128}{4} = -32 \text{ кНм}^2.$$

Таким образом, уравнение углов поворота окончательно запишется так:

$$EI_x \Theta = -32 - 16 \cdot z + 17 \cdot z^2 - 1,67 \cdot z^3 \Big|_I - 7 \cdot (z-4)^2 + 1,67 \cdot (z-4)^3 \Big|_{II} \quad (6.9)$$

Уравнение прогибов:

$$EI_x u = -32 \cdot z - 8 \cdot z^2 + 5,67 \cdot z^3 - 0,417 \cdot z^4 \Big|_I - 2,33 \cdot (z-4)^3 + 0,417 \cdot (z-4)^4 \Big|_{II} \quad (6.10)$$

Далее будем определять $EI_x v$ и $EI_x \Theta$, называя их для краткости соответственно прогиб и угол поворота. Вычисляем угол поворота в середине пролета при $z = 2$ м (точка D), используя только часть уравнения для первого участка, т.е. до вертикальной линии I .

$$EI_x \Theta_D(2) = -32 - 16 \cdot 2 + 17^2 - 1,67 \cdot 2^3 = 9,36 \text{ кНм}^2.$$

Угол поворота на конце консоли, т.е. при $z = 6$ м (точка E), определим, используя всё уравнение (6.9):

$$\begin{aligned} EI_x \Theta_E &= -32 - 16 \cdot 6 + 17 \cdot 6^2 - 1,67 \cdot 6^3 - 7 \cdot 2^2 + 1,67 \cdot 2^3 = \\ &= -32 - 96 + 612 - 360,72 - 28 + 13,36 = 108,64 \text{ кНм}^2. \end{aligned}$$

Вычисляем прогиб в точке D :

$$EI_x u_D = -32 \cdot 2 - 8 \cdot 2^2 + 5,67 \cdot 2^3 - 0,417 \cdot 2^4 - 64 - 32 + 45,36 - 6,672 = -57,3 \text{ кНм}^3,$$

$$u_D = \frac{-57,312 \cdot 10^3}{EI_x} = \frac{-57,3 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 0,0141 \text{ м}.$$

Вычисляем прогиб в точке E при $z = 6$ м:

$$\begin{aligned} EI_x u_E &= -32 \cdot 6 - 8 \cdot 6^2 + 5,67 \cdot 6^3 - 0,417 \cdot 6^4 - 2,33 \cdot 2^3 + 0,417 \cdot 2^4 = \\ &= -192 - 288 + 1224,72 - 540,432 - 18,64 + 6,672 = 192,32 \text{ кНм}^3, \end{aligned}$$

$$u_E = \frac{192,32 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2030 \cdot 10^{-8}} = 0,0474 \text{ м}.$$

Проверяем жесткость балки на консоли и в середине пролета. Условие жесткости на консоли балки записывается так:

$$u_E \leq [f]_k = \frac{l_k}{400},$$

где $[f]_k$ – допустимый прогиб на консоли; l_k – длина консоли, м.

$$0,0474 \text{ м} > [f]_k = \frac{2}{400} = 0,005 \text{ м}.$$

Условие жесткости не удовлетворяется, поэтому подбираем сечение из условия жесткости

$$u_E = \frac{192,32 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} I_x} \leq 0,005 \text{ м},$$

$$I_x \geq \frac{192,32 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,005} = 19232 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4 = 19232 \text{ см}^4$$

Этому моменту инерции соответствует двутавр № 45 с $I_x = 27696 \text{ м}^4$.

Проверяем жесткость балки в середине пролета:

$$u_D \leq [f]_{\text{пр}},$$

где $[f]_{\text{пр}}$ – допускаемый прогиб в полете,

$$[f]_{\text{пр}} = \frac{l_{\text{пр}}}{300} = \frac{4}{300} = 0,0133 \text{ м},$$

прогиб в пролете для двутавра № 45

$$v_D = \frac{57,312 \cdot 10^3}{EI_x} = \frac{57,312 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^8 \cdot 27696 \cdot 10^{-8}} = 0,001 \text{ м}.$$

$v_D < [f]_{\text{пр}}$ – условие жесткости в пролете удовлетворяется.

Определение прогибов и углов поворота методом Мора

1. Определяем угол поворота сечения в точке D .

а) Разбиваем балку на участки с учетом того, что точка определения перемещения является границей участков (рис. 6.5, а): $0 \leq z_1 \leq 2$ м; $0 \leq z_2 \leq 2$ м; $0 \leq z_3 \leq 2$ м.

б) Записываем выражения моментов на каждом участке от нагрузки, приводя их к простому виду.

$$M_1 = R_1 z_1 - M_0 - q \frac{z_1^2}{2} = -16 + 34z_1 - 5z_1^2$$

$$M_2 = P(2 + z_2) - R_2 \cdot z_2 - q \frac{z_2^2}{2} = 40 + 20z_2 - 14z_2 - 10 \frac{z_2^2}{2} = 40 + 6z_2 - 5z_2^2$$

$$M_3 = Pz_3 = 20z_3$$

в) В точку D приложим момент равный единице, определим реакции связей (рис. 6.5, б) и для тех же участков запишем выражения моментов.

$$\bar{M}_1 = \bar{R}_1 \cdot z_1 = \frac{1}{4} z_1; \bar{M}_2 = -\bar{R}_2 z_2 = -\frac{1}{4} z_2 \quad \bar{M}_3 = 0$$

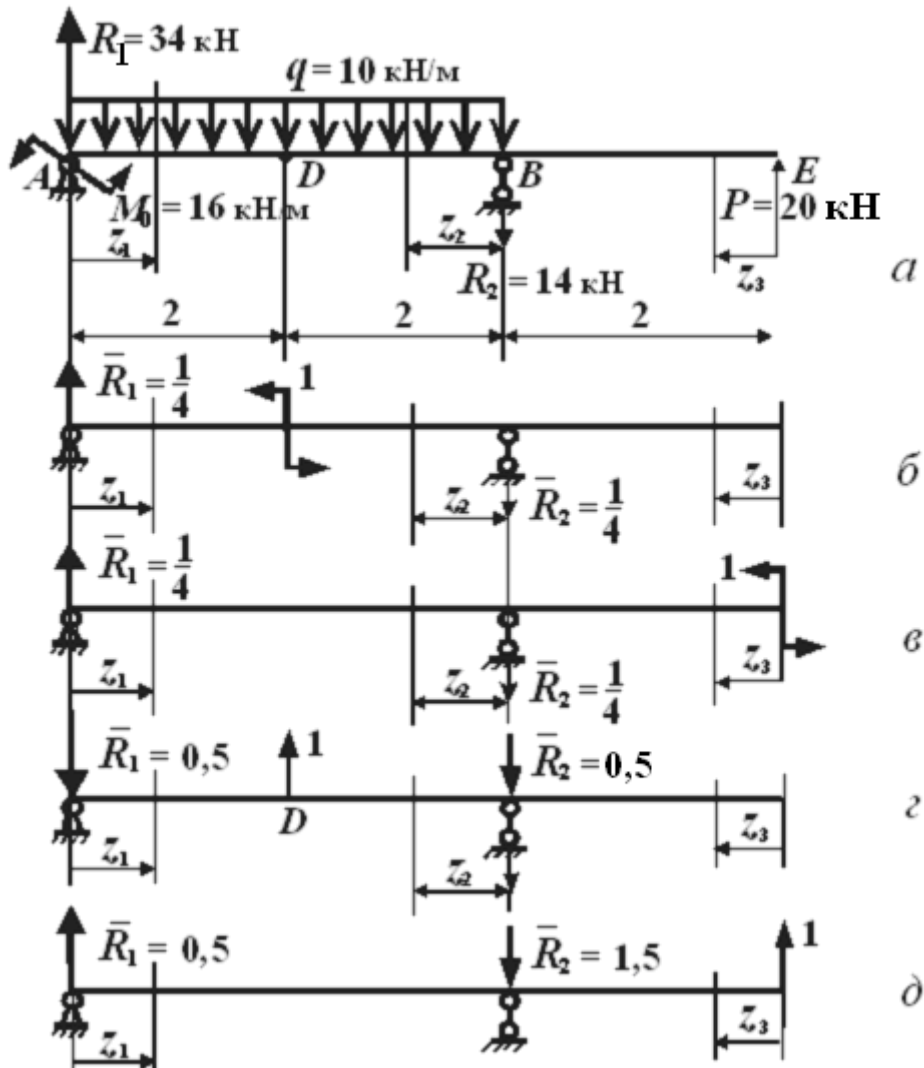


Рис. 6.5.

г) Записываем интегралы Мора и вычисляем $EI_x \Theta_D$

$$\begin{aligned}
 EI_x \Theta_D &= \int_0^2 M_1 \bar{M}_1 dz + \int_0^2 M_2 \bar{M}_2 dz + \int_0^2 M_3 \bar{M}_3 dz = \\
 &= \int_0^2 \left(-16 + 34z_1 - 5z_1^2 \right) \left(\frac{1}{4} z_1 \right) dz + \int_0^2 \left(40 + 6z_2 - 5z_2^2 \right) \left(-\frac{1}{4} z \right) dz + \int_0^2 20z_3 \cdot 0 \cdot dz = \\
 &= -\frac{16}{4} \cdot \frac{2^2}{2} + \frac{34}{4} \cdot \frac{2^3}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{2^4}{4} - \frac{40}{4} \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{6}{4} \cdot \frac{2^3}{3} + \frac{5}{4} \cdot \frac{2^4}{4} = -9,67 \text{ кНм}^2.
 \end{aligned}$$

2. Определяем угол поворота в точке E .

В этом случае балка разбивается на 2 участка (см. рис. 6.5, а):

$$0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}; \quad 0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}.$$

Соответственно грузовые моменты на этих участках

$$M_1 = -16 + 34z_1 - 5z_1^2; \quad M_3 = 20z_3.$$

Для определения единичных моментов \bar{M}_1 и \bar{M}_3 в точке E приложим момент, равный единице (рис. 6.5, в), вычислим реакции \bar{R}_1 и \bar{R}_2 .

$$\text{Тогда } \bar{M}_1 = \frac{1}{4} z_1; \quad \bar{M}_3 = 1.$$

Записываем интегралы Мора по участкам и вычисляем их

$$\begin{aligned}
 EI_x \Theta_E &= \int_0^4 \left(-16 + 34 \cdot z_1 - 5z_1^2 \right) \left(\frac{1}{4} z_1 \right) dz + \int_0^2 20 \cdot z_3 \cdot 1 \cdot dz = \\
 &= -\frac{16}{4} \cdot \frac{4^2}{2} + \frac{34}{4} \cdot \frac{4^3}{3} - \frac{5}{4} \cdot \frac{4^4}{4} + 20 \frac{2^2}{2} = 109,33 \text{ кНм}^2.
 \end{aligned}$$

3. Определяем прогиб в точке D .

Балку разбиваем на три участка (см. рис. 6.5, а)

$$0 \leq z_1 \leq 2 \text{ м}; \quad 0 \leq z_2 \leq 2 \text{ м}; \quad 0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}.$$

Грузовые моменты

$$M_1 = -16 + 34z_1 - 5z_1^2; \quad M_2 = 40 + 6z_2 - 5z_2^2; \quad M_3 = 20z_3.$$

Для определения единичных моментов прикладываем в точку D силу равную единице (рис. 6.5, z), вычисляем реакции \bar{R}_1 и \bar{R}_2 , и записываем единичные моменты на тех же участках:

$$\bar{M}_1 = -0,5 \cdot z_1; \quad \bar{M}_3 = 0; \quad \bar{M}_2 = -0,5 \cdot z_2.$$

$$\begin{aligned} EI_x v_D &= \int_0^2 (-16 + 34z_1 - 5z_1^2)(-0,5z_1) \cdot dz + \int_0^2 (40 + 6z_2 - 5z_2^2)(-0,5z_2) \cdot dz = \\ &= \frac{16}{2} \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{34}{2} \cdot \frac{2^3}{3} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2^4}{4} = \frac{40}{2} \cdot \frac{2^2}{2} - \frac{6}{2} \cdot \frac{2^3}{3} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2^4}{4} = \\ &= 16 - 45,33 + 10 - 40 - 8 + 10 = -57,33 \text{ кНм}^3. \end{aligned}$$

4. Определяем прогиб в точке E .

Балку разбиваем на два участка (см. рис. 6.5, a)

$$0 \leq z_1 \leq 4 \text{ м}; \quad 0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}.$$

Грузовые моменты на этих участках

$$M_1 = -16 + 34z_1 - 5z_1^2; \quad M_3 = 20z_3.$$

В точку E приложим силу равную единице, определим реакции \bar{R}_1 и \bar{R}_2 (рис. 6.5, d) и для тех же участков запишем единичные моменты.

$$\bar{M}_1 = 0,5 \cdot z_1; \quad \bar{M}_3 = 1 \cdot z_3.$$

$$\begin{aligned} EI_x v_E &= \int_0^4 (-16 + 34z_1 - 5z_1^2) \cdot 0,5z_1 dz + \int_0^2 20z_3 \cdot z_3 dz = \\ &= -\frac{16}{2} \cdot \frac{4^2}{2} + \frac{34}{2} \cdot \frac{4^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot \frac{4^4}{4} + 20 \frac{z^3}{3} = -64 + 362,67 - 160 + 53,33 = 192 \text{ кНм}^3. \end{aligned}$$

Определение прогибов и углов поворота способом Верещагина

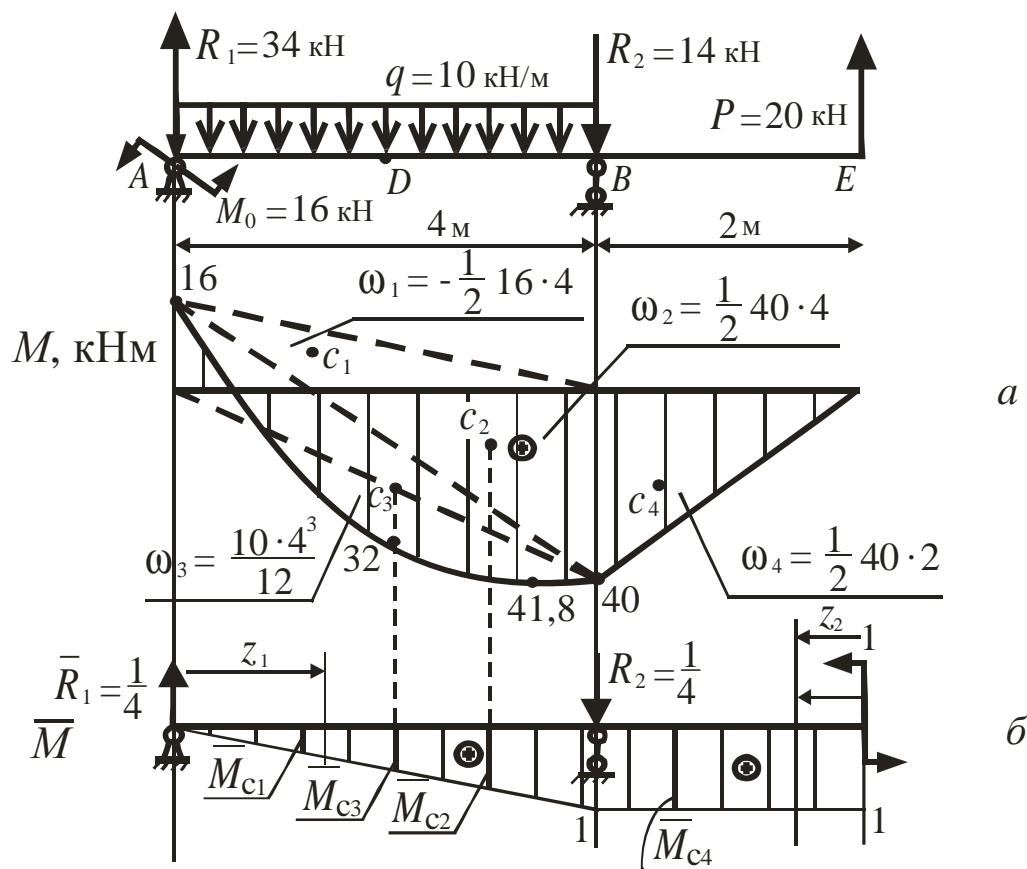


Рис. 6.6.

1. Определяем угол поворота в точке E .

а) Строим грузовую эпюру моментов (рис. 6.6, а).

б) Строим эпюру единичных моментов от момента, равного единице, приложенного в точке E (рис. 6.6, б).

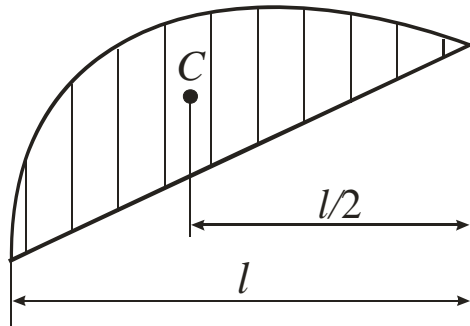
в) Грузовую эпюру делим на простые площади и вычисляем их (рис. 6.6, а)

$$w_1 = -\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 4 = -32 \text{ кНм}^2; \quad w_2 = -\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 4 = 80 \text{ кНм}^2;$$

$$w_3 = -\frac{10 \cdot 4^3}{12} = 53,33 \text{ кНм}^2; \quad w_4 = -\frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 = 40 \text{ кНм}^2.$$

Для определения ω_i пользуемся известными формулами (табл. 6.1).

Таблица 6.1

№	Форма площади и положение центра тяжести	Формула площади ω
1		$\frac{1}{2}lh$
2		$\frac{ql^3}{12}$

г) Вычисляем единичные моменты \bar{M}_{ci} под центром тяжести площадей ω_i . Для этого можно воспользоваться выражениями единичных моментов на участках. Так, для определения $\bar{M}_{c1}, \bar{M}_{c2}, \bar{M}_{c3}$ воспользуемся выражением единичного момента на первом участке ($0 \leq z_1 \leq 4$):

$$\bar{M}_1 = \bar{R}_1 z_1 = \frac{1}{4} z_1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{M}_{c1} &= \frac{1}{4} z_{c1} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{1}{3}; & \bar{M}_{c2} &= \frac{1}{4} z_{c2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{2}{3}; \\ \bar{M}_{c3} &= \frac{1}{4} z_{c3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где z_{ci} — расстояние от начала участка до центра тяжести ω_i .

На втором участке $0 \leq z_2 \leq 2$, $\bar{M}_2 = 1$, поэтому $\bar{M}_{c4} = 1$.

д) Вычисляем $EI_x \Theta_E$:

$$EI_x \Theta_E = \omega_1 \bar{M}_{C1} + \omega_2 \bar{M}_{C2} + \omega_3 \bar{M}_{C3} + \omega_4 \bar{M}_{C4} =$$

$$= -32 \cdot \frac{1}{3} + 80 \cdot \frac{2}{3} + 53,33 \cdot \frac{1}{2} + 40 \cdot 1 = 109,32.$$

2. Определяем прогиб в точке E .

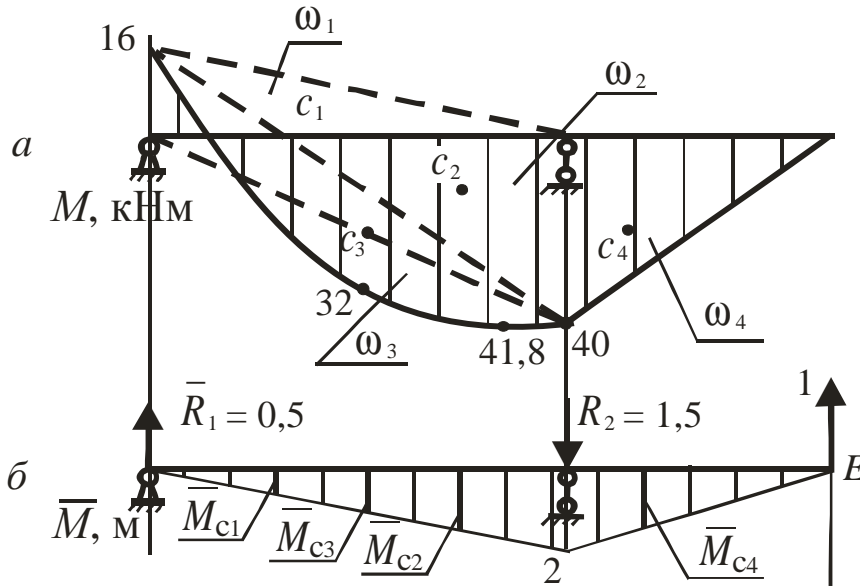


Рис. 6.7.

а) Представляем грузовую эпюру (рис. 6.7, а).

б) Строим эпюру единичных моментов от силы равной единице, приложенной в точку E (рис. 6.7, б).

в) Разбиваем грузовую эпюру и определяем ω_i :

$$w_1 = -32 \text{ кНм}^2; w_2 = 80 \text{ кНм}^2; w_3 = 53,33 \text{ кНм}^2; w_4 = 40 \text{ кНм}^2.$$

г) Определяем \bar{M}_{ci} :

$$\bar{M}_{C1} = 0,5 \cdot \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{2}{3}; \quad \bar{M}_{C2} = 0,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{4}{3}; \quad \bar{M}_{C3} = 0,5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 = 1;$$

$$\bar{M}_{C4} = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}.$$

д) Вычисляем

$$EI_x u_E = \sum_{i=1}^4 w_i \bar{M}_{ci} = -32 \cdot \frac{2}{3} + 80 \cdot \frac{4}{3} + 53,33 \cdot 1 + 40 \cdot \frac{4}{3} = 192 \text{ кНм}^2.$$

3. Определяем угол поворота в точке D .

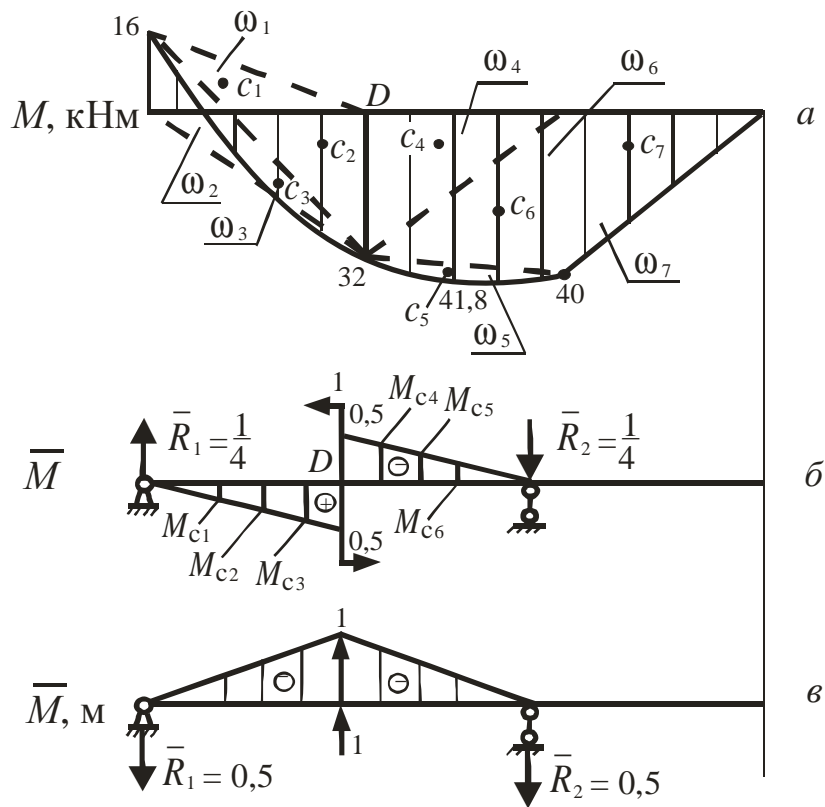


Рис. 6.8.

- а) Изобразим грузовую эпюру (рис. 6.8, а).
 б) Строим единичную эпюру от момента, равного единице, приложенного в точке D (рис. 6.8, б).
 в) Разбиваем грузовую эпюру на площади согласно правилу о необходимости делить грузовую эпюру в том сечении, где единичная эпюра ломается (точка D) (рис. 6.8, б).
 г) Определяем площади ω_i :

$$w_1 = -\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 2 = -16 \text{ кНм}^2; \quad w_2 = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 2 = 32 \text{ кНм}^2;$$

$$w_3 = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 6,67 \text{ кНм}^2; \quad w_4 = \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 2 = 32 \text{ кНм}^2;$$

$$w_5 = \frac{10 \cdot 2^3}{12} = 6,67 \text{ кНм}^2; \quad w_6 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 = 40 \text{ кНм}^2;$$

$$w_7 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 2 = 40 \text{ кНм}^2.$$

- д) Определяем \bar{M}_{ci} :

$$\begin{aligned}\bar{M}_{c1} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{1}{6}; \quad \bar{M}_{c2} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{1}{3}; \quad \bar{M}_{c3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = \frac{1}{4}; \\ \bar{M}_{c4} &= -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 = -\frac{1}{3}; \quad \bar{M}_{c5} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = -\frac{1}{4}; \quad \bar{M}_{c6} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 = -\frac{1}{6}; \\ \bar{M}_{c7} &= 0.\end{aligned}$$

е) Вычисляем $EI_x \Theta_D$:

$$EI_x \Theta_D = \sum_{i=1}^7 w_i \bar{M}_{ci} = -16 \cdot \frac{1}{6} + 32 \cdot \frac{1}{3} + 6,67 \cdot \frac{1}{4} - 32 \cdot \frac{1}{3} - 6,67 \cdot \frac{1}{4} - 40 \cdot \frac{1}{6} = -9,34 \text{ кНм}^2$$

3. Определяем прогиб в точке D . Для определения $EI_x u_D$ возьмем площади ω_i , показанные на рис. 7.8, a и вычисленные при определении $EI_x \Theta_D$. Значения единичных моментов под центрами тяжести ω_i найдем на эпюре (рис. 6.8, b).

$$\begin{aligned}\bar{M}_{c1} &= -\frac{1}{3} \cdot 1; \quad \bar{M}_{c2} = -\frac{2}{3} \cdot 1; \quad \bar{M}_{c3} = -\frac{1}{2} \cdot 1; \quad \bar{M}_{c4} = -\frac{2}{3} \cdot 1; \\ \bar{M}_{c5} &= -\frac{1}{3} \cdot 1; \quad \bar{M}_{c6} = -\frac{1}{2} \cdot 1; \quad \bar{M}_{c7} = 0.\end{aligned}$$

Следовательно

$$\begin{aligned}EI_x u_D &= 16 \cdot \frac{1}{3} - 32 \cdot \frac{2}{3} - 6,67 \cdot \frac{1}{2} - 32 \cdot \frac{2}{3} - 40 \cdot \frac{1}{3} - 6,67 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= 5,33 - 21,33 - 3,33 - 21,33 - 13,33 - 3,33 = -57,32 \text{ кНм}^3.\end{aligned}$$

Сравнивая перемещения, определенные разными методами отмечаем, что как правило они отличаются в 3-й цифре.

Такое расхождение вызвано округлением результатов при расчете и допустимо. Максимальное отклонение результатов не должно быть больше 5%.

6.6 Пример определения перемещений в раме

Для заданной рамы подобрать двутавр из условия прочности и определить способом Верещагина перемещения в указанных сечениях.

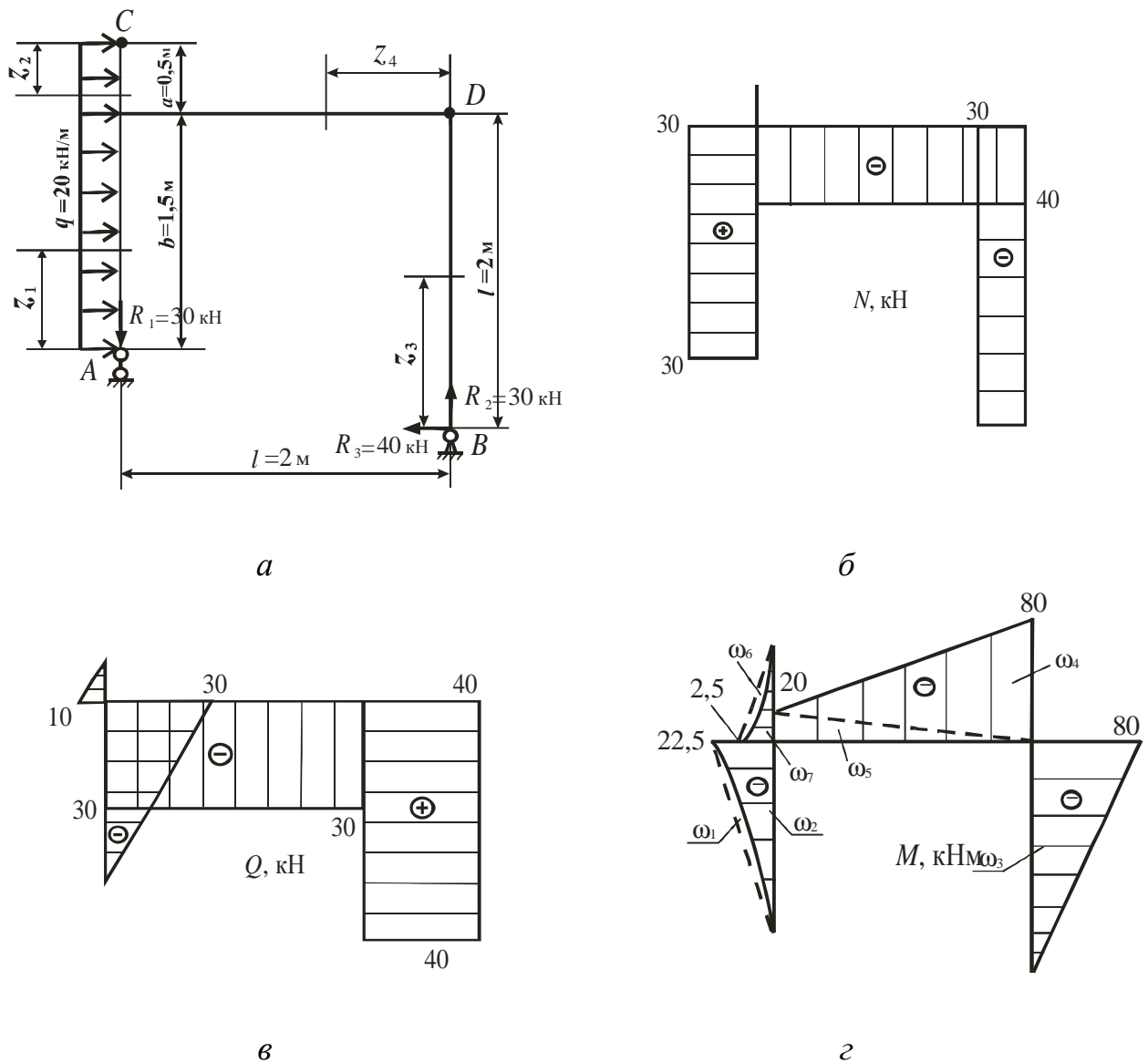


Рис. 6.9.

1. Вычерчиваем раму с указанием на ней численных значений заданных величин (рис. 6.9, а).

2. Строим эпюры нормальных сил, поперечных сил и изгибающих моментов

а) Определяем реакции опор, при этом принимаем x – горизонтальная ось, y – вертикальная ось:

$$\sum M_B = -q \cdot 2 \cdot 1,5 + R_1 \cdot 2 = 0; \Rightarrow R_1 = 30\text{ кН.}$$

$$\sum P_{ix} = q \cdot 2 - R_3 = 0; \Rightarrow R_3 = 40\text{ кН.}$$

$$\sum M_A = q \cdot 2 \cdot 1 - R_3 \cdot 0,5 + R_2 \cdot 2 = 0; \Rightarrow R_2 = 30\text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum P_{iy} = -R_1 + R_2 = -30 + 30 = 0.$$

б) Разбиваем раму на участки (рис. 6.9, а):

$$0 \leq z_1 \leq 1,5 \text{ м}; 0 \leq z_2 \leq 0,5 \text{ м}; 0 \leq z_3 \leq 2 \text{ м}; 0 \leq z_4 \leq 2 \text{ м}.$$

в) Строим эпюру нормальных сил N

$$N_1 = R_1 = 30 \text{ кН}; N_2 = 0; N_3 = -R_2 = -30 \text{ кН}, \\ N_4 = -R_3 = -40 \text{ кН. (рис. 6.9, в).}$$

г) Строим эпюру поперечных сил Q (рис. 6.9, в)

$$Q(z_1) = -qz_1; Q_1(0) = 0; Q_1(1,5) = -30 \text{ кН}, \\ Q(z_2) = -qz_2; Q_2(0) = 0; Q_2(0,5) = 10 \text{ кН}, \\ Q(z_3) = R_3 = 40 \text{ кН}; Q_4 = -R_2 = -30 \text{ кН}.$$

д) Строим эпюру моментов (рис. 6.9, г)

$$M(z_1) = -q \frac{z_1^2}{2}; M_1(0) = 0; M_1(1,5) = -22,5 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M(z_2) = -q \frac{z_2^2}{2}; M_2(0) = 0; M_2(0,5) = -2,5 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M(z_3) = -R_3 \cdot z_3; M_3(0) = 0; M_3(2) = -80 \text{ кН} \cdot \text{м}, \\ M(z_4) = -R_2 \cdot z_4 - R_3 \cdot 2; M_4(0) = -80; M_4(2) = -20 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Подбираем двутавр по нормальным напряжениям

$$S_{\max} = \frac{|M|_{\max}}{W_x} \leq R,$$

$$R = 210 \text{ МПа для стали, } |M|_{\max} = 80 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Из условия прочности

$$W_x \geq \frac{|M|_{\max}}{R} = \frac{80 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 0,381 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 381 \text{ см}^3.$$

Ближайший больший по W_x двутавр № 27а, $W_x = 407 \text{ см}^3$,
 $I_x = 5500 \text{ см}^4$.

4. Способом Верещагина определяем:

а) Горизонтальное перемещение точки А.

Приложим в точку А силу равную единице в горизонтальном направлении и построим эпюру моментов (рис. 6.10).

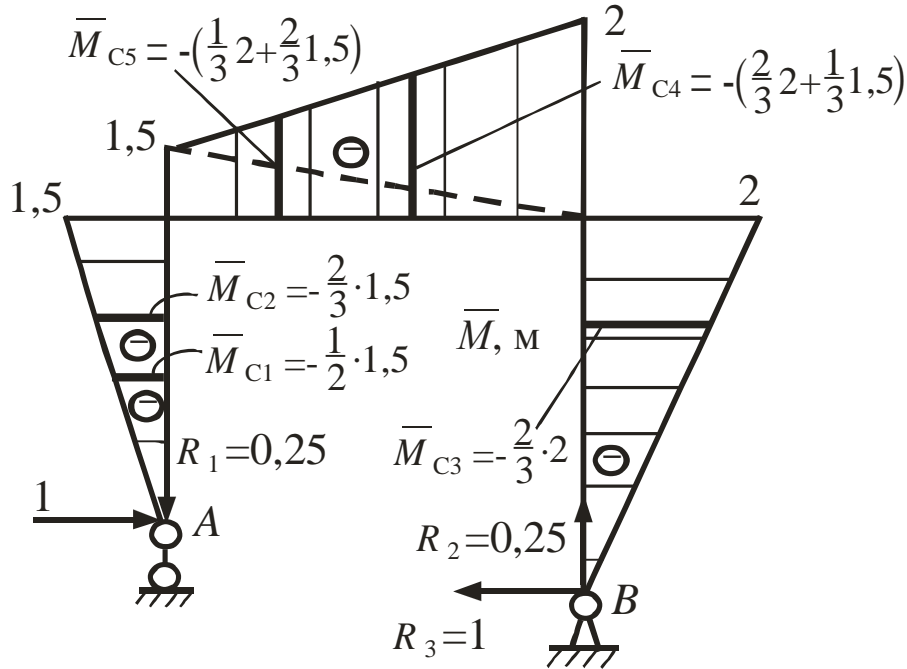


Рис. 6.10.

$$\begin{aligned}\sum P_{ix} &= 1 - R_3 = 0 \Rightarrow R_3 = 1, \\ \sum M_B &= R_1 \cdot 2 - 1 \cdot 0.5 = 0 \Rightarrow R_1 = 0.25, \\ \sum P_{iy} &= -R_1 + R_2 = 0 \Rightarrow R_2 = 0.25, \\ \overline{M}_1 &= -1 \cdot z_1; \quad \overline{M}_1(0) = 0; \quad \overline{M}_1(1.5) = -1.5, \\ \overline{M}_2 &= 0; \quad \overline{M}_3 = -R_3 \cdot z_3; \quad \overline{M}_3(0) = 0; \quad \overline{M}_3(2) = -2, \\ \overline{M}_4 &= -1.5.\end{aligned}$$

Разбиваем грузовую эпюру (рис. 6.9, з) на простые площади и вычисляем их:

$$w_1 = \frac{ql_1^3}{12} = \frac{20 \cdot 1.5^3}{12}; \quad w_2 = -\frac{1}{2} b_2 h_2 = -\frac{1}{2} 22.5 \cdot 1.5; \quad w_3 = -\frac{1}{2} b_3 h_3 = -\frac{1}{2} 80 \cdot 2;$$

$$w_4 = -\frac{1}{2}h_4b_4 = -\frac{1}{2}80 \cdot 2; \quad w_5 = -\frac{1}{2}h_5b_5 = -\frac{1}{2}20 \cdot 2; \quad w_6 = \frac{ql_6^3}{12} = \frac{20 \cdot 0.5^3}{12};$$

$$w_7 = -\frac{1}{2}2,5 \cdot 0,5.$$

Единичные моменты \overline{M}_{ci} можно определять, используя выражения единичных моментов на участках $\overline{M}_1, \overline{M}_2, \overline{M}_3, \overline{M}_4$, а можно вычислять, используя подобие треугольников, образованных единичной эпюрой на участке и моментом \overline{M}_c (рис. 6.11).

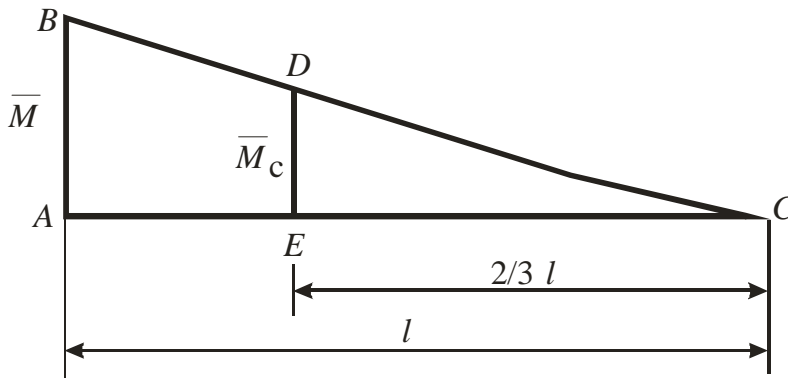


Рис. 6.11.

Так, в треугольной эпюре ABC момент M_c образует подобный треугольник DEC , в котором $\frac{EC}{AC} = \frac{DE}{AB}$.

$$\text{Откуда } DE = \overline{M}_c = \frac{EC}{AC} \cdot AB = \frac{EC}{AC} \cdot \overline{M}.$$

Если $\frac{EC}{AC} = \frac{2}{3}$, как показано на рисунке, то $\overline{M}_c = \frac{2}{3}\overline{M}$, если $\frac{EC}{AC} = \frac{1}{3}$, то $\overline{M}_c = \frac{1}{3}\overline{M}$ и т.д.

\overline{M}_{ci} , показанные на рис. 6.10, определены именно так.

Перемножая площади ω_i грузовой эпюры (рис. 6.9, а) на значения единичных моментов под центрами тяжести ω_i и складывая результаты, получим горизонтальное перемещение точки А:

$$EI_x u_{A\Gamma} = w_1 \overline{M}_{c1} + w_2 \overline{M}_{c2} + w_3 \overline{M}_{c3} + w_4 \overline{M}_{c4} + w_5 \overline{M}_{c5} =$$

$$= -\frac{20 \cdot 1,5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 1,5 + \frac{1}{2} 22,5 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} 1,5 + \frac{1}{2} 80 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 2 + \frac{1}{2} 80 \cdot 2 \left(\frac{2}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} 1,5 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} 20 \cdot 2 \left(\frac{1}{3} 2 + \frac{2}{3} 1,5 \right) = -4,22 + 16,875 + 106,67 + 146,67 + 33,4 = 299,39 \text{ кНм}^3,$$

$$u_{\text{АГ}} = \frac{299,39 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = 0,027 \text{ м.}$$

б) Угол поворота сечения B .

В точку B приложим единичный момент и построим единичную эпюру моментов (рис. 6.12).

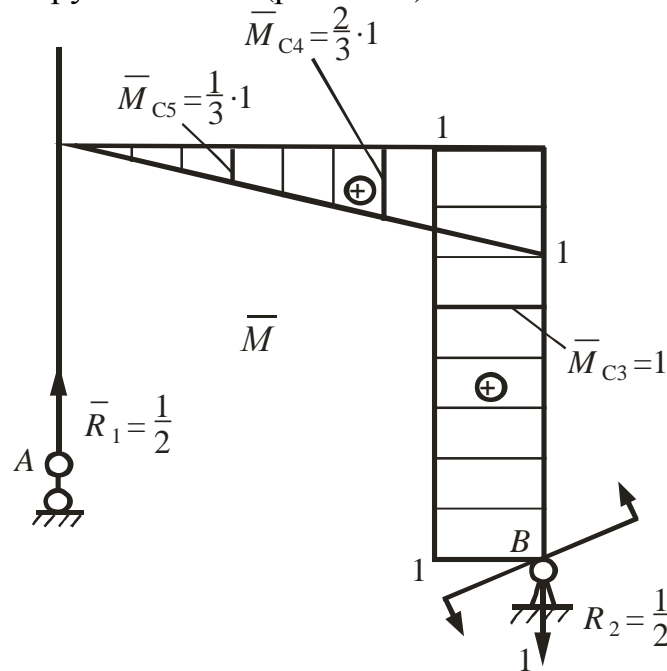


Рис. 6.12.

$$\sum M_B = -R_1 \cdot 2 + 1 = 0 \Rightarrow R_1 = \frac{1}{2} = R_2,$$

$$M_1 = 0; M_2 = 0; M_3 = 1; M_4 = 1 - R_2 z_4; M_4(0) = 1; M_4(2) = 0$$

$$EI_x \Theta_B = w_3 \bar{M}_{C3} + w_4 \bar{M}_{C4} + w_5 \bar{M}_{C5} = -\frac{1}{2} 80 \cdot 2 \cdot 1 - \frac{1}{2} 80 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{1}{2} 20 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 =$$

$$= -80 - 53,33 - 6,67 = -140 \text{ кН}^2;$$

$$Q_B = \frac{-140 \cdot 10^3}{EI_x} = -\frac{140 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = 0,0127 \text{ рад.}$$

в) Взаимное перемещение точек C и D . В точки C и D прикладываем противоположно направленные горизонтальные силы равные единице и строим эпюру изгибающих моментов (рис. 6.13).

$$\sum M_B = -1 \cdot 2,5 + 1 \cdot 2 + R_1 \cdot 2 = 0$$

$$R_1 = \frac{2,5 - 2}{2} = 0,25$$

$$R_2 = R_1 = 0,25$$

$$R_3 = 0$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_1 &= 0; \bar{M}_2 = -1 \cdot z_2; \bar{M}_2(0) = 0; \bar{M}_2(0,5) = -0,5; \bar{M}_3 = 0; \bar{M}_4 = \bar{R}_2 \cdot z_4; \\ \bar{M}_4(0) &= 0; \bar{M}_4(2) = 0,25 \cdot 2 = 0,5. \\ \bar{M}_{C_1} = \bar{M}_{C_2} = \bar{M}_{C_3} &= 0; \bar{M}_{C_4} = \frac{1}{3} 0,5; \bar{M}_{C_5} = \frac{2}{3} 0,5; \bar{M}_{C_6} = -\frac{1}{2} 0,5; \bar{M}_{C_7} = -\frac{2}{3} 0,5. \\ EI_x u_{C-D} &= w_4 \bar{M}_{C_4} + w_5 \bar{M}_{C_5} + w_6 \bar{M}_{C_6} + w_7 \bar{M}_{C_7} = \\ &= -\frac{1}{2} 80 \cdot 2 \frac{1}{3} 0,5 - \frac{1}{2} 20 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} 0,5 - \frac{20 \cdot 0,5^3}{12} \cdot \frac{1}{2} 0,5 + \frac{1}{2} 2,5 \cdot 0,5 \cdot \frac{2}{3} 0,5 = \\ &= -13,33 - 6,67 - 0,052 + 0,625 = -19,427 \text{ кНм}^3.\end{aligned}$$

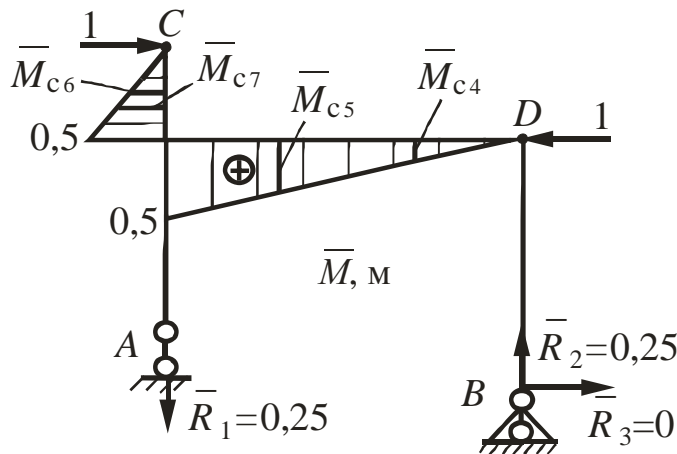


Рис. 6.13.

Расстояние между точками C и D уменьшилось на величину

$$u_{C-D} = \frac{-19,427 \cdot 10^3}{EI_x} = \frac{-19,427 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 5500 \cdot 10^{-8}} = -0,0018 \text{ м.}$$

Вопросы для самопроверки

1. Что называется прогибом u и углом поворота Θ ?
2. Какая связь между u и Θ ?
3. Как записывается приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки?
4. Какие приемы записи дифференциального уравнения и его интегрирования позволяют свести число постоянных интегрирования к двум?
5. Каков физический смысл этих постоянных интегрирования?
6. Какие величины относят к начальным параметрам?

7. Что называется универсальным уравнением упругой линии балки?
8. Из каких условий определяют начальные параметры?
9. Как записывается интеграл Мора в общем случае нагружения?
10. Какая часть общего выражения интеграла Мора используется для упругих систем подверженных только растяжению или сжатию, только изгибу?
11. В каком порядке производится определение линейных и угловых перемещений по формуле Мора?
12. Как вычисляется интеграл Мора способом Верещагина?
13. В каком порядке производится определение линейных и угловых перемещений способом Верещагина?
14. Что необходимо сделать с грузовой эпюрой в сечении, где единичная эпюра моментов ломается?
15. Что означает знак у перемещения, вычисленного интегралом Мора или способом Верещагина?

Литература: [1.] Глава 8, § 8.1-8.3., 8.5, 8.9.

[3.] Глава IX, § 74-77, 80.

6.7. Контрольное задание 11. Определение перемещений в балках

Для заданной балки подобрать стандартный двутавр из условия прочности и, исследовав её деформацию различными методами, произвести проверку на жесткость.

Схема балки приведена на рис.6.14, численные данные – в табл.6.2.

Таблица 6.2

Цифры шифра	1-я	2-я	3-я	4-я	5-я
	схема	l , м	a , м	q , кН/м	M_0 , кН·м
1	1, 11, 21	1,6	0,2	6	18
2	2, 12, 22	1,8	0,3	7	20
3	3, 13, 23	2,0	0,4	8	24
4	4, 14, 24	2,2	0,5	9	28
5	5, 15, 25	2,4	0,6	10	30
6	6, 16, 26	2,8	0,8	12	32
7	7, 17, 27	3,0	0,9	14	36
8	8, 18, 28	3,2	1,0	15	40
9	9, 19, 29	3,6	1,2	16	42
0	10, 20, 30	4,0	1,4	20	45

Содержание и порядок выполнения работы:

1. Вычертить схему балки, указать численные значения заданных величин.
2. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.
3. Подобрать двутавр из условия прочности по нормальным напряжениям.
4. Определить углы поворота и прогибы методом начальных параметров в четырех сечениях балки (над опорами, посередине пролета и на конце консоли).
5. Проверить найденные в п.4 перемещения методом Мора и способом Верещагина.
6. Построить эпюры углов поворота и прогибов, разместив их под эпюрами Q и M (п.2).
7. Проверить балку на жесткость в пролете и на консоли. При необходимости подобрать новое сечение.

Допускаемый прогиб в пролете $[f]_{\text{п}} = l/300$.

Допускаемый прогиб на консоли $[f]_{\text{к}} = a/400$.

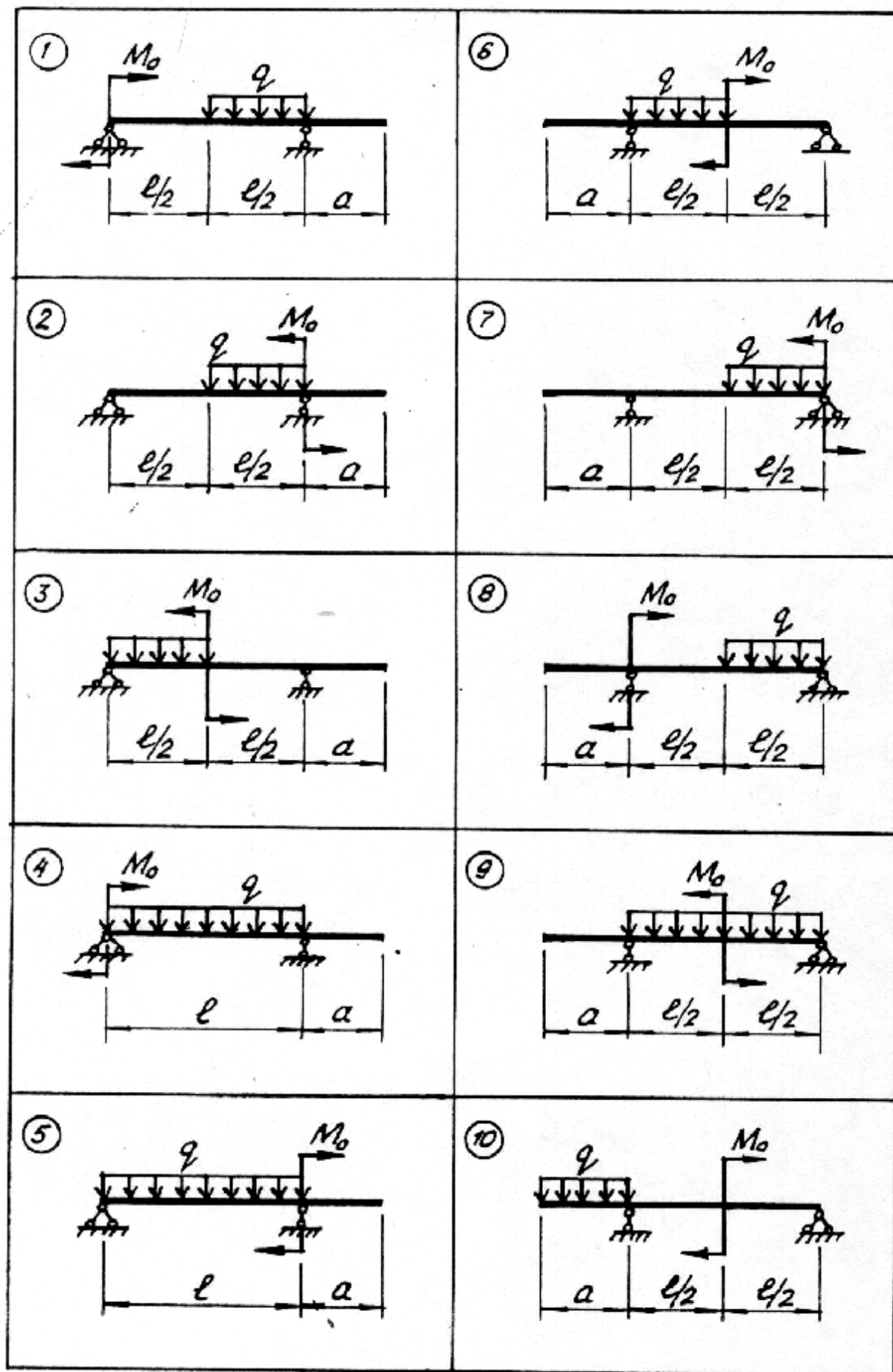


Рис. 6.14

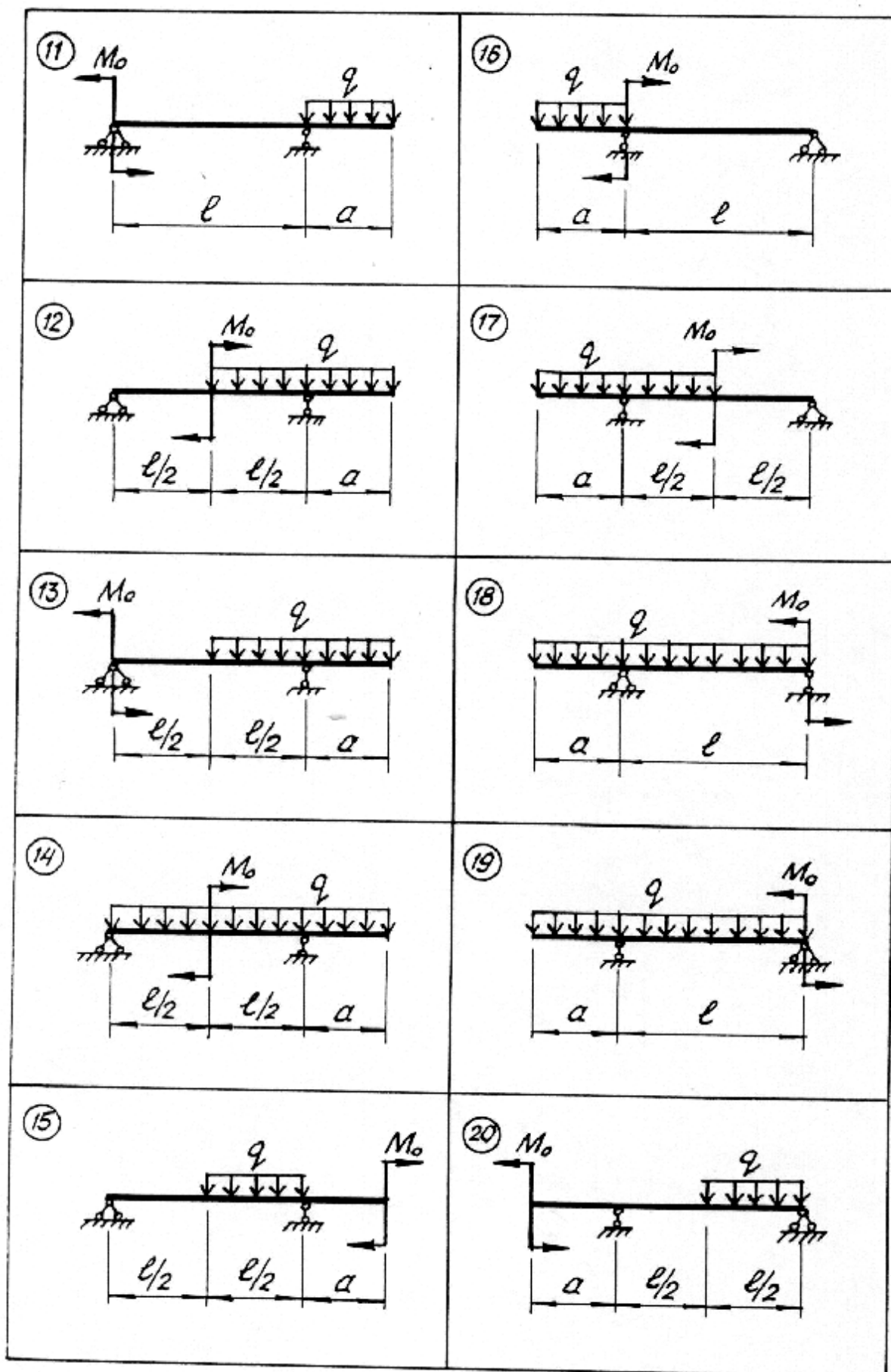


Рис. 6.14(продолжение)

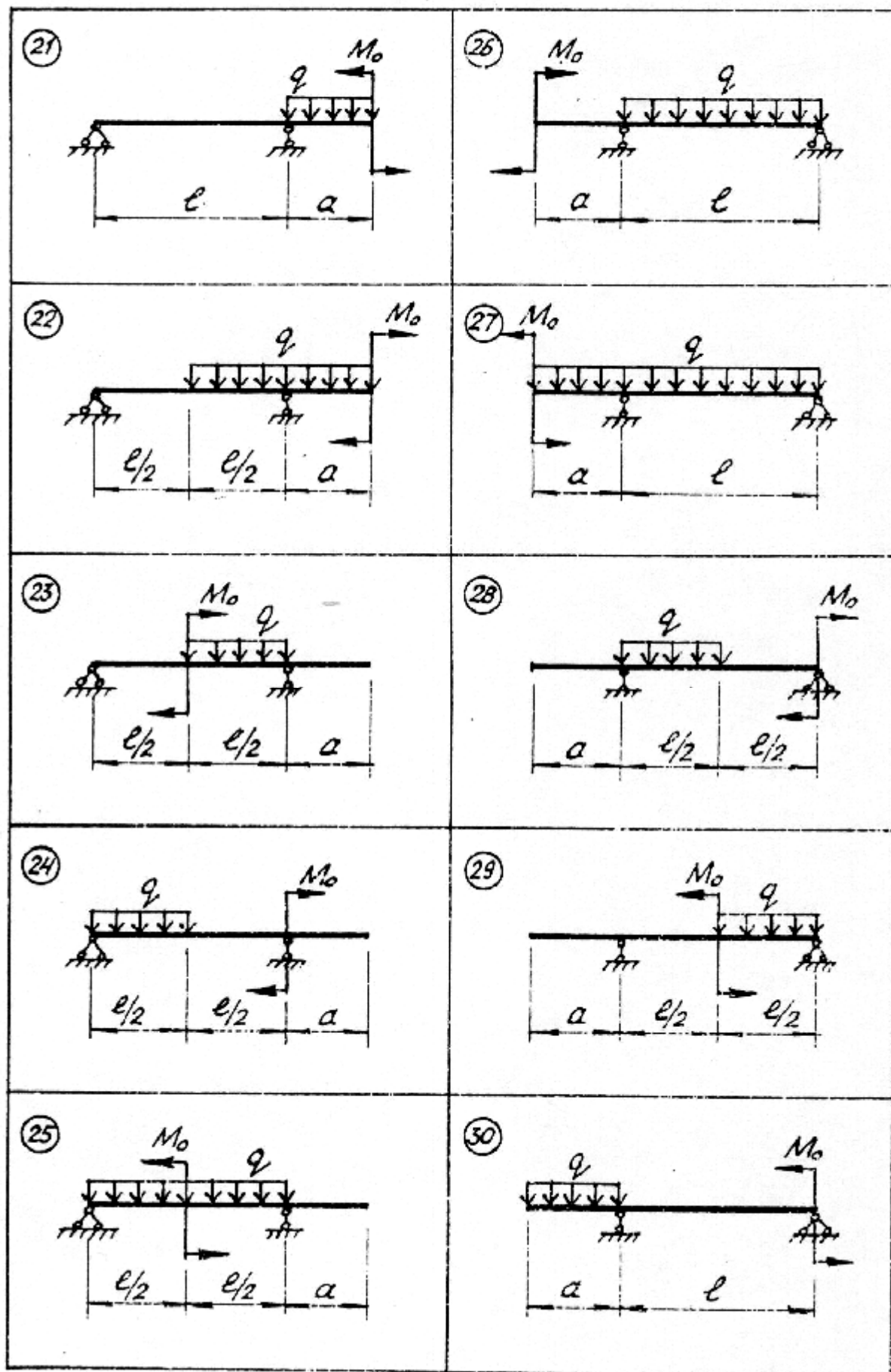


Рис 6.14 (окончание)

6.8 Контрольное задание 12. Определение перемещений в рамах

Для заданной рамы подобрать двутавр из условия прочности и определить перемещения в указанных ниже сечениях.

Схема рамы приведена на рис. 6.15, численные данные – в табл.6.3.

Таблица 6.3

Цифры шифра	1-я	2-я	3-я		4-я	5-я
	Схема	$l, \text{м}$	$a, \text{м}$	$b, \text{м}$	$q, \text{кН/м}$	$M_0, \text{кН} \cdot \text{м}$
1	1,11,21	0,3	1,0	1,2	2,1	10
2	2,12,22	0,4	1,2	1,4	2,2	12
3	3,13,23	0,5	1,4	1,6	2,4	14
4	4,14,24	0,6	1,5	1,8	2,5	15
5	5,15,25	0,8	1,6	2,0	2,8	16
6	6,16,26	0,9	1,8	2,2	3,0	18
7	7,17,27	1,0	2,0	2,4	3,2	20
8	8,18,28	1,2	2,2	2,5	3,5	22
9	9,19,29	1,5	2,4	2,6	3,6	24
0	10,20,30	1,6	2,5	2,5	4,0	25

Содержание и порядок выполнения работы

1. Вычертить схему рамы, указать численные значения заданных величин.

2. Построить эпюры продольных и поперечных сил и изгибающих моментов.

3. Подобрать двутавр из условия прочности по нормальным напряжениям (учитывая только изгиб).

4. Способом Верещагина определить горизонтальное перемещение сечения A , угол поворота сечения B , взаимное горизонтальное перемещение сечений C и D (учитывая только изгиб).

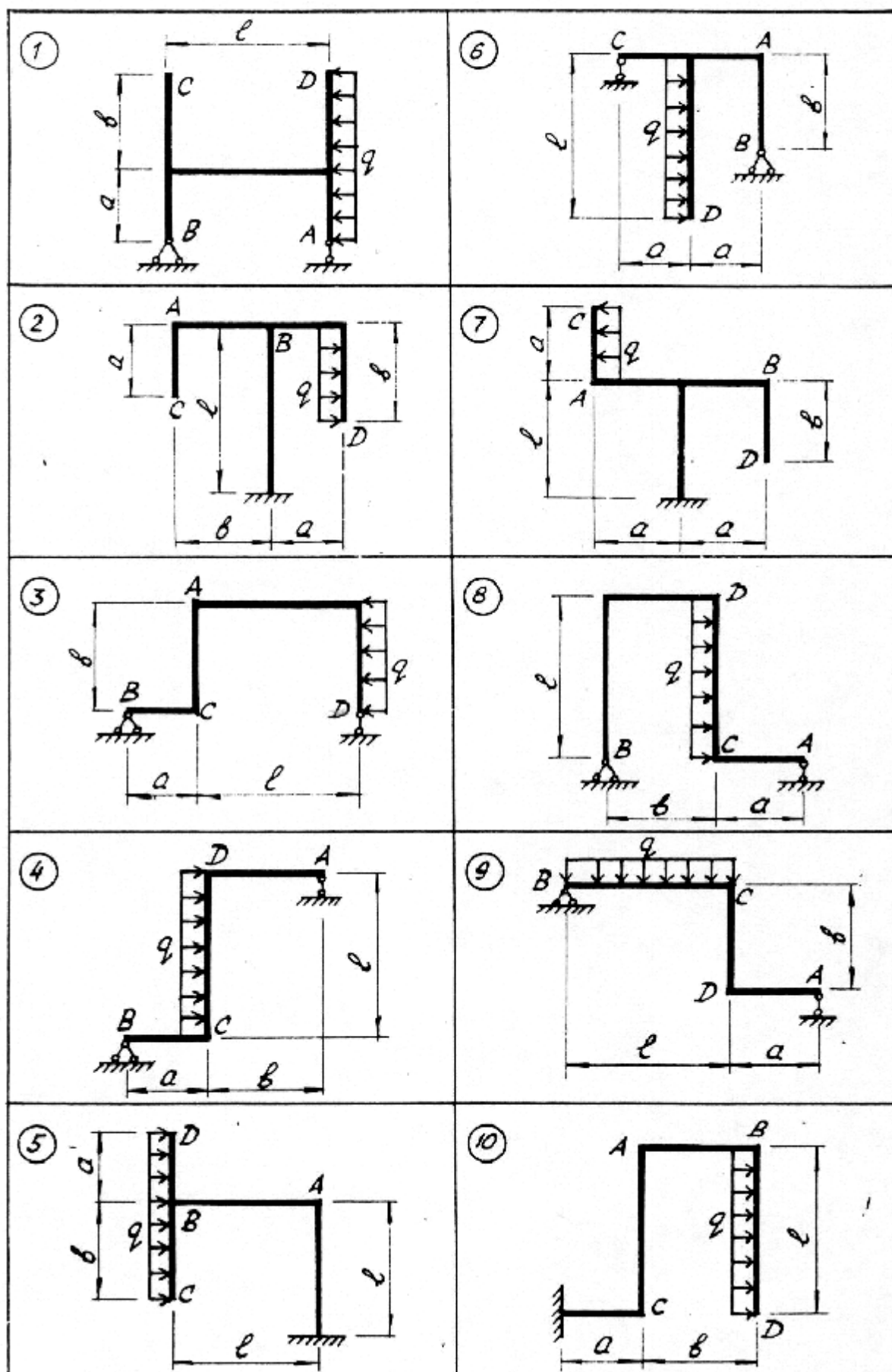


Рис. 6.15

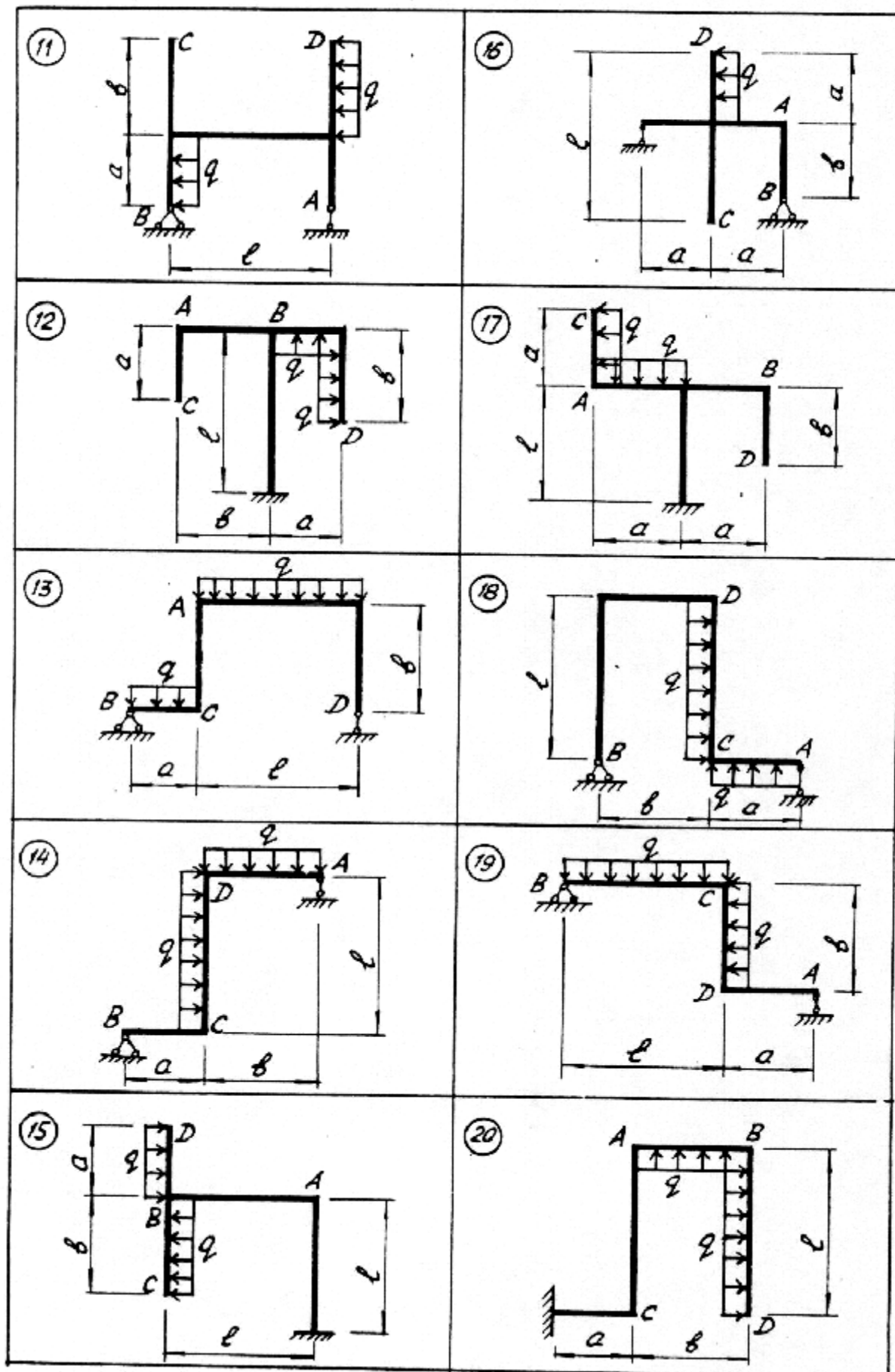


Рис. 6.15 (продолжение)

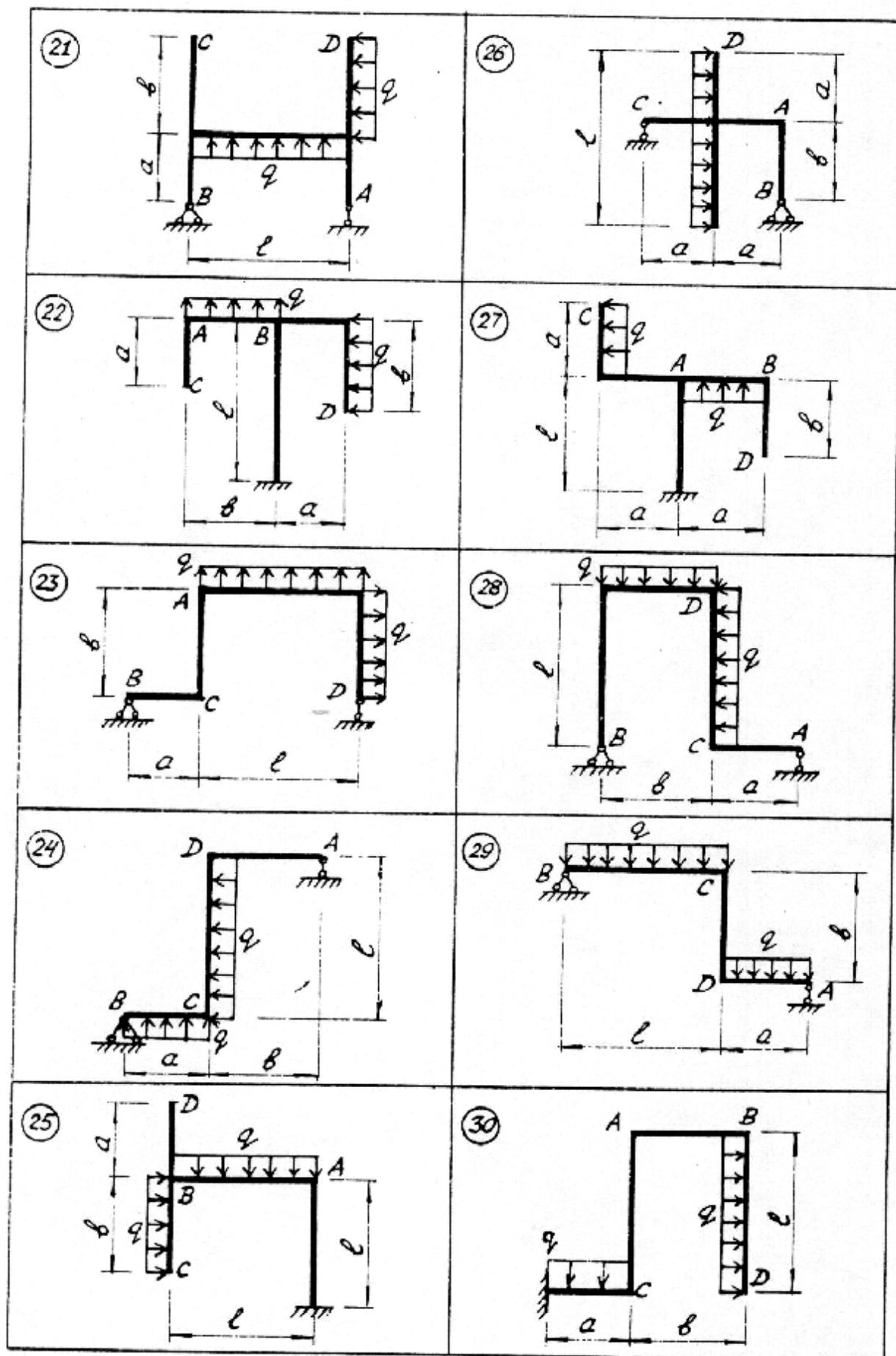


Рис. 6.15 (окончание)

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие и задания

Составители

А.А. Балакирев, В.Е. Калугин, Ю.П. Сметанников, Т.Э. Римм

Подписано в печать 30.01.2008. Формат 60х90/16.

Набор компьютерный. Усл. печ. л. 10,5.

Тираж 500 экз. Заказ № 50/2007-р.

Отпечатано с авторского макета лабораторией ИСТ СТФ ПГТУ