Министерство образования и науки Украины
Севастопольский национальный технический университет

Методические указания

к выполнению расчетно-графической работы
по дисциплине

“ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ”

для студентов специальности
Специальность 6.05010101 - "Компьтерные науки"
всех форм обучения

Севастополь
2013

УДК 004.92

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы по дисциплине "**ОСНОВЫ ТЕОРИИ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ**" для студентов специальности 6.05010101 - "Компьтерные науки" всех форм обучения /Сост. Ю.В. Доронина. - Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2013.- 24 с.

Цель методических указаний: выработка у студентов практических навыков анализа стохастических систем на основе моделей марковских процессов, систематизация знаний по специальным разделам теории случайных процессов.

Методические указания рассмотрены и утверждены на заседании кафедры информационных систем.
Протокол № от 2013 г.

Допущено учебно-методическим центром в качестве методических указаний.

Содержание

Введение

Случайный процесс называется марковским процессом (или «процессом без последствия»), если для каждого момента времени t0 вероятность любого состояния системы в будущем (при t>t0) зависит только от её состояния в настоящем (при t= t0) и не зависит от того, когда и каким образом система пришла в это состояние (т.е. как развивался процесс в прошлом). Пусть S техническое устройство, которое характеризуется некоторой степенью изношенности S. Нас интересует, как оно будет работать дальше. В первом приближении характеристики работы системы в будущем (частота отказов, потребность в ремонте) зависят от состояния устройства в настоящий момент и не зависят от того, когда и как устройство достигло своего настоящего состояния.

Теория марковских случайных процессов – обширный раздел теории вероятности с широким спектром приложений (физические явления типа диффузии или перемешивания шихта во время плавки в доменной печи, процессы образования очередей).

Марковские случайные процессы названы по имени выдающегося русского математика А.А.Маркова (1856-1922), впервые начавшего изучение вероятностной связи случайных величин и создавшего теорию, которую можно назвать "динамикой вероятностей". В дальнейшем основы этой теории явились исходной базой общей теории случайных процессов, а также таких важных прикладных наук, как теория диффузионных процессов, теория надежности, теория массового обслуживания и т.д. В настоящее время теория марковских процессов и ее приложения широко применяются в самых различных областях.

Целью РГР является выработка у студентов практических навыков анализа стохастических систем на основе моделей марковских процессов, систематизация знаний по специальным разделам теории случайных процессов.

1. Теоретические сведения.

Имитационные модели случайных процессов

Имитационное моделирование является одним из методов анализа случайных процессов. Ниже приведен пример такого моделирования.

Для того, чтобы проимитировать стрельбу из пушки по цели, построим модель марковского случайного процесса с дискретным временем [16].

Определим следующие три состояния: S_0 — цель не повреждена; S_1 — цель повреждена; S_2 — цель разрушена. Зададим вектор начальных вероятностей: P_0 (S_0)=0.8, P_0 (S_1)=0.2, P_0 (S_2)=0.

Значение P_0 для каждого из состояний показывает, какова вероятность каждого из состояний объекта до начала стрельбы. Зададим матрицу перехода состояний (табл. 5.1).

Таблица 5.1.

Матрица вероятностей перехода дискретного марковского процесса

	В состояние S_0	В S_1	В S_2	Сумма вероятностей переходов
Из состояния S_0	0,45	0,40	0,15	0,45+0,40+0,15=1
Из S_1	0	0,45	0,55	0+0,45+0,55=1
Из S_2	0	0	1	0+0+1=1

Матрица задает вероятность перехода из каждого состояния в каждое. Вероятности заданы так, что сумма вероятностей перехода из некоторого состояния в остальные всегда равна единице (куда-то система должна перейти обязательно).

Модель марковского процесса можно представить себе в виде следующего графа (рис. 5.1).

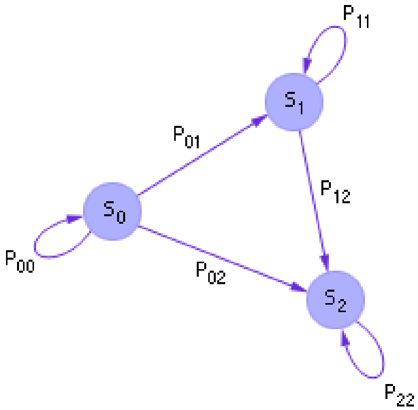

Рис. 5.1. Граф марковского процесса, моделирующий стрельбу из пушки по цели

Используя модель и метод статистического моделирования, решим следующую задачу: определить среднее количество снарядов, необходимое для полного разрушения цели.

Проимитируем, используя таблицу случайных чисел, процесс стрельбы. Пусть начальное состояние будет S_0. Возьмем последовательность из таблицы случайных чисел: 0.31, 0.53, 0.23, 0.42, 0.63, 0.21, …

Получим:

0.31: цель находится в состоянии S_0 и остается в состоянии S_0, так как $0 < 0.31 < 0.45$;

0.53: цель находится в состоянии S_0 и переходит в состояние S_1, так как $0.45 < 0.53 < 0.45 + 0.40$;

0.23: цель находится в состоянии S_1 и остается в состоянии S_1, так как $0 < 0.23 < 0.45$;

0.42: цель находится в состоянии S1 и остается в состоянии S1, так как $0 < 0.42 < 0.45$;

0.63: цель находится в состоянии S_1 и переходит в состояние S_2, так как $0.45 < 0.63 < 0.45 + 0.55$.

Так как достигнуто состояние S_2 (далее цель переходит из S_2 в состояние S_2 с вероятностью 1), то цель поражена. Для этого в данном эксперименте потребовалось 5 снарядов.

На рис. 5.2 приведена временная диаграмма, которая получается во время описанного процесса моделирования. Диаграмма показывает, как во времени происходит процесс изменения состояний. Такт моделирования для данного случая имеет фиксированную величину. Нам важен сам факт перехода (в какое состояние переходит система) и не важно, когда это происходит.

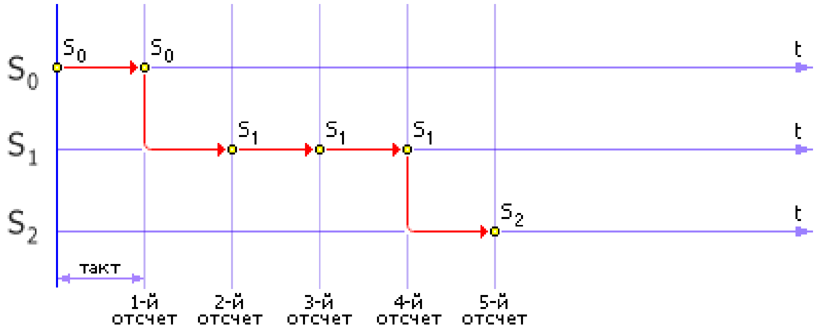

Рис. 5.2. Временная диаграмма переходов в марковском графе (пример имитации)

Процедура уничтожения цели совершена за 5 тактов, то есть марковская цепь этой реализации выглядит следующим образом: S_0—S_0—S_1—S_1—S_1—S_2. Конечно, ответом задачи это число быть не может, так как в разных реализациях получатся разные ответы. А ответ у задачи может быть только один.

Повторяя данную имитацию, можно получить, например, еще такие реализации (это зависит от того, какие конкретно случайные числа выпадут): 4 (S0—S0—S1—S1—S2); 11 (S0—S0—S0—S0—S0—S1—S1—S1—S1—S1—S1—S2); 5 (S1—S1—S1—S1—S1—S2); 6 (S0—S0—S1—S1—S1—S1—S2); 4 (S1—S1—S1—S1—S2); 6 (S0—S0—S1—S1—S1—S1—S2); 5 (S0—

S0—S1—S1—S1—S2). Всего уничтожено 8 целей. Среднее число циклов в процедуре стрельбы составило: (5 + 4 + 11 + 5 + 6 + 4 + 6 + 5)/8 = 5.75 или, округляя, 6. Именно столько снарядов, в среднем, рекомендуется иметь в боевом запасе пушки для уничтожения цели при таких вероятностях попаданий.

Теперь следует определить точность. Именно точность может нам показать, насколько следует доверять данному ответу. Для этого проследим, как сходится последовательность случайных (приближенных) ответов к правильному (точному) результату. Напомним, что, согласно центральной предельной теореме, сумма случайных величин есть величина неслучайная, поэтому для получения статистически достоверного ответа необходимо следить за средним числом снарядов, получаемых в ряде случайных реализаций.

На первом этапе вычислений средний ответ составил 5 снарядов, на втором этапе средний ответ составил (5 + 4)/2 = 4.5 снаряда, на третьем — (5 + 4 + 11)/3 = 6.7. Далее ряд средних величин, по мере накопления статистики, выглядит следующим образом: 6.3, 6.2, 5.8, 5.9, 5.8. Если изобразить этот ряд в виде графика средней величины выпущенных снарядов, необходимых для поражения цели, в зависимости от номера эксперимента, то обнаружится, что данный ряд сходится к некоторой величине, которая и является ответом (рис. 5.3).

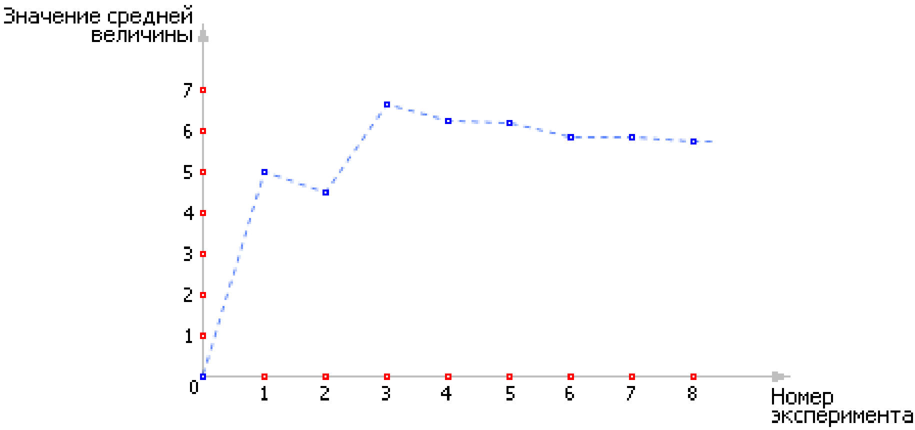

Рис. 5.3. Изменение средней величины в зависимости от номера эксперимента

Визуально мы можем наблюдать, что разброс между вычисляемой текущей величиной и ее теоретическим значением со временем уменьшается, стремясь к статистически точному результату. То есть в некоторый момент график входит в некоторую «трубку», размер которой и определяет точность ответа.

2. Порядок выполнения РГР

1. По заданному варианту составить имитационную модель случайного процесса в одной из программных сред.
2. Спланировать эксперимент, построить графики, провести анализ полученных результатов согласно примеру.
3. Подготовить отчет, содержащий: описание модели, программу имитации, план эксперимента, анализ результатов, соответствующие распечатки графиков, выводы по работе.

3.Варианты заданий

Вариант 1. Имитация отказов компьютерной системы. Состояния системы: S_1 отказ, S_0 работа, S_2 ожидание. P_0 (S_0) =0.7, P_0 (S_1)=0.1, P_0 (S_2)=0.2. Матрицу переходов задать самостоятельно, исходя из параметров модели. Определить среднее число отказов компьютерной системы.

Вариант 2. Имитация простоя принтера вследствие замятия бумаги или отсутствия бумаги в принтере. Состояния системы: S_1 работа, S_0 замялась бумага, S_2 закончилась бумага. P_0 (S_0) =0.3, P_0 (S_1)=0.5, P_0 (S_2)=0.2. Матрицу переходов задать самостоятельно, исходя из параметров модели. Определить среднее число замятий бумаги при полном лотке.

Вариант 3. Имитация попадания мяча в баскетбольную корзину. Состояния системы: S_0 ожидание, S_1 попадание, S_2 промах. P_0 (S_0) =0.1, P_0 (S_1)=0.5, P_0 (S_2)=0.4. Матрицу переходов задать самостоятельно, исходя из параметров модели. Определить среднее число мячей, необходимых спортсмену для тренировки.

Вариант 4. Имитация выброса максимальной суммы очков на кости (кубик с точками от 1 до 6 на каждой грани). Состояния системы: S_0 неудачный бросок, S_1 6 очков, S_2 не 6 очков. P_0 (S_0) =0.15, P_0 (S_1)=0.2, P_0 (S_2)=0.65. Матрицу переходов задать самостоятельно, исходя из параметров модели. Определить среднее число выигрышей при условии всех удачных бросков.

Вариант 5. Имитация работы автомата по продаже кофе. Состояния системы: S_0 ожидание, S_1 выдача стаканчика с кофе, S_2 нет стаканчика. P_0 (S_0) =0.6, P_0 (S_1)=0.35, P_0 (S_2)=0.05. Матрицу переходов задать самостоятельно, исходя из параметров модели. Определить среднее число стаканчиков, выданных автоматом подряд без периода ожидания.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абчук В.А. Справочник по исследованию операций. – М.: Воениздат, 1979. – 368 с.

2. Алексахин С. В., Балдин А.В., Криницын А.Б. и др. Прикладной статистический анализ данных. Теория. Компьютерная обработка. Области применения. Кн. 1 и 2. – М.: «Изд. ПРИОР», 1998. – 336 с., 352 с.

3. Андросенко О.С., Девятченко Л.Д., Маяченко Е.П. Постановка задач Марковских процессов в формате программы WinQSB// Математика. Приложение математики в экономических, технических и педагогических исследованиях: Сб. науч. тр./ Под ред. М.В. Бушмановой. Магнитогорск: ГОУ ВПО «МГТУ», 2006. С. 3 - 13.

4. Боровков А.А. Математическая статистика, Оценка параметров, проверка гипотез/А.А. Боровков. – М.: Наука, 1984. - 472 с.

5. Брандт З. Статистические методы анализа наблюдений / З. Брандт. – М.: Мир, 1975.- 312 с.

6. Браун Р., Мэзон Р., Фламгольц Э. и др. Исследование операций. В 2-х томах. Пер. с англ. Т. 2. Модели и применения. М.: Мир, 1981. – 677 с., ил.

7. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Прикладные задачи теории вероятностей. – М.:Радио и связь, 1983. – 416 с., ил.

8. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 320 с.

9. Девятченко Л.Д. Стохастические матрицы в исследовании систем: Метод. разработка. Магнитогорск: МГМИ, 1987, 32 с.

10. Кемени Дж., Снелл Дж. Конечные цепи Маркова. – М.: Наука, 1970.

11. Самнер Г. Математика для географов / Г. Самнер. – М.: Прогресс, 1981. -296 с.

12. Таха Хемди А. Введение в исследование операций, 7-е изд.: пер. с англ. – М.: изд. дом «Вильямс», 2005. – 912 с., ил.

13. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применение в 2-х т.: пер. с англ. С предисловием Колмогорова А.Н. – М.: Мир, 1984. – 1- 528 с., 1984. – Т. 2 – 752 с.

14. Доронина Ю. В. Анализ количества осадков на основе цепей Маркова / Ю.В. Доронина // Сб. научных трудов УкрНИГМИ. – Киев, 2001. – Вып.249. – С. 82-88.

15. Королюк В.С. Стохастические модели систем / В.С. Королюк. – К.: Наук. думка, 1989. – 208 с.

16. Усов А.В., Савєльєва О.С.,Становська І.І., Перпері А.О. Математичні методи моделювання. Підручник / За ред. Становського О.Л.. – Одеса: ПАЛЬМИРА, 2011. – 500 с.

Заказ №____________от «____»_____________2013. Тираж____экз.

Изд-во СевНТУ