Задачи

1 Оператор умножения (таблица 3.2)

Таблица 3.2

Номер задания	E_1	E_2	A
2.1	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^2 - t)x(t)$
2.2	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^4 - t^2)x(t)$
2.3	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t)$
2.4	$L_1[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^2 - t)x(t)$
2.5	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t)$
2.6	$L_2[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = tx(t)$
2.7	$L_3[0,1]$	$L_3[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (1 - t^2)x(t)$
2.8	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = (t^2 - \|t\|)x(t)$
2.9	$L_3[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \|t\| x(t)$
2.10	$C^{(1)}[-1,1]$	$C[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \sin \pi t x(t)$
2.11	$L_4[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \sqrt{t}\, x(t)$
2.12	$C[-1,1]$	$C[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \begin{cases} (t^2+1)x(t), & t \in [-1, 0] \\ (t^2+4t+1)x(t), & t \in [0, 1] \end{cases}$
2.13	$C[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = t^2 x(t)$
2.14	$L_2[-1,1]$	$L_2[-1,1]$	$(\mathrm{A}x)(t) = \begin{cases} tx(t), & t \in [0,1] \\ 0, & t \in [-1,0] \end{cases}$

2 Оператор замены переменной (таблица 3.3)

Таблица 3.3

Номер зада-	E_1	E_2	A
3.1	$C[0,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = t^2 x(\sqrt{t})$
3.2	$C[-1,1]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = (t^2 - t)x(t^2)$
3.3	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = tx(\sqrt{t})$
3.4	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = x(\sqrt[4]{t})$
3.5	$L_3[-1,1]$	$L_3[-1,1]$	$(Ax)(t) = x(\sqrt[3]{t})$
3.6	$L_3[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = t^2 x(t^2)$
3.7	$L_2[-1,1]$	$L_1[-1,1]$	$(Ax)(t) = x(t^2)$
3.8	$C[0,2]$	$C[0,1]$	$(Ax)(t) = (t-1)tx(t^2+1)$
3.9	$L_4[0,2]$	$L_4[0,1]$	$(Ax)(t) = tx(t+1)$
3.10	$L_2[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = t^2 x(t^2 - 1)$
3.11	$C^{(1)}[0,2]$	$C^{(1)}[0,2]$	$(Ax)(t) = tx(t^2+1)$
3.12	$L_{3/2}[0,1]$	$L_{3/2}[0,1]$	$(Ax)(t) = (t^2 - t)x(\sqrt{t})$
3.13	$L_4[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t) = tx(\sqrt{t})$
3.14	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t) = t^2 x(t^2 - 1)$

3 Операторы в пространствах последовательностей (таблица 3.4).

Таблица 3.4

Номер задания	E_1	E_2	A
4.1	l_2	l_2	$Ax = (0, x_1, x_2, ...)$
4.2	l_3	l_3	$Ax = (x_2, x_3, x_4, ...)$
4.3	c_0	c_0	$Ax = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$
4.4	l_4	l_4	$Ax = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...\right)$
4.5	l_2	l_2	$Ax = \left(0, \frac{x_1}{2^0}, \frac{x_2}{2^1}, \frac{x_3}{2^2}, ...\right)$
4.6	l_1	l_1	$Ax = \left(0, 0, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, ...\right)$
4.7	l_2	l_2	$Ax = \left((1+1)x_1, ..., \left(1+\frac{1}{n}\right)^n x_n, ...\right)$
4.8	c	c	$Ax = \left(\frac{1}{1+1} x_1, ..., \frac{n}{n+1} x_n, ...\right)$
4.9	c_0	c	$Ax = \left(1 \cdot \sin\frac{1}{1} x_1, ..., n \sin\frac{1}{n} x_n, ...\right)$
4.10	l_∞	l_∞	$Ax = (x_1, 0, x_2, 0, x_3, 0, ...)$
4.11	l_2	c	$Ax = \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \frac{x_4}{4}, ...\right)$
4.12	l_2	l_∞	$Ax = \left(\frac{x_1}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, ...\right)$
4.13	l_1	c_0	$Ax = (0, x_1, x_2, ...)$
4.14	l_2	l_2	$Ax = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \lambda_3 x_3, ...)$, где $\lvert\lambda_n\rvert \le M, n \in \boldsymbol{N}$

4 Интегральный оператор (таблица 3.5).

Таблица 3.5

Номер зада-	E_1	E_2	A
5.1	$L_2[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 t^2 s x(s)ds$
5.2	$L_1[0,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 (t+1)s x(\sqrt{s})ds$
5.3	$C[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 (t+s)x(\sqrt{s})ds$
5.4	$L_3[0,1]$	$C[-1,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 ts^2 x(s^{1/3})ds$
5.5	$L_1[0,1]$	l_2	$Ax=\left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t),\ldots,\frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt,\ldots\right)$
5.6	$L_1[0,1]$	l_1	$Ax=\left(\frac{1}{2}\int_0^1 tx(t),\ldots,\frac{1}{2^k}\int_0^1 t^k x(t)dt,\ldots\right)$
5.7	$L_3[0,1]$	$L_2[-1,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 t^2 s x(s)ds$
5.8	$C[-1,1]$	$L_1[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_{-1}^1 t\operatorname{sgn} s\, x(s)ds$
5.9	$L_2[0,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 \lvert t\cdot s\rvert x(\sqrt[4]{s})ds$
5.10	$L_2[0,2]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^2 (t+1)s^2 x(s^2)ds$
5.11	$C[0,2]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_0^2 \operatorname{sgn}(s-1)x(s)ds+tx(0)$
5.12	$L_2[-1,1]$	$L_2[0,1]$	$(Ax)(t)=\int_{-1}^1 (t+1)s^2 x(s^2)ds$
5.13	$C[0,1]$	$C[0,2]$	$(Ax)(t)=\int_0^1 (t^2+s^2)x(s)ds$
5.14	$L_1[0,1]$	l_4	$Ax=\left(\frac{1}{3}\int_0^1 tx(t)dt,\ldots,\frac{1}{3^k}\int_0^1 t^k x(t)dt,\ldots\right)$

Пусть $\mathrm{E} \in Ban$, $\mathrm{K} = \mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$. В задачах 6–7 выяснить, задает ли данная формула линейный ограниченный функционал $f : \mathrm{E} \to \mathrm{K}$. В случае положительного ответа, найти его норму (таблицы 3.6, 3.7).

Таблица 3.6

Номер задания	E	K	f
6.1	c	$\mathbf{C}$	$f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
6.2	l_∞	$\mathbf{R}$	$f(x_1) = x_1 + x_3$
6.3	l_2	$\mathbf{R}$	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k}$
6.4	c_0	$\mathbf{C}$	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (i)^k \frac{x_k}{k^2}$
6.5	l_1	$\mathbf{R}$	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{k^2+1}$
6.6	c	$\mathbf{R}$	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} x_k$
6.7	l_3	$\mathbf{C}$	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_{2k}}{k}$
6.8	c_0	$\mathbf{R}$	$f(x) = 4x_{10} - 2x_2 + 5x_{100}$
6.9	l_∞	$\mathbf{R}$	$f(x) = x_1 - x_2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$
6.10	l_2	$\mathbf{R}$	$f(x) = x_1 - x_0$
6.11	l_1	$\mathbf{C}$	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} i x_{4k+1}$
6.12	l_4	$\mathbf{C}$	$f(x) = x_1 + \frac{1}{2} x_2$
6.13	c	$\mathbf{R}$	$f(x) = x_1 + \lim\limits_{n\to\infty} x_n$
6.14	l_2	$\mathbf{C}$	$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{2^k}$

Таблица 3.7

Номер задания	E	K	f
7.1	$L_2[0,1]$	**R**	$f(x)=\int_0^1 t^{-1/3}x(t)dt$
7.2	$L_1[0,2]$	**C**	$f(x)=i\int_0^1 t^2 x(\sqrt{t})dt$
7.3	$C[0,1]$	**R**	$f(x)=x(0)-2x(1)$
7.4	$C[0,1]$	**R**	$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x(t^n)dt$
7.5	$L_1[2,4]$	**C**	$f(x)=\int_2^4 tx(t^2)dt$
7.6	$L_2[-1,1]$	**R**	$f(x)=\int_{-1}^1 t^2 x(\sqrt{t})dt$
7.7	$L_1[0,1]$	**R**	$f(x)=\int_{-1}^1 t^4 x(t^2)dt$
7.8	$L_6[0,2]$	**R**	$f(x)=\int_0^2 t^2 x(t^3)dt$
7.9	$C^{(1)}[0,1]$	**C**	$f(x)=x(0)+ix'(0)$
7.10	$C^{(1)}[0,2]$	**R**	$f(x)=\int_0^1 x(t)dt+\int_1^2 x'(t)dt$
7.11	$C^{(1)}[-1,1]$	**C**	$f(x)=x'(0)$
7.12	$C^{(2)}[0,1]$	**C**	$f(x)=ix(0)+x''(1)$
7.13	$L_2[0,1]$	**R**	$f(x)=\int_0^1 t^{-1/4}x(t)dt$
7.14	$L_2[0,1]$	**C**	$f(x)=i\int_0^1 t^{-3/2}x(\sqrt{t})dt$