Лабораторное занятие №1

Идентификация законов распределения случайных величин

Пусть в (статистическом) эксперименте доступна наблюдению случайная величина X, распределение которой P неизвестно полностью или частично. Тогда любое утверждение, касающееся P называется ***статистической гипотезой***. Гипотезы различают по виду предположений, содержащихся в них:

– Статистическая гипотеза, однозначно определяющая распределение P, то есть $H:\{P=P_0\}$, где P_0 какой-то конкретный закон, называется ***простой*** (известен закон распределения вплоть до параметров).

– Статистическая гипотеза, утверждающая принадлежность распределения P к некоторому семейству распределений, то есть вида $H:\{P\in\rho\}$, где ρ - семейство распределений, называется **сложной** (неизвестные параметры предполагаемого закона находятся по статистической выборке).

Статистической гипотезой называется любое предположение о виде или параметрах неизвестного закона распределения.

Проверка статистической гипотезы

H_0 – ошибка первого рода, имеет место, когда отвергается верная гипотеза;

H_1 (альтернативная гипотеза) – ошибка второго рода – принимается неверная гипотеза.

		Верная гипотеза	
		H_0	H_1
Результат применения критерия	H_0	H_0 верно принята	H_0 неверно принята (ошибка второго рода)
	H_1	H_0 неверно отвергнута (ошибка первого рода)	H_0 верно отвергнута

Как видно из вышеприведённого определения, ошибки первого и второго рода являются взаимно-симметричными, то есть если поменять местами гипотезы H_0 и H_1, то ошибки первого рода превратятся в ошибки второго рода и наоборот. Тем не менее, в большинстве практических ситуаций путаницы не происходит, поскольку принято считать, что нулевая гипотеза H_0 соответствует состоянию «по умолчанию» (естественному, наиболее ожидаемому положению вещей) — например, что обследуемый человек здоров, или что проходящий через рамку металлодетектора пассажир не имеет запрещённых металлических предметов. Соответственно, альтернативная гипотеза H_1 обозначает противоположную ситуацию, которая обычно трактуется как менее вероятная, неординарная, требующая какой-либо реакции.

Вероятность ошибки первого рода при проверке статистических гипотез называют уровнем значимости и обычно обозначают греческой буквой **α** (отсюда название **α-errors**).

Вероятность ошибки второго рода не имеет какого-то особого общепринятого названия, на письме обозначается греческой буквой **β** (отсюда **β-errors**). Однако с этой величиной тесно связана другая, имеющая большое статистическое значение — **мощность критерия**. Она вычисляется по формуле (1−β). Таким образом, чем выше мощность, тем меньше вероятность совершить ошибку второго рода.

Наиболее часто применяемые *уровни значимости*: 0,2; 0,1; 0,05; 0,01.

Критерий согласия (статистический критерий) — строгое математическое правило, по которому принимается или отвергается та или иная статистическая гипотеза с известным уровнем значимости. Построение критерия представляет собой выбор подходящей функции от результатов наблюдений (ряда эмпирически полученных значений признака), которая служит для выявления меры расхождения между эмпирическими значениями и гипотетическими.

Наиболее известные критерии согласия:

- χ^2 (хи-квадрат) Пирсона;
- типа Колмогорова-Смирнова;
- Андерсона-Дарлинга;
- омега-квадрат Мизеса

и т.д.

Критерий χ^2 (хи-квадрат) Пирсона.

Наблюдаемое значение критерия находится по формуле:

$$\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{S} \frac{(M_i - M_i^{'})^2}{M_i^{'}},$$

где M_i и $M_i^{'}$ – соответственно эмпирические и теоретические частоты распределения.

S – число интервалов статистического ряда, построенного по данным выборки.

Число степеней свободы распределения $k = S - r - 1$,

где S – число интервалов, r – число параметров предполагаемого теоретического распределения.

Для проверки гипотезы строится критическая область.

Размер статистической выборки (выборки значений случайной величины) для проверки гипотезы выбирается произвольно и равен N.

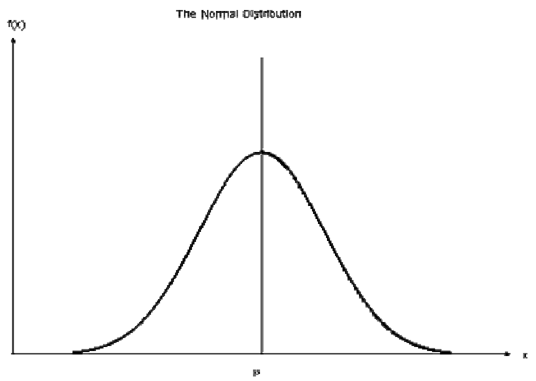
Число интервалов выборки определяется по формуле Стерджесса:

$$S = 1 + 3{,}322 \lg N,$$

где N – число единиц совокупности (значений случайной величины).

Наиболее распространенные законы распределения:

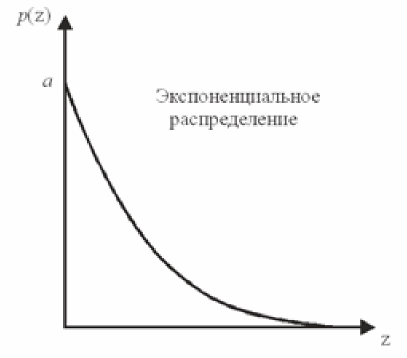
– нормальный закон (теорема Чебышева или закон больших чисел);



– закон Вейбулла (отказы оборудования в теории надежности);

– закон Бернулли (моделирует случайный эксперимент произвольной природы, когда заранее известны вероятности успеха или неудачи, принимает всего два значения – 0 и 1);

– экспоненциальный (показательный) закон;



– закон Пуассона (моделирует случайную величину, представляющую собой число событий, произошедших за фиксированное время, при условии, что данные события происходят с некоторой фиксированной средней интенсивностью и независимо друг от друга);

В общем случае обработка статистического распределения состоит из следующей последовательности этапов:

1) Построение статистического ряда.

2) Выдвижение гипотезы о предполагаемом теоретическом распределении, соответствующем эмпирическим данным.

3) Определение параметров теоретического распределения.

4) Проверка согласия предполагаемого теоретического и эмпирического распределений по определенному критерию (критериям).

Для определения закона распределения некоторой случайной величины рассмотриваются статистические данные, собранные по достаточно большому количеству независимых наблюдений.

Необходимо преобразовать дискретную выборку случайных чисел в интервальный ряд, рассчитать частоты попадания данной случайной величины в полученные интервалы и определить числовые характеристики эмпирического распределения.

Шаг (величина интервала) определяется следующим образом:

$$i = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{S},$$

где x_{max} – максимальное значение случайной величины;

x_{min} – минимальное значение случайной величины;

S – число интервалов.

Для построения теоретической кривой распределения случайной величины необходимо найти некоторые числовые характеристики теоретического распределения. По заданному эмпирическому распределению вычисляется выборочная средняя $\overline{X}$, дисперсия D и среднеквадратическое отклонение *СКО.*

Выборочная средняя находится по формуле:

$$\overline{X} = \frac{\sum_i \overline{X_i} \cdot M_i}{\sum_i M_i},$$

где M_i - частота попадания случайной величины в интервал.

Дисперсия вычисляется следующим образом:

$$D(X) = \frac{\sum_i (X_i - \overline{X})^2 \cdot M_i}{\sum_i M_i}.$$

Среднеквадратическое отклонение определяется по формуле:

$$\sigma = \sqrt{D(X)}.$$

Частость i-того интервала вычисляется по формуле:

Рассмотрим примеры определения некоторых законов распределения случайных величин.

Закон Пуассона

Определим закон распределения некоторой случайной величины. Выдвигается нулевая гипотеза H_0 о том, что расхождение эмпирических частот распределения случайной величины и теоретических частот распределения Пуассона незначимо (генеральная совокупность случайных чисел распределена по закону Пуассона).

Объем выборки (N) – 100.

Число интервалов (I) – 8.

Максимальное значение случайной величины ($x_{\max}$) – 8.

Минимальное значение случайной величины ($x_{\min}$) – 1.

Шаг (величина интервала) (i) – 1.

Числовые характеристики эмпирического распределения сведены в таблицу 1.

Таблица 1 – Эмпирическое распределение случайной величины и его числовые характеристики

№	Нижняя граница X_i	Верхняя граница X_{i+1}	Частота M_i	Частость W_i	Центр интервала $\overline{X_i}$	$M_i \cdot \overline{X_i}$	Отклонение от среднего $\overline{X_i} - \overline{X}$	Квадрат отклонения $(X_i - \overline{X})^2$	$M_i(X_i - \overline{X})^2$
1	1	1	2,00	0,02	1,00	2,00	-3,33	11,09	22,18
2	2	2	8,00	0,08	2,00	16,00	-2,33	5,43	43,43
3	3	3	20,00	0,20	3,00	60,00	-1,33	1,77	35,38
4	4	4	30,00	0,30	4,00	120,00	-0,33	0,11	3,27
5	5	5	18,00	0,18	5,00	90,00	0,67	0,45	8,08
6	6	6	12,00	0,12	6,00	72,00	1,67	2,79	33,47
7	7	7	7,00	0,07	7,00	49,00	2,67	7,13	49,90
8	8	8	3,00	0,03	8,00	24,00	3,67	13,47	40,41
Итого			100	1,00		433			236,11

Числовые характеристики теоретического распределения:

- выборочная средняя $\overline{X} = 4{,}33$;

- дисперсия $D(X) = 2{,}3611$;

- среднеквадратическое отклонение $\sigma = 1{,}544$.

Для более наглядного представления построим полигон эмпирического распределения рассматриваемой случайной величины (рисунок 1).

Рисунок 1 – Полигон эмпирического распределения случайной величины

Вид полученной гистограммы, численная близость среднего и дисперсии, а также характер исследуемого потока (события происходят с постоянной средней интенсивностью) позволяют предположить, что исследуемая величина подчиняется закону Пуассона.

Для того, чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о распределении генеральной совокупности по закону Пуассона, необходимо:

1) принять в качестве оценки параметра λ закона Пуассона величину, равную выборочной средней:

$$\lambda = \overline{X} = 4{,}33;$$

2) найти вероятности попадания случайной величины в частичные интервалы $(X_i; X_{i+1})$ по формуле:

$$P_i = (X_i < X < X_{i+1}) = \frac{\lambda^{X_i}}{X_i!}e^{-\lambda} - \frac{\lambda^{X_{i+1}}}{X_{i+1}!}e^{-\lambda};$$

3) найти теоретические частоты по формуле:

$$M_i^{'} = P_i \cdot \sum M_i;$$

4) сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона, приняв число степеней свободы $K = S - 1$ и сделать вывод о достоверности гипотезы:

$$\chi^2_{набл.} = \sum_{i=1}^{S} \frac{(M_i - M_i^{'})^2}{M_i^{'}},$$

где M_i - практическое число попаданий случайной величины в i-ый интервал;

$M_i^{'}$ – теоретическое число значений в i-ом интервале;

S – число интервалов статистического ряда, построенного по данным выборки.

Результаты расчета наблюдаемого значения критерия Пирсона поместим в таблицу 2.

Таблица 2 – Вычисление наблюдаемого значения χ^2

№	M_i	P_i	$M_i^{'}$	$M_i - M_i^{'}$	$(M_i - M_i^{'})^2$	$\frac{(M_i - M_i^{'})^2}{M_i^{'}}$
1	2,00	0,05702	5,7015	-3,7015	13,70	2,40311
2	8,00	0,12344	12,3439	-4,3439	18,87	1,52862
3	20,00	0,17816	17,8163	2,1837	4,77	0,26765
4	30,00	0,19286	19,2861	10,7139	114,79	5,95178
5	18,00	0,16702	16,7018	1,2982	1,69	0,10091
6	12,00	0,12053	12,0531	-0,0531	0,00	0,00023
7	7,00	0,07456	7,4557	-0,4557	0,21	0,02786
8	3,00	0,04035	4,0354	-1,0354	1,07	0,26567
Итого						10,54582

Используя таблицу критических точек распределения χ^2, при числе степеней свободы, равном 7 (число разрядов S равно 8, а число связей равно 1, так как распределение Пуассона оценивается одним параметром - λ), и уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ (то есть вероятность расхождения теоретического распределения с эмпирическим распределением меньше 0,05, и вероятность соответствия его закону Пуассона больше 0,95) критическое значение равно $\chi^2_{\text{крит}} = 10{,}8$.

Таким образом, выдвинутая гипотеза принимается, так как: $\chi^2_{набл} = 10{,}5 < \chi^2_{\text{крит}} = 10{,}8$.

В результате обработки статистического материала было получено, что рассматриваемую случайную величину можно аппроксимировать пуассоновской случайной величиной с параметром $\lambda = 4{,}33$.

Нормальный закон

Определим закон распределения некоторой случайной величины. Выдвигается нулевая гипотеза H_0 о том, что расхождение эмпирических частот распределения случайной величины и теоретических частот нормального распределения незначимо (генеральная совокупность случайных чисел распределена по нормальному закону).

Объем выборки (N) – 108.

Число интервалов (I) – 8.

Максимальное значение случайной величины ($x_{\max}$) – 2687,6.

Минимальное значение случайной величины ($x_{\min}$) – 702,8.

Шаг (величина интервала) (i) – 248,1.

Числовые характеристики эмпирического распределения сведены в таблицу 3.

Таблица 3 – Эмпирическое распределение случайной величины и его числовые характеристики

№	Нижняя граница X_i	Верхняя граница X_{i+1}	Частота M_i	Частость W_i	Центр интервала $\overline{X_i}$	$M_i \cdot \overline{X_i}$	Отклонение от среднего $\overline{X_i} - \overline{X_в}$	Квадрат отклонения $(X_i - \overline{X_i})^2$	$M_i(X_i - \overline{X_i})^2$
1	702,8	950,9	6	0,06	826,9	4961,1	-902,8	815062,9	4890377,3
2	950,9	1199,0	14	0,13	1075,0	15049,3	-654,7	428643,0	6001002,0
3	1199,0	1447,1	17	0,16	1323,1	22491,8	-406,6	165330,3	2810615,7
4	1447,1	1695,2	27	0,25	1571,2	42421,1	-158,5	25124,9	678372,1
5	1695,2	1943,3	21	0,19	1819,3	38204,3	89,59	8026,66	168561,0
6	1943,3	2191,4	15	0,14	2067,4	31010,3	337,7	114035,7	1710534,9
7	2191,4	2439,5	5	0,04	2315,5	11577,3	585,8	343151,9	1715759,4
8	2439,5	2687,6	3	0,03	2563,6	7690,7	833,9	695375,3	2086125,9
Итого			108	1		173405,9			20061348,3

Выборочная средняя: $\overline{X_в} = 1605{,}6$.

Дисперсия: $D(X) = 200613{,}5$.

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma = 447{,}899$.

Построим гистограмму эмпирического распределения (рисунок 2).

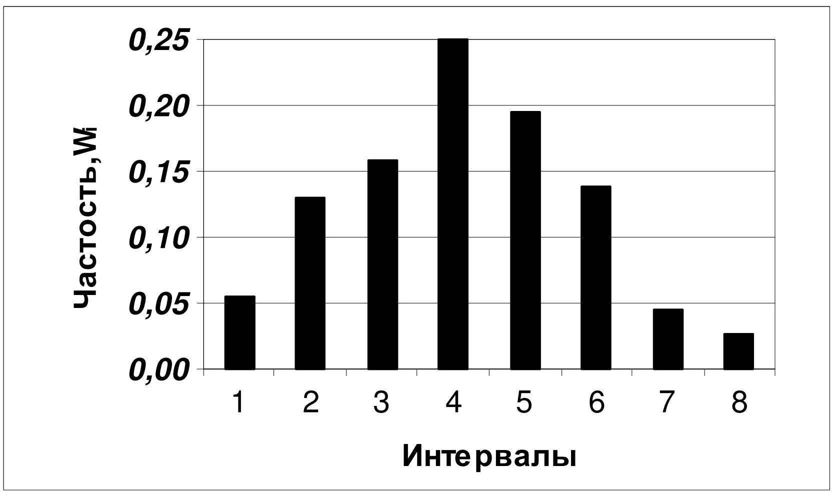


Рисунок 2 – Гистограмма эмпирического распределения

Вид полученной гистограммы (рисунок 2), численная близость среднего и математического ожидания, а также характер исследуемого потока (события формируются под действием большого числа независимых факторов) позволяют предположить, что исследуемая величина подчиняется нормальному закону.

Результаты вычисления теоретической вероятности сведены в таблицу 4.

Таблица 4 – Вычисление теоретических вероятностей попадания в заданный интервал нормально распределенной случайной величины

Номер	X_i	X_{i+1}	$\frac{X_{i+1}-\overline{X_в}}{\sigma}$	$\frac{X_i-\overline{X_в}}{\sigma}$	$\Phi(\frac{X_{i+1}-\overline{X_в}}{\sigma})$	$\Phi(\frac{X_i-\overline{X_в}}{\sigma})$	P_i
1	702,8	950,9	-1,4617	-2,0157	-0,4279	-0,4783	0,0504
2	950,9	1199,0	-0,9078	-1,4617	-0,3186	-0,4279	0,1093
3	1199,0	1447,1	-0,3539	-0,9078	-0,1368	-0,3186	0,1818
4	1447,1	1695,2	0,2000	-0,3539	0,0793	-0,1368	0,2161
5	1695,2	1943,3	0,7539	0,2000	0,2734	0,0793	0,1941
6	1943,3	2191,4	1,3079	0,7539	0,4049	0,2734	0,1315
7	2191,4	2439,5	1,8618	1,3079	0,4686	0,4049	0,0637
8	2439,5	2687,6	2,4157	1,8618	0,4922	0,4686	0,0236
Итого							0,9705

Таблица интегральной функции Лапласа приведена в приложении А.

Результаты расчета наблюдаемого значения критерия Пирсона представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Вычисление наблюдаемого значения χ^2

Номер	M_i	P_i	$M_i^{'}$	$M_i - M_i^{'}$	$(M_i - M_i^{'})^2$	$\frac{(M_i - M_i^{'})^2}{M_i^{'}}$
1	6	0,0504	5,443	0,5568	0,31	0,0569
2	14	0,1093	11,8	2,1956	4,82	0,4084
3	17	0,1818	19,63	-2,6344	6,94	0,3535
4	27	0,2161	23,34	3,6612	13,40	0,5743
5	21	0,1941	20,96	0,0372	0,001	0,000066
6	15	0,1315	14,2	0,798	0,64	0,0448
7	5	0,0637	8,73	-3,7269	13,89	1,5916
8	3	0,0236	2,54	0,4512	0,20	0,0799
Итого	108	0,9705	97,05			3,1095

Используя таблицу критических точек распределения χ^2, найдём при числе степеней свободы $k = 8 - 3 = 5$ (число разрядов равно 8, а число связей S равно 3, так как нормальное распределение оценивается двумя параметрами – математическим ожиданием и среднеквадратическим отклонением) и уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ (то есть вероятность расхождения теоретического распределения с нормальным распределением меньше 0,1, и вероятность соответствия его нормальному закону больше 0,9) критическую точку: $\chi^2_{\text{крит}} = 9{,}2$. Выдвинутая гипотеза принимается, так как: $\chi^2_{набл} = 3{,}11 < \chi^2_{\text{крит}} = 9{,}2$.

Таким образом, в целом, несмотря на ограниченный объем выборки эмпирических данных, можно предположить, что распределения рассматриваемой случайной величины близко к нормальному закону (хотя эта гипотеза проверялась при небольшой вероятности).

В результате обработки статистического материала было получено, что случайную величину можно аппроксимировать нормально распределенной случайной величиной с параметрами: математическим ожиданием $\overline{X_в} = 1605{,}6$; среднеквадратическим отклонением $\sigma = 447{,}899$.

Показательный (экспоненциальный) закон

Определим закон распределения некоторой случайной величины. Выдвигается нулевая гипотеза H_0 о том, что расхождение эмпирических частот распределения случайной величины и теоретических частот показательного распределения незначимо (генеральная совокупность случайных чисел распределена по показательному (экспоненциальному) закону).

Объем выборки (N) – 100.

Число интервалов (I) – 8.

Максимальное значение случайной величины ($x_{\max}$) – 12.

Минимальное значение случайной величины ($x_{\min}$) – 181,92.

Шаг (величина интервала) (i) – 21,24.

Числовые характеристики эмпирического распределения сведены в таблицу 6.

Таблица 6 – Эмпирическое распределение случайной величины и его числовые характеристики

№	Нижняя граница X_i	Верхняя граница X_{i+1}	Частота M_i	Частость W_i	Центр интервала $\overline{X_i}$	$M_i \cdot \overline{X_i}$	Отклонение от среднего $\overline{X_i} - \overline{X_в}$	Квадрат отклонения $(X_i - \overline{X_i})^2$	$W_i(X_i - \overline{X_i})^2$
1	12,00	33,24	29	0,29	22,62	655,98	-53,9488	2910,47	84403,72
2	33,24	54,48	21	0,21	43,86	921,06	-32,7088	1069,87	22467,18
3	54,48	75,72	15	0,15	65,1	976,5	-11,4688	131,53	1973,00
4	75,72	96,96	12	0,12	86,34	1036,08	9,7712	95,48	1145,72
5	96,96	118,20	9	0,09	107,58	968,22	31,0112	961,69	8655,25
6	118,20	139,44	6	0,06	128,82	772,92	52,2512	2730,19	16381,13
7	139,44	160,68	5	0,05	150,05	750,25	73,4912	5400,96	27004,78
8	160,68	181,92	3	0,03	171,29	513,87	94,7112	8970,21	26910,63
Итого			100	1,0		6594,88			188941,41

Выборочная средняя: $\overline{X_в} = 65{,}9488$.

Дисперсия: $D(X) = 1889{,}41407$.

Среднеквадратическое отклонение: $\sigma = 43{,}4674$.

Параметр: $\lambda = 0{,}01516$.

Построим гистограмму эмпирического распределения (рисунок 3).

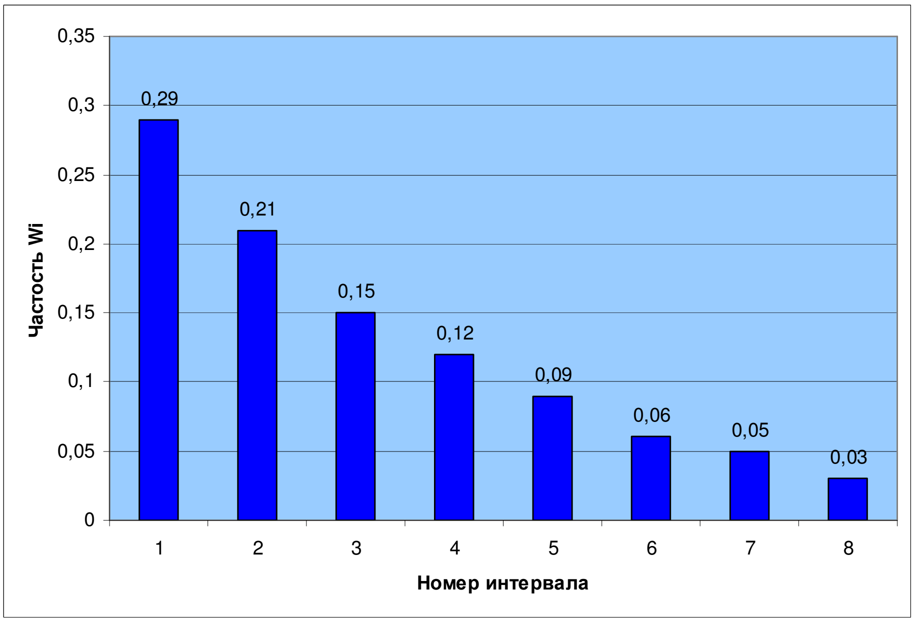


Рисунок 3 – Гистограмма эмпирического распределения

Вид полученной гистограммы (рисунок 3), численная близость среднего и математического ожидания, позволяют предположить, что исследуемая величина подчиняется показательному (экспоненциальному) закону.

Результаты вычисления теоретической вероятности сведены в таблицу 7.

Таблица 7 - Вычисление теоретических вероятностей

№	Интервал		$-\lambda x_i$	$-\lambda x_{i+1}$	$e^{-\lambda x_i}$	$e^{-\lambda x_{i+1}}$	P_i
	x_i	x_{i+1}					
1	12,00	33,24	-0,1818	-0,5037	0,8338	0,6043	0,2294
2	33,24	54,48	-0,5037	-0,8255	0,6043	0,4380	0,1663
3	54,48	75,72	-0,8255	-1,1474	0,4380	0,3175	0,1205
4	75,72	96,96	-1,1474	-1,4692	0,3175	0,2301	0,0874
5	96,96	118,20	-1,4692	-1,7911	0,2301	0,1668	0,0633
6	118,20	139,44	-1,7911	-2,1129	0,1668	0,1209	0,0459
7	139,44	160,68	-2,1129	-2,4347	0,1209	0,0876	0,0333
8	160,68	181,92	-2,4347	-2,8020	0,0876	0,0607	0,0269
Σ							0,773

Таблица 8 - Вычисление наблюдаемого значения критерия $\chi^2_{набл}$

N	M_i	P_i	$n \cdot P_i$	$M_i - n \cdot P_i$	$(M_i - n \cdot P_i)^2$	$\frac{(M_i - n \cdot P_i)^2}{n \cdot P_i}$
1	29	0,2294	22,942	6,0579	36,6988	1,5996
2	21	0,1663	16,6292	4,3708	19,1039	1,1488
3	15	0,1205	12,0534	2,9466	8,6823	0,7203
4	12	0,0874	8,7367	3,2633	10,6488	1,2189
5	9	0,0633	6,3327	2,6673	7,1145	1,1235
6	6	0,0459	4,5902	1,4098	1,9876	0,4330
7	5	0,0333	3,3241	1,6729	2,7986	0,8411
8	3	0,0269	2,6939	0,3061	0,0937	0,0348
	100	0,773	77,3053			7,12

Используя таблицу критических точек распределения χ^2, найдём при числе степеней свободы $k = 8 - 2 = 6$ (число разрядов равно 8, а число связей S равно 2, так как показательное распределение оценивается одним параметром – λ) и уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ (то есть вероятность расхождения теоретического распределения с нормальным распределением меньше 0,05, и вероятность соответствия его показательному закону больше 0,95) критическую точку: $\chi^2_{крит} = 12{,}6$. Выдвинутая гипотеза принимается, так как: $\chi^2_{набл} = 7{,}12 < \chi^2_{крит} = 12{,}6$.

Таким образом, в целом, несмотря на ограниченный объем выборки эмпирических данных, можно предположить, что распределения рассматриваемой случайной величины близко к показательному закону.

В результате обработки статистического материала было получено, что случайную величину можно аппроксимировать показательно распределенной случайной величиной с параметром $\lambda = 0{,}01516$.

Задание на лабораторное занятие.

1) Собрать статистические данные по двум случайным величинам, выделенным в ходе анализа выбранного бизнес-процесса.

2) Провести идентификацию законов распределения случайных величин.

Приложение А

Таблица значений функции $\Phi(Z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^Z e^{-x^2/2}dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	**0,44**	0,1700	**0,88**	0,3106	**1,32**	0,4066	**1,76**	0,4608	**2,40**	0,4918
0,01	0,0040	**0,45**	0,1736	**0,89**	0,3133	**1,33**	0,4082	**1,77**	0,4616	**2,42**	0,4922
0,02	0,0080	**0,46**	0,1772	**0,90**	0,3159	**1,34**	0,4099	**1,78**	0,4625	**2,44**	0,4927
0,03	0,0120	**0,47**	0,1808	**0,91**	0,3186	**1,35**	0,4115	**1,79**	0,4633	**2,46**	0,4931
0,04	0,0160	**0,48**	0,1844	**0,92**	0,3212	**1,36**	0,4131	**1,80**	0,4641	**2,48**	0,4934
0,05	0,0199	**0,49**	0,1879	**0,93**	0,3238	**1,37**	0,4147	**1,81**	0,4649	**2,50**	0,4938
0,06	0,0239	**0,50**	0,1915	**0,94**	0,3264	**1,38**	0,4162	**1,82**	0,4656	**2,52**	0,4941
0,07	0,0279	**0,51**	0,1950	**0,95**	0,3289	**1,39**	0,4177	**1,83**	0,4664	**2,54**	0,4945
0,08	0,0319	**0,52**	0,1985	**0,96**	0,3315	**1,40**	0,4192	**1,84**	0,4671	**2,56**	0,4948
0,09	0,0359	**0,53**	0,2019	**0,97**	0,3340	**1,41**	0,4207	**1,85**	0,4678	**2,58**	0,4951
0,10	0,0398	**0,54**	0,2054	**0,98**	0,3365	**1,42**	0,4222	**1,86**	0,4686	**2,60**	0,4953
0,11	0,0438	**0,55**	0,2088	**0,99**	0,3389	**1,43**	0,4236	**1,87**	0,4693	**2,62**	0,4956
0,12	0,0478	**0,56**	0,2123	**1,00**	0,3413	**1,44**	0,4251	**1,88**	0,4699	**2,64**	0,4959
0,13	0,0517	**0,57**	0,2157	**1,01**	0,3438	**1,45**	0,4265	**1,89**	0,4706	**2,66**	0,4961
0,14	0,0557	**0,58**	0,2190	**1,02**	0,3461	**1,46**	0,4279	**1,90**	0,4713	**2,68**	0,4963
0,15	0,0596	**0,59**	0,2224	**1,03**	0,3485	**1,47**	0,4292	**1,91**	0,4719	**2,70**	0,4965
0,16	0,0636	**0,60**	0,2257	**1,04**	0,3508	**1,48**	0,4306	**1,92**	0,4726	**2,72**	0,4967
0,17	0,0675	**0,61**	0,2291	**1,05**	0,3531	**1,49**	0,4319	**1,93**	0,4732	**2,74**	0,4969
0,18	0,0714	**0,62**	0,2324	**1,06**	0,3554	**1,50**	0,4332	**1,94**	0,4738	**2,76**	0,4971
0,19	0,0753	**0,63**	0,2357	**1,07**	0,3577	**1,51**	0,4345	**1,95**	0,4744	**2,78**	0,4973
0,20	0,0793	**0,64**	0,2389	**1,08**	0,3599	**1,52**	0,4357	**1,96**	0,4750	**2,80**	0,4974
0,21	0,0832	**0,65**	0,2422	**1,09**	0,3621	**1,53**	0,4370	**1,97**	0,4756	**2,82**	0,4976
0,22	0,0871	**0,66**	0,2454	**1,10**	0,3643	**1,54**	0,4382	**1,98**	0,4761	**2,84**	0,4977
0,23	0,0910	**0,67**	0,2486	**1,11**	0,3665	**1,55**	0,4394	**1,99**	0,4767	**2,86**	0,4979
0,24	0,0948	**0,68**	0,2517	**1,12**	0,3686	**1,56**	0,4406	**2,00**	0,4772	**2,88**	0,4980
0,25	0,0987	**0,69**	0,2549	**1,13**	0,3708	**1,57**	0,4418	**2,02**	0,4783	**2,90**	0,4981
0,26	0,1026	**0,70**	0,2580	**1,14**	0,3729	**1,58**	0,4429	**2,04**	0,4793	**2,92**	0,4982
0,27	0,1064	**0,71**	0,2611	**1,15**	0,3749	**1,59**	0,4441	**2,06**	0,4803	**2,94**	0,4984
0,28	0,1103	**0,72**	0,2642	**1,16**	0,3770	**1,60**	0,4452	**2,08**	0,1812	**2,96**	0,4985
0,29	0,1141	**0,73**	0,2673	**1,17**	0,3790	**1,61**	0,4463	**2,10**	0,4821	**2,98**	0,4986
0,30	0,1179	**0,74**	0,2703	**1,18**	0,3810	**1,62**	0,4474	**2,12**	0,4830	**3,00**	0,49865
0,31	0,1217	**0,75**	0,2734	**1,19**	0,3830	**1,63**	0,4484	**2,14**	0,4838	**3,20**	0,49931
0,32	0,1255	**0,76**	0,2764	**1,20**	0,3849	**1,64**	0,4495	**2,16**	0,4846	**3,40**	0,49966
0,33	0,1293	**0,77**	0,2794	**1,21**	0,3869	**1,65**	0,4505	**2,18**	0,4854	**3,60**	0,499841
0,34	0,1331	**0,78**	0,2823	**1,22**	0,3883	**1,66**	0,4515	**2,20**	0,4861	**3,80**	0,499928
0,35	0,1368	**0,79**	0,2852	**1,23**	0,3907	**1,67**	0,4525	**2,22**	0,4868	**4,00**	0,499968
0,36	0,1406	**0,80**	0,2881	**1,24**	0,3925	**1,68**	0,4535	**2,24**	0,4875	**4,50**	0,499997
0,37	0,1443	**0,81**	0,2910	**1,25**	0,3944	**1,69**	0,4545	**2,26**	0,4881	**5,00**	0,499997
0,38	0,1480	**0,82**	0,2939	**1,26**	0,3962	**1,70**	0,4554	**2,28**	0,4887		
0,39	0,1517	**0,83**	0,2967	**1,27**	0,3980	**1,71**	0,4564	**2,30**	0,4893		
0,40	0,1554	**0,84**	0,2995	**1,28**	0,3997	**1,72**	0,4573	**2,32**	0,4898		
0,41	0,1591	**0,85**	0,3023	**1,29**	0,4015	**1,73**	0,4582	**2,34**	0,4904		
0,42	0,1628	**0,86**	0,3051	**1,30**	0,4032	**1,74**	0,4591	**2,36**	0,4909		
0,43	0,1664	**0,87**	0,3078	**1,31**	0,4049	**1,75**	0,4599	**2,38**	0,4913		