Практическая работа 3

Тема 4 Дискретные случайные величины

Дискретной называют случайную величину X, принимающую конечное или счетное (можно перенумеровать) число значений: $x_1, x_2, \ldots$. *Значение* x_k *принимается с некоторой вероятностью* $p_k = P(X = x_k) > 0$. *При этом*

$$\sum_k p_k = 1.$$

Соответствие, которое каждому значению x_k *дискретной случайной величины X сопоставляет его вероятность* p_k, *называется законом распределения случайной величины X.*

Закон распределения обычно задается в виде таблицы, которая называется рядом распределения:

X	x_1	x_2	…
P	p_1	p_2	…

Функция распределения случайной величины $F(x) = P(X < x)$ *в дискретном случае является кусочно-постоянной и может быть найдена по формуле*

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k = \sum_{x_k < x} P(X = x_k).$$

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называется число:

$$E(X) = \sum_k x_k p_k.$$

Дисперсией случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

Дисперсию удобно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Средним квадратичным отклонением случайной величины называют квадратный корень из дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

В задачах часто используется биномиальное распределение, то есть распределение случайной величины X – числа наступления события A в n независимых опытах, в каждом из которых событие A может произойти с одной и той же вертятностью p. Случайная величина X принимает целочисленные значения $m = 0, 1, \ldots, n$ *с вероятностями*

$$P(X = m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение случайной величины X, распределенной по биномиальному закону, находятся по формулам

$$E(X) = np, \quad D(X) = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}, \quad \text{где } q = 1 - p.$$

Для всех вариантов расшифровка задания: " Построить ... отклонение... " читается так: " Построить ряд распределения, найти функцию распределения, математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение...".*

Номер варианта – последняя цифра зачетной книжки

Тема 5 Непрерывные случайные величины

Случайная величина X называется непрерывной случайной величиной, если существует неотрицательная функция f (x) такая, что при любом x выполнено соотношение

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt\,, \qquad (1)$$

где, как и раньше, F(x) = $P(X < x)$ *– функция распределения случайной величины X.* $F(x)$ *является непрерывной функцией. Напомним, что, кроме того, функция распределения является неубывающей функцией и*

$0 \le F(x) \le 1$; $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$; $P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$.

Функция f (x)- плотность

Плотность распределения обладает следующими свойствами

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \qquad f(x) = F'(x)$$ *, если производная* $F'(x)$ *существует.*

Вероятность попасть на промежуток можно найти, интегрируя плотность распределения (*это свойство и свойство* (1) *эквивалентны*)

$$P(a \le X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Математическое ожидание (среднее) непрерывной случайной величины X определяется равенством $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx\cdot$

Дисперсия непрерывной случайной величины X определяется равенством

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2 f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - (E(X))^2,$$

среднее квадратичное отклонение X равенством

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Вариант 1

Задача 1. Спортсмен должен последовательно преодолеть 4 препятствия, каждое из которых преодолевается им с вероятностью $p = 0{,}9$. Если спортсмен не преодолевает какое-либо препятствие, он выбывает из соревнований.

Построить…*отклонение числа препятствий, преодолённых спортсменом.

Найти вероятность того, что спортсмен преодолеет:

а) не более двух препятствий;

б) более трёх препятствий.

Задача 2. Из коробки, в которой находятся 2 зелёных, 2 чёрных и 6 красных стержней для шариковой руки, случайным образом извлекаются 4 стержня.

Построить…* отклонение числа извлечённых стержней красного цвета.

Найти вероятность того, что при этом красных стержней будет:

а) не менее трёх;

б) хотя бы один.

Задача 3. Плотность распределения случайной величины X имеет вид $f(x) = a\,x^2 e^{-kx}$, где $k > 0$, $0 \le x < \infty$.

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения случайной величины X;

в) вычислить вероятность попадания случайной величины X на интервал $(0;\ 1/k)$.

Задача 4. Случайная величина X имеет функцию распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<0;\\ \dfrac{x^2}{16}, & \text{при } 0\le x<2;\\ x-7/4, & \text{при } 2\le x<11/4;\\ 1, & \text{при } x\ge 11/4.\end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

б) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

в) вероятность попадания случайной величины X на отрезок [1;1.5].

Вариант 2

Задача 1. База снабжает 6 магазинов. В течение дня от каждого из них с вероятностью 1/3 может поступить заявка.

*Построить**... отклонение числа заявок, поступивших на базу за день.

Найти вероятность того, что их будет более пяти.

Задача 2. Наблюдение за районом осуществляется тремя радиолокационными станциями (РЛС). В район наблюдений попал объект, который обнаруживается любой радиолокационной станцией с вероятностью 0,2.

*Построить**... отклонение числа РЛС, обнаруживших объект.

Найти вероятность того, что их будет не менее двух.

Задача 3. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет вид

$F(x) = A + B \operatorname{arctg} x,\ (-\infty < x < +\infty)$.

Найти: а) постоянные A, B;

б) плотность распределения $f(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

в) выяснить существует ли $E(X)$.

Задача 4. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{при } x<1;\\ \dfrac{A}{x^2}, & \text{при } x\ge 1.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A;

б) функцию распределения $F(x)$, построить графики $F(x)$ и $f(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность попадания случайной величины X в интервал (2 ; 3);

д) вероятность того, что при 4 независимых испытаниях случайная величина X ни разу не попадает на отрезок [2; 3].

Вариант 3

Задача 1. Опыт состоит из четырёх независимых подбрасываний двух правильных монет, т.е. выпадение герба и цифры равновозможные события.

*Построить**... отклонение числа одновременного выпадения двух цифр.

Найти вероятность того, что это событие произойдёт не менее трёх раз.

Задача 2. Автоматизированную линию обслуживают 5 манипуляторов. При плановом осмотре их поочередно проверяют. Если характеристики проверяемого манипулятора не удовлетворяют техническим условиям, вся линия останавливается для переналадки. Вероятность того, что при проверке характеристики манипулятора окажутся неудовлетворительными, равна 0,3.

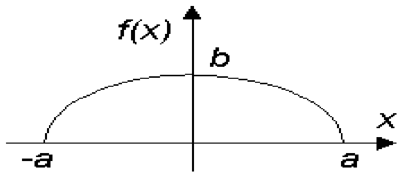
*Построить**... отклонение числа манипуляторов, проверенных до остановки линии.

Найти вероятность того, что до остановки линии будет проверено:

а) не более двух манипуляторов;

б) более трёх манипуляторов.

Задача 3. График плотности распределения случайной величины X представляет собой полуэллипс с большей полуосью "a" (a - известно).



Найти:

а) полуось b;

б) аналитическое задание $f(x)$;

в) моменты $E(X)$, $D(X)$;

г) вероятность $P(a/2 < X < 2a)$.

Задача 4. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < -1; \\ a + b\arcsin x, & \text{при} \quad -1 \le x < 1; \\ 1, & \text{при} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициенты a и b;

б) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант 4

Задача 1. На пяти карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Две из карточек вынимаются наугад одновременно.

*Построить**... отклонение суммы чисел, написанных на этих карточках.

Найти вероятность того, что эта сумма будет:

а) менее шести;

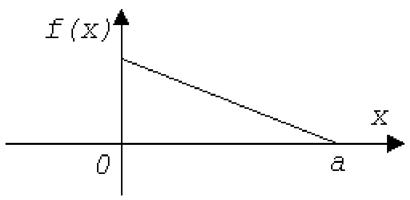
б) не менее пяти.

Задача 2. Производятся 4 независимых опыта, в каждом из которых с вероятностью 0,2; 0,4; 0,6; 0,8 соответственно может появиться случайное событие A.

*Построить**... отклонение числа появлений события A.

Найти вероятность того, что A произойдёт не менее чем в половине опытов.

Задача 3. Случайная величина X распределена по закону "прямоугольного треугольника" в интервале (0; a).



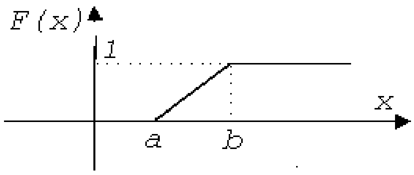
Найти: а) аналитическое задание $f(x)$;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность $P(a/2 < X < a)$;

г) моменты $E(X)$, $D(X)$.

Задача 4. Функция распределения случайной величины X задана графиком



Найти математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант 5

Задача 1. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 5 красных. Из этой коробки наудачу извлекаются 3 карандаша.

Построить...* отклонение числа красных карандашей в выборке.

Найти вероятность того, что в выборке будет:

а) хотя бы один красный карандаш;

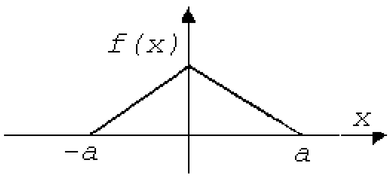
б) менее двух красных карандашей.

Задача 2. Стрелок, имеющий 4 патрона, стреляет последовательно по двум мишеням, до поражения обеих мишеней или пока не израсходует все 4 патрона. При попадании в первую мишень стрельба по ней прекращается, и стрелок начинает стрелять по второй мишени. Вероятность попадания при любом выстреле 0,8.

Построить...* отклонение числа поражённых мишеней.

Найти вероятность того, что будет поражена хотя бы одна мишень.

Задача 3. Случайная величина X подчинена “закону равнобедренного треугольника” на участке [- a; a].



Найти: а) аналитическое задание $f(x)$;

б) математическое ожидание $E(X)$, дисперсию $D(X)$.

Задача 4. Случайная величина X распределена по закону Коши

$$f(x) = \frac{a}{1+x^2}, \qquad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) вероятность попадания случайной величины X на отрезок [-1;1].

г) выяснить существует ли $E(X)$?

Вариант 6

Задача 1. Из ящика, содержащего 4 годных и 3 бракованных детали, наугад извлекают 4 детали.

Построить…* отклонение числа вынутых годных деталей.

Найти вероятность того, что годных деталей будет:

а) менее трех;

б) хотя бы одна.

Задача 2. Имеется набор из четырех карточек, на каждой из которых написана одна из цифр 1, 2, 3, 4. Из набора наугад извлекают карточку, затем ее возвращают обратно, после чего наудачу извлекают вторую карточку.

*Построить**… отклонение случайной величины, равной сумме чисел, написанных на вынутых карточках.

Найти вероятность того, что эта сумма:

а) не превзойдет числа 4;

б) будет не менее 6.

Задача 3. Случайная величина *X* подчинена показательному закону распределения с параметром $\lambda > 0$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{при} \quad x \ge 0; \\ 0, & \text{при} \quad x < 0. \end{cases}$$

Найти: а) функцию распределения $F(x)$;

б) вероятность того, что случайная величина *X* примет значение меньшее, чем её математическое ожидание.

Задача 4 Случайная величина *X* подчинена закону Лапласа

$$f(x) = a e^{-|x|/u}, \quad \text{где} \quad u > 0.$$

Найти: а) коэффициент *a*;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Вариант 7

Задача 1. Три стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания каждым стрелком в цель равна 0.6.

*Построить**... отклонение числа попаданий, если каждый стрелок делает только один выстрел.

Найти вероятность того, что:

а) будет хотя бы одно попадание;

б) будет не более одного попадания.

Задача 2. Три стрелка независимо друг от друга стреляют каждый по своей мишени один раз. Вероятности попадания при одном выстреле у стрелков равны соответственно: $p_1 = 0,3;\ p_2 = 0,6;\ p_3 = 0,7.$

*Построить**... отклонение числа пораженных мишеней.

Найти вероятность того, что пораженных мишеней будет:

а) хотя бы одна;

б) менее двух.

Задача 3. Функция распределения случайной величины *X* имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{x_0^3}{x^3}, & \text{при} \quad x \ge x_0 > 0; \\ 0, & \text{при} \quad x < x_0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Задача 4. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}}, & \text{при } x \in (-a,\ a); \\ 0, & \text{при } x \notin (-a,\ a). \end{cases}$$

Найти моменты $E(X)$, $D(X)$; $\sigma(X)$ и вероятность $P(0 < X < 2a)$.

Вариант 8

Задача 1. Опыт состоит из трех независимых подбрасываний одновременно трех монет, каждая из которых с одинаковой вероятностью падает гербом или цифрой вверх.

*Построить**... отклонение числа одновременного выпадения двух гербов.

Найти вероятность того, что два герба одновременно выпадут хотя бы один раз.

Задача2. На пути автомобиля 5 светофоров, каждый из них автомобиль проезжает с вероятностью 0,6.

*Построить**… отклонение числа светофоров, которые автомобиль проезжает до первой остановки.

Найти вероятность того, что до первой остановки автомобиль проедет:

а) хотя бы один светофор;

б) более трех светофоров.

Задача3. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x, & \text{при} \quad x \in (-\pi/2,\ \pi/2); \\ 0, & \text{при} \quad x \notin (-\pi/2,\ \pi/2). \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность $P\left(0 < X < \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Задача 4. Функция распределения непрерывной случайной величины X имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} A, & \text{при} \quad x < 0; \\ Bx, & \text{при} \quad 0 \le x \le 1; \\ C, & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициенты A, B, C;

б) плотность распределения $f(x)$;

в) вероятность $P(0 < X < 1/2)$;

г) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

Вариант 9

Задача 1. Из урны, в которой было 4 белых и 2 черных шара, переложен один шар в другую урну, в которой находилось 3 черных шара и один белый. После перемешивания из последней урны вынимают 3 шара.

*Построить**… отклонение числа черных шаров, вынутых из второй урны.

Найти вероятность того, что из нее будет извлечено:

а) по крайней мере, два черных шара;

б) не более двух черных шаров.

Задача 2. Стрелок стреляет по мишени до трех попаданий или до тех пор, пока не израсходует все патроны, после чего прекращает стрельбу. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6.

Построить…* отклонение числа выстрелов, произведенных стрелком, если у стрелка имеется 5 патронов.

Найти вероятность того, что стрелок произведет, по крайней мере, четыре выстрела.

Задача 3. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f\ (x)\ =\begin{cases}0, & \text{при}\quad x\le 0;\\ \dfrac{A}{\cos^2 x} & \text{при}\quad 0<x<\pi/4;\\ 0, & \text{при}\quad x\ge \pi/4.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент A;

б) функцию распределения $F\ (x)$;

в) математическое ожидание $E\ (X)$;

г) вероятность $P(\pi/8 < X < \pi/4)$.

Задача 4. Дана функция

$$f(x)\ =\ \begin{cases}0, & \text{при}\ \ x<0;\\ \lambda\,(3x-x^2), & \text{при}\ \ 0\le x\le 3;\\ 0, & \text{при}\ \ x>3.\end{cases}$$

Найти: а) при каком λ функция $f\ (x)$ является плотностью распределения некоторой случайной величины X;

б) математическое ожидание $E\ (X)$ и дисперсию $D\ (X)$.

Вариант 10

Задача 1. Ракетная установка обстреливает две удаленные цели. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,6. Цель при попадании в нее уничтожается. Запуск ракет прекращается после уничтожения обеих целей или после использования имеющихся пяти ракет.

Построить...* отклонение числа запущенных ракет.

Найти вероятность того, что при этом будет запущено:

а) не более трех ракет;

б) от двух до четырех ракет.

Задача 2. Три ракетные установки стреляют каждая по своей цели независимо друг от друга до первого попадания, затем прекращают стрельбу. Каждая ракетная установка имеет две ракеты. Вероятность попадания одной ракеты для первой установки – 0,4, для второй – 0,5, для третьей – 0,6.

Построить...* отклонение числа ракетных установок, у которых осталась неизрасходованная ракета.

Найти вероятность того, что будет хотя бы одна такая установка.

Задача 3. Дана плотность распределения случайной величины X

$$f(x)\ =\ \begin{cases}0, & \text{при}\quad x<0;\\ \alpha\left(x-\dfrac{x^2}{3}\right), & \text{при}\quad 0\le x\le 3;\\ 0, & \text{при}\quad x>3.\end{cases}$$

Найти: а) коэффициент α;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$.

Задача 4. Плотность распределения случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad x < 1; \\ \dfrac{a}{x^3}, & \text{при} \quad 1 \le x \le 4; \\ 0, & \text{при} \quad x > 4. \end{cases}$$

Найти: а) коэффициент a;

б) функцию распределения $F(x)$;

в) математическое ожидание $E(X)$ и дисперсию $D(X)$;

г) вероятность $P(3 < X < 5)$.