

70

538.3
469

А. П. БИЛИН, А. Г. МОСЧАНОВ, В. Г. КИРСАНОВ,
О. Е. РОДИОНОВ, И. А. СЕРДИН

ОКРУЖАЮЩИЕ МАТЕРИАЛЫ

Часть - I

Москва 1981

6879

~~8058~~

9289

Самойлов А.О.М.
ММ-07-12

424528.3
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ НЕФТИ И ГАЗА
им. И.М. ГУБКИНА

КАФЕДРА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

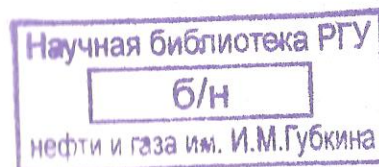
В.А. ЛУКЬЯНОВ, А.Г. МОЛЧАНОВ, В.Г. ПИРОЖКОВ,
С.В. РОМАНЕНКО, Л.А. СЕРДИЙ

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

(Часть – 1)

Учебное пособие по курсу сопротивления материалов
для студентов специальностей

130601, 130602, 130603, 150202, 150205, 151001



Москва 2006

В.Г.Пирожков, В.А.Лукьянов, А.Г.Молчанов, Л.А.Сердий, С.В.Романенко.
Сопротивление материалов. (Часть –1).

В издании приведены краткие сведения по анализу внутренних силовых факторов в статически определимых системах при различных видах нагружения. Также даны краткие сведения из теории расчета на прочность при растяжении, сжатии, кручении и изгибе. Рассмотрены примеры решения типовых задач с подробными пояснениями. Для самоконтроля дается набор вопросов.

В приложения включены: сокращенный сортамент прокатной стали и требования к оформлению расчетно-проектировочных работ.

Рецензент – д.т.н., профессор Н.М. Захаров

Содержание

Условные обозначения.....	1
1. Анализ внутренних силовых факторов в статически определимых системах	4
1.1. Основные положения	4
1.2. Методические указания.....	6
1.3. Построение эпюр внутренних силовых факторов	9
1.4. Примеры построения эпюр внутренних силовых факторов.....	10
1.5. Контрольные вопросы.....	33
1.6. Варианты заданий	33
2. Расчеты на прочность при растяжении, сжатии и кручении.....	
2.1. Основные положения	
2.2. Примеры решения задач	
2.3. Контрольные вопросы	
2.4. Варианты заданий	
3. Расчеты на прочность статически определимой балки при изгибе.....	
3.1. Основные положения.....	
3.2. Пример расчета.....	
3.3. Контрольные вопросы	
3.4. Варианты заданий	
Литература.....	
Приложение	

Расчетно-проектировочная работа № 1

АНАЛИЗ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ В СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМАХ

1.1. Основные положения

В сопротивлении материалов определение напряжений, перемещений и деформаций а, следовательно, и расчет на прочность и жесткость конструкций производится на основе расчета внутренних усилий, возникающих в конструкции при действии на неё внешних нагрузок (в том числе реакций). Поэтому определение внутренних усилий имеет важное значение.

В общем случае, возникающие в поперечном сечении внутренние усилия могут быть разложены на три силы - продольную (нормальную к сечению) и две поперечные (действующие в плоскости сечения), а также три момента: два изгибающих и один крутящий. Определение их производится методом сечений, т.е. составлением уравнений равновесия части конструкции, находящейся по одну сторону от рассматриваемого сечения.

В число нагрузок, определяющих величину и характер внутренних усилий, входят и реакции связей. Поэтому, как правило, расчету внутренних усилий предшествует определение реакций связей. Для статически определимых систем (которые только и рассматриваются в настоящей работе), не имеющих шарниров между отдельными элементами, определение реакций связей (опор) производится на основе составления и решения уравнений равновесия для всей заданной конструкции, а не части ее, как это необходимо при определении внутренних усилий.

Напряжения и деформации, возникающие в конструкции под действием заданных нагрузок, пропорциональны внутренним усилиям. Поэтому по изменению последних вдоль оси бруса можно судить о характере и величине напряжений и деформаций, в частности, установить сечения наиболее опасные, т.е. в которых внутренние усилия будут максимальными. Выразить одной формулой изменение внутренних усилий по всей длине бруса трудно и во многих случаях невозможно, поэтому приходится заданную конструкцию разбивать на отдельные участки, для которых можно составить аналитическое

выражение зависимости внутренних усилий от координат сечения. Для придания этой зависимости наглядности производится построение эпюр (графиков изменения внутренних усилий по длине бруса). По этим графикам легко установить сечения, где внутренние усилия достигают экстремальных значений.

1.2. Методические указания

Определение реакций связей

Используя принцип неизменности линейных размеров (принцип отвердения), заменяя связи их реакциями, составляются по правилам теоретической механики уравнения равновесия заданного бруса. Перед составлением уравнений равновесия необходимо произвольно выбрать направления реакций и изобразить их на рисунке. Если в результате вычислений какая-либо реакция получается отрицательной, нужно изменить на рисунке ее направление на обратное и в дальнейшем считать эту реакцию положительной.

Распределенную нагрузку, действующую на брус, можно заменить равнодействующей, которая равна площади эпюры нагрузки и приложена в центре тяжести этой эпюры.

При составлении уравнений равновесия необходимо стремиться к тому, чтобы в каждое из них входило только одно неизвестное. В частности, для двухопорной балки этого можно добиться, составляя следующие уравнения равновесия: сумма проекций всех сил на ось балки равна нулю; сумма моментов всех сил относительно опорных шарниров равна нулю.

Проверку правильности вычисления реакций производят путем составления дополнительных условий равновесия, которые должны обращаться в тождество. Например, для двухопорной балки можно использовать условие равенства нулю суммы сил, спроецированных на ось,

перпендикулярную оси балки, или условие равенства нулю суммы моментов всех сил относительно какой-либо точки, не совпадающей с опорами.

Деление на участки.

Участком называется часть бруса, в пределах которой аналитический вид выражений для определения внутренних силовых факторов остается неизменным.

Границами участков являются сечения бруса, в которых интенсивность распределенной нагрузки начинает изменяться по новому закону. Границей участка является также каждый излом, если брус имеет ось в виде ломаной, состоящей из прямолинейных участков, а так же те сечения, в которых приложены сосредоточенные нагрузки и места установки опорных устройств.

Выбор координатных осей

При построении эпюр аргументом является координата поперечного сечения бруса, а функцией - силовой фактор, закон которого исследуется. Продольная ось бруса обозначается латинской буквой z . Координаты, соответствующие сечению на i -м участке, обозначаются z_i , (например, на первом участке - z_1 , на втором - z_2 и т.д.).

На каждом участке берется какое-либо произвольное сечение на расстоянии z_i от начала координат, и для этого сечения составляются выражения для определения внутренних силовых факторов. Начало координат можно брать на левом либо, на правом концах бруса, в начале или в конце любого участка.

Составление уравнений внутренних силовых факторов

При составлении уравнений для определения внутренних силовых факторов в сечении рекомендуется использовать нижеперечисленные правила, сформулированные на основе метода сечений и общепринятых правил знаков.

Продольная (нормальная) сила $N(z_i)$ в произвольном поперечном сечении бруса численно равна алгебраической сумме проекций на продольную

ось бруса z всех внешних сил (сосредоточенных и распределенных по длине с интенсивностью $q_j(z_i)$), действующих на рассматриваемую часть бруса.

$$N(z_i) = \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{j=1}^m \int_{l_i} q_j(z_i) dz_i, \quad (1.1)$$

Интегрирование производится по длине каждого участка, на который действует распределенная сила, а суммирование проводится по всем участкам, расположенным по одну сторону от рассматриваемого сечения.

Внешняя сила, направленная от рассматриваемого сечения (при мысленном закреплении бруса в этом сечении она его растягивает), в выражении для определения $N(z_i)$ в этом сечении дает положительное слагаемое. В противоположном случае - отрицательное слагаемое.

Крутящий момент $M_{кр}(z_i)$ в произвольном поперечном сечении бруса (вала) численно равен алгебраической сумме моментов относительно продольной оси бруса всех внешних пар сил (сосредоточенных моментов M_i и распределенных по длине с интенсивностью $m_j(z)$), действующих на рассматриваемую часть бруса:

$$M_{кр}(z_i) = \sum_{i=1}^n M_i + \sum_{j=1}^k \int_{l_i} m_j(z_i) dz_i, \quad (1.2)$$

Интегрирование производится по длине каждого участка, на который действует распределенная нагрузка, а суммирование - по всем участкам, расположенным по одну сторону от рассматриваемого сечения. Внешняя пара сил, которая для наблюдателя, смотрящего на проведенное сечение со стороны его внешней нормали, представлена направленной по часовой стрелке, в выражении для определения $M_{кр}(z_i)$ в этом сечении дает положительное слагаемое. В противном случае - отрицательное слагаемое.

Поперечная сила $Q(z_i)$ в любом поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих на

рассматриваемую часть балки и спроецированных на ось, перпендикулярную оси балки:

$$Q(z_i) = \sum_{i=1}^n P_i + \sum_{j=1}^k \int_{l_i} q_j(z_i) dz_i, \quad (1.3)$$

Внешняя сила, стремящаяся повернуть балку относительно рассматриваемого сечения по часовой стрелке, в выражении для определения $Q(z_i)$ в этом сечении дает положительное слагаемое. В противоположном случае - отрицательное слагаемое.

Изгибающий момент $M(z_i)$ в произвольном поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на рассматриваемую часть балки, относительно одной из главных центральных осей инерции сечения. Если при мысленном закреплении рассматриваемой части балки в проведенном сечении внешняя нагрузка создает относительно этого сечения момент, вызывающий сжатие верхних волокон балки, то в выражении для определения $M(z_i)$ в этом сечении она дает положительное слагаемое. В противоположном случае - отрицательное слагаемое.

1.3. Построение эпюр внутренних силовых факторов

Графики, показывающие, как изменяются внутренние усилия при переходе от сечения к сечению, называют эпюрами. При построении эпюр руководствуются следующими правилами.

Эпюра вычерчивается под брусом так, чтобы ее ось (база) была параллельна оси бруса. Ординаты эпюры откладываются строго в масштабе от оси эпюры по перпендикуляру, причем положительные значения - вверх, отрицательные - вниз. Для рам ординаты эпюр откладываются перпендикулярно к оси рамы, причем положительные значения - с внешней стороны рамы, а отрицательные - с внутренней стороны. На эпюрах должны

быть указаны экстремальные значения внутренних усилий, а также координаты поперечных сечений бруса, соответствующие этим усилиям. Кроме того, на эпюрах проставляются числа, показывающие величины характерных ординат, а в поле эпюры в кружочке проставляется знак усилия.

При проверке правильности построения эпюры внутренних силовых факторов руководствуются правилами, вытекающими из метода сечений и дифференциальных зависимостей.

1.4. Примеры построения эпюр внутренних силовых факторов.

Пример № 1. Построить эпюры внутренних силовых факторов для бруса, изображенного на рис. 1.1.

Решение. При таком виде нагружения бруса в его поперечных сечениях возникает один внутренний силовой фактор - продольная сила N . Брус имеет два участка. Начало координат для каждого участка выбираем на его левом конце. Обозначив координаты сечения на каждом участке (см. рис. 1.1), составляем уравнения для определения $N(z)$ и вычисляем ее значения в характерных точках.

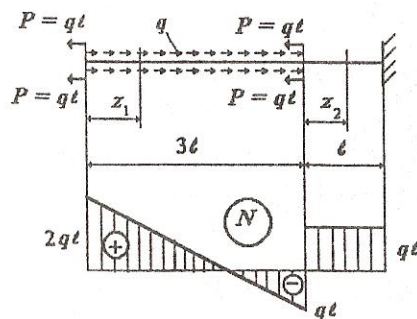


Рис. 1.1.

На этом участке $N(z_2)$ имеет постоянные значения. По составленным уравнениям и значениям $N(z)$ в характерных точках строим эпюру $N(z)$. Проводим контроль правильности построения эпюры $N(z)$.

Первый участок :

$$0 \leq z_1 \leq 3l;$$

$$N(z_1) = 2P - qz_1.$$

$$\text{При } z_1 = 0 \quad N(z_1) = 2ql,$$

$$\text{при } z_1 = 3l \quad N(z_1) = -ql.$$

Второй участок:

$$0 \leq z_2 \leq l;$$

$$N(z_2) = 2P - q3l + 2P = ql.$$

Пример № 2. Построить эпюры внутренних силовых факторов для бруса, изображенного на рис. 1.2.

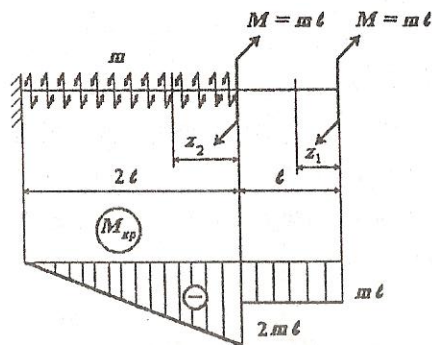


Рис. 1.2

Решение. При таком виде нагружения бруса в его поперечных сечениях возникает один внутренний силовой фактор - крутящий момент $M_{кр}$.

Обозначив координаты сечения на каждом участке (см. рис. 1.2), составляем уравнения для

определения $M_{кр}(z)$ и вычисляем его значения в характерных точках.

Первый участок:

$$0 \leq z_1 \leq l,$$

$$M_{кр}(z_1) = -M = -ml.$$

На этом участке $M_{кр}(z_1)$ имеет постоянные значения.

Второй участок:

$$0 \leq z_2 \leq 2l,$$

$$M_{кр}(z_2) = -M - m \cdot z_2.$$

$$\text{При } z_2 = 0 \quad M_{кр}(z_2) = -2ml.$$

$$\text{При } z_2 = 2l \quad M_{кр}(z_2) = 0.$$

По составленным уравнениям и значениям $M_{кр}(z)$ в характерных точках строим эпюру $M_{кр}(z)$. Проводим контроль правильности проведенного построения эпюры.

Пример №3. Построить эпюры внутренних силовых факторов для балки, изображенной на рис. 1.3.

Решение. Определяем опорные реакции R_a и R_b , выбрав их первоначально направленными вверх:

$$\sum M_b = R_a \ell + \frac{q\ell^2}{8} - q\ell \frac{\ell}{2} = 0, \quad R_a = \frac{3}{8} q\ell;$$

$$\sum M_a = -R_b \ell + \frac{q\ell^2}{8} + q\ell \frac{\ell}{2} = 0, \quad R_b = \frac{5}{8} q\ell.$$

Проверка:

$$\sum Y = R_a + R_b - q\ell = \frac{3}{8} q\ell + \frac{5}{8} q\ell - q\ell = 0.$$

Опорные реакции определены верно. Балка имеет два участка нагружения. Начало первого участка выбираем в точке А, второго - в точке В. Обозначив координаты сечения на каждом участке (см. рис. 1.3), составляем уравнения для определения $Q(z_1)$ и $M(z_1)$.

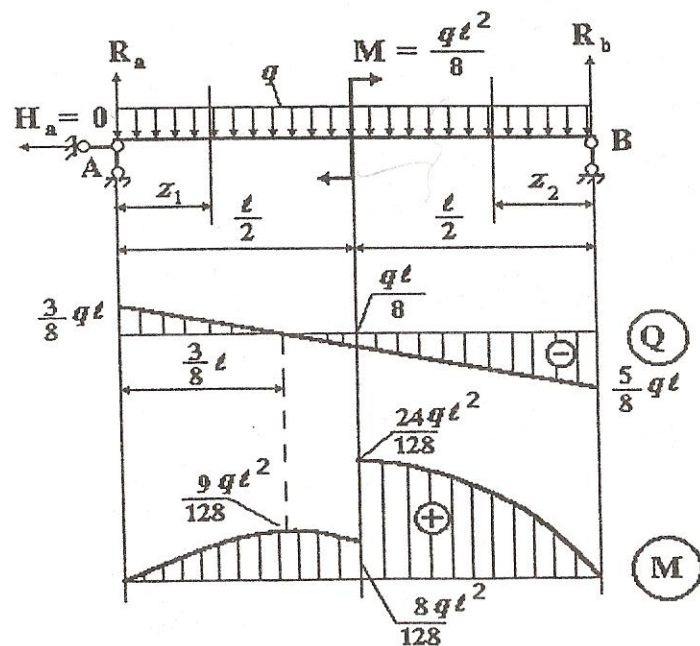


Рис. 1.3.

Вычисляем их значения в характерных точках.

Первый участок:

$$0 \leq z_1 \leq \frac{\ell}{2},$$

$$Q(z_1) = R_a - qz_1 = \frac{3}{8} q\ell - qz_1,$$

$$M(z_1) = R_a z_1 - \frac{qz_1^2}{2} = \frac{3}{8} q\ell z_1 - \frac{qz_1^2}{2}.$$

Определяем значения $Q(z_1)$ и $M(z_1)$ в характерных точках.

При $z_1 = 0$ $Q(z_1) = \frac{3}{8} q\ell$, $M(z_1) = 0.$

При $z_1 = \frac{\ell}{2}$ $Q(z_1) = \frac{3}{8} q\ell - \frac{q\ell}{2} = -\frac{q\ell}{8},$

$$M(z_1) = \frac{3}{8} q\ell \frac{\ell}{2} - \frac{q\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2} = \frac{q\ell^2}{16}.$$

На этом участке поперечная сила меняет знак с положительного на отрицательный, следовательно, на участке существует максимум $M(z_1)$.

Определяем максимум функции $M(z_1)$.

$$Q(z_1) = \frac{3}{8} q\ell - qz_1 = 0, \quad z_1 = \frac{3}{8} \ell.$$

Тогда: $M_{\max}(z_1) = \frac{3}{8} q\ell \frac{3}{8} \ell - \frac{q\left(\frac{3}{8} \ell\right)^2}{2} = \frac{9}{128} q\ell^2.$

Второй участок:

$$0 \leq z_2 \leq \frac{\ell}{2}.$$

$$Q(z_2) = -R_b + qz_2 = -\frac{5}{8} q\ell + qz_2,$$

$$M(z_2) = R_b z_2 - \frac{qz_2^2}{2} = \frac{5}{8} q\ell z_2 - \frac{qz_2^2}{2}.$$

При $z_2 = 0$ $Q(z_2) = -\frac{5}{8} q\ell$, $M(z_2) = 0.$

При $z_2 = \frac{\ell}{2}$ $Q(z_2) = -\frac{5}{8} q\ell + q\frac{\ell}{2} = -\frac{q\ell}{8},$

$$M(z_2) = \frac{5}{8} q\ell \frac{\ell}{2} - \frac{q\left(\frac{\ell}{2}\right)^2}{2} = \frac{3}{16} q\ell^2.$$

По составленным уравнениям и значениям $Q(z)$ и $M(z)$ в характерных точках строим эпюры $Q(z)$ и $M(z)$. При построении эпюры $M(z)$, для удобства выбора масштаба, все ординаты вычисляем в долях от $\frac{q\ell^2}{128}$.

Проводим контроль правильности проведенного построения эпюр.

Пример №4. Построить эпюры внутренних силовых факторов для балки, изображенной на рис. 1.4.

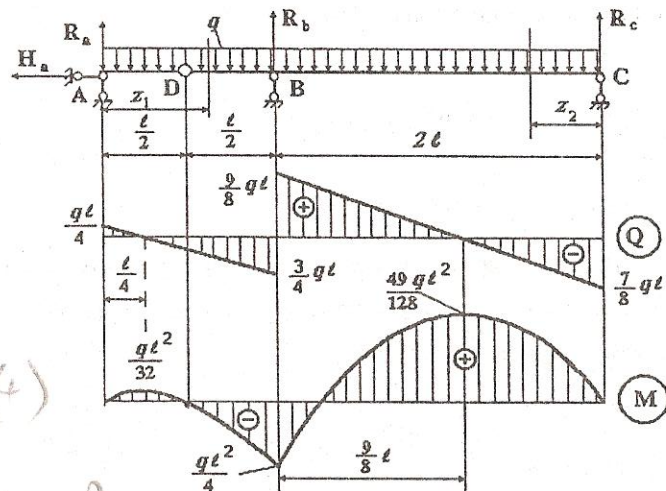


Рис. 1.4.

Решение. Определяем опорные реакции. Рассматриваемая балка имеет четыре неизвестных составляющих опорных реакций: R_a , H_a , R_b , R_c . $H_a = 0$, так как отсутствуют горизонтальные составляющие внешней нагрузки. Наличие промежуточного шарнира в точке D дает одно дополнительное уравнение статики - условие равенства нулю суммы моментов относительно точки D всех внешних силовых факторов, действующих на балку по одну сторону от шарнира D.

Для определения опорных реакций R_a , R_b , R_c удобно рассмотреть сумму моментов всех сил относительно шарниров D, B, C. Получим три уравнения:

$$\begin{aligned}\sum M_d^{(лев.)} &= R_a \frac{l}{2} - q \frac{l}{2} \frac{l}{4} = 0 \\ \sum M_b &= R_a l - R_c 2l - q l \frac{l}{2} + 2q l \frac{l}{2} = 0, \\ \sum M_c &= R_a 3l + R_b 2l - q 3l \frac{3}{2} l = 0.\end{aligned}$$

Из этих уравнений найдем опорные реакции:

$$R_a = q \frac{l}{4}; \quad R_b = \frac{15}{8} q l; \quad R_c = \frac{7}{8} q l.$$

Для проверки правильности вычисления значений реакций используем условие равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = R_a + R_b + R_c - 3q l = q \frac{l}{4} + \frac{15}{8} q l + \frac{7}{8} q l - 3q l = 0.$$

Опорные реакции найдены верно.

Данная балка имеет два участка нагружения. Начало первого участка выбираем в точке A, второго - в точке B. Обозначив координаты произвольно выбранных сечений на каждом участке (см. рис. 1.4), составляем уравнения для определения $Q(z)$ и $M(z)$. Вычисляем их значения в характерных точках.

Первый участок:

$$0 \leq z_1 \leq l,$$

$$Q(z_1) = R_a - q z_1 = q \frac{l}{4} - q z_1,$$

$$M(z_1) = R_a z_1 - \frac{q z_1^2}{2}.$$

Определяем значения $Q(z_1)$ и $M(z_1)$ в характерных точках.

$$\text{При } z_1 = 0 \quad Q(z_1) = q \frac{l}{4}, \quad M(z_1) = 0.$$

$$\text{При } z_1 = l \quad Q(z_1) = -\frac{3}{4} q l, \quad M(z_1) = -\frac{q l^2}{4}.$$

На этом участке поперечная сила меняет знак с положительного на отрицательный, следовательно, на участке существует максимум $M(z_1)$.

Определим максимум функции $M(z_1)$.

$$Q(z_1) = q \frac{l}{4} - q z_1 = 0, \quad z_1 = \frac{l}{4}.$$

$$\text{Тогда } M_{\max}(z_1) = \frac{q l^2}{32}.$$

Второй участок:

$$0 \leq z_2 \leq 2l.$$

$$Q(z_2) = -R_c + q z_2,$$

$$M(z_2) = R_c z_2 - \frac{q z_2^2}{2}.$$

Определяем значения $Q(z_2)$ и $M(z_2)$ в характерных точках.

При $z_2 = 0$ $Q(z_2) = -\frac{7}{8}q\ell$, $M(z_2) = 0$.

При $z_2 = 2\ell$ $Q(z_2) = \frac{9}{8}q\ell$, $M(z_2) = -\frac{q\ell^2}{4}$.

На этом участке поперечная сила меняет знак, следовательно, существует экстремум функции $M(z_2)$. Приравнявая $Q(z_2)$ нулю, находим координату сечения, где $M(z_2)$ экстремален.

$$Q(z_2) = -\frac{7}{8}q\ell + qz_2, \quad z_2 = \frac{7}{8}\ell.$$

$$\text{Тогда } M_{\max}(z_2) = \frac{49}{128}q\ell^2.$$

По составленным уравнениям и значениям $Q(z)$, $M(z)$ в характерных точках строим эпюры $Q(z)$ и $M(z)$ (рис. 1.4). При построении эпюр для удобства выбора масштаба ординаты $Q(z)$ вычисляем в долях $\frac{q\ell}{8}$, $M(z)$ - в долях $\frac{q\ell^2}{128}$. Проводим контроль правильности проведенного построения эпюр.

Пример №5. Построить эпюры внутренних силовых факторов для балки, изображенной на рис. 1.5.

Решение. Для определения опорных реакций удобно воспользоваться уравнениями моментов относительно опор А и В.

Равнодействующая распределенной нагрузки численно равна площади эпюры нагрузки, то есть площади треугольника и приложена в центре его тяжести.

$$\sum M_b = -R_a 2\ell + \frac{1}{2} 6q 2\ell \frac{2}{3} 2\ell - q\ell\ell = 0,$$

$$\sum M_a = R_b 2\ell - \frac{1}{2} 6q 2\ell \frac{1}{3} 2\ell - q\ell\ell = 0.$$

Из этих уравнений найдем опорные реакции

$$R_a = \frac{7}{2}q\ell; \quad R_b = \frac{7}{2}q\ell.$$

Для проверки правильности вычисления значений реакций используем условие равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

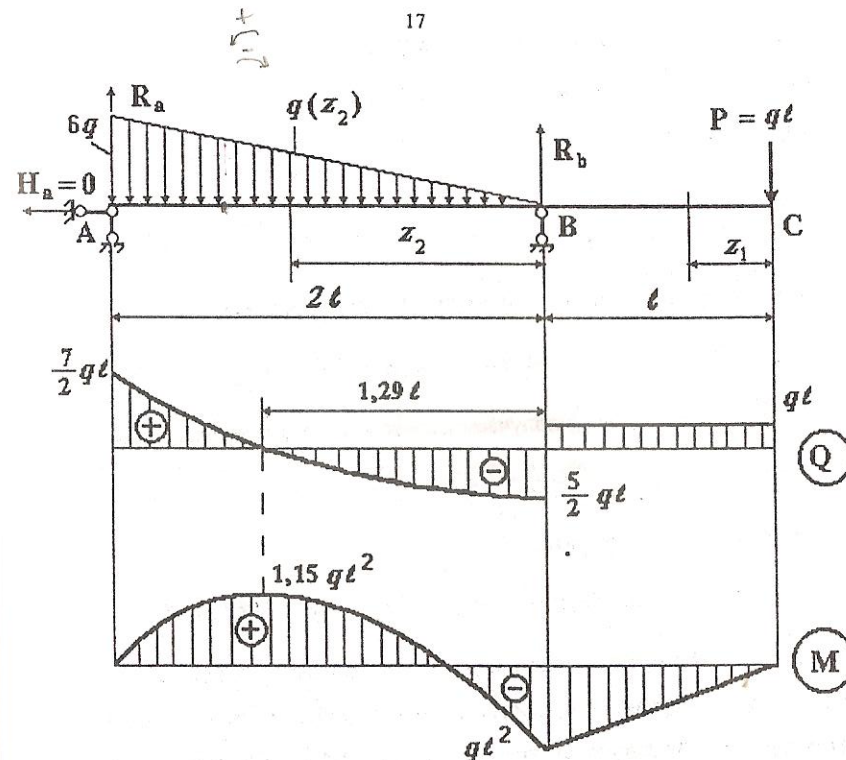


Рис. 1.5.

$$\sum Y = R_a + R_b - \frac{1}{2} 6q 2\ell - P = 0,$$

$$\frac{7}{2} q\ell + \frac{7}{2} q\ell - \frac{1}{2} 6q 2\ell - q\ell = 7q\ell - 7q\ell = 0.$$

Реакции опор найдены правильно. Данная балка имеет два участка нагружения. Начало первого участка выбираем в точке С, а второго - в точке В.

Первый участок:

$$0 \leq z_1 \leq \ell,$$

$$Q(z_1) = P = q\ell,$$

$$M(z_1) = -P z_1 = -q\ell z_1.$$

Определяем значения $Q(z_1)$ и $M(z_1)$ в характерных точках.

*Имеем по условию стрелка -
- отрицательная (-)*

При $z_1 = 0$ $Q(z_1) = q\ell$, $M(z_1) = 0$.
 При $z_1 = \ell$ $Q(z_1) = q\ell$, $M(z_1) = -q\ell^2$.

Второй участок:

$$0 \leq z_2 \leq 2\ell.$$

$$Q(z_2) = P - R_b + \frac{1}{2} q(z_2) z_2.$$

Значение $q(z_2)$ найдем, используя подобие треугольников.

$$\frac{q(z_2)}{6q} = \frac{z_2}{2\ell}, \quad \text{откуда} \quad q(z_2) = \frac{3qz_2}{\ell}.$$

С учетом значения $q(z_2)$ получаем выражение для поперечной силы:

$$Q(z_2) = q\ell - \frac{7}{2} q\ell + \frac{1}{2} \frac{3qz_2}{\ell} z_2 = -\frac{5}{2} q\ell + \frac{1}{2} \frac{3qz_2^2}{\ell},$$

для изгибающего момента:

$$M(z_2) = -q\ell(\ell + z_2) + R_b z_2 - \frac{1}{2} q(z_2) z_2 \frac{1}{3} z_2 = -q\ell^2 + \frac{5}{2} q\ell z_2 - \frac{qz_2^3}{2\ell}.$$

На этом участке поперечная сила, график которой представляет из себя кривую второго порядка с вершиной в точке В (там, где $q(z_2)=0$) меняет знак, следовательно, существует экстремум функции $M(z_2)$. Приравняем $Q(z_2)$ к нулю, находим координату сечения, где $M(z_2)$ экстремален.

$$Q(z_2) = -\frac{5}{2} q\ell + \frac{3qz_2^2}{2\ell} = 0, \quad z_2 = \ell \sqrt{\frac{5}{3}} = 1,29\ell.$$

Тогда

$$M_{\max} = -q\ell^2 + \frac{5}{2} q\ell \cdot 1,29\ell - q \frac{(1,29\ell)^3}{2\ell} = 1,15 q\ell^2.$$

Определяем значения $Q(z_2)$ и $M(z_2)$ на границах участка.

При $z_2 = 0$, $Q(z_2) = -\frac{5}{2} q\ell$,

$$M(z_2) = -q\ell^2.$$

При $z_2 = 2\ell$, $Q(z_2) = -\frac{5}{2} q\ell + 3q \frac{(2\ell)^2}{2\ell} = \frac{7}{2} q\ell$,

$$M(z_2) = -q\ell^2 + \frac{5}{2} q\ell \cdot 2\ell - q \frac{(2\ell)^3}{2\ell} = 0.$$

Пример №6. Построить эпюры внутренних силовых факторов для рамы, изображенной на рис. 1.6.

Решение. Определим опорные реакции. Для определения горизонтальной составляющей реакции опоры H_a воспользуемся уравнением проекций сил на горизонтальную ось X .

$$\sum X = -H_a + 2q \cdot 4\ell = 0. \quad H_a = 2q \cdot 4\ell$$

Для определения реакций R_a и R_b воспользуемся уравнениями моментов от всех сил, приложенных к системе, относительно опор А и В.

$$\sum M_b = R_a \cdot 4\ell - 2q \cdot 4\ell \cdot 2\ell = 0,$$

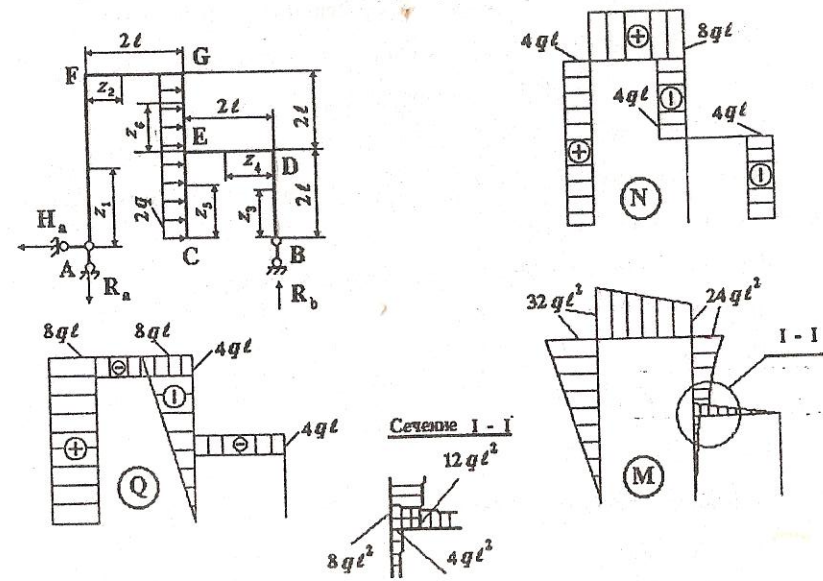


Рис. 1.6.

$$\sum M_a = R_b \cdot 4\ell - 2q \cdot 4\ell \cdot 2\ell = 0.$$

Из этих уравнений найдем опорные реакции.

$$H_a = 8q\ell, \quad R_a = 4q\ell, \quad R_b = 4q\ell.$$

Для проверки правильности вычисления значений реакций используем условие равенства нулю суммы проекций всех сил на вертикальную ось:

$$\sum Y = -R_a + R_b = -4q\ell + 4q\ell = 0.$$

Данная рама имеет шесть участков нагружения.

Первый участок AF:

$$0 \leq z_1 \leq 4\ell.$$

Начало участка выбираем в точке А.

$$N(z_1) = R_a = 4q\ell,$$

$$Q(z_1) = H_a = 8q\ell,$$

$$M(z_1) = H_a z_1 = 8q\ell z_1.$$

При этом знаки внутренних силовых факторов назначаем следующим образом: N – положительна, при растяжении данного участка рамы.

Q – положительна, если внешняя нагрузка стремится повернуть выбранную часть рамы вокруг сечения по часовой стрелке.

M – положителен, если моменты от внешних сил слева от сечения направлены по часовой стрелке, а эпюра изгибающих моментов строится со стороны сжатых волокон рамы.

Определяем значения $M(z_1)$ в характерных сечениях.

$$\text{При } z_1 = 0 \quad M(z_1) = 0.$$

$$\text{При } z_1 = 4\ell \quad M(z_1) = 32 q\ell^2.$$

Второй участок FG

$$0 \leq z_2 \leq 2\ell.$$

Начало участка выбираем в точке F.

$$N(z_2) = H_a = 8q\ell,$$

$$Q(z_2) = -R_a = -4q\ell,$$

$$M(z_2) = H_a 4\ell - R_a z_2 = 32q\ell^2 - 4q\ell z_2.$$

Определяем значение $M(z_2)$ на границах участка

$$\text{При } z_2 = 0, \quad M(z_2) = 32 q\ell^2.$$

$$\text{При } z_2 = 2\ell, \quad M(z_2) = 24 q\ell^2.$$

Третий участок BD

$$0 \leq z_3 \leq 2\ell.$$

Начало участка выбираем в точке В.

$$N(z_3) = -R_b = -4q\ell,$$

$$Q(z_3) = 0, \quad M(z_3) = 0.$$

Четвертый участок DE

$$0 \leq z_4 \leq 2\ell.$$

Начало участка выбираем в точке D.

$$N(z_4) = 0,$$

$$Q(z_4) = -R_b = -4q\ell,$$

$$M(z_4) = R_b z_4 = 4q\ell z_4.$$

Определяем значение $M(z_4)$ на границах участка

$$\text{При } z_4 = 0, \quad M(z_4) = 0.$$

$$\text{При } z_4 = 2\ell, \quad M(z_4) = 8 q\ell^2.$$

Пятый участок CE

$$0 \leq z_5 \leq 2\ell.$$

Начало участка выбираем в точке С.

$$N(z_5) = 0,$$

$$Q(z_5) = -2qz_5,$$

$$M(z_5) = 2q \frac{z_5^2}{2} = qz_5^2.$$

Определяем значение $Q(z_5)$ и $M(z_5)$ на границах участка

$$\text{При } z_5 = 0, Q(z_5) = 0, \quad M(z_5) = 0.$$

$$\text{При } z_5 = 2\ell, \quad Q(z_5) = -4q\ell, \quad M(z_5) = 4 q\ell^2.$$

Шестой участок EG

$$0 \leq z_6 \leq 2\ell.$$

Начало участка выбираем в точке Е.

$$N(z_6) = -R_b = -4q\ell,$$

$$Q(z_6) = -2q(2\ell + z_6),$$

$$M(z_6) = R_b 2\ell + 2q \frac{(2\ell + z_6)^2}{2} = 8q\ell^2 + q(2\ell + z_6)^2.$$

Определяем значение $Q(z_6)$ и $M(z_6)$ на границах участка

$$\text{При } z_6 = 0, Q(z_6) = -4q\ell, \quad M(z_6) = 12q\ell^2.$$

$$\text{При } z_6 = 2\ell, \quad Q(z_6) = -8q\ell, \quad M(z_6) = 24q\ell^2.$$

Пример № 7. Построить эпюры нормальных сил для фермы, изображенной на рис. 1.7.

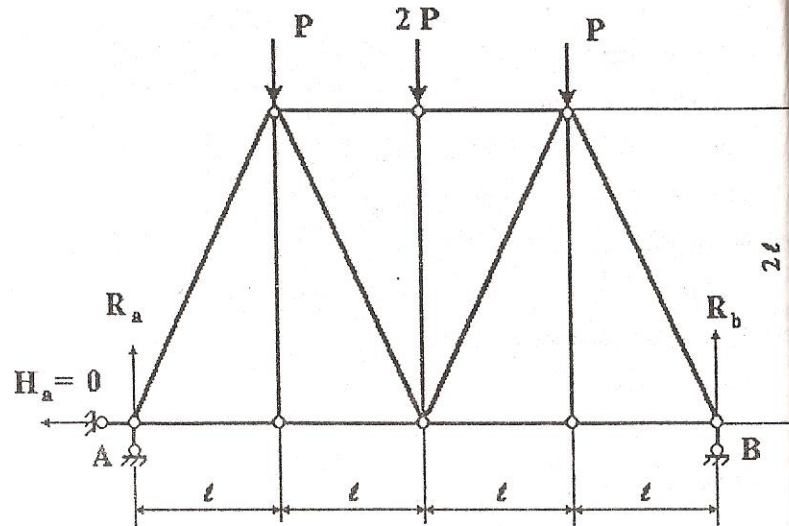


Рис. 1.7.

Решение. Для определения реакций R_a и R_b воспользуемся уравнениями моментов от всех сил, приложенных к системе, относительно опор A и B.

$$\sum M_b = -R_a 4\ell + P 3\ell + 2P 2\ell + P\ell = 0,$$

$$\sum M_a = R_b 4\ell - P\ell - 2P 2\ell - P 3\ell = 0.$$

Из этих уравнений найдем опорные реакции.

$$R_a = 2P, \quad R_b = 2P.$$

Горизонтальная составляющая опоры A равна нулю (из-за отсутствия горизонтальных внешних нагрузок).

В основу аналитического расчета усилий в стержнях статически определимой фермы положено общая система уравнений равновесия узлов фермы или отдельных ее частей, путем их вырезания. Важно так вырезать узел, и часть, чтобы из уравнений равновесия можно было бы определить искомые усилия без решения совместной системы уравнений.

Для расчета применяют либо способ моментной точки, либо способ вырезания узлов. Воспользуемся последним способом. Предварительно пронумеруем узлы фермы. Нумерация узлов фермы соответствует последовательности рассмотрения их равновесия при определении усилий в стержнях.

Все узлы фермы обозначим порядковыми номерами: 1, 2, 3, Продольные усилия в стержнях обозначим через N_{ij} , где i, j - номера узлов фермы соединяемых стержнем (рис. 1.7a). Пусть при этом первый индекс i всегда меньше j .

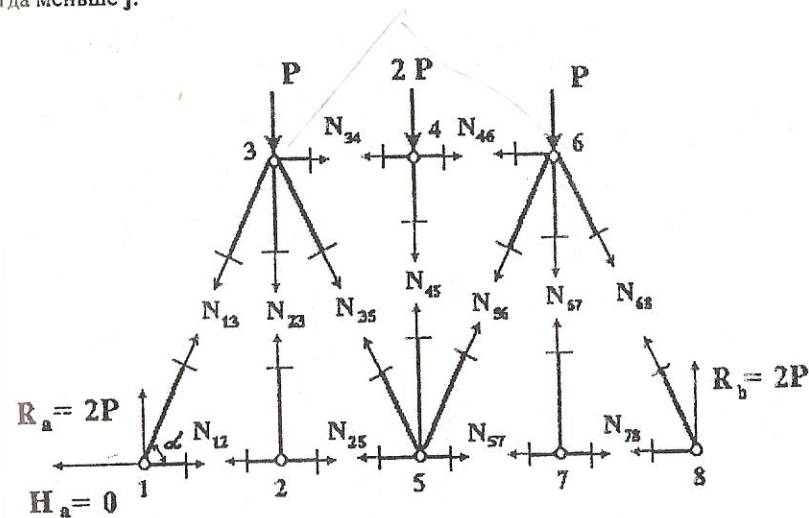


Рис. 1.7a.

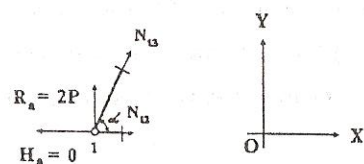
Необходимо так вырезать каждый из узлов фермы, чтобы он содержал не более двух неизвестных, которые легко определить из условий равновесия узла $\sum X = 0$, $\sum Y = 0$. Учитывая, что ферма обладает симметрией и внешние нагрузки симметричны относительно стержня C_{45} , достаточно определить усилия в правой или левой половине фермы.

Учтем что $N_{13} = N_{68}$, $N_{23} = N_{67}$ и т. д.

Вырежем узел 1.

Составим уравнения проекций сил на оси OX и OY .

Угол α определим из геометрии фермы.



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2\ell}{\ell} = 2, \sin \alpha = 0,894, \cos \alpha = 0,447.$$

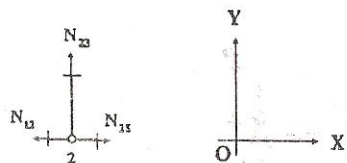
$$\sum X = N_{12} + N_{13} \cos \alpha = 0,$$

$$N_{12} = -N_{13} \cos \alpha$$

$$\sum Y = 2P + N_{13} \sin \alpha = 0,$$

$$N_{13} = \frac{2P}{\sin \alpha} = -2,24P, \quad N_{12} = \frac{2P \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2P}{\operatorname{tg} \alpha} = P.$$

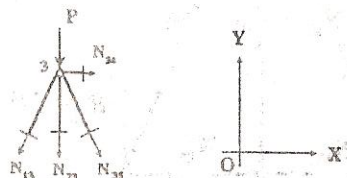
Вырежем узел 2.



$$\sum X = -N_{12} + N_{25} = 0, \quad N_{25} = N_{12} = P.$$

$$\sum Y = N_{23} = 0.$$

Вырежем узел 3.

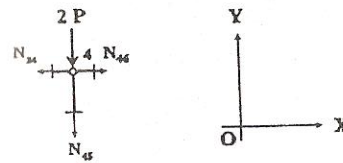


$$N_{34} = -\frac{3}{2}P,$$

$$N_{35} = \frac{3}{2}P \cos \alpha - \frac{2P}{\sin \alpha} = 1,12P.$$

$$\sum Y = -N_{13} \sin \alpha - N_{35} \sin \alpha - P = 0,$$

Вырежем узел 4.



$$\sum X = -N_{34} + N_{46} = 0,$$

$$N_{46} = N_{34} = \frac{3}{2}P.$$

$$\sum Y = -2P - N_{45} = 0,$$

$$N_{45} = -2P.$$

Остальные усилия определяются из условий симметрии:

$$N_{56} = N_{35} = 1,12P,$$

$$N_{57} = N_{25} = P,$$

$$N_{67} = N_{23} = 0,$$

$$N_{78} = N_{12} = P,$$

$$N_{68} = N_{13} = -2,24P.$$

Построим эпюру N_{ij} в элементах фермы (Рис. 1.76).

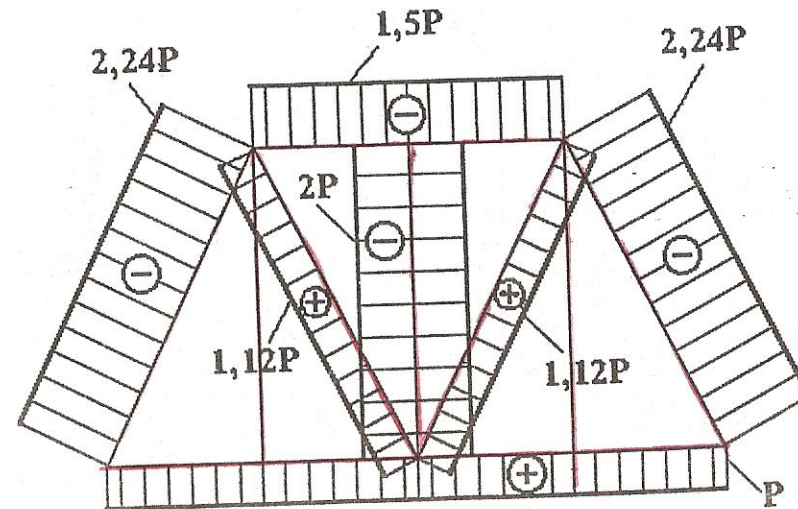


Рис. 1.76.

Пример № 8. Построить эпюры внутренних усилий в трехшарнирной арке, очерченной по дуге окружности и нагруженной вертикальной нагрузкой (рис. 1.8.).

Решение. Для арки, представляющей часть окружности, уравнения параметрической формы запишется как:

$$z = R (\sin \varphi_0 - \sin \varphi),$$

$$y = R (\cos \varphi - \cos \varphi_0).$$

где: φ_0 - угол наклона касательной к дуге арки в начале координат; радиус окружности.

$$R = \frac{L^2}{8H} + \frac{H}{2}, \quad \sin \varphi_0 = \frac{L}{2R}, \quad \cos \varphi_0 = 1 - \frac{H}{R}.$$

Уравнение оси арки, очерченной по квадратной параболе, в обозначении представленных на рис. 1.8, имеет вид:

$$y = 4 \frac{H}{L^2} z(L - z). \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dz} = 4 \frac{H}{L^2} (L - 2z).$$

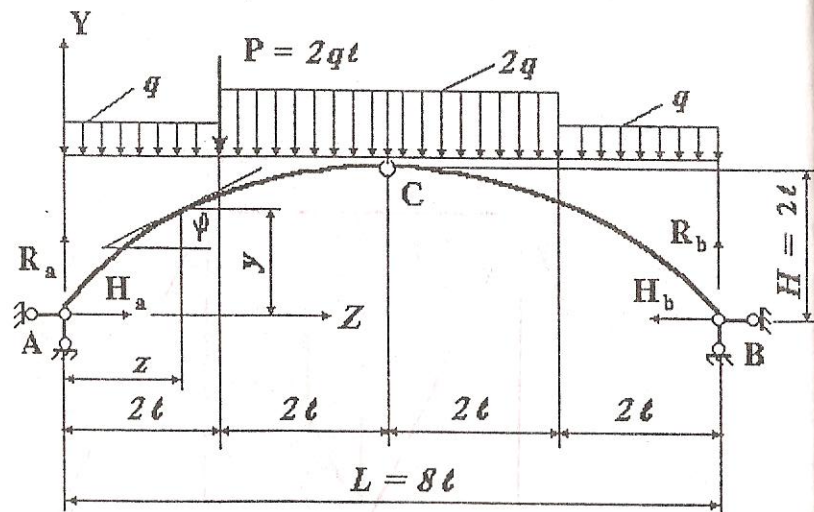


Рис. 1.8.

Для синусоидальной арки:

$$y = H \sin \frac{\pi z}{L}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dz} = \frac{H\pi}{L} \cos \frac{\pi z}{L}.$$

Определяем реакции опор, используя для этого уравнения равновесия.

$$\sum M_b = -R_a 8l + q 2l 7l + P 6l + 2q 4l 4l + q 2ll = 0,$$

$$R_a = \frac{60}{8} ql = 7,5 ql.$$

$$\sum M_a = R_b 8l - q 2l 7l - 2q 4l 4l - P 2l - q 2ll = 0,$$

$$R_b = \frac{52}{8} ql = 6,5 ql.$$

Проверка:

$$\sum Y = 0,$$

$$R_a + R_b - q 2l - P - 2q 4l - q 2l = 0,$$

$$14 ql - 14 ql = 0.$$

Распор $H_a = H_b$ определим из уравнения моментов относительно шарнира составленного для левой или правой половин арки.

$$\sum M_c = 0,$$

$$-R_a 4l + H_a 2l + q 2l 3l + P 2l + 2q 2ll = 0,$$

$$H_a = 8ql.$$

При действии внешних нагрузок в сечениях трехшарнирной арки возникают: изгибающий момент $M_{изг}$, поперечная сила Q и нормальная сила N , которые определяются из уравнений равновесия отсеченной части арки. При этом силы проектируются на нормаль к сечению (сечение перпендикулярно оси арки), чтобы определить N и на ось перпендикулярную нормали к сечению, чтобы определить Q .

Нормальная сила положительна, если вызывает растяжение. Поперечная сила Q положительна, если вращает рассматриваемую часть арки вокруг сечения по часовой стрелке. Изгибающий момент положителен, если вызывает растяжение верхних волокон сечения арки.

При расчете арки на действие вертикальной нагрузки удобно использовать так называемую эквивалентную балку (рис 1.8а).

Усилия в этом случае могут быть определены по формулам:

$$M_{изг} = M_{из}^0 - H_a y,$$

$$Q = Q^{\delta} \cos \varphi - H_a \sin \varphi,$$

$$N = -(Q^{\delta} \sin \varphi + H_a \cos \varphi),$$

где, φ - угол между касательной к оси арки и осью OZ; z, y - координаты сечения арки; M_m^a, Q^b - изгибающий момент и поперечная сила в соответствующем сечении эквивалентной балки.

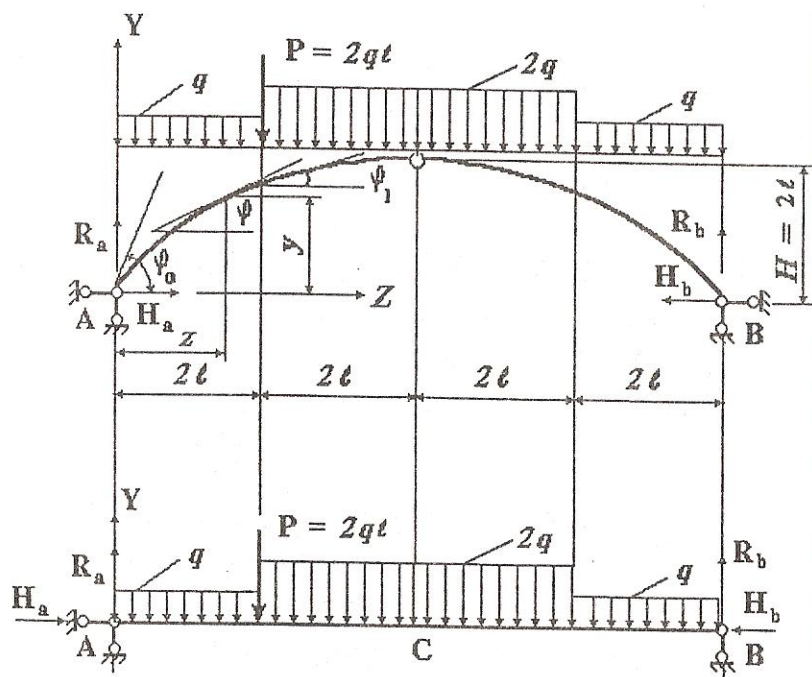


Рис. 1.8а.

Начало координат выбираем в опоре А.

определяем внутренние силовые факторы на участке

$$0 \leq z \leq 2\ell \quad (\varphi_0 \geq \varphi \geq \varphi_1, 0 \leq y \leq y_1)$$

$$M_{\text{инт}} = R_a z - \frac{qz^2}{2} - H_a y = 7,5 \text{ ql } z - \frac{qz^2}{2} - 8 \text{ ql } y,$$

$$Q = (R_a - qz) \cos \varphi - H_a \sin \varphi,$$

$$N = - [(R_a - qz) \sin \varphi + H_a \cos \varphi] .$$

Для построения эпюр определяем φ_0 и φ_1 (φ_1 - угол наклона касательной на конце участка).

$$R = \frac{L^2}{8H} + \frac{H}{2} = 4\ell\ell_0 = 5\ell, \quad \sin \varphi_0 = \frac{L}{2R} = 0,8.$$

$$\varphi_0 = 53^{\circ}8'; \quad z = R (\sin \varphi_0 - \sin \varphi);$$

$$\text{при } z = 2\ell \quad \varphi = \varphi_1$$

$$2\ell = 5\ell (0,8 - \sin \varphi_1); \quad \sin \varphi_1 = 0,4; \quad \varphi_1 = 23^{\circ}35'.$$

определяем внутренние силовые факторы на участке $2\ell \leq z \leq 6\ell$

$$(\varphi_1 \geq \varphi \geq \varphi_2, y_1 \leq y \leq H, \quad \varphi_2 = -\varphi_1 = -23^{\circ}35').$$

$$M_{\text{изг}} = R_a z - 2q\ell(z - \ell) - P(z - 2\ell) - H_a y - 2q \frac{(z - 2\ell)^2}{2},$$

$$Q = [R_a - q \cdot 2\ell - P - 2q(z - 2\ell)] \cos \varphi - H_a \sin \varphi,$$

$$N = - [(R_a - 2qz) \sin \varphi + H_a \cos \varphi] .$$

определяем внутренние силовые факторы на участке $6l \leq z \leq 8l$

$$(\varphi_2 \geq \varphi \geq \varphi_3, y_1 \geq y \geq 0, \quad \varphi_2 = -23^{\circ}35', \quad \varphi_3 = -\varphi_0 = -53^{\circ}8').$$

$$M_{III} = R_a z - 2q\ell(z - \ell) - P(z - 2\ell) - 2q4\ell(z - 4\ell) - q \frac{(z - 6\ell)^2}{2} - H_a y,$$

$$Q = [R_a - q \cdot 2\ell - P - 8q\ell - q(z - 6\ell)] \cos \varphi - H_a \sin \varphi,$$

$$N = - [(R_a - 6q\ell - qz) \sin \varphi + H_a \cos \varphi] .$$

шоры N, Q, M приведены на рис.1.86.

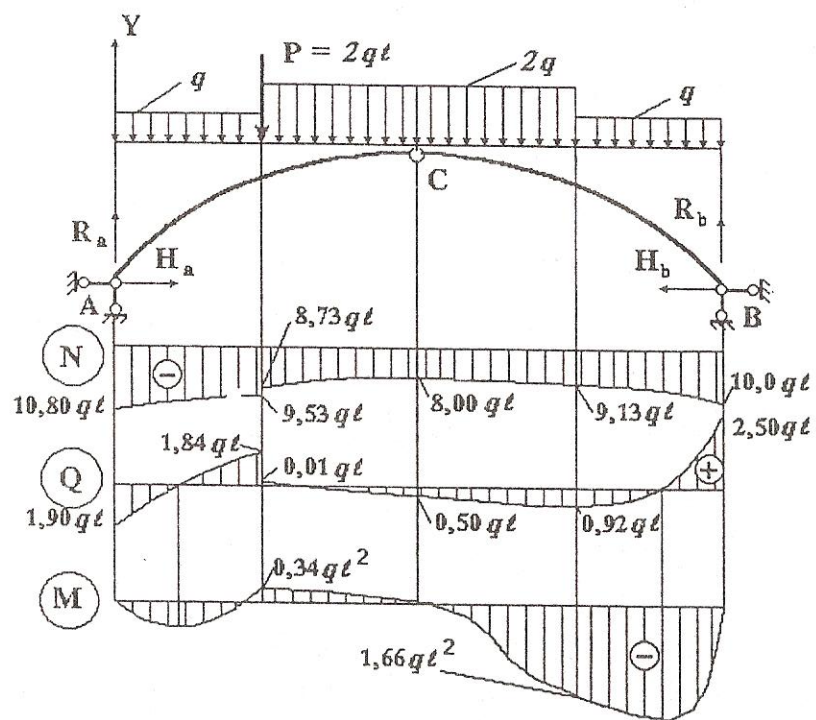


Рис. 1.86.

Пример № 9. Построить эпюры внутренних усилий, действующих в поперечных сечениях пространственного ломаного бруса.

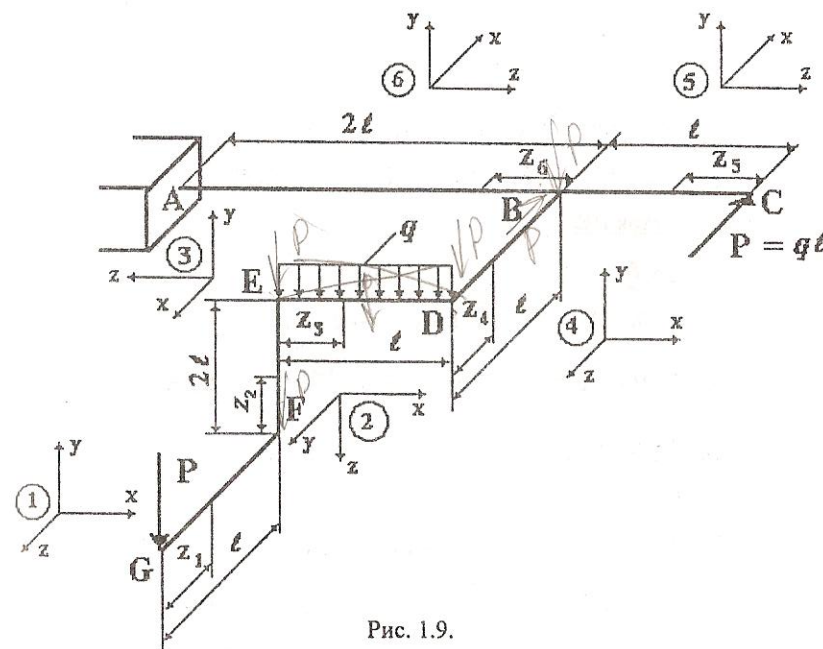


Рис. 1.9.

Решение. Составим аналитические выражения для определения внутренних усилий в элементах бруса.

Первый участок GF:

$$0 \leq z_1 \leq \ell.$$

При определении усилий в элементе GF используем систему координат, изображенную около элемента GF.

В сечении z_1 получим, что:

$$N = 0, Q_y = -P = -ql.$$

Знак Q_y положителен, если рассматриваемая часть бруса со стороны оси X поворачивается вокруг сечения от силы P по часовой стрелке.

$$Q_x = 0, M_z = 0, M_x = -Pz_1 = -qlz_1, \quad M_y = 0.$$

Знак момента M_x - положителен при положительной кривизне оси стержня (сжаты верхние волокна)

Второй участок EF:

$$0 \leq z_2 \leq \ell.$$

$N = P$. Знак N - положителен при растяжении.

$$Q_x = 0, Q_y = 0, \quad M_z = 0, \quad M_x = -P\ell = -ql^2, \quad M_y = 0.$$

Третий участок DE:

$$0 \leq z_3 \leq \ell.$$

$$N = 0, Q_x = 0, \quad Q_y = -P - qz_3 = -ql - qz_3,$$

$$M_z = -P\ell = -ql^2, \quad M_x = -Pz_3 - \frac{qz_3^2}{2}, \quad M_y = 0.$$

Четвертый участок BD:

$$0 \leq z_4 \leq \ell.$$

$$N = 0, Q_x = 0, \quad Q_y = -P - ql = -2ql,$$

$$M_z = P\ell + ql\frac{\ell}{2} = \frac{3}{2}ql^2, \quad M_x = -P(\ell + z_4) - qlz_4, \quad M_y = 0.$$

Пятый участок BC:

$$0 \leq z_5 \leq \ell.$$

$$N = 0, \quad Q_x = -P = -ql, \quad Q_y = 0,$$

$$M_z = 0, \quad M_x = 0, \quad M_y = Pz_5 = qlz_5.$$

Шестой участок AB:

$$0 \leq z_6 \leq 2\ell.$$

$$N = 0, Q_x = -P = -ql, \quad Q_y = -P - ql = -2ql,$$

$$M_z = P2\ell + ql\ell^2 = 3ql^2, \quad M_y = P(\ell + z_6),$$

$$M_x = P(\ell - z_6) + ql\left(\frac{\ell}{2} - z_6\right) = \frac{3}{2}ql^2 - 2qlz_6.$$

Диаграммы внутренних силовых факторов приведены на рис. 1.9а.

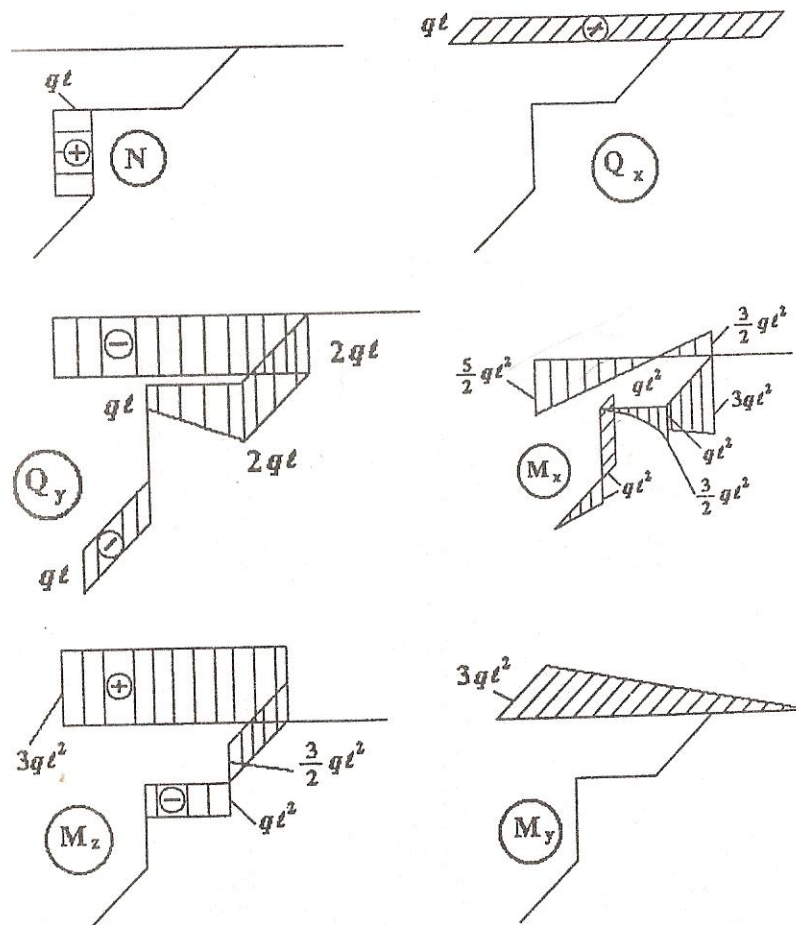
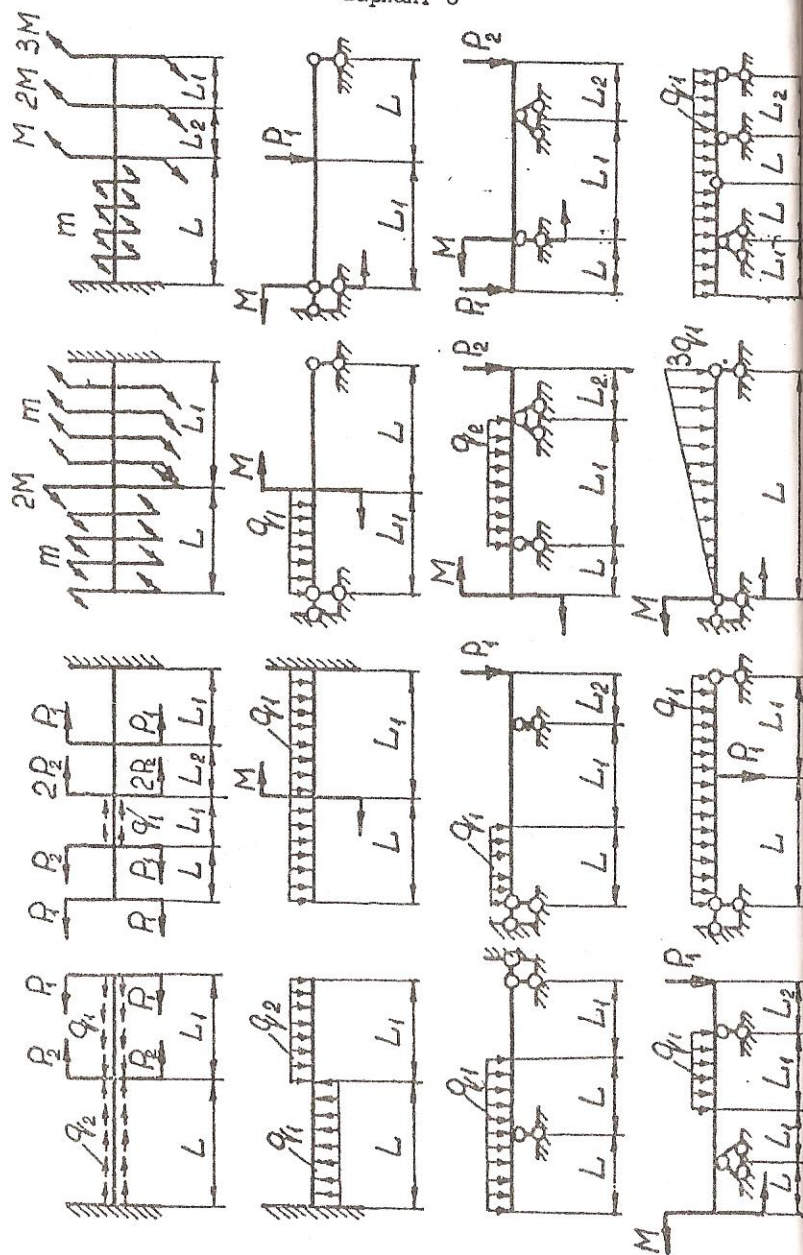
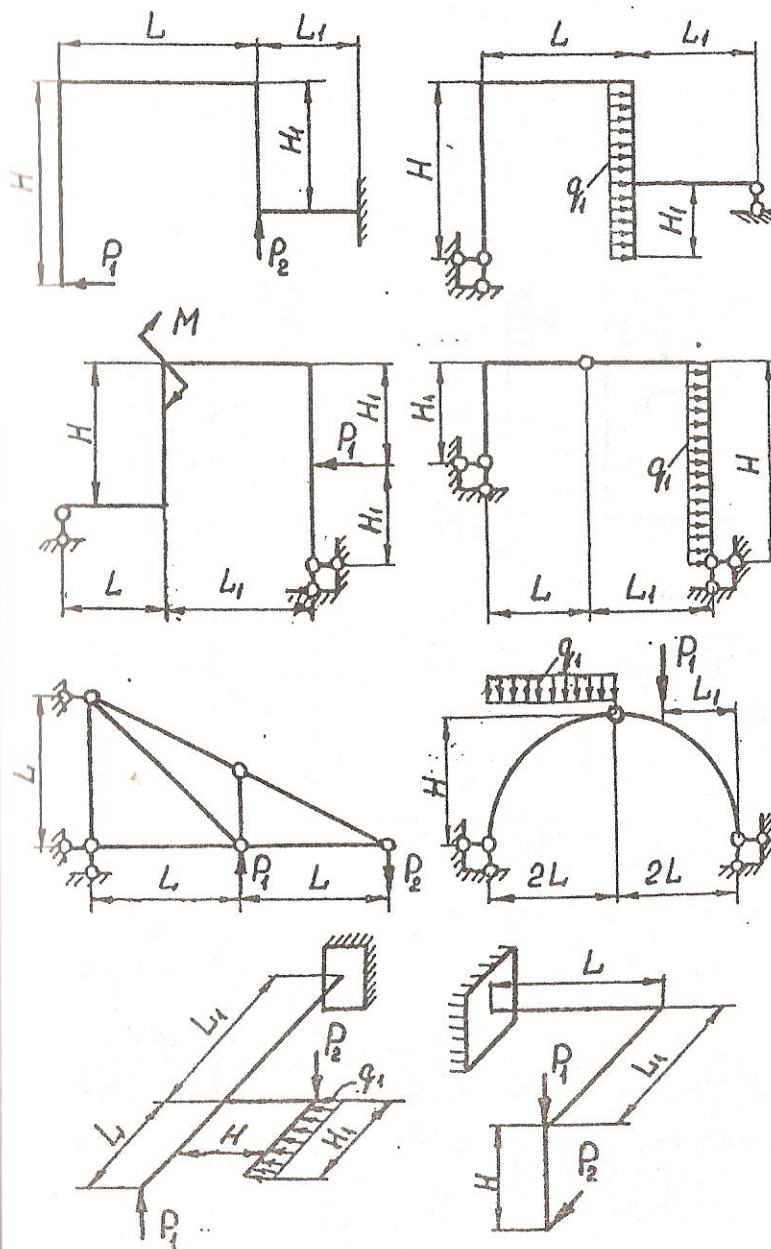


Рис. 1.9а.

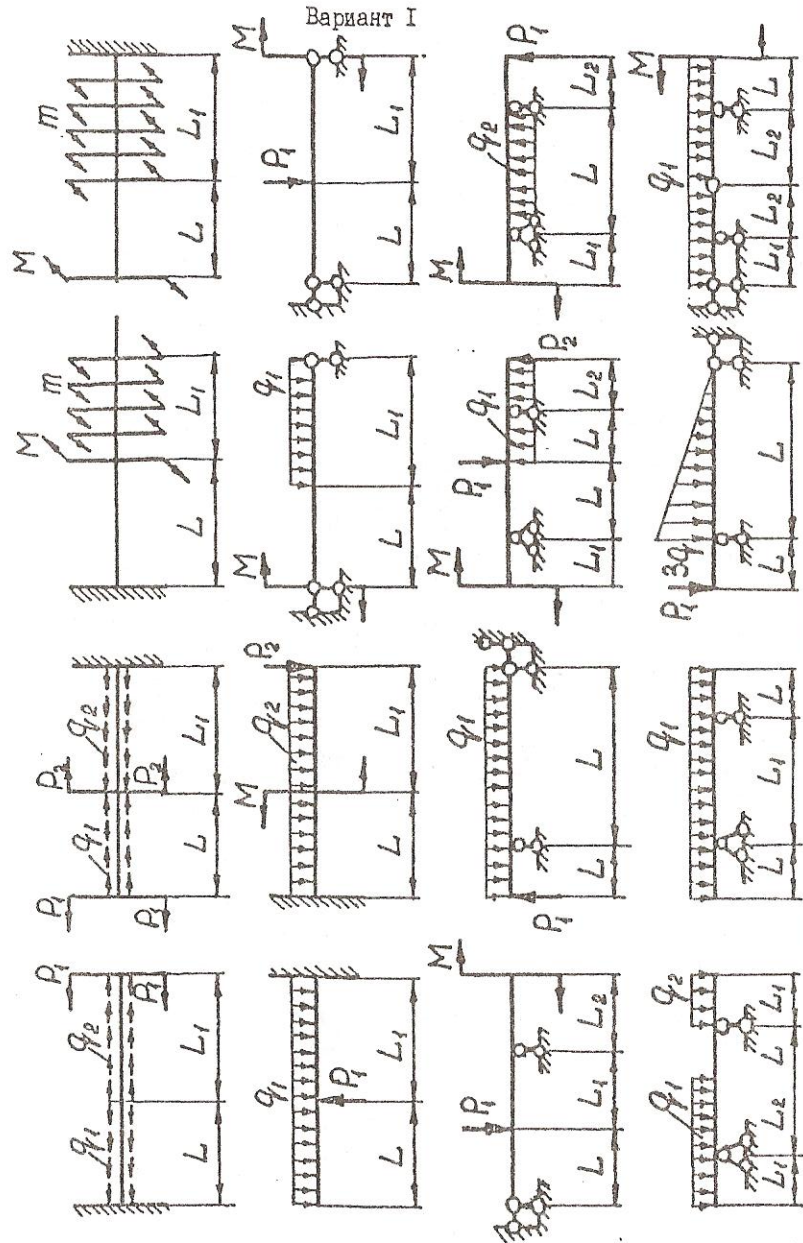
Вариант 0



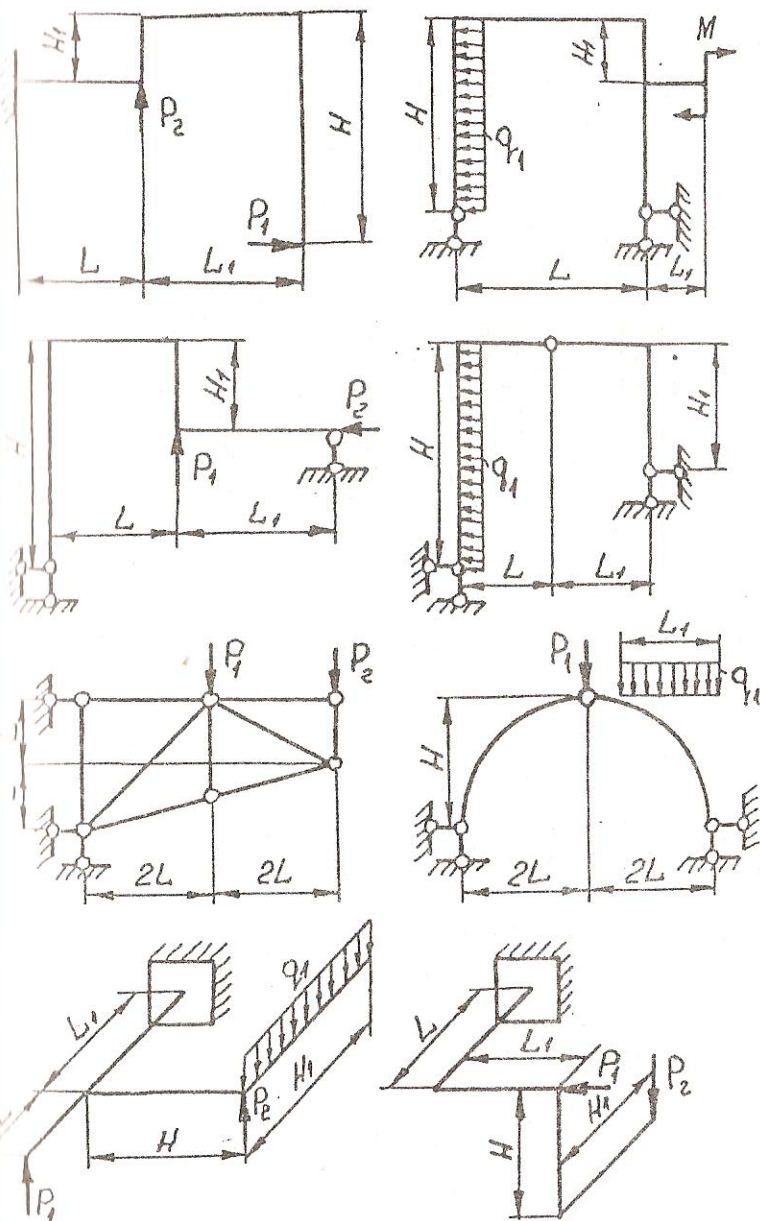
Вариант 0



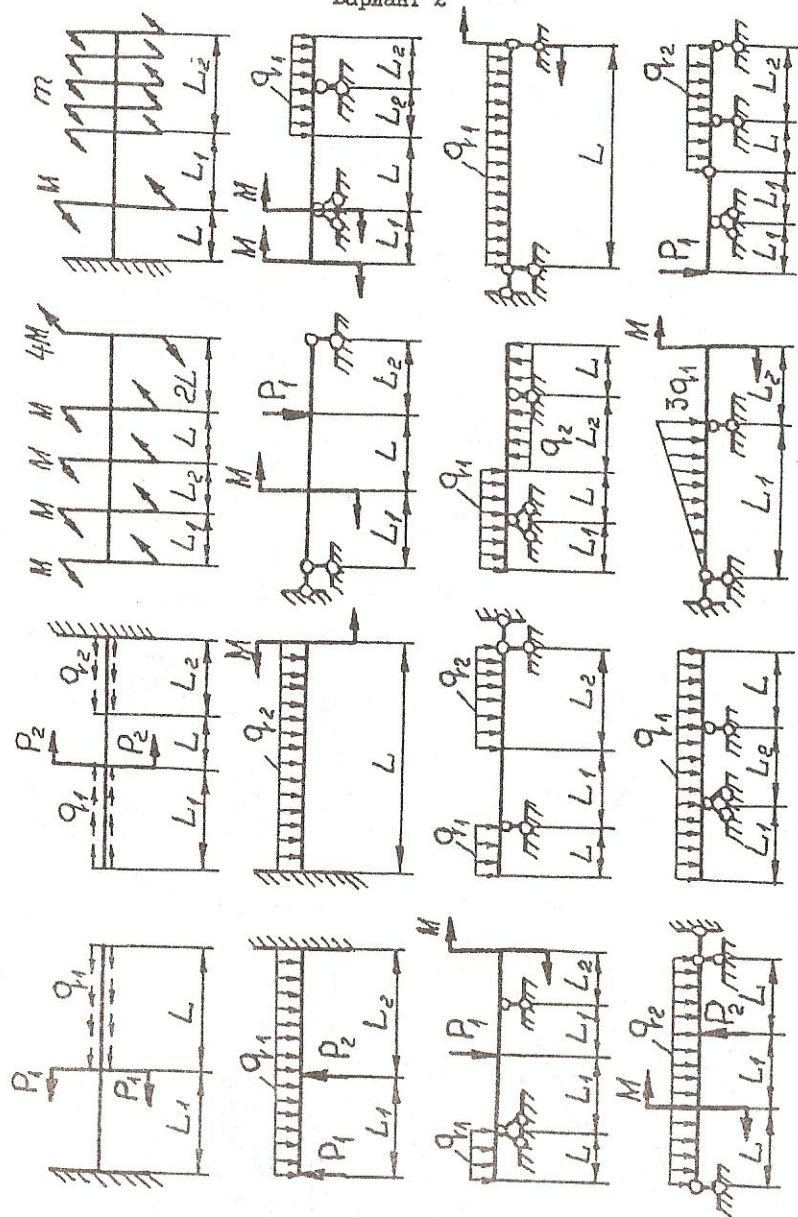
Вариант I



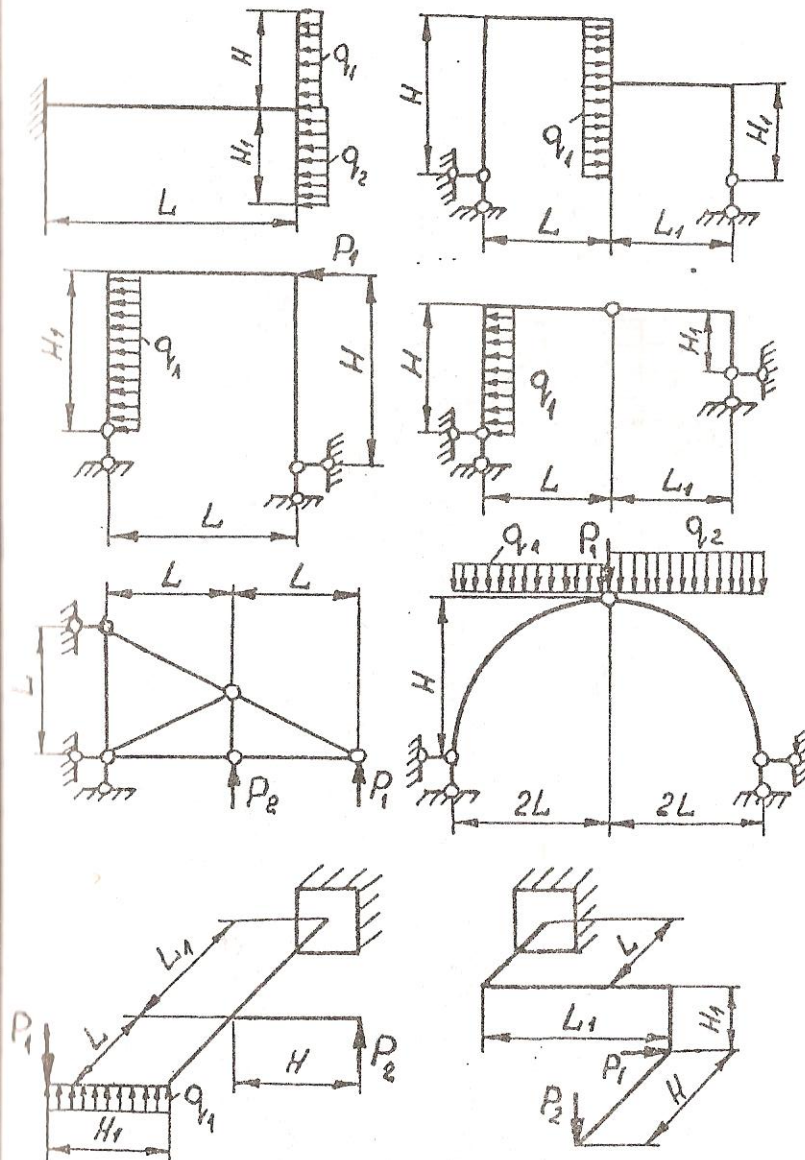
Вариант I

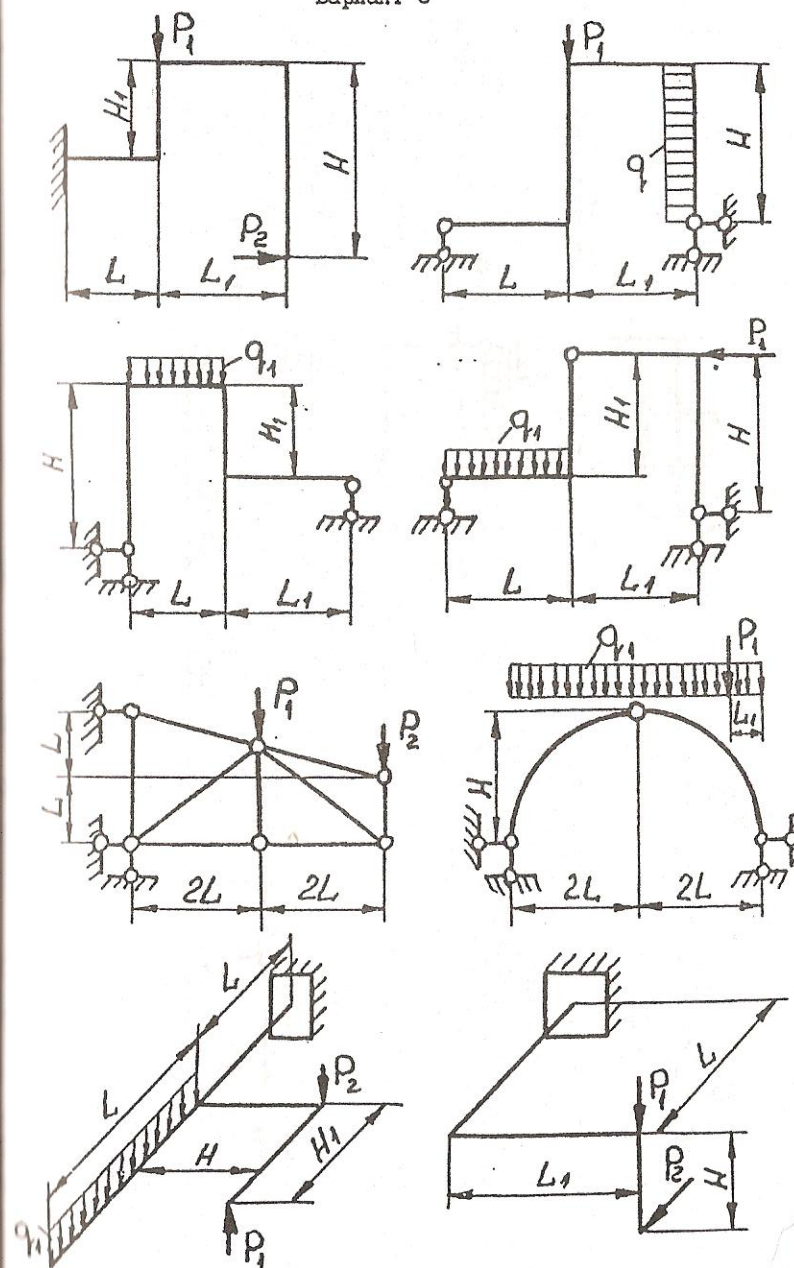
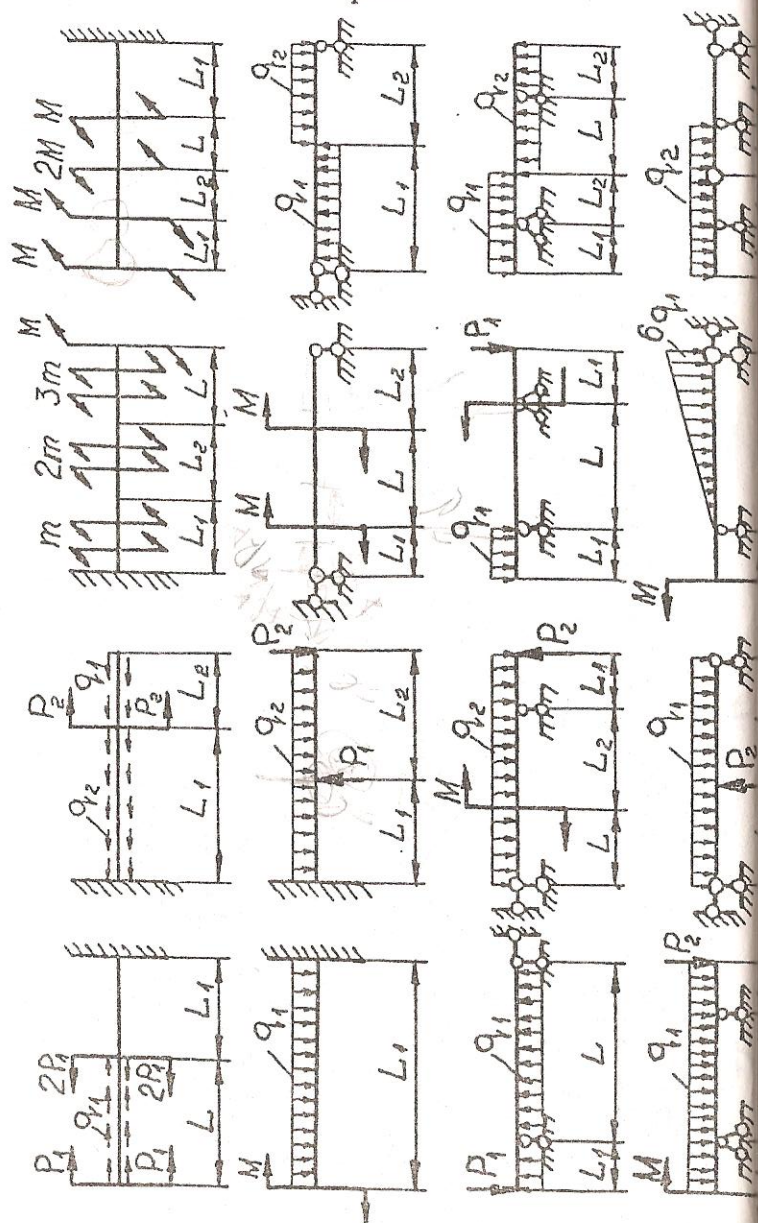


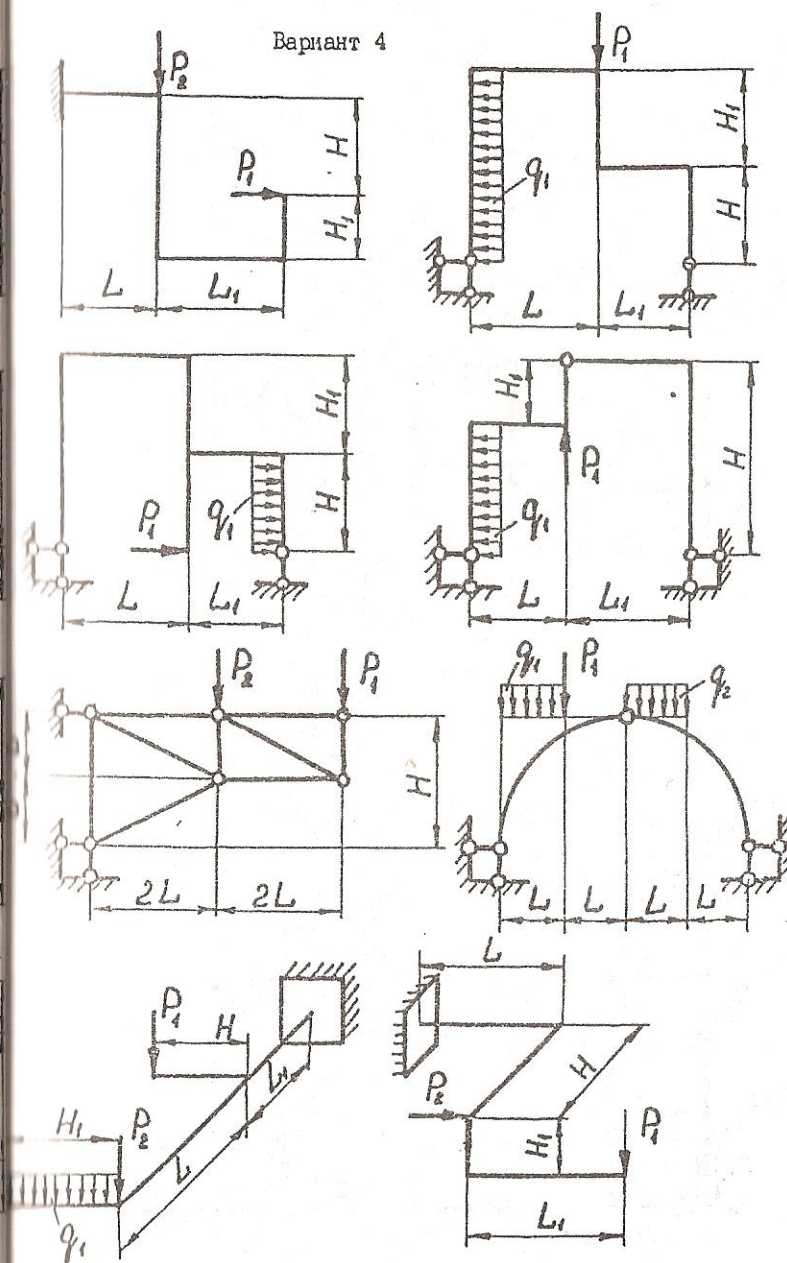
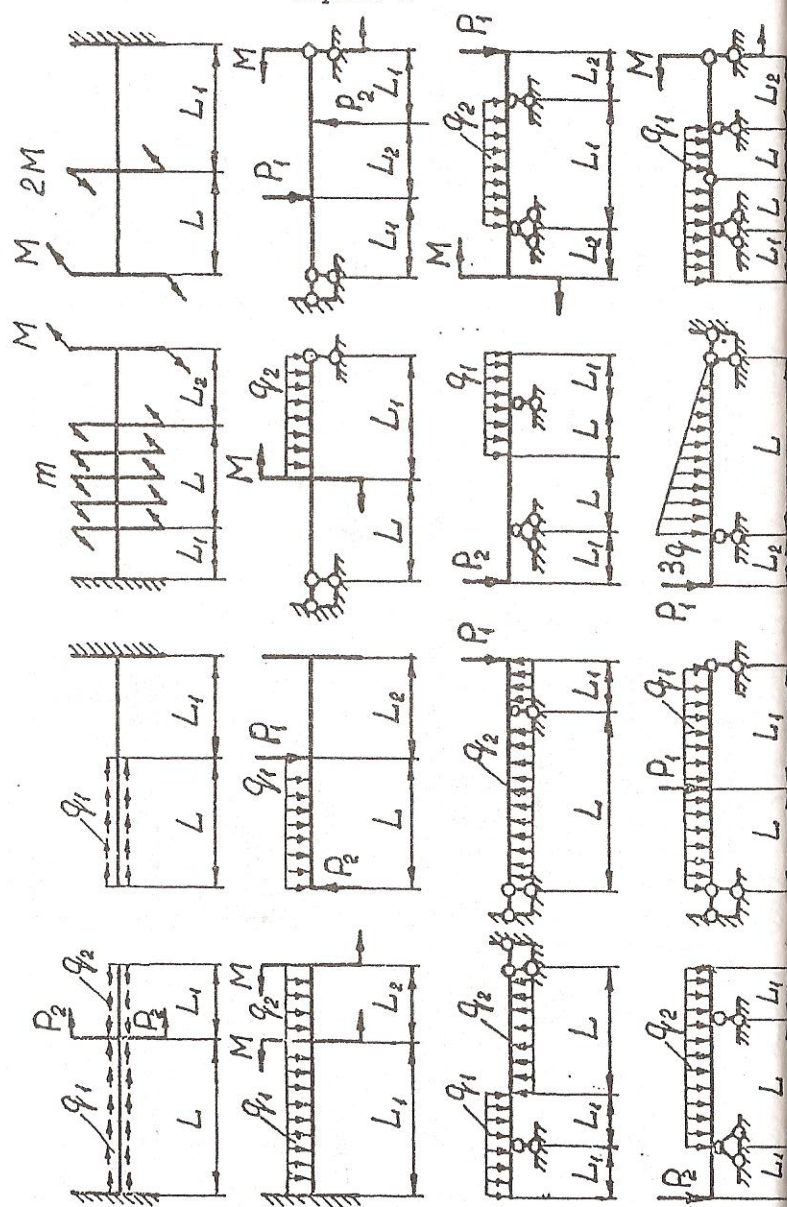
Вариант 2



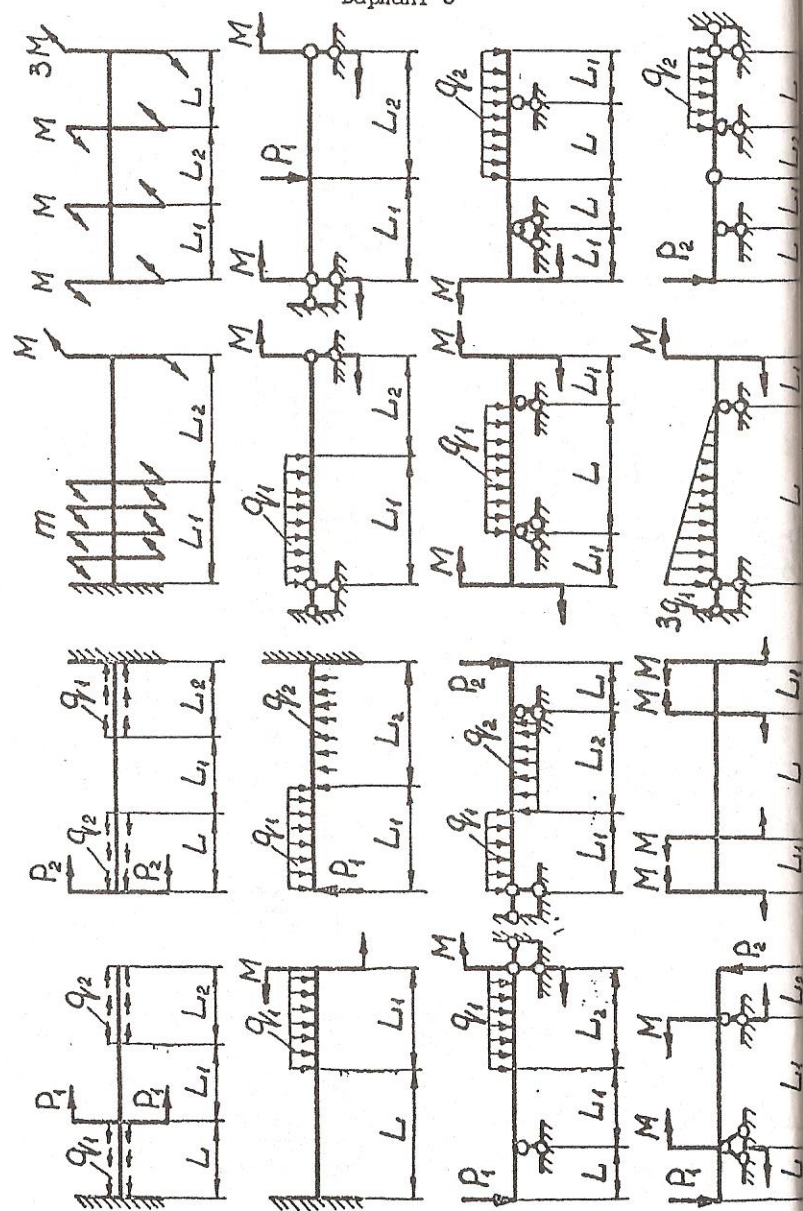
Вариант 2



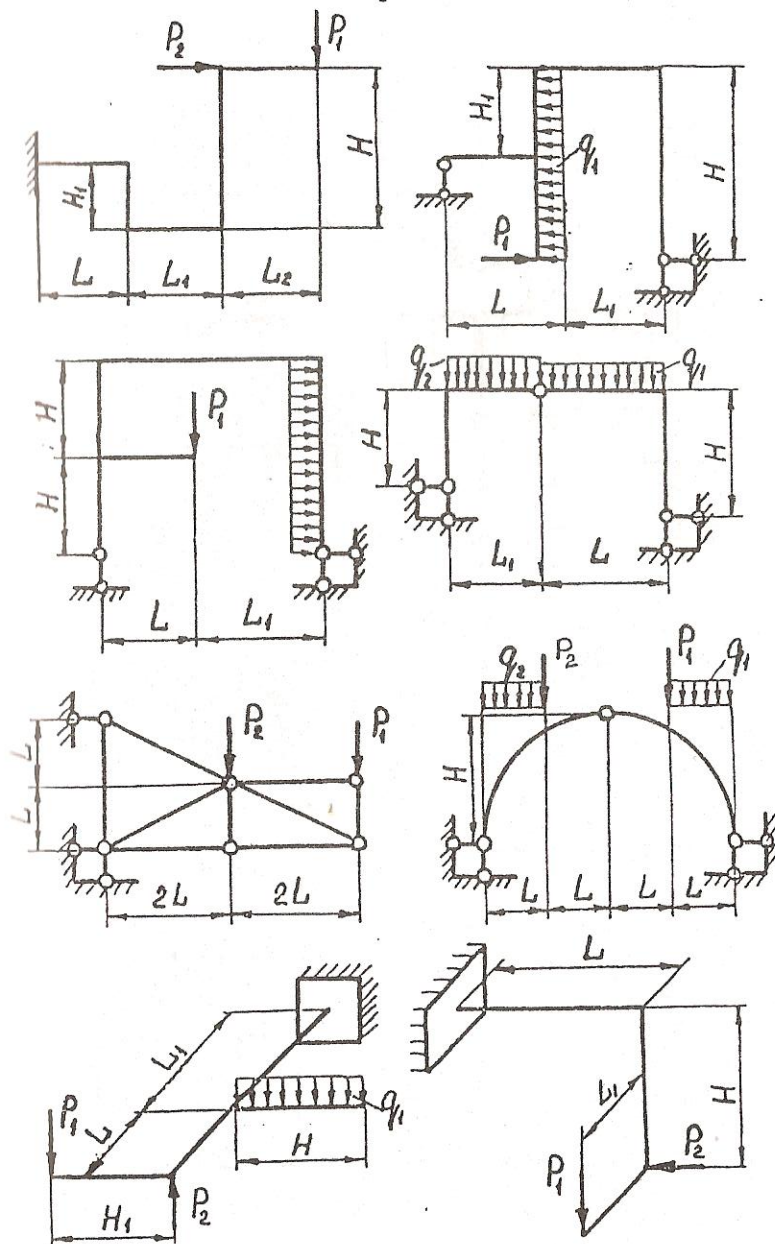


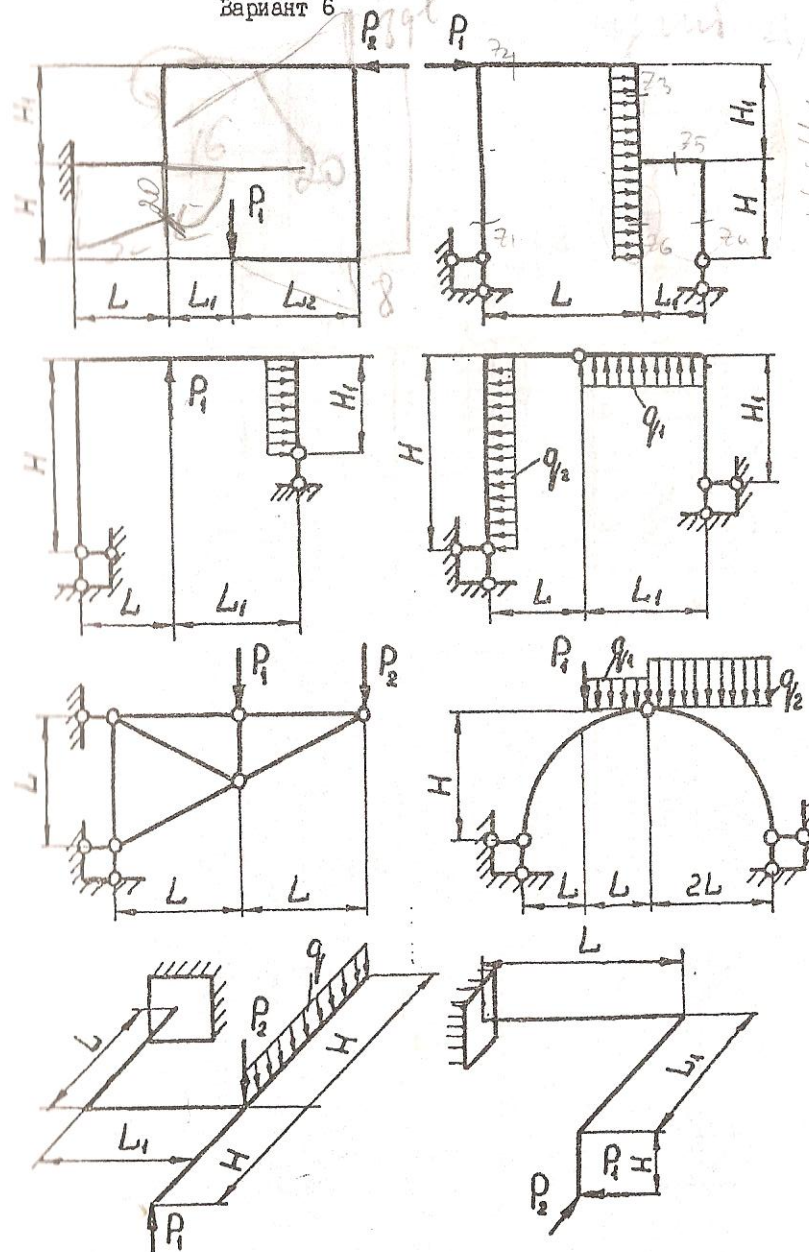
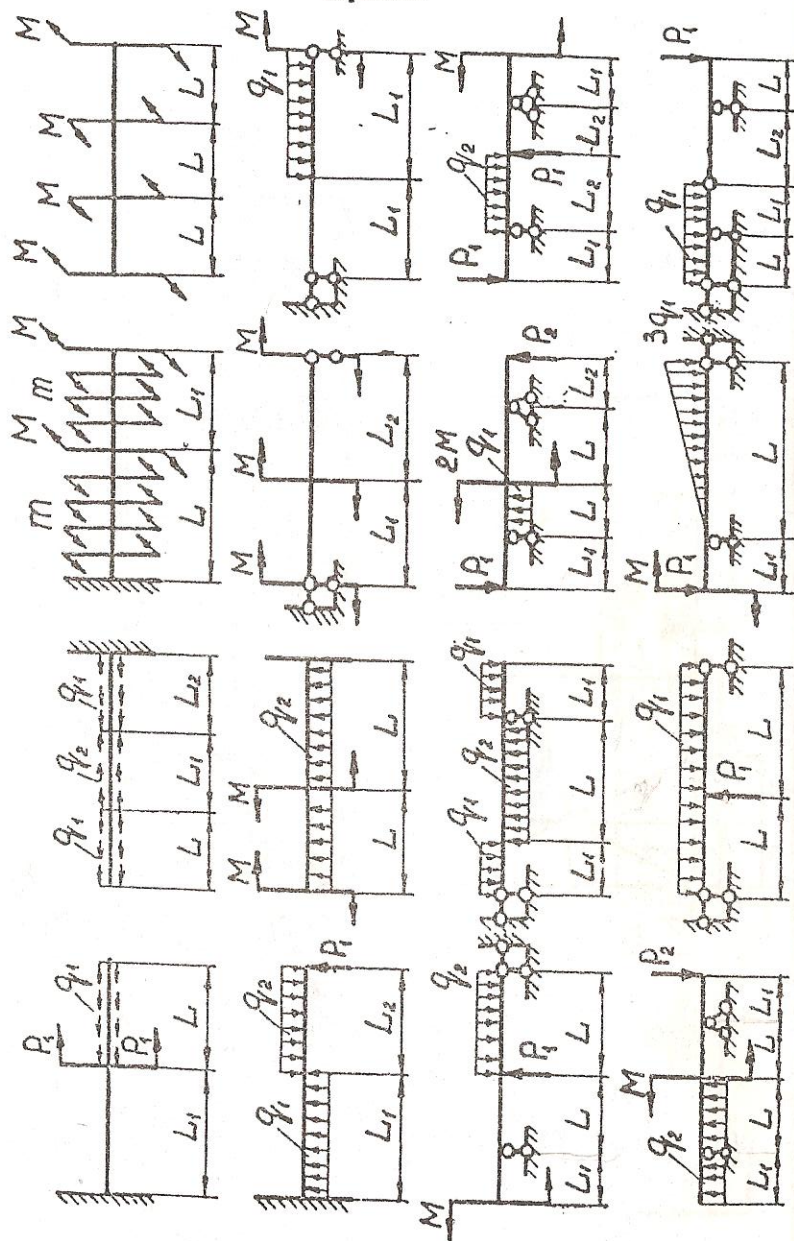


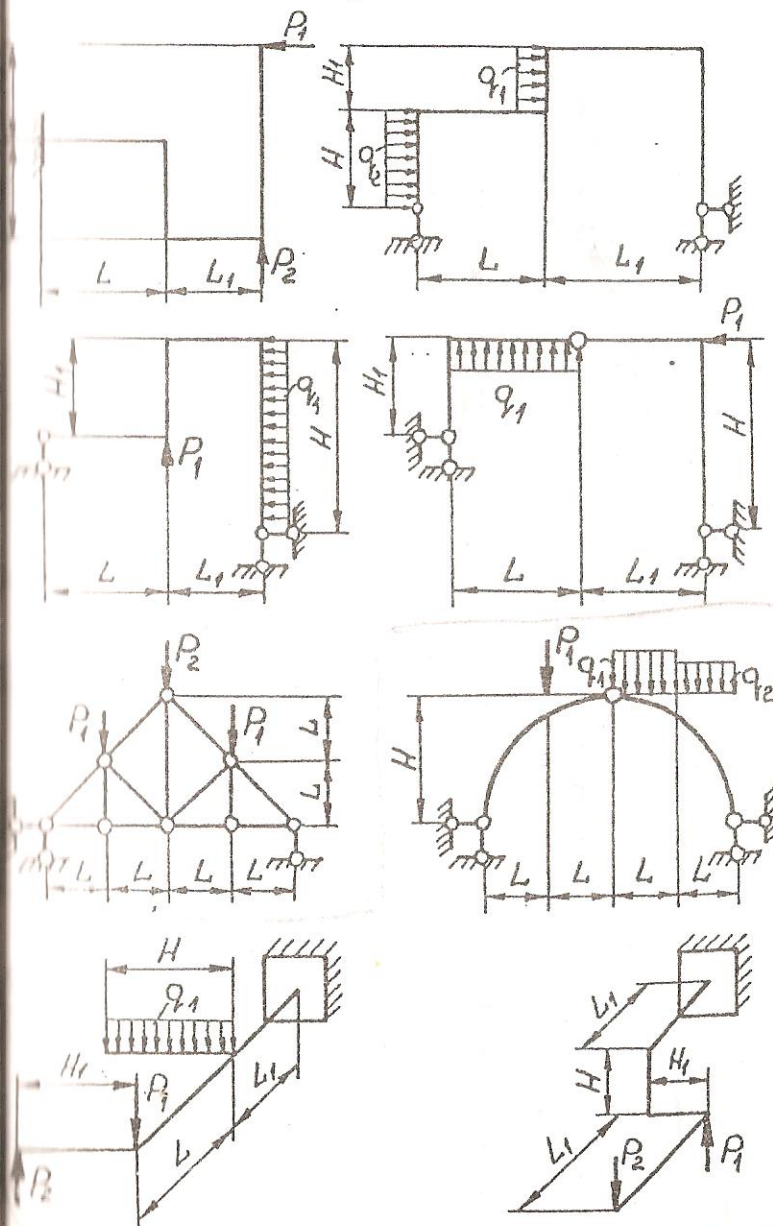
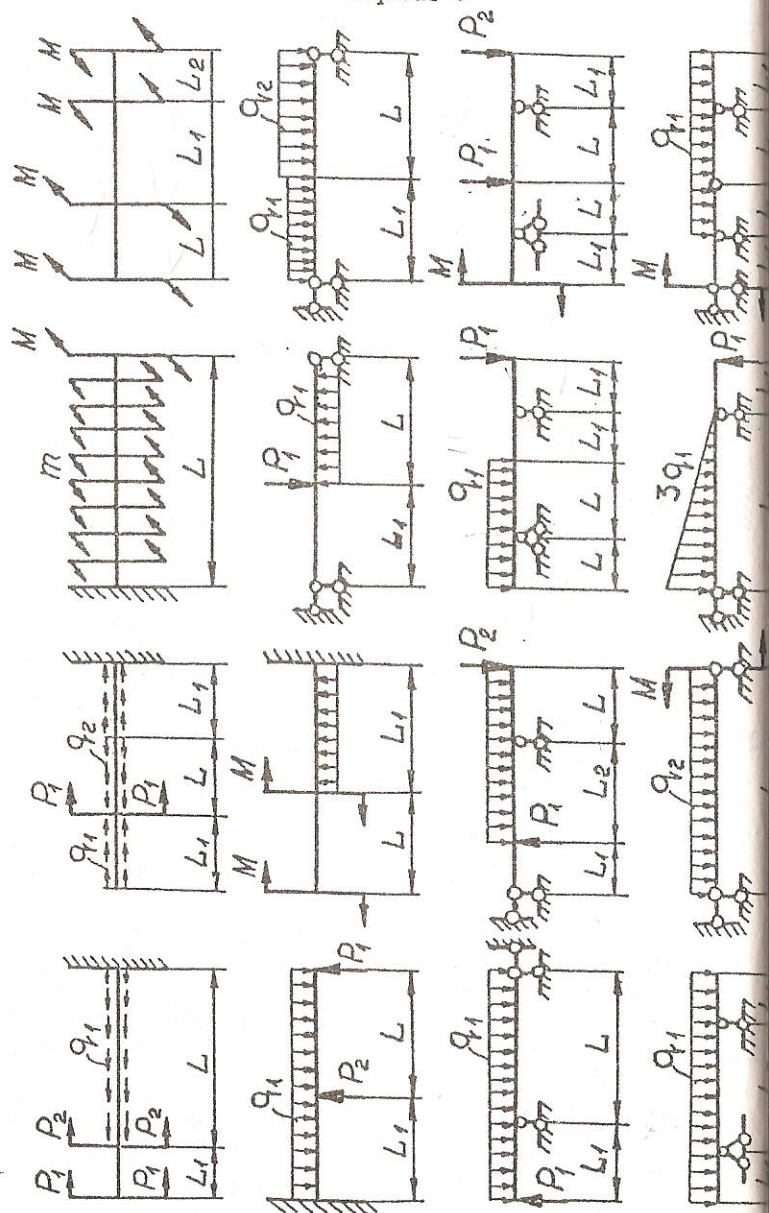
Вариант 5



Вариант 5







1.5. Контрольные вопросы

1. Как классифицируются внешние силы? Их размерности?
2. Какие основные гипотезы применяются в сопротивлении материалов?
3. Когда не применим принцип суперпозиции?
4. Какие внутренние усилия возникают в сечениях тел в общем случае нагружения?
5. Если в поперечном сечении прямолинейной балки приложена сосредоточенная сила, то что будет в этом сечении на эпюрах Q и M ?
6. Сколько связей необходимо наложить на тело, чтобы закрепить его в плоскости?
7. Сколько связей наложено на вращающийся вал?
8. Из каких условий определяются реакции опор?
9. Чему равен изгибающий момент M в заданном сечении балки?
10. Чему равна поперечная сила Q в заданном сечении балки?
11. Чему равен крутящий момент $M_{кр}$ в заданном сечении вала?
12. Чему равна продольная сила N в заданном сечении стержня?
13. Каковы дифференциальные зависимости между q , Q , M при изгибе прямолинейной балки?
14. Как изменяется M по длине балки при отсутствии распределенных нагрузок?
15. Чему равны Q и M на конце консоли при отсутствии сосредоточенных сил и моментов в этом сечении балки?
16. Чему равен M на конце балки, опирающейся на шарнирную опору при отсутствии сосредоточенного момента?
17. В каких случаях эпюра Q нелинейна для прямолинейной балки?
18. Какие правила контроля построенных эпюр Вы знаете?

1.6. Варианты заданий

Для заданных расчетных схем, представленных ниже, построить эпюры внутренних силовых факторов. Вариант задания, линейные размеры и значения нагрузок выбираются согласно трехзначного шифра, выданного преподавателем. Первая цифра означает номер варианта задания, вторая - номер строки в таблице 1.1, третья - номер строки в таблице 1.2. В таблице 1.1 параметр A означает вид очертания оси арки (О-дуга окружности, П-парабола, синусоида).

Примечание. Для арки рекомендуется вычислить величины внутренних силовых факторов в четырех сечениях: в сечениях расположенных бесконечно близко с двух сторон от точки приложения сосредоточенной силы P_1 , а также в сечениях на расстоянии $1,4L$ и $3L$ от левой опоры (расстояние между опорами на расчетных схемах равно $4L$), а определение величин внутренних силовых факторов, необходимых для построения полных эпюр, проводить на ЭВМ по специальной программе.

Таблица 1.1.

№	L	L_1	L_2	H	H_1	A
0	l	$2l$	$3l$	$2l$	l	О
1	$2l$	$3l$	$4l$	$3l$	$2l$	П
2	$3l$	$4l$	$2l$	$3l$	l	С
3	$3l$	l	l	$4l$	$3l$	О
4	$3l$	$2l$	$3l$	l	l	П
5	$4l$	l	$2l$	$6l$	l	С
6	$4l$	$3l$	l	$3l$	$5l$	О
7	$5l$	l	$3l$	l	$4l$	П
8	$5l$	$3l$	$2l$	$3l$	$3l$	С
9	$5l$	$4l$	$3l$	$6l$	l	О

Таблица 1.2.

№	q_1	q_2	P_1	P_2	m	M
0	$-q$	$2q$	$3q\ell$	$q\ell$	$2q\ell$	$3q\ell^2$
1	$2q$	$3q$	$-4q\ell$	$2q\ell$	$3q\ell$	$4q\ell^2$
2	q	$4q$	$-5q\ell$	$3q\ell$	$2q\ell$	$q\ell^2$
3	$-2q$	$2q$	$-q\ell$	$4q\ell$	$3q\ell$	$2q\ell^2$
4	$4q$	$3q$	$2q\ell$	$-3q\ell$	$4q\ell$	$5q\ell^2$
5	$-4q$	$5q$	$6q\ell$	$6q\ell$	$5q\ell$	$4q\ell^2$
6	$5q$	$6q$	$q\ell$	$-q\ell$	$6q\ell$	$5q\ell^2$
7	$-5q$	$3q$	$4q\ell$	$-4q\ell$	$5q\ell$	$6q\ell^2$
8	$-3q$	$4q$	$-3q\ell$	$5q\ell$	$3q\ell$	$4q\ell^2$
9	$4q$	$3q$	$-2q\ell$	$-5q\ell$	$6q\ell$	$q\ell^2$

Расчетно-проектировочная работа № 2

**РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ,
СЖАТИИ И КРУЧЕНИИ**