Теория вероятностей

Сборник задач к контрольной работе

Челябинск - 2011

Уральский социально-экономический институт (филиал)
Образовательного учреждения профсоюзов
Высшего профессионального образования
«Академия труда и социальных отношений»
Кафедра прикладной информатики и математики

И.В. Сафронова

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Сборник задач к контрольной работе

Челябинск

2011

Сафронова И.В. Теория вероятностей: сборник задач к контрольной работе. УрСЭИ (филиал) ОУП ВПО «АТиСО». – Челябинск, 2011. – 56 с.

Сборник задач составлен в соответствии с Федеральным Государственным Образовательным стандартом высшего профессионального образования по направлению бакалавриата «Прикладная информатика».

Пособие содержит задачи и правила оформления контрольной работы по разделу «Теория вероятностей» дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

Авторы **Сафронова И.В.**, канд.техн.наук, доцент кафедры прикладной информатики и математики УрСЭИ

Утверждено ученым советом УрСЭИ (протокол № от 2011 г.)

Оглавление

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ВЫБОРУ ВАРИАНТА И ОФОРМЛЕНИЮ РАБОТЫ

Номер варианта контрольной работы студент должен выбрать в соответствии с номером его зачетной книжки:

<table>
<tr><td colspan="2" rowspan="2">Вариант контрольной работы</td><td colspan="10">Последняя цифра номера зачетной книжки</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>0</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Предпоследняя цифра номера зачетной книжки</td><td>Четная (0,2,…8)</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Нечетная (1,3,…9)</td><td>11</td><td>12</td><td>13</td><td>14</td><td>15</td><td>16</td><td>17</td><td>18</td><td>19</td><td>20</td></tr>
</table>

Например, зачетной книжке 98027 соответствует вариант № 7, а книжке 98010 – вариант № 20.

Выполненная контрольная работа должна быть представлена для проверки на кафедру до начала сессии.

Работа должна быть в рукописном виде в тетради в клетку.

Титульный лист контрольной работы должен иметь вид:

Уральский социально-экономический институт (филиал)
Образовательного учреждения профсоюзов
высшего профессионального образования
«АКАДЕМИЯ ТРУДА И СОЦИАЛЬНЫХ ОТНОШЕНИЙ»

Контрольная работа по теории вероятностей
Студент:
Группа:
Специальность:
Номер зачетной книжки;
Вариант:

Номер задачи	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Оценка												

Челябинск-2011

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Основными понятиями теории вероятностей являются понятие элементарного события и понятие пространства элементарных событий.
Под элементарным событием мы понимаем появление или не появление того или иного исхода испытания.
Множество S, каждому элементу которого соответствует один исход испытания, называют пространством элементарных событий. Будем для простоты считать, что число элементарных событий конечно.
Подмножество пространства элементарных событий называют случайным событием. Это событие в результате испытания может произойти или не произойти (выпадение трех очков при бросании игральной кости, звонок в данную минуту по телефону и т. д.). Случайное событие называют достоверным, если оно заведомо произойдет (выпадение от одного до шести очков при бросании кости), и невозможным, если оно заведомо не может произойти (выпадение семи очков при бросании кости). При этом достоверное событие содержит все точки пространства элементарных событий, а невозможное событие не содержит ни одной точки этого пространства.
Два случайных события называют несовместными, если они не могут произойти одновременно при одном и том же исходе испытания.

Пример

Испытание состоит в том, что бросают игральную кость один раз.
Одним из пространств элементарных событий этого испытания является $\{A_1\ A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$, где A_k означает, что выпало к очков. Это испытание описывает и другое пространство элементарных событий $\{A_ч, A_н\}$, где $A_ч$ означает выпадение четного числа очков, а $A_н$—выпадение нечетного числа очков.
В первом из этих пространств событие, означающее появление четного числа очков, содержит три элементарных события: выпадение двух, четырех и шести очков.
Во втором пространстве событие, означающее появление четного числа очков, само является элементарным.

ЗАДАЧИ

1. Укажите пространства элементарных событий для следующих испытания производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, занумерованных числами от 1 до 10. Можно ли составить несколько пространств элементарных событий для данного испытания?

2. Сколько элементарных событий содержит каждое из случайных событий: сумма двух наудачу выбранных однозначных чисел равна двенадцати (элементарное событие — появление пары однозначных чисел {m;n}.

3. Сколько элементарных событий содержит каждое из случайных событий: наудачу выбранная кость из полной игры домино — «дубль» (элементарное событие — появление кости m : n, где m и п могут принимать значения 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6 и m<n).

4. Сколько элементарных событий содержит каждое из случайных событий: число очков, выпавшее на верхней грани игрального кубика, нечетное (элементарное событие — появление т очков, где m принимает значения 1; 2; 3; 4; 5; 6).

5. Сколько элементарных событий содержит каждое из случайных событий: наудачу

вырванный листок из нового календаря соответствует тридцатому числу (элементарное событие — появление одного из 365 листков календаря).

6. Сколько элементарных событий содержит каждое из случайных событий: наудачу выбранное слово из множества А = {тор, куб, квадрат, гипотенуза, событие, перпендикуляр, ромб} содержит не менее двух гласных (элементарное событие - появление какого-либо из этих слов)?

7. На десяти жетонах выбиты числа 1; 2; 3; ...; 10. Наудачу извлекается один жетон. В каких из следующих ответов указаны все возможные исходы испытания:

а) {четное; нечетное},

б) {простое; 4;6;8;9;10}?

8. На десяти жетонах выбиты числа 1; 2; 3; ...; 10. Наудачу извлекается один жетон. В каких из следующих ответов указаны все возможные исходы испытания:

а) {четное; 1; 3; 5},

б) {не более трех; не менее четырех}?

9. Для испытания, состоящего в двукратном броске игрального кубика, запишите все возможные исходы испытания, если элементы пространства элементарных событий S:

а) являются упорядоченными парами чисел m и n;

б) являются неупорядоченными парами чисел m и n;

Во всех трех случаях тип выражают число очков, выпавших при каждом броске.

10. В каких из следующих примеров указаны все возможные исходы испытания:

а) выигрыш, проигрыш в шахматной партии;

б) выпадение (в указанном порядке) герба — герба, герба — цифры, цифры — цифры при двукратном подбрасывании монеты?

12. В каких из следующих примеров указаны все возможные исходы испытания:

а) попадание, промах при одном выстреле;

б) появление 1, 2, 3, 4, 5, 6 очков при однократном бросании кости?

13. Укажите, какие из следующих событий являются: 1) случайными, 2) достоверными, 3) невозможными:

а) выигрыш по одному билету лотереи;

б) извлечение из урны цветного шара, если в ней находятся 3 синих и 5 красных шаров?

14. Укажите, какие из следующих событий являются: 1) случайными, 2) достоверными,

3) невозможными:

а) получение абитуриентом 25 баллов на вступительных экзаменах в институте при сдаче четырех экзаменов, если применяется пятибалльная система оценок;

б) извлечение «дубля» из полной игры в домино?

15. Какие из следующих пар событий являются несовместными:

а) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 100 включительно: делится на 10; делится на 11;

б) нарушение в работе: первого; второго мотора летящего самолета?

16. Какие из следующих пар событий являются несовместными:

а) попадание; промах при одном выстреле;

б) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 25 включительно является: четным; кратным трем?

17. Какие из следующих пар событий являются несовместными:

а) наудачу выбранное натуральное число от 1 до 100 включительно является простым;

б) выигрыш; проигрыш в шахматной партии?

18. Сколько событий, включая невозможное и достоверное, можно составить из пространства элементарных событий $S = \{\omega 1, ,\omega 2 ,\omega 3\}$? Укажите их.

19. Укажите пространства элементарных событий для следующего испытания: проводится турнирный футбольный матч между двумя командами. Можно ли составить несколько пространств элементарных событий для данного испытания?

20. Укажите пространства элементарных событий для следующих испытаний: наудачу извлекается одна кость из полной игры домино. Можно ли составить несколько пространств элементарных событий для данного испытания?

2. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Пусть производится некоторое испытание, которое может иметь n и только n различных исходов. Будем считать, что все эти исходы несовместны (не могут произойти одновременно) и равновероятны (данное понятие лежит за рамками математической теории и понимается в интуитивном смысле). Каждому событию A, являющемуся подмножеством пространства элементарных событий проводимого испытания, поставим в соответствие число

$$p(A) = \frac{m}{n} \tag{1}$$

где m — число исходов испытания, благоприятствующих событию A.
Число $p(A)$ называют вероятностью события A при данном испытании.

Указания:

Анализ и решение задач, в которых вероятность рассматриваемого события вычисляется по формуле (1), могут быть выполнены по следующей схеме:
1. Уясните, в чем состоит испытание, рассматриваемое в задаче.
2. Установите, являются ли исходы испытания несовместными и равновероятными.
3. Подсчитайте число всех возможных исходов испытания n.
4. Сформулируйте событие, вероятность наступления которого необходимо найти.
5. Подсчитайте число исходов испытания, благоприятствующих рассматриваемому событию m,
6. По формуле (1) вычислите вероятность появления рассматриваемого события.

Пример

Из 35 экзаменационных билетов, занумерованных с помощью целых чисел от 1 до 35, наудачу извлекается один. Какова вероятность того, что номер вытянутого билета есть число, кратное трем?

Решение. Испытание состоит в том, что извлекается один билет. Так как билет вытягивается наудачу, то все исходы испытания равновероятны и, кроме того, они несовместны. Число возможных исходов испытания равно 35. Событие A означает, что номер взятого билета кратен трем. Этому событию благоприятствуют 11 исходов испытания {3; 6; 9; ...; 33}. Следовательно, по формуле (1) искомая вероятность равна 11/35≈0,35.

Задачи

1. Даны числа от 1 до 30 включительно. Какова вероятность того, что наудачу выбранное целое число является делителем числа 30?

2. Какова вероятность того, что наудачу выбранный день из числа дней одного столетия обладает следующим свойством: число, номер месяца и последние две цифры года записаны с помощью одной из цифр 1, 2, ... 9?

3. На одинаковых карточках в троичной системе счисления записаны целые числа от 1 до 15. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что записанное на ней число содержит: а) не менее двух единиц; б) хотя бы одну двойку; в) один нуль?

4. Какова вероятность того, что число на вырванном наудачу листке нового календаря: а) кратно пяти; б) равно 29, если в году 365 дней?

5. Из полной игры лото наудачу извлекается один бочонок. На бочонках написаны числа от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что на извлеченном бочонке написано простое число?

6. В коллекции 200 монет, из которых 25 монет XVIII века Какова вероятность того, что наудачу выбранная монета датирована XVIII веком?

7. На четырех карточках написаны числа 1, 2, 3 и 4. Какова вероятность того, что сумма чисел на трех произвольно выбранных карточках делится на 3?

8. Какова вероятность того, что кость, наудачу извлеченная из полного набора домино, имеет сумму очков, равную пяти?

9. В группе 6 юношей и 18 девушек. По жребию разыгрывается один билет в театр. Какова вероятность того, что билет получит девушка?

10. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 64 кубика одинакового размера. Определите вероятность того, что извлеченный наудачу кубик будет иметь ровно две окрашенные грани?

11. Игральная кость бросается дважды. Каждому из 36 элементарных событий приписывается одна и та же вероятность. Найдите вероятность того, что сумма очков равна n для n = 2, 3, 4 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

12. Монета бросается три раза подряд. Перечислите все возможные исходы этих трех последовательных бросаний (например один из исходов может быть в виде ГЦГ, где Г — выпадение герба, а Ц — цифры). Припишем всем исходам одну и ту же вероятность. Найдите вероятности следующих событий:

а) число выпадений герба больше числа выпадений цифр

б) выпадает в точности два герба;

в) результаты всех бросаний одинаковы.

13. На пяти карточках написаны числа 1, 2, 3 и 4. Какова вероятность того, что сумма чисел на трех произвольно выбранных карточках делится на 2?

14. В сборнике билетов по истории всего 25 билетов, в двух из них встречается вопрос о реформах. На экзамене студенту достаётся один случайно выбранный билет. Найдите вероятность того, что в этом билете не будет вопроса о реформах.

15. Студента попросили назвать число от 1 до 100. Какова вероятность того, что он назовет число кратное пяти?

16. Брошена игральная кость. Найдите вероятность того, что выпадет нечетное число очков. 1, 3, 5 — нечетные числа; 2, 4, 6 — четные.

17. В фирме такси в данный момент свободно 15 машин: 2 красных, 9 желтых и 4 зеленых. По вызову выехала одна из машин, случайно оказавшихся ближе всего к заказчице. Найдите вероятность того, что к ней приедет желтое такси

18. За одну смену рабочий изготавливает на станке с числовым программным управлением 600 деталей. Из-за дефекта режущего инструмента на станке получено 9 бракованных деталей. В конце рабочего дня мастер цеха берет одну деталь наугад и проверяет ее. Какова вероятность, что ему попадется именно бракованная деталь?

19. Банк «Русский стандарт» проводит лотерею для своих клиентов — держателей карт Visa Classic и Visa Gold. Будет разыграно 6 автомобилей Opel Astra, 1 автомобиль Porsche Cayenne и 473 телефона iPhone 4. Известно, что менеджер оформил карту Visa Classic и стал победителем лотереи. Какова вероятность, что он выиграет автомобиль Opel Astra, если приз выбирается наугад?

20. Подготовлено 30 подарков детям на Новый Год, из них 12 с яблоками и 18 с апельсинами. Подарки распределяются случайным образом. Найдите вероятность того, что Вовочке достанется подарок с апельсином.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Для двух несовместных событий *A* и *B*

$$p(A+B) = p(A) + p(B) \qquad (2)$$

Если же события *A* и *B* совместные, то

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB) \qquad (3)$$

Для двух независимых событий *A* и *B*

$$p(AB) = p(A)p(B) \qquad (4)$$

Указания:

Анализ и решение задач, включенных в данный параграф, можно осуществлять по следующей схеме:
1. Уясните, в чем состоит рассматриваемое в задаче испытание.
2. Обозначьте буквами события, рассматриваемые в условии задачи.
3. С помощью введенных обозначений выразите событие, вероятность наступления которого необходимо найти.
4. Если требуется найти вероятность суммы событий, выясните, совместны или несовместны рассматриваемые события. Если же требуется найти вероятность произведения событий, выясните, зависимы или независимы рассматриваемые события.
5. Выберите соответствующую условию задачи формулу и выполните необходимые вычисления.

Пример

В двух коробках лежат карандаши одинаковой величины и формы, но разного цвета. В первой коробке 4 красных и 6 черных, а во второй 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимается наугад по одному карандашу. Какова вероятность того, что оба карандаша окажутся красными?

Решение. Испытание состоит в том, что из каждой коробки вынимается по одному карандашу. Пусть событие А означает, что вынутый карандаш из первой коробки оказался красным, событие В - что вынутый карандаш из второй коробки тоже красный. Тогда событие АВ означает, что оба вынутые карандаша оказались красными.
Поскольку события А и В независимы, то р (АВ) = р (А) р (В).
Вероятности событий А и В равны соответственно р (А) = 0,4, р (В) = 0,3.
Следовательно, вероятность того, что оба карандаша оказались красными, равна

$$p\ (AB) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12.$$

Задачи

1. Экзаменационные работы по математике, которые писали абитуриенты при поступлении в институт, зашифрованы целыми числами от 1 до 90 включительно. Какова вероятность того, что номер наудачу взятой работы кратен 10 или 11?

2. Вероятность того, что початки кукурузы имеют 12 рядов, равна 0,49, 14 рядов - 0,37 и 16 -18 рядов - 0,14. Какова вероятность того, что наудачу выбранный початок будет иметь 12 или 14 рядов?

3. Из 30 учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 -

волейболом, 5 - волейболом и баскетболом, а остальные - другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или только баскетболом?

4. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем 5 книг стоят по 4 руб. каждая, 3 книги - по 2 руб. и 2 книги - по 1 руб. Найти вероятность того, что взятая наудачу книга стоит не дороже двух рублей.

5. Контрольная работа состоит из трех задач по алгебре и трех по геометрии. Вероятность правильно решить задачу по алгебре равна 0,8, а по геометрии - 0,6. Какова вероятность правильно решить все три задачи хотя бы по одному из предметов?

6. Производятся 4 независимых выстрела. Вероятность поражения цели стрелком при каждом из выстрелов равна р. Какова вероятность того, что первые два выстрела будут попаданиями, а последующие два - промахами?

7. Известно, что при каждом измерении равновероятны как положительная, так и отрицательная ошибка. Какова вероятность того, что при трех независимых измерениях все ошибки будут положительными?

8. Из двух полных наборов шахмат наудачу извлекают по одной фигуре или пешке. Какова вероятность того, что обе фигуры окажутся слонами?

9. Студент отвечает на 5 вопросов словами «да» и «нет». Какова вероятность того, что ответы на все вопросы оказались правильными, если он отвечал наудачу?

10. Выполненная контрольная работа состоит из задачи и примера. Вероятность того, что в наудачу выбранной работе правильно решена задача, равна 0,8, а того, что получен хотя бы один правильный ответ, - 0,9. Найдите вероятность того, что правильно решен пример.

11. В студенческой группе 0,9 всего состава группы успешно сдали экзамен, причем 0,4 всех студентов получили отметку «отлично». Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент получил отметку «хорошо» или «удовлетворительно»?

12. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй экзамен - 0,85 и третий - 0,8. Какова вероятность того, что студент сдаст не менее двух экзаменов?

13. Два стрелка независимо друг от друга стреляют в цель. Вероятность попадания в цель первого стрелка 0,9, второго - 0,75. Какова вероятность того, что хотя бы один стрелок попадет в цель?

14. Вероятность бесперебойной работы первого станка в течение часа равна 0,9, а второго - 0,95. Какова вероятность того, что в течение часа произойдет нарушение в работе только одного станка, если станки работают независимо друг от друга?

15. Из колоды, содержащей 52 карты, наугад извлекается одна карта. Событие А означает, что извлеченная карта является тузом, событие В - что вынута карта трефовой масти. Найдите вероятности p(A), p(B), p(AB), Независимы ли события А и В? Решите эту же задачу при условии, что в колоду добавлена карта «джокер», не имеющая масти и не являющаяся тузом.

16. Пусть S — множество всех исходов при трехкратном бросании монеты. Обозначим через А событие «в первый раз выпал герб», через В событие «выпало не менее двух гербов». Найдите вероятности событий p(A), p(B) и p(AB), если все исходы бросаний равновероятны. Независимы ли эти события?

17. Из 25 студентов группы 10 человек занимаются сноубордом, 5 – горными лыжами, 5 - сноубордом и горными лыжами, а остальные - другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только горными лыжами или только сноубордом?

18. Студент отвечает на 100 вопросов словами «да» и «нет». Какова вероятность того, что ответы на все вопросы оказались правильными, если он отвечал наудачу?

19. Известно, что при каждом измерении равновероятны как положительная, так и отрицательная ошибка. Какова вероятность того, что при трех независимых измерениях все ошибки будут отрицательными?

20. Библиотечка состоит из десяти различных книг, причем 5 книг стоят по 4 руб. каждая, 3 книги - по 2 руб. и 2 книги - по 1 руб. Найти вероятность того, что взятая наудачу книга стоит дороже двух рублей.

4. ПРАВИЛА СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Правило суммы. Если объект A может быть выбран m способами, а объект B — другими n способами, причем выборы объектов A и B несовместны, то выбор «либо A либо B» может быть осуществлен m + n способами.

Правило произведения. Если объект A может быть выбран m способами и после каждого из этих выборов объект B может быть выбран n способами, то выбор упорядоченной пары (A, B) может быть осуществлен mn способами.

Пример

На книжной полке стоят 20 книг по алгебре, 12 - по теории вероятностей, 7 - по математическому анализу и 25 - по литературе. Сколькими способами можно выбрать книгу по математике?

Решение. Найдем число способов, которыми можно выбрать книгу по алгебре, или по теории вероятностей, или по математическому анализу. Книгу по алгебре можно выбрать 20 способами, по теории вероятностей - 12 способами и по математическому анализу - 7 способами. Эти выборы несовместны. Поэтому по правилу суммы находим, что выбрать книгу по математике можно N = 20+ 12 + 7 = 39 способам.

Пример

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, если цифры в числе не повторяются?

Решение. На месте сотен поставим любую из трех цифр. После каждого такого выбора на месте десятков можно поставить любую из двух оставшихся цифр, так как цифры в числе не повторяются. Наконец, на месте единиц можно поставить оставшуюся одну цифру. Повторным применением правила произведения найдем число трехзначных чисел, равное N = 3 • 2 • 1=6.

Пример

Сколько различных «слов», состоящих не менее чем из четырех разных букв, можно образовать из букв слова **УЧЕНИК**?

Решение. Слово ученик состоит из шести различных букв. По правилу произведения можно составить $N_1 = 6\times5\times4\times3 = = 360$ четырехбуквенных слов, $N_2 = 6\times5\times4\times3\times2 = 720$ пятибуквенных и $N_3 = 6\times5\times4\times3\times2\times1 = 720$ шестибуквенных слов.
По правилу суммы всего можно составить N = 360 + 720 + 720 = 1800 слов, состоящих не менее чем из четырех букв.

Задачи

1. В магазине имеется 6 сортов шоколадных конфет и 4 сорта карамели. Сколько различных покупок конфет одного сорта можно сделать в этом магазине? Сколько можно сделать различных покупок, содержащих один сорт шоколадных конфет и один сорт карамели?

2. Имеется 5 билетов денежно-вещевой лотереи, 6 билетов спортлото и 10 билетов автолотереи. Сколькими способами можно выбрать один билет спортлото или автолотереи?

3. В отряде 5 разведчиков, 4 связиста и 2 санитара. Сколькими способами можно

выбрать одного солдата так, чтобы он был разведчиком или санитаром? Сколькими способами можно составить разведгруппу из трех человек, чтобы в нее вошли разведчик, связист и санитар?

4. Сколько различных полных обедов можно составить, если в меню имеется 3 первых, 4 вторых и 2 третьих блюда?

5. Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число *2*5?

6. Сколько можно получить различных четырехзначных чисел, вставляя пропущенные цифры в число 3*7*?

7. У одного человека имеется 7 книг по математике, а у другого — 9. Сколькими способами они могут осуществить обмен книги на книгу?

8. Сколько различных трехбуквенных «слов» можно составить из букв слова **РОМБ**?

9. Сколько существует различных положений, в которых могут оказываться четыре переключателя, если каждый из них может быть включен или выключен?

10. Сколько различных трехзначных чисел, меньших 400, можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 при условии, что цифры в числе не должны повторяться?

11. В букинистическом магазине продаются 6 экземпляров романа И. С. Тургенева «Рудин», 3 экземпляра романа «Дворянское гнездо» и 4 экземпляра романа «Отцы и дети». Кроме того, имеется 5 томов, состоящих из романов «Рудин» и «Дворянское гнездо», и 7 томов, состоящих из романов «Дворянское гнездо» и «Отцы и дети». Сколькими способами можно сделать покупку, содержащую по одному экземпляру каждого из этих романов?

12. В магазине имеется 5 сортов конфет. Сколько различных покупок, содержащих не более трех сортов конфет, можно сделать в этом магазине (покупки считаются одинаковыми, если они состоят из одинаковых сортов конфет)?

13. Сколько можно составить двузначных или трехзначных чисел из нечетных цифр при условии, что ни одна цифра не повторяется?

14. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если общее число имен равно 300, а ребенку дают не более трех разных имен?

15. Сколько различных двухзначных чисел, меньших 99, можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9 при условии, что цифры в числе не должны повторяться?

16. Сколько существует различных положений, в которых могут оказываться три переключателя, если каждый из них может быть включен или выключен?

17. Сколько различных «слов», состоящих не менее чем из трех разных букв, можно образовать из букв слова **СТУДЕНТ**?

18. В магазине имеется три сортов груш. Сколько различных покупок, содержащих не более двух сортов груш, можно сделать в этом магазине (покупки считаются одинаковыми, если они состоят из одинаковых сортов груш)?

19. У одного студента имеется 5 журналов о природе, а у другого — 8. Сколькими способами они могут осуществить обмен журнала на журнал?

20. В ресторане предлагается бизнес-ланч, состоящий их первого, второго и третьего блюда. Сколько различных комплектов можно предложить клиенту, если в меню имеется 5 первых, 6 вторых и 4 третьих блюда?

5. РАЗМЕЩЕНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ И БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ. ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ БЕЗ ПОВТОРЕНИЙ

Размещениями с повторениями из n элементов по r называют кортежи длины r, составленные из элементов множества X, содержащего n элементов (или, как кратко говорят, n-множества). Число таких размещений выражается формулой

$$\tilde{A}_n^r = n^r \tag{5}$$

Такие размещения называют также упорядоченными выборками r элементов из данных n с возвращением.

Упорядоченные множества длины r, составленные из элементов n-множества, называют размещениями без повторений из n элементов по r. Их число выражается формулой

$$A_n^r = n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1) \tag{6}$$

Такие размещения называют также упорядоченными выборками r элементов из данных n без возвращения.

Если r=n, то говорят о перестановках без повторений длины n (или из n элементов). Их число выражается формулой

$$P_n \ = n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 3 \times 2 \times 1 \tag{7}$$

r-подмножества n-множества X называют сочетаниями из n элементов по r без повторений. Их число выражается формулой

$$C_n^r = \frac{n \times (n-1) \times \ldots \times (n-r+1)}{r!} = \frac{A_n^r}{P_r} \tag{8}$$

или

$$C_n^r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \tag{9}$$

Указания

Решение задач на вычисление числа размещений (с повторениями или без повторений), перестановок и сочетаний без повторений рекомендуется проводить по следующей схеме:
1. Подсчитайте число элементов n основного множества.
2. Подсчитайте число элементов r, входящих в выборку (т. е. длину кортежа или мощность подмножества).
3. Выясните, упорядочены ли выборки.
4. При подсчете числа кортежей в случае размещений с повторениями пользуйтесь формулой (5).
5. При подсчете числа кортежей в случае размещений без повторений пользуйтесь формулой (6), в частности при n = r - формулой (7).

Пример

Четверо студентов сдают экзамен. Сколькими способами могут быть поставлены им оценки, если известно, что никому из них не будет поставлена неудовлетворительная оценка?

Решение. Каждый из студентов может получить любую из оценок: «отлично», «хорошо», «удовлетворительно». Значит, рассматриваемое множество X состоит из трех различных элементов. При этом порядок расстановки отметок существен, отметки могут повторяться, а общее число поставленных отметок равно четырем (например, «отлично», «хорошо», «отлично», «удовлетворительно».) Следовательно, необходимо составить размещения с повторениями из трех элементов по четыре. Это число равно $\tilde{A}_3^4 = 3^4 = 81$.

Пример

В профсоюзный комитет избрали 9 человек, из них надо выбрать председателя и его заместителя. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Из множества, содержащего 9 различных элементов, выбираются 2 элемента. Порядок существен (например, выборы a_1 — председатель, a_2 — заместитель и a_2 — председатель, a_1 — заместитель, состоящие из одних и тех же элементов, различны). Элементы не могут повторяться. Следовательно, необходимо найти число размещений без повторений из девяти элементов по два элемента в каждом, т. е. A_9^2 . Значит, председателя и его заместителя можно выбрать $A_9^2 = 9 \times 8 = 72$ способами.

Пример

Сколько хорд можно провести через 6 точек, лежащих на одной окружности?

Решение. Из множества, содержащего 6 различных элементов, выбираются 2 элемента, так как хорда однозначно определяется двумя точками, лежащими на окружности. Порядок элементов роли не играет. Например, [AB] и [BA] - одна и та же хорда. Следовательно, необходимо найти число сочетаний из шести элементов по два, т. е. C_6^2. Значит, можно провести $C_{15}^2 = \frac{6!}{2! \times 4!} = 15$ различных хорд.

Пример

Даны натуральные числа от 1 до 30. Сколькими способами можно выбрать три числа так, чтобы их сумма была четной?

Решение. Сумма трех чисел будет четной, если все слагаемые четные или одно слагаемое четное и два слагаемых нечетные. Следовательно, из 15 четных чисел 3 числа можно выбрать C_{15}^3 различными способами, так как порядок слагаемых не учитывается. Кроме того, из 15 нечетных чисел 2 числа можно выбрать C_{15}^2 различными способами и после каждого такого выбора по одному четному числу из 15 можно выбрать C_{15}^1способами. По правилу произведения число выборок, содержащих два нечетных и одно четное число, равно $C_{15}^2 \times C_{15}^1$. Применяя правило суммы, найдем общее число выборок, удовлетворяющих условию $C_{15}^3 + C_{15}^2 \times C_{15}^1 = 2030$.

Задачи

1. На железнодорожной станции имеются m светофоров. Сколько может быть дано различных комбинаций их сигналов, если каждый светофор имеет три состояния: «красный», «желтый» и «зеленый»?

2. В некотором государстве не было двух жителей с одинаковым набором числа зубов. Какая может быть наибольшая численность населения государства, если полное число зубов у человека равно 32?

3. Сколько четырехзначных чисел можно образовать из нечетных цифр, если каждая из этих цифр может повторяться?

4. Сколькими способами можно распределить 12 различных учебников между четырьмя

студентами?

5. Сколькими способами можно разложить в два кармана 9 монет разного достоинства?

6. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?

7. Сколько «слов», каждое из которых состоит из семи различных букв, можно составить из букв слова выборка?

8. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнять переводы с, любого из пяти языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского на любой другой из этих пяти языков?

9. Сколькими способами 10 человек могут встать в очередь друг за другом?

10. В классе 30 учеников. Ежедневно для дежурства выделяются два ученика. Можно ли составить расписание дежурств так, чтобы никакие два ученика не дежурили вместе дважды в течение учебного года?

11. Сколькими способами можно переставлять буквы слова логарифм так, чтобы второе, четвертое и шестое места были заняты согласными буквами?

12. Имеется 4 чашки, 5 блюдец и 6 чайных ложек (все чашки, блюдца и ложки различные). Сколькими способами может быть накрыт стол для чаепития на трех человек, если каждый получит одну чашку, одно блюдце, одну ложку?

13. Сколько четырехзначных нечетных чисел можно составить из цифр числа 3694, если каждую цифру можно использовать не более одного раза?

14. Сколько получится различных параллелограммов- при пересечении n параллельных прямых m другими параллельными прямыми?

15. У одного человека имеется 7 книг, а у другого — 9. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги?

16. В состав сборной включены 2 вратаря, 5 защитников, 6 полузащитников и 6 нападающих. Сколькими способами тренер может выставить на поле команду, в которую входит вратарь, 3 защитника, 4 полузащитника и 3 нападающих?

17. Из полного набора шахмат вынули 4 фигуры или пешки. Во скольких случаях среди них окажется: а) два коня, б) не менее двух коней?

18. Сколькими способами можно выбрать из слова ВЕРОЯТНОСТЬ две согласных и одну гласную букву?

19. На прямой взяты m точек, а на параллельной ей прямой - n точек. Сколько существует треугольников, вершинами которых являются эти точки?

20. Сколькими способами можно распределить поровну 12 различных учебников между четырьмя студентами?

6. ПЕРЕСТАНОВКИ И СОЧЕТАНИЯ С ПОВТОРЕНИЯМИ

Пусть дан кортеж длины n, составленный из элементов множества X = { x_1,x_2, …x_r). Назовем составом этого кортежа новый кортеж (n_1,n_2, …n_r), образованный из неотрицательных целых чисел, где x_1 входит в этот кортеж n_1 раз, ..., x_r — n_r раз.

Кортежи заданного состава (n_1,n_2, …n_r) называют перестановками с повторениями из n_1 элементов x_1, n_2 элементов x_2,.... ,n_r элементов x_r. Их число выражается формулой

$$P_n\ (n_1, n_2, \dots n_r) = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}, \tag{10}$$

Где $n_1 + n_2 + \cdots + n_r) = n$.

Разобьем множество всех кортежей длины n, составленных из элементов множества X = { x_1,x_2, …x_r) на классы эквивалентности, отнеся к одному классу кортежи одинакового состава. Эти классы эквивалентности называют сочетаниями с повторениями из n элементов по r. Их число выражается формулой

$$\tilde{C}_n^r = C_{n+r-1}^r = C_{n+r-1}^{n-1} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-r)!} \tag{11}$$

Указания

При решении задач на перестановки и сочетания с повторениями рекомендуется:
1) выяснить, идет ли в задаче речь о подсчете числа кортежей данного состава или о подсчете числа возможных составов кортежей;
2) в первом случае найти состав кортежа и воспользоваться формулой (10);
3) во втором случае найти число n элементов основного множества, длину кортежа r и воспользоваться формулой (11).

Пример

Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 слона, 2 коня, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?

Решение. Рассматриваемые кортежи имеют длину 8 и состоят из элементов пяти видов. Состав кортежей имеет вид (2,2,2,1, 1). Следовательно, число способов, которыми можно расставить 8 фигур на первой линии шахматной доски, равно

$$P_8\ (2,2,2,1,1) = \frac{8!}{2!2!2!1!1!} = 5040.$$

Пример

В цветочном магазине продаются цветы шести сортов. Сколько можно составить различных букетов из десяти цветов в каждом? (Букеты, отличающиеся лишь расположением цветов, считаются одинаковыми.)

Решение. Рассматриваемое множество состоит из шести различных элементов, а кортежи имеют длину 10. Поскольку порядок расположения цветов в букете не играет роли, то число букетов равно числу сочетаний с повторениями из шести элементов по десяти в каждом. Следовательно, можно составить $\tilde{C}_6^{10} = C_{16}^{10} = C_{15}^{5} = 3003$ различных букетов.

Задачи

1. Сколько букв алфавита можно составить из пяти сигналов в каждой букве, если три сигнала - импульсы тока, а два - паузы?

2. Сколькими способами можно расставить на книжной полке библиотеки 5 книг по теории вероятностей, 3 книги по теории игр и 2 книги по математической логике, если книги по каждому предмету одинаковые?

3. Найдите число различных перестановок в слове **СТАТИСТИКА**.

4. У мамы 2 яблока, 3 груши и 4 апельсина. Каждый день в течение девяти дней она выдает сыну по одному плоду. Сколькими способами это может быть сделано?

5. Сколько четырехзначных чисел имеется в пятеричной системе счисления?

6. В почтовом отделении продаются открытки десяти видов. Сколькими способами можно купить здесь набор из восьми открыток, если открыток каждого вида имеется не менее восьми штук?

7. Сколько можно построить различных прямоугольных параллелепипедов, если длина каждого его ребра может выражаться любым целым числом от 1 до 10?

8. Трое юношей и две девушки выбирают место работы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три завода, где требуются рабочие в литейные цехи (туда берут лишь мужчин), две ткацкие фабрики (туда приглашают женщин) и две фабрики, где требуются мужчины и женщины?

9. Для премий на математической олимпиаде выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 20 человек (каждому из участников вручается только одна книга)?

10. Сколько чисел, меньших, чем миллион, можно написать с помощью цифр 8 и 9?

11. Автомобильные номера состоят из трех букв и четырех цифр. Найдите число таких номеров, если используются 24 буквы русского алфавита и 10 цифр (0, 1, ..., 9).

12. Сколькими способами можно переставить буквы слова **ПЕРЕШЕЕК** так, чтобы 4 буквы «е» не стояли подряд?

13. Найдите число различных перестановок в слове **МАТЕМАТИКА**.

14. Сколько трехзначных чисел имеется в восьмеричной системе счисления?

15. Найдите число различных перестановок в слове **ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД**.

16. Сколько чисел, меньших, чем миллион, можно написать с помощью цифр 7 и 8?

17. Для победителей конкурса выделено 3 экземпляра одной книги, 2 экземпляра другой и 1 экземпляр третьей книги. Сколькими способами могут быть вручены премии, если в олимпиаде участвовало 15 человек (каждому из участников вручается только одна книга)?

18. Трое юношей и две девушки выбирают место учебы. Сколькими способами они могут это сделать, если в городе есть три военных вуза, где могут учиться только юноши, два вуза, где учатся только девушки, и два вуза, где обучение могут получить и мужчины, и женщины?

19. В киоске продаются журналы пяти видов. Сколькими способами можно купить здесь набор из трех журналов, если журналов каждого вида имеется не менее трех штук?

20. Ребенку купили 2 груши, 3 яблока и 2 банана. Каждый день в течение недели он может по одному плоду. Сколькими способами это может быть сделано?

7. ПРИМЕНЕНИЕ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ К ВЫЧИСЛЕНИЮ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Пример

Группа туристов из пятнадцати юношей и пяти девушек выбирает по жребию хозяйственную команду в составе четырех человек. Какова вероятность того, что в составе этой команды окажутся два юноши и две девушки?

Решение. Испытание состоит в том, что из двадцати человек выбирают 4 человека. Так как выбор осуществляется по жребию, то все исходы испытания равновероятны и, кроме того, они несовместны. Число исходов испытания $n = C_{20}^{4}$, так как выборка состоит из четырех элементов и порядок их расположения в выборке не учитывается. Пусть событие А состоит в том, что в составе выбранных окажутся два юноши и две девушки. Двух юношей из 15 можно выбрать C_{15}^{2} способами и после каждого такого выбора двух девушек из 5 можно выбрать C_{5}^{2} способами. По правилу произведения событию А благоприятствует $C_{15}^{2}C_{5}^{2}$ исходов испытания. Искомая вероятность равна

$$p(A) = \frac{C_{15}^{2}C_{5}^{2}}{C_{20}^{4}} \approx 0{,}217$$

Пример

Ни книжной полке произвольно расставлены 4 книги по теории вероятностей и 3 книги по теории множеств. Какова вероятность того, что книги по одному и тому же предмету окажутся рядом?

Решение. Испытание состоит в том, что 7 книг ставятся на полку. Так как они ставятся на полку произвольно, то все исходы испытания равновероятны, кроме того, они несовместны. Семь книг на полке могут быть упорядочены 7! способами. Следовательно, число всех исходов испытания n = 7!. Событию А, состоящему в том, что книги по одному и тому же предмету окажутся рядом, благоприятствует m = 2 × 4! × 3! исходов испытания. Действительно, комплект книг по теории вероятностей может быть упорядочен 4! способами, и после каждого такого расположения книги по теории множеств могут быть упорядочены 3! способами. Кроме того, сами комплекты книг могут быть упорядочены двумя способами. Таким образом, вероятность события А равна

$$p(A) = \frac{2 \times 4! \times 3!}{7!} \approx 0{,}057$$

Задачи

1. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы А, Г, И, Л, М, О, Р, Г, получится слово **алгоритм**?

2. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд кубиков, на которых написаны буквы А,А,А,Н,Н,С, получится слово **ананас**?

3. Найдите вероятность того, что наудачу выбранное n-значное число составлено только из нечетных цифр.

4. Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число не содержит ни одной двойки?

5. Отряд учащихся из 25 человек участвует в военизированной игре. В отряде 5

следопытов и 4 связиста. В разведку надо направить четырех человек. Какова вероятность того, что в разведгруппу будут включены 2 связиста и 2 следопыта, если включение в разведгруппу равновероятно для любого ученика?

6. На карточках написаны целые числа от 1 до 15 включительно. Наудачу извлекаются две карточки. Какова вероятность того, что сумма чисел, написанных на этих карточках, равна десяти?

7. Для дежурства на вечере путем жеребьевки выделяются 5 человек. Вечер проводит комиссия, в составе которой 10 юношей и 2 девушки. Найдите вероятность того, что в число дежурных войдут обе девушки.

8. В коробке находятся 4 красных и 6 зеленых карандашей. Из нее случайно выпали 3 карандаша. Какова вероятность того, что два из них окажутся красными?

9. Имеется 6 билетов в театр, из которых 4 билета на места первого ряда. Какова вероятность того, что из трех наудачу выбранных билетов два окажутся на места первого ряда?

10. Билет в партер стоит 50 коп., на бельэтаж - 40 коп. и на ярус - 30 коп. Найдите вероятность того, что взятые наудачу два билета стоят вместе не дороже 80 коп.

11. Из 60 вопросов, включенных в экзамен, студент подготовил 50. Какова вероятность того, что из предложенных ему трех вопросов он знает два?

12. На один ряд из семи мест случайным образом рассаживаются 7 учеников. Найдите вероятность того, что 3 определенных ученика окажутся рядом.

13. Из букв слова событие, составленного с помощью разрезной азбуки, извлекаются наудачу и складываются друг за другом в порядке их извлечения 3 карточки (буквы). Какова вероятность получить при этом слово быт?

14. Из пяти видов открыток, имеющихся в автомате, наудачу выбираются 3 открытки. Какова вероятность того, что все отобранные открытки будут разные?

15. Во время спортивной игры по команде ведущего «Становись!» 10 учеников в случайном порядке образовали строй в одну шеренгу. Какова вероятность того, что ученики А и В окажутся отделенными друг от друга тремя учениками?

16. Группа, состоящая из пяти юношей и семи девушек, распределяет по жребию 4 билета в театр. Какова вероятность того, что в числе получивших билеты окажется

больше девушек, чем юношей?

17. В одном ящике имеется 12 однотипных деталей, из которых 4 нестандартные, в другом 15 деталей и 3 из них нестандартные. Из каждого ящика наудачу извлекается по 2 детали. Найдите вероятность того, что из первого ящика извлекли 2 нестандартные, а из второго ящика - 2 стандартные детали.

18. Из урны, содержащей 9 белых, 9 черных, 9 синих и 9 красных шаров, наудачу извлекаются 3 шара. Какова вероятность того, что извлеченными окажутся белые или черные шары?

19. Из полного набора костей домино наудачу отобрали 4 кости, после чего кости возвратили в игру. Затем наудачу снова отобрали 4 кости. Какова вероятность того, что среди отобранных первый раз костей было 3 «дубля», а среди отобранных второй раз - только 2?

20. Найдите вероятность того, что наудачу выбранное n-значное число составлено только из четных цифр.

8. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

1. На отрезок L, имеющий длину 40 см, помещен меньший отрезок £ длиной 15 см. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная на больший отрезок, попадет также и на меньший отрезок. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок t пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения на отрезке L.

2. Внутрь круга радиуса R наудачу брошена точка. Найти вероятность того, что точка окажется внутри вписанного в этот круг правильного треугольника. Предполагается, что вероятность попадания точки в треугольник пропорциональна площади треугольника и не зависит от его расположения относительно круга.

3. Задача о встрече. Два товарища условились встретиться в определенном месте между 12 часами и половиной первого дня. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут, после чего уходит. Найи вероятность того, что встреча товарищей состоится, если каждый из них наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 часов до половины первого) и моменты прихода обоих независимы.

4. Коэффициенты p и q квадратного уравнения x + px + q = 0 выбирают наудачу в промежутке (0; 2). Какова вероятность того, что корни этого уравнения будут действительными числами?

5. Наудачу взяты два неотрицательных числа x к y, каждое из которых не больше единицы. Найти вероятность того, что сумма x + y этих чисел не превышает единицы, а их произведение xy не больше —.

Из отрезка [0, 2] на удачу выбраны два числа x и y. Найдите вероятность того, что эти числа удовлетворяют неравенствам $x^2 \leq 4y \leq 4x$

6. Два лица X и Y условились встретиться в определённом месте между двумя и тремя часами дня. Пришедший первым ждет другого в течение 10 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи этих лиц, если каждый из них может прийти в любое время в течение указанного часа независимо от другого?

7 На плоскости начерчены параллельные прямые, находящиеся друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена игла длины $2l < 2a$. Какова вероятность того, что игла пересечёт какую-нибудь прямую?

Мишень имеет форму окружности радиуса 4. Какова вероятность попадания в ее правую половину, если попадание в любую точку мишени равновероятно? При этом промахи мимо мишени исключены

В прямоугольник 5*4 см2 вписан круг радиуса 1,5 см. Какова вероятность того, что точка, случайным образом поставленная в прямоугольник, окажется внутри круга?

Обедая за столом, шириной 2 метра Вы увидели ползущего с другого конца стола на Ваш край таракана. Какова вероятность того, что, доползя до края стола, таракан проползет справа от Вас, если Вы сидите по центру стола и занимаете вдоль него 60 см, а таракан очень худой?

В треугольник со сторонами, равными а, вписана окружность. Найти вероятность того, что точка, поставленная наудачу внутри треугольника, окажется в круге.

Наудачу взяты два положительных числа х, у, каждое из которых не превышает 7/. Найти вероятность р того, что их произведение х*у будет не более 5 ,а частное у/х не больше 10/7.

Решить задачу, применяя непосредственный подсчет вероятностей по геометрическому определению вероятности.
Прямоугольник 3*6 см2 разделен диагоналями на 4 части. Какова вероятность того, что наудачу поставленная в прямоугольник точка окажется в одном из треугольников с большим основанием.

Решить задачу, применяя непосредственный подсчет вероятностей по геометрическому определению вероятности.
В круг радиуса R помещен маленький круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу поставленная в большой круг, попадет и в малый круг.

Решить задачу, применяя непосредственный подсчет вероятностей по геометрическому определению вероятности.
В равносторонний треугольник, со стороной а вписана окружность. Найти вероятность того, что точка случайно поставленная в треугольник, окажется в пределах круга.

Действительная и мнимая части комплексного числа z произвольным образом выбираются из отрезка [0;2]. Найти вероятность того, что $\mathrm{Re}\left[(2+i)z\right] > 0$

Найти вероятность, что сумма наудачу взятых положительных правильных дробей не больше 0.95, а произведение не меньше 3/20.

На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки B(x) и C(y). Найти вероятность того, что длина отрезка BC будет меньше расстояния от точки O до ближайшей к ней точки. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

Шар X2 +Y2 +Z2 =9 помещен внутри эллипсоида (X2/25)+(Y2/16)+(Z2/9)=1. Найти вероятность того, что поставленная наудачу внутри эллипсоида точка окажется внутри шара.

Два студента условились встретиться в определенном месте между 13 и 15 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 13 до 15 часов).

В сигнализатор поступают сигналы от двух устройств, причем поступление каждого из сигналов равно возможно в любой момент промежутка времени длительности T. Моменты поступления сигналов независимы один от другого. Сигнализатор срабатывает, если промежуток времени между моментами поступления сигналов меньше t, t<T. Найти вероятность того, что сигнализатор срабатывает за время T, если каждое из устройств пошлет по одному сигналу.

Какова вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных чисел, каждое из которых не больше 1, не превзойдет единицы, а их произведение будет не больше 0,25.

Наудачу взяты 2 положительных числа x и y, каждой из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше 13/4, а частное x/y не больше 7/4.

Задача 9018. Решить задачу, применяя непосредственный подсчет вероятностей по геометрическому определению вероятности.
В круг радиуса 3 см вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, поставленная наугад в круг, окажется в треугольнике.

Задача 9019. Из прямоугольника (0,0), (0,2), (?,2), (?,0) случайным образом выбрана точка. Какова вероятность того, что точка принадлежит области, заключенной между y=sin(x) и y=sin(2x).

Задача 9020. Шкала секундомера имеет цену деления 2 сек. Какова вероятность сделать отсчет с ошибкой не более 0,5 сек., если отсчет округляется до целого деления в ближайшую сторону.

Задача 9141. В окружность наудачу вписывается треугольник. Какова вероятность того, что он прямоугольный?

Задача 9142. На поверхности сферы берут наудачу две точки и соединяют меньшей дугой большого круга. Найти вероятность того, что дуга не превзойдет d.

Задача 9143. Два теплохода в течение суток должны подойти к данному причалу. Время прихода каждого независимо и равновозможно в течение этих суток. Время стоянки первого теплохода равно 1 часу, второго – 2 часа. Найти вероятность того, что одному теплоходу придется ожидать, пока другой освободит причал.

Задача 9144. Два студента договорились встретиться в институте в течение часа. Время ожидания одного другим 10 минут. Определить вероятность их встречи.

Задача 9145. Точка случайным образом бросается в круг с центром в точке O (начало координат). Какова вероятность того, что:

А) точка окажется в 1-ой четверти;

Б) точка окажется в верхнем полушарии;

В) точка в круге радиуса вдвое меньшего, чем исходный.

Задача 9146. В круге случайно выбирается точка. Какова вероятность того, что расстояние от неё до центра круга будет меньше половины радиуса? Больше половины радиуса? Равно половине радиуса?

Задача 9147. Прямоугольный участок земли площадью 3000 разделён на 4 части, площади которых относятся как 12:6:4:8 , которые занумерованы числами 1, 2, 3, 4, считая от меньшего. На этот участок бросается мяч. Какова вероятность того, что мяч

а) попадёт в третий или первый участок;

б) не попадёт ни в четвёртый ни во второй участок;

в) попадёт в четвёртый или третий участок?

Задача 9148. На противоположных сторонах линейки шириной 3 см и длиной 20 см случайно сделаны насечки. Какова вероятность, что расстояние между ними меньше 5 см?

Задача 9149. Два человека договорились встретиться в определенном месте от 17 до 19 часов. При этом каждый обязался после прихода на место встречи ожидать другого 10 минут. Какова вероятность встречи этих людей, если каждый из них равновозможно придет в течение указанного интервала времени?

Задача 9150. На катетах AB и AC равнобедренного прямоугольного треугольника ABC случайно выбираются точки M и N и из них опускаются перпендикуляры MK и NL на гипотенузу BC. Какова вероятность того, что площадь пятиугольника KLNAM больше половины площади треугольника ABC?

Задача 9131. 10 любителей подледного лова рыбы независимо друг от друга произвольным образом размещаются на льду озера, имеющего форму круга радиуса 1 км. Какова вероятность того, что не менее 3 рыбаков расположатся на расстоянии более 200 метров от берега.

Задача 9132. В любые промежутки времени с 22 до 22.15 часов равновозможны: поступление в приемник двух сигналов. Приемник будет забит, если разность между моментами поступления сигналов будет менее 0,02 секунды. Определить вероятность того, что приемник будет забит.

Двое условились встретиться у магазина в течение часа (с 12:00 до 13:00). Время прихода у обоих независимо и равновозможно в течение указанного часа. Найти вероятность встречи, если каждый будет ждать 10 минут.

В квадрат с вершинами (0;0), (0;1), (1;0), (1;1) наудачу брошена точка. Пусть (ξ; η) – её координаты. Определить вероятность $P\{1/2(\xi + \eta) < z\}$.

На отрезке |AB| =a взяты две произвольные точки. Какова вероятность, что эти точки будут удалены друг от друга больше, чем на b?

Точка брошена наудачу внутрь круга радиуса R. Вероятность попадания точки в любую область, расположенную внутри круга, пропорциональна площади этой области. Найти вероятность того, что:

а) точка находится от центра на расстоянии меньшем r (r < R);

б) меньший угол между заданным направлением и прямой, соединяющей точку с началом координат, не превосходит α.

В квадрат ABCD со стороной 1 см случайным образом брошена точка. Какова вероятность того, что расстояние от нее до вершины A не превосходит 1,2 см?

В прямоугольник со сторонами 1 см и 2 см случайным образом бросают точку. Какова вероятность того, что ее расстояние до ближайшей диагонали окажется не больше 0,2 см?

Два человека договорились встретиться в течение часа. При этом пришедший ждет своего товарища 20 минут и уходит. Найти вероятность встречи.

На отрезке наудачу ставятся две точки. Пусть ξ и η координаты этих точек. Рассматриваются следующие события: А = (Вторая точка ближе к левому концу отрезка, чем первая точка к правому); В = (Корни уравнения действительны); С= $\left\{\max\left(\xi,\eta\right)<1/2\right\}$; $D=\left\{\min\left(\xi,\eta\right)<1/2\right\}$. Привести соответствующие рисунки и найти $P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\cap D\right), P\left(\left(A\cup\overline{B}\right)\setminus C\right)$.

9. УСЛОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТИ, ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ, ТЕОРЕМА БАЙЕСА

Обозначим через p(B/A) условную вероятность события B при условии, что событие A произошло. По определению

$$p(\mathrm{B/A}) = \frac{p(\mathrm{AB})}{p(\mathrm{A})} \tag{12}$$

Отсюда

$$p(\mathrm{AB}) = \mathrm{p(A)p(B/A)} \tag{13}$$

Если H_1, H_2, ... H_n попарно несовместные события, объединение которых совпадает с пространством элементарных событий проводимого испытания, и A - случайное событие из этого пространства, то имеет место следующая формула полной вероятности:

$$p(\mathrm{A}) = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{p(H_i)p(A/H_i)} \tag{14}$$

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и p(A) ≠ 0, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$\mathrm{p}\left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{H_i}}\right) = \frac{\mathrm{p(H_i)p(A/H_i)}}{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{pp(H_i)p(A/H_i)}} = \frac{\mathrm{p(H_i)p(A/H_i)}}{\mathrm{p(A)}} \tag{15}$$

Указание

При вычислении вероятности рассматриваемого события по формуле полной вероятности необходимо:
1. Уяснить последовательность испытаний, рассматриваемых в задаче.
2. Обозначить событие, вероятность наступления которого надо найти какой-нибудь буквой, например A.
3. Составить множество попарно несовместных гипотез H_1, H_2, ... H_n. Проверить, что объединение гипотез совпадает с пространством элементарных событий проводимого испытания.
4. Вычислить вероятности каждой из гипотез и условные вероятности наступления события A при условии, что произошло событие H_i (i = 1, 2, ... n) (если они не даны в условии задачи).
5. По формуле (14) вычислить вероятность события A. Если из условия задачи известно, что событие A уже произошло, то по формуле Байеса необходимо вычислить вероятности гипотез при условии, что событие A произошло.

Пример

Студент 2 раза извлекает по одному билету из 34, предлагаемых на экзамене. Какова вероятность того, что студент сдаст экзамен, если он подготовил только 30 билетов и первый раз вынул неудачный билет?

Решение. Испытание состоит в том, что два раза наудачу извлекаются по одному билету, причем вынутый первый раз билет назад не возвращается. Пусть событие A заключается в том, что первый раз вынут «неудачный» билет, а событие B — в том, что второй раз вынут «удачный» билет. Требуется вычислить вероятность события AB, состоящего в том, что первый раз был вынут «неудачный» билет, а второй раз — «удачный». События A и B зависимые, так как вынутый первый раз билет не возвращается в число всех билетов. Поэтому p (AB) = p (A) p (B/A). Из условия задачи находим: $p(A) = \frac{4}{34}$. Если событие A произошло, то на столе экзаменатора осталось 33 билета, из которых 30 «удачных». Следовательно, $p(B/A)=\frac{30}{33}$ и искомая вероятность $p(AB)=\frac{4}{34}\frac{30}{33}\approx 0{,}107$.

Пример

Имеются три партии радиоламп, насчитывающих соответственно 20, 30 и 50 штук. Вероятности того, что радиолампа проработает заданное время, равны соответственно для этих партий 0,7, 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что наудачу выбранная лампа из ста данных проработает заданное время?

Решение. Испытание состоит в том, что наудачу извлекается одна лампочка из 100 ламп. Событие А, вероятность которого надо вычислить, состоит в том, что извлеченная лампа проработает заданное время. Пусть гипотезы H_1, H_2, H_3 означают соответственно, что наудачу выбранная радиолампа принадлежит первой, второй, третьей партии. По формуле (1) $p(H_1) = 0{,}2$, $p(H_2) = 0{,}3$ и $p(H_3) = 0{,}5$. По условию задачи $p(A/H_1) = 0{,}7$, $p(A/H_2) = 0{,}8$, $p(A/H_3)= = 0{,}9$. По формуле полной вероятности находим вероятность события А, которая равна

$p(A) = p(H_1)p(A/H_1) + p(H_2)\,p(A/H_2)+p(H_3)\,p(A/H_3)=0{,}83$.

Пример

В условие предыдущего примера внесено изменение: считается известным, что наудачу выбранная радиолампа проработала заданное время. Какова вероятность того, что эта радиолампа принадлежит первой партии?

Решение. Из условия задачи известно, что наудачу выбранная радиолампа проработала заданное время, т. е. событие А уже произошло. После получения этой дополнительной информации нам надо определить, как изменилась вероятность гипотез. Требуется вычислить вероятность гипотезы H_1 при условии, что событие А произошло. По формуле Байеса

$$p(H_1/A)=\frac{p(H_1)p(A/H_1)}{p(A)}\approx 0{,}169$$

т. е. вероятность того, что лампочка принадлежит первой партии, после опыта уменьшилась и стала равной 0,169.

Задачи

1. Студент забыл последнюю цифру даты Бородинского сражения и поэтому называет ее наудачу. Определить вероятность того, что до правильного ответа ему придется отвечать не более трех раз.

2. В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и одной задаче. Всего составлено 28 билетов, содержащих разные вопросы и задачи. Студент подготовил только 50 теоретических вопросов и сможет решить задачи к 22 билетам. Какова вероятность того, что, вынув наудачу один билет, студент ответит на все вопросы?

3. Буквы слова задача написаны на одинаковых карточках. Наудачу по одной

последовательно извлекаются 4 карточки без возвращения их в игру. Какова вероятность того, что при этом получится слово дача?

4. В коробке имеются 2 красных, 3 синих и 2 зеленых карандаша. Из нее наудачу без возвращения вынимают один за другим по одному карандашу. Найти вероятность того, что красный карандаш появится раньше синего.

5. Вероятность сдачи студентом зачета равна 0,8. Если зачет сдан, то студент допускается к экзамену, вероятность сдачи которого равна 0,9. Какова вероятность того, что студент сдаст зачет и экзамен?

6 Вероятность попадания стрелка в цель равна 0,8. Если стрелок попадает в цель при первом выстреле, то ему предоставляется право стрелять во вторую цель. Вероятность поражения обеих целей этим стрелком равна 0,6. Какова вероятность поражения стрелком второй цели?

7. Студент держит экзамен, состоящий в установлении истинности или ложности пяти утверждений. Какова вероятность правильного ответа на все вопросы, если студент:

а) просто угадывает ответ;

б) знает, что преподаватель всегда дает больше истинных утверждений, чем ложных;

в) знает, что преподаватель никогда не дает подряд трех вопросов, требующих одинакового ответа;

г) знает, что, кроме того, ответы на первый и последний вопросы противоположны;

д) знает еще, что «ложно» — ответ на второй вопрос?

8. Студент знает ответы на 15 экзаменационных билетов из 20. В каком случае он имеет большую вероятность сдать экзамен, если он идет отвечать первым или если — вторым?

9. Из группы, состоящей из четырех юношей возраста 17, 18, 19 и 20 лет и четырех девушек тех же лет, наугад выбирают двух человек. Какова вероятность того, что:

а) оба выбранных окажутся юношами;

б) оба окажутся юношами, если известно, что один из выбранных - юноша;

в) оба окажутся юношами, если известно, что один из них юноша, которому не более 18 лет;

г) оба окажутся юношами, если известно, что один из них юноша 17 лет?

10 Имеются 2 одинаковые коробки, первая из которых содержит 2 черных и 3 белых шара, а вторая — 2 черных и 1 белый шар. Сначала наугад выбирается одна коробка, а потом из нее извлекается наугад один шар. Какова вероятность того, что будет выбран

белый шар? Решите ту же задачу, исходя из условия, что обе коробки содержат по два белых и два черных шара.

11. Имеются 3 одинаковые коробки. В первой коробке находятся 4 белых и 6 черных шаров, во второй — только белые и в третьей — только черные. Наудачу выбирается урна и из нее наугад вынимается один шар. Какова вероятность того, что этот шар черный?

12. Из полного набора костей домино наудачу выбрана одна кость, которая в игру не возвращается. Какова вероятность того, что наудачу выбранную вторую кость можно приставить к первой?

13. Ученик пришел на экзамен, зная 25 билетов из 30. Перед ним был взят только один билет. Какова вероятность того, что ученик знает наудачу вытянутый билет?

14. На карточках написаны буквы, образующие слово **КОМБИНАТОРИКА**, но две карточки из этого набора утеряны. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что на ней окажется гласная буква?

15. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне 7 белых и 3 черных шара, а во второй — 6 белых и 4 черных. Наудачу выбирается урна и из нее наугад вынимается один шар. Выбранный шар оказался белым. Какова вероятность того, что этот шар вынут из первой урны?

16. В группе 10 юношей, которые играют, набрасывая кольца на колышек. Для пяти из них вероятность попадания кольца на колышек равна 0,6, для трех других — 0,5 и для остальных — 0,3. Кольцо, брошенное одним из юношей, попало на колышек. Какова вероятность того, что это кольцо было брошено юношей из первой группы?

17. В одной студенческой группе обучаются 24 студента, во второй — 36 студентов и в третьей — 40 студентов. По математическому анализу получили отличные отметки 6 студентов первой группы, 6 студентов второй группы и 4 студента третьей группы. Наугад выбранный студент оказался получившим по математическому анализу отметку «отлично». Какова вероятность того, что он учится в первой группе?

18. Преподаватель экзаменует незнакомую ему группу по экзаменационным билетам, содержащим по три вопроса. Он знает, что в предыдущую сессию в этой группе было 27 успевающих студентов, из них шесть отличников, и трое неуспевающих студентов, и считает, что отличники ответят на все три вопроса с вероятностью 80%, остальные успевающие студенты — с вероятностью 60% н неуспевающие — с вероятностью 20%.

Вызванный студент ответил на все три вопроса билета. Какова вероятность того, что он: а) отличник; б) успевающий студент; в) неуспевающий студент?

19. Для сдачи зачета студентам необходимо подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили ответы на все вопросы, 8 — на 25 вопросов, 5 — на 20 вопросов и двое — на 15. Вызванный наудачу студент ответил на поставленный ему вопрос. Найдите вероятность того, что этот студент: а) подготовил все вопросы; б) подготовил только половину вопросов.

20. Имеются 3 одинаковые урны. В первой находятся 4 белых и 6 черных шаров, во второй — 7 белых и 3 черных н в третьей — только черные. Наудачу выбирается урна и из нее наугад вынимается один шар. Выбранный наудачу шар оказался черным. Какова вероятность того, что шар вынут из первой урны?

10. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Случайная величина X — это числовая функция X = f (ω), определенная на пространстве элементарных событий. Множество значений этой функции x_1, x_2, ... x_n называют множеством возможных значений случайной величины.

Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Непрерывные случайные величины принимают возможные значения из некоторого промежутка.

Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности.

Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть задано в виде таблицы:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

где $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Основные распределения вероятностей некоторых дискретных величин:

1. Равномерное распределение вероятностей случайной величины X, принимающей n значений, задается формулой

$$P_n(X = x_i)=\frac{1}{n}, \tag{16}$$

где {x_1, ... , x_n) - все возможные значения случайной величины.

2. Биномиальное распределение вероятностей случайной величины X, значениями которой являются возможные значения числа m появления события A при проведении n повторных независимых испытаний, задается формулой

$$P_n(X = m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{17}$$

где m = 0, 1, 2, ..., n.

3. Гипергеометрическое распределение вероятностей случайной величины X задается формулой

$$P_n(X = m)=\frac{C_s^m C_{n-s}^{k-m}}{C_n^k}, \tag{18}$$

Здесь n — число различных элементов множества M, из которых s элементов обладают определенным свойством; k — число элементов выборки, m — число элементов, обладающих этим же свойством и оказавшихся в выборке, причем m может принимать следующие значения: т = 0, 1, 2, ... s, если s≤k.

4. Геометрическое распределение вероятностей случайной величины X, значениями которой являются возможные значения числа m проведенных испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли (причем опыт прекращается после первого же испытания, в котором рассматриваемое событие появилось), задается формулой

$$P_n(X=m)=pq^{m-1} \quad (19)$$

где m = 1, 2, 3, ...

5. Распределение Пуассона задается формулой

$$P_n(X=m)=e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} \quad (20)$$

где m = 0, 1, 2 ... .

Если $x_1, \dots, x_n$ — значения случайной величины X, а $y_1, \dots, y_n$ —значения случайной величины Y, то двумерная величина (X,У) считается заданной, если указаны вероятности r_{ij} для каждой пары (x_i, y_j). Если p_i — вероятность значения x_i, а q_i- — вероятность значения y_i,то справедливы формулы

$$p_i=\sum_{j=1}^{m} r_{ij} \text{ и } q_i=\sum_{j=1}^{n} r_{ij} \quad (21)$$

Случайные величины X и У называются независимыми, если для любых i и j имеем $r_{ij}=p_i q_i$ =

Если X — случайная величина, принимающая значения $x_1, \dots, x_n$ с вероятностями $p_1, \dots, p_n$, то через f(X) обозначают случайную величину, принимающую значения $f(x_1), \dots f(x_n)$, причем если, например, $f(x_i)=f(x_j)$, то соответствующее значение берется лишь один раз. Вероятность значения $f(x_i)$ равна $\sum p_k$, где сумма берется по всем k таким, что $f(x_k)= f(x_i)$.

Аналогично определяются функции от нескольких случайных величин. Например, суммой случайных величин X и У называют случайную величину Z = X + У, значения которой равны различным числам $x_i + y_i$, $1 \le i \le n$, $1 \le i \le m$, а вероятность z_k равна $\sum r_{ij}$. Если величины X и Y независимы, то

$$P(Z=z_k)=\sum_{x_i+y_i=z_k} P(X=x_i)P(X=y_i) \quad (22)$$

Аналогичным образом определяется произведение двух случайных величин.

Указания

Анализ и решение задач, в которых требуется составить таблицу распределения вероятностей случайной величины, рекомендуется делать по следующей схеме:
1. Установите, что является случайной величиной в рассматриваемой задаче.
2. Перечислите все возможные значения случайной величины.
3. Из условия задачи установите закон распределения вероятностей случайной величины.
4. Используя соответствующую формулу, найдите вероятности появления возможных значений случайной величины.
5. Составьте таблицу распределения вероятностей случайной л величины и проверьте, что $\sum_{i=1}^{n} p_i$

Пример

Составьте таблицу распределения вероятностей числа попаданий в мишень при трех независимых выстрелах, если вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,2.

Решение. Случайная величина X есть число попаданий в мишень. Так как производятся три независимых выстрела, то случайная величина может принимать следующие значения: x_1 =0; x_2 = 1; x_3 = 2; x_4 = 3. Случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, поскольку испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. По формуле $P_n(X=m)$=$C_n^m p^m q^{n-m}$, где m=0,1,2,3, находим $P(X=0)=0{,}512$, $P(X=1)=0{,}384$, $P(X=2)=0{,}096$, $P(X=3)=0{,}008$.

Таким образом, получаем следующую таблицу распределения вероятностей случайной величины X:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,512	0,384	0,096	0,008

Проверка:

$\sum_{i=1}^{4n} p_i$= 0,512 + 0,384 + 0,096 + 0,008 = 1.

Пример

Независимые случайные величины X и Y заданы таблицами распределения вероятностей:

x_i	1	2
p_i	0,4	0,6

y_i	3	4
p_i	0,8	0,2

Составить таблицу распределения вероятностей случайной величины Z = X + Y.

Решение. Возможные значения случайной величины Z равны $z_1 = 4$; $z_2 = 5$; $z_3 = 6$.
P (z = 4) = P (X = 1) P (У = 3) = 0,4 × 0,8 = 0,32;
P (Z = 5) = P (X = 2) P (У = 3) + P (X = 1) P (У = 4) = 0,56;
P (Z = 6) = P (X = 2) P (У = 4) = 0,6 × 0,2 = 0,12.
Полученные значения запишем в таблицу:

z_k	4	5	6
p_k	0,32	0,56	0,12

Задачи

1. Какие из перечисленных ниже случайных величин являются дискретными:

1) число попаданий в мишень при десяти независимых выстрелах;

2) отклонение размера обрабатываемой детали от стандарта;

3) число нестандартных изделий, оказавшихся в партии из 100 изделий;

4) число очков, выпавших на верхней грани при одном подбрасывании игрального кубика?

2. Перечислите все возможные значения случайной величины X, являющейся числом отличных оценок на экзамене в группе, состоящей из 25 студентов.

3. Какие возможные значения может принимать случайная величина Y, означающая число образцов сплавов, используемых при испытании до первого разрушения или до полного израсходования всех образцов, если их имеется 6 штук?

4 Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число появления герба: а) при одном подбрасывании монеты; б) при десяти подбрасываниях монеты?

5. В коробке имеются 7 карандашей, из которых 4 карандаша красные. Наудачу извлекаются 3 карандаша. Какой закон распределения вероятностей имеет случайная величина, означающая число извлеченных красных карандашей?

6. Монета подбрасывается 4 раза. Для случайного числа появления герба составьте таблицу и постройте многоугольник распределения вероятностей.

7. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавших на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

8. По одному и тому же маршруту в один и тот же день совершают полет 3 самолета. Каждый самолет с вероятностью 0,7 может произвести посадку по расписанию. Для случайного числа самолетов, отклонившихся от расписания, составьте таблицу распределения вероятностей.

9. Из 25 контрольных работ, среди которых 5 оценены на отлично, наугад извлекают 3 работы. Составьте таблицу распределения числа работ, оцененных на «отлично» и оказавшихся в выборке.

10. Набрасываются кольца на колышек либо до первого попадания, либо до полного израсходования всех колец, число которых равно пяти. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа брошенных колец, если вероятность набрасывания кольца на колышек при каждом испытании постоянна и равна 0,9. Используя полученную таблицу, найдите $P(X < 4)$.

11. Вероятность попадания стрелка в мишень равна 0,5. Стрелок, имея в запасе 6 патронов, ведет огонь по мишени до первого попадания или до полного израсходования всех патронов. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа израсходованных патронов.

12. Имеются 6 билетов в театр, 4 из которых на места первого ряда. Наудачу берут 3 билета. Составьте таблицу распределения вероятностей числа билетов первого ряда, оказавшихся в выборке. Используя полученную таблицу, найдите $P(X < 3)$.

13. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа страниц с опечатками, если проверяемая книга насчитывает 800 страниц, а вероятность того, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,0025.

14. Составьте таблицу распределения вероятностей случайного числа изделий, выдержавших испытание, если испытываются 600 деталей, а вероятность того, что изделие выдержит испытание, равна 0,005.

15. Дискретная случайная величина X имеет таблицу распределения вероятностей:

x_i	-3	3	4

p_i	0,3	0,5	0,2

Составьте таблицу распределения вероятностей случайных величин Y = X^2.

16. Случайная величина А принимает натуральные значения, причем значение n с вероятностью $\frac{1}{2^n}$. Составьте таблицу распределения вероятностей для случайной величины $Y = \sin\frac{\pi X}{2}$.

17. Составьте таблицу распределения вероятностей для случайной величины Z = XY, если X и Y — независимые случайные величины, заданные таблицами распределения:

x_i	1	2	3	4
p_i	1/6	1/3	1/10	2/5

y_i	0	1
q_i	1/3	2/3

18. Составьте таблицу распределения вероятностей для случайной величины Z = X + Y, если X и Y — независимые случайные величины, заданные таблицами распределения:

x_i	5	6
p_i	3/5	2/5

y_i	0	1
q_i	1/5	4/5

19. Составьте таблицы распределения вероятностей для случайных величин Z_1 = X + Y и Z_2 = XY, если X и Y — независимые случайные величины, заданные таблицами распределения:

x_i	0	5	10
p_i	1/2	1/6	1/3

y_i	0	2	3	6
q_i	1/5	1/10	1/10	2/5

20. Составьте таблицу распределения вероятностей для случайной величины Z = X-Y, если X и Y — независимые случайные величины, заданные таблицами распределения:

x_i	1	2	3	4
p_i	1/6	1/3	1/10	2/5

y_i	0	1
q_i	1/3	2/3

11. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности

$$M(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i \tag{23}$$

причем ряд, стоящий в первой части этого равенства, предполагается абсолютно сходящимся. Помимо обозначения математического ожидания M (X), применяется также обозначение m.

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины

от ее математического ожидания $D(X) = M(X - M(X))^2$ Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m)^2 p_i \tag{24}$$

$$D(X) = M(X^2 - (M(X))^2 \tag{25}$$

Средним квадратическим отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \tag{26}$$

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$$M(X) = np, \qquad D(X) = npq \tag{27}$$

Если случайная величина X имеет геометрическое распределение вероятностей, то

$$M(X) = \frac{1}{p}, \qquad D(X) = \frac{q}{p^2} \tag{28}$$

Если случайная величина X имеет пуассоновское распределение вероятностей, то

$$M(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda \tag{29}$$

Если в задаче случайная величина задана таблицей распределения вероятностей, то для вычисления ее числовых характеристик надо использовать формулы (23—26).

Если в задаче таблица распределения вероятностей не дана, но из условия задачи можно установить закон распределения вероятностей, то для вычисления числовых характеристик случайной величины можно применять формулы (27-29).

Пример

Случайная величина X задана следующей таблицей распределения вероятностей:

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Найти M (X), D (X), а (X).

Решение. Так как известна таблица распределения вероятностей, то по формуле (23)

M (X) = 2 • 0,1 + 5 - 0,4 + 8 • 0,3 + 9 • 0,2 = 6,4.

Для вычисления D (X) найдем сначала M {X2):

M (X2) = 4 - 0,1 + 25 • 0,4 + 64 • 0,3 + 81 • 0,2 = 45,8.

По формуле (25)

D (X) = 45,8 — 6,42 = 4,84.

По формуле (26) $\sigma(X) = \sqrt{4.84} = 2{,}2$.

Пример

Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение. Пусть X - число лотерейных билетов, на которые выпали выигрыши. Случайная величина X имеет биномиальное распределение, так как испытания, рассматриваемые в задаче, удовлетворяют схеме Бернулли. Поэтому M (X) = 100 - 0,05 = 5, D (X) - 100 • 0,05 • 0,95 = 4,75.

Пример

Три стрелка независимо друг от друга стреляют по одной цели. Вероятность попадания первого стрелка в цель равна 0,7, второго — 0,8 и третьего — 0,9. Найдите математическое ожидание числа попаданий в цель.

Решение. Пусть случайная величина X_1 - число попаданий в цель для первого стрелка, X_2 - число попаданий в цель для второго стрелка, X_3 - число попаданий в цель для третьего стрелка. Тогда случайная величина $Z = X_1 + X_2 + X_3$ - число попаданий в цель трех стрелков.

Математическое ожидание суммы конечного числа независимых случайных величин равна сумме их математических ожиданий. Следовательно, $M(Z) = M(X_1) + M(X_2) + M(X_3)$.
Таблица распределения вероятностей случайной величины X_1

x_i	0	1
p_i	0,3	0,7

следовательно, M (X_1)= 0,7.
Аналогично M (X_2) = 0,8 и M (X_3) = 0,9. Значит, M (Z) = 0,7 + 0,8 + 0,9 = 2,4.

Задачи

1.Найдите математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X, заданной таблицей распределения вероятностей:

x_i	2	3	6	7	8	10
p_i	0,1	0,2		0,2	0,15	0,1

До выполнения задания вычислите вероятность того, что случайная величина примет значение x = 6.

2. В апреле среднесуточная температура воздуха для некоторой местности удовлетворяет следующему закону распределения вероятностей:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	1/15	1/15	1/15	2/15	4/15	1/5	1/10	1/30

Найдите математическое ожидание M(t) среднесуточной температуры.

3. Независимые случайные величины X и У заданы следующими таблицами распределения:

x_i	-2	-1	0	1	3
p_i	0,1	0,2	0,25	0,35	0,10

y_i	-3	0	1	2
q_i	0,1	0,2	0,4	0,3

Значения какой из этих случайных величин более рассеяны от их средних значений? Найдите M(X+У) и D(X+У)

4. Случайная величина X задана следующей таблицей распределения вероятностей:

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,05	0,15	0,2	0,35	0,15	0,1

Вычислите вероятность события ($m-\sigma \le X \le m+\sigma$).

5. На факультете успеваемость составляет 90%. Наудачу выбираются 40 студентов. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа успевающих студентов, оказавшихся в выбранной группе.

6. Вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,2. Сколько надо произвести выстрелов, чтобы можно было ожидать в среднем 5 попаданий в цель?

7. Производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,25. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа произведенных выстрелов.

8. Набрасываются кольца на колышек или до первого попадания или до полного израсходования всех колец, число которых равно пяти. Покажите, что если вероятность набросить каждое кольцо на колышек равна 0,9, то математическое ожидание случайного числа брошенных колец равно 1,1111.

9. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа бракованных деталей, если проверяется партия из 10 000 деталей, а вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,005.

10. Из 15 жетонов, занумерованных целыми числами от 1 до 15, наудачу извлекаются 3 жетона. Составьте таблицу распределения вероятностей для числа выбранных жетонов, номера которых кратны пяти. Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

11. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими таблицами распределения:

x_i	2	3	4
p_i	0,6	0,3	0,1

y_i	1	2	3
q_i	0,1	0,2	0,7

Найдите математическое ожидание случайной величины Z = XY двумя способами:
а) составив предварительно таблицу распределения вероятностей случайной величины Z, б) используя свойство M (XY) = M (X) M (У).

12. Независимые случайные величины X и Y заданы следующими таблицами распределения вероятностей:

x_i	1	3
p_i	0,7	0,3

y_i	2	4
q_i	0,6	0,4

Найдите дисперсию случайной величины Z = X + Y.

13. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X соответственно равны M (X) = 7; D (X) = 1,2. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величины Z = 2X - 3.

14. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X соответственно равны M (X) = 8; D (X) = 1,2. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величины Z = 4X.

15. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины X соответственно равны M (X) = 7; D (X) = 1,2. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайных величины Z = 3X + 5.

16 Случайные величины X и Y имеют M (X) = 4, M (У) = = 5,5. Найдите математическое ожидание случайной величины Z = 2X + 3Y- 1,5.

17. Испытывается устройство, состоящее из пяти независимо работающих приборов. Вероятности отказа приборов соответственно равны 0,05; 0,06; 0,08; 0,09; 0,1. Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа отказавших приборов.

18. Успеваемость студентов группы составляет 75%. Наудачу выбираются 10 студентов.

Найдите математическое ожидание и дисперсию случайного числа успевающих студентов, оказавшихся в выбранной группе.

19. Найдите математическое ожидание и дисперсию числа качественных деталей, если проверяется партия из 5 000 деталей, а вероятность того, что деталь окажется бракованной, равна 0,005.

20. В сентябре ежесуточные осадки удовлетворяет следующему закону распределения вероятностей:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8
p_i	1/15	1/15	1/15	2/15	4/15	1/5	1/10	1/30

Найдите математическое ожидание M(t) величины среднесуточных осадков.

12. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Распределение вероятностей непрерывной случайной величины X называется нормальным, если ее закон распределения вероятностей определяется плотностью вероятности

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mathrm{m})^2}{2\sigma^2}} \qquad (30)$$

Для таких величин m — математическое ожидание, σ — среднее квадратическое отклонение.

Теорема. Вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в заданный интервал]α; β[определяется по формуле

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - \mathrm{m}}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - \mathrm{m}}{\sigma}\right) \qquad (31)$$

где

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{dz}$ - функция Лапласа.

Следствие 1. Вероятность того, что отклонение случайной величины X, имеющей нормальное распределение, от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше, чем α (α > 0), определяется по формуле

$$P(|\mathrm{X} - \mathrm{m}| < \alpha) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma}\right) \qquad (32)$$

Следствие 2. Если в формуле (3) положить $\alpha = \sigma$; $\alpha = 2\sigma$; $\alpha = 3\sigma$, то

$$P(|\mathrm{X} - \mathrm{m}| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0{,}6836 \qquad (33)$$
$$P(|\mathrm{X} - \mathrm{m}| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}9544 \qquad (34)$$
$$P(|\mathrm{X} - \mathrm{m}| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973 \qquad (35)$$

Таким образом, практически достоверно, что распределенная по нормальному закону случайная величина X принимает свои значения в интервале]m - 3σ; m + 3σ[.

Пример

Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией 4. Найти выражение для плотности вероятности этой случайной величины.

Решение. Плотность вероятности случайной величины X имеет вид

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mathrm{m})^2}{2\sigma^2}}$$

Если m = 3, $\sigma = \sqrt{\mathrm{D(x)}} = \sqrt{4 = 2}$, то функция плотность вероятности случайной величины X будет иметь вид

$$p(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$$

Пример

Срок службы прибора представляет собой случайную величину, подчиненную нормальному закону распределения, с гарантией на 15 лет и средним квадратическим отклонением, равным 3 годам. Определим вероятность того, что прибор прослужит от 10 до 20 лет.

Решение. По условию задачи m = 15, $\sigma = 3,\ \alpha = 10,\ \beta = 20.$

Тогда

$$P(10 < X < 20) = \Phi\left(\frac{20-15}{3}\right) - \Phi\left(\frac{10-15}{3}\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \Phi\left(\frac{-5}{3}\right) =$$
$$= \Phi\left(\frac{5}{3}\right) - \left(-\Phi\left(\frac{5}{3}\right)\right) = \Phi\left(\frac{5}{3}\right) + \Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 2\Phi\left(\frac{5}{3}\right) = 2\Phi(1{,}67)$$

Из таблицы функции Лапласа (Приложение) находим значение функции при 1,67: $\Phi(1{,}67) = 0{,}4525$.

Следовательно, $P(10 < X < 20) = 0{,}9050.$

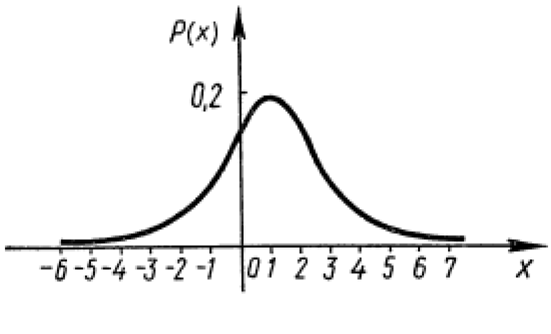
Задачи

1. Ошибка измерителя дальности подчинена нормальному закону с систематической ошибкой 20 м и средним квадратическим отклонением 60 м. Найти вероятность того, что измеренное значение дальности будет отклоняться от истинного не более, чем на 30м.

2. Во сколько раз уменьшится максимальное значение ординаты нормальной кривой, если дисперсия случайной величины увеличится в 9 раз?

3. Максимальное значение плотности вероятности случайной величины X, подчиненной нормальному закону распределения, равно $\frac{1}{4\sqrt{\pi}}$. Найдите среднее квадратическое отклонение и дисперсию этой случайной величины.

4. Случайная величина X, подчиненная нормальному закону распределения, имеет следующую кривую плотности вероятности:



Используя график y = p(x), найдите математическое ожидание и ориентировочное значение среднего квадратического отклонения.

5. Используя свойства кривой плотности вероятности случайной величины X, подчиненной нормальному закону распределения, найдите ее математическое ожидание, если известно, что $P(-\infty < X < -3) = P(7 < X < +\infty)$. Сделайте чертеж.

6. Диаметр валика - случайная величина, распределённая по нормальному закону с параметрами M (X) = 10 мм, σ{X) = 0,61. Найти интервал, в который с вероятностью P = 0,9973 будут заключены диаметры изготовляемых валиков.

7. Случайная величина X имеет плотность вероятности

$$p(x) = \frac{1}{0{,}5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-5)^2}{0{,}5}}$$

Найдите вероятность того, что при двух независимых испытаниях случайная величина X хотя бы один раз примет значение вне интервала]14; 61[.

8. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с математическим ожиданием, равным 50. Определите дисперсию случайной величины X, если известно, что вероятность принятия случайной величиной значения в интервале]50; 60[равна 0,3413.

9. Случайная величина X подчинена нормальному закону распределения с параметрами m = 0 и σ = 2. Найдите интервал]α; β[, в котором эта случайная величина принимает свои возможные значения с вероятностью 0,61, если известно, что α = - β.

10. Случайная величина X - отклонение размера детали от стандарта - имеет нормальное распределение вероятностей со средним квадратическим отклонением, равным 0,2. Систематическая ошибка отсутствует. Найдите вероятность изготовления детали, отвечающей требованиям стандарта, если задан допуск ± 0,5.

11. При измерении детали ее длина X является случайной величиной, распределенной по нормальному закону с параметрами m = 22 см и σ = 0,2 см. Найдите интервал, в который с вероятностью 0,9544 попадает X.

12. Производитель апельсинового сока покупает апельсины, которые выращиваются на одной крупной плантации. Объем сока, выжимаемого из одного апельсина, представляет собой нормально распределенную случайную величину. Математическое ожидание этого распределения равно 4,70 унции, а стандартное отклонение - 0,40 унции. Какова вероятность, что случайно выбранный апельсин содержит от 5,00 до 5,50 унции сока?

13. По данным журнала Investment Digest ("Diversification and the Risk/Reward Relationship", Winter 1994, 1-3), средняя годовая доходность обычных акций за период с 1926 по 1992 годы равна 12,4%, а стандартное отклонение — 20,6%. За этот же период средняя доходность облигаций правительственного займа равна 5,2%, а стандартное отклонение — 8,6%. В статье утверждается, что распределения обеих случайных величин являются колоколообразными и симметричными. Предположим, что распределения этих величин являются нормальными. Какова вероятность, что доходность случайно выбранной акции больше 10,0%?

14. На протяжении первого полугодия года фондовый рынок был довольно изменчивым, и подавляющее большинство основных индексов снизилось. К июню индекс S&P 500 уменьшился на 12,3%, а составной индекс NASDAQ — на 23% . Рынок акций взаимных фондов в США был более стабильным и его потери не превысили 10%. Предположим, что доходности взаимных фондов на протяжении этого периода имели нормальное распределение, математическое ожидание которого равно - 10,0%, а стандартное отклонение равно 8,0%. Какова вероятность, что доходность случайно выбранного взаимного фонда упала не меньше, чем на 18%?

15. Средняя продолжительность загрузки Web-страницы была равна 0,8с. Допустим, что продолжительность загрузки имеет нормальное распределение, стандартное отклонение которого равно 0,2 с. Вычислите вероятность следующих событий. Какова вероятность, что продолжительность загрузки окажется больше 0,5 и меньше 1,5 с?

16. Количество взаимных фондов, инвестировавших средства в телекоммуникационные компании, уменьшилось на 18,4%. Предположим, что распределение доходности взаимных фондов, инвестировавших средства в телекоммуникационные компании в первом квартале 2002 года, является симметричным относительно значения -18,4%, причем его стандартное отклонение равно 20%. Допустим, что из генеральной совокупности таких взаимных фондов извлечены выборки, состоящие из 25 фондов, специализирующихся на телекоммуникационных компаниях. Какова вероятность, что выборочное среднее меньше - 25,0%?

17. В промышленных швейных машинах используются шарикоподшипники, имеющие диаметр 0,75 дюйма. Спецификация допускает колебания диаметра в пределах от 0,74 до 0,76 дюйма. Опыт показывает, что диаметр шарикоподшипника является случайной величиной, имеющей нормальное распределение, математическое ожидание которого равно 0,753 дюйма, а стандартное отклонение —- 0,004 дюйма. Какова вероятность того, что диаметр шарикоподшипника находится между номинальным значением и математическим ожиданием?

18. Производится взвешивание некоторого вещества без систематических ошибок. Случайные ошибки X взвешивания подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 20$ г. Найти вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине 10 г.

19. Размер диаметров шариков для подшипников контролируют следующим образом: если шарик не проходит через отверстие диаметром d_1, но проходит через отверстие диаметром $d_2>d_1$,то его размер считают приемлемым. Если какое-нибудь из этих условий не выполняется, то шарик бракуют. Известно, что диаметр шарика представляет собой случайную величину X, распределенную по нормальному закону, математичекое ожидание этой величины $m = (d_1 + d_2)/2$, а среднее квадратическое отклонение $\sigma=(d_2 + d_1)/4$. Найти вероятность того, что проверяемый шарик будет забракован.

20. Коробки с конфетами упаковываются автоматически со средней массой 540г. Полагая, что средняя масса коробок распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением 30 г, найти: а) в какой интервал, симметричный относительно математического ожидания, укладываются 88% коробок; б) какой процент коробок имеет массу в пределах от 500 до 540 г.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица значений функции $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3888
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0.0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2038	0,95	0,3289	1.35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1.41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0.25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0.3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
1,60	0,4452	1,84	0,4671	2,16	0,4846	2,66	0,4961
1,61	0,4463	1,85	0,4678	2,18	0,4854	2,68	0,4963
1,62	0,4474	1,86	0,4686	2,20	0,4861	2,70	0,4965
1,63	0,4484	1,87	0,4693	2,22	0,4868	2,72	0,4967
1,64	0,4495	1,88	0,4699	2,24	0,4875	2,74	0,4969
1,65	0,4505	1,89	0,4706	2,26	0,4881	2,76	0,4971
1,66	0,4515	1,90	0,4713	2,28	0,4887	2,78	0,4973
1,67	0,4525	1,91	0,4719	2,30	0,4893	2,80	0,4974
1,68	0,4535	1,92	0,4726	2,32	0,4898	2,82	0,4976
1,69	0,4545	1,93	0,4732	2,34	0,4904	2,84	0,4977
1,70	0,4554	1,94	0,4738	2,36	0,4909	2,86	0,4979
1.71	0,4564	1,95	0,4744	2,38	0,4913	2,88	0,4980
1,72	0,4573	1,96	0,4750	2,40	0,4918	2,90	0,4981
1,73	0,4582	1,97	0,4756	2,42	0,4922	2,92	0,4982
1,74	0,4591	1,98	0,4761	2,44	0,4927	2,94	0,4984
1,75	0,4599	1,99	0,4767	2,46	0,4931	2,96	0,4985
1,76	0,4608	2,00	0,4772	2,48	0,4934	2,98	0,4986
1,77	0,4616	2,02	0,4783	2,50	0,4938	3,00	0.49865
1,78	0,4625	2,04	0,4793	2,52	0,4941	3,20	0,49931
1,79	0,4633	2,06	0,4803	2,54	0,4945	3,40	0,49966
1,80	0,4641	2,08	0,4812	2,56	0,4948	3,60	0,499841
1,81	0,4649	2,10	0,4821	2,58	0,4951	3,80	0,499928
1,82	0,4656	2,12	0,4830	2,60	0,4953	4,00	0,499968
1,83	0,4664	2,14	0,4838	2,62	0,4956	4,50	0,499997
				2,64	0,4959	5,00	0,4999997

Ирина Владимировна Сафронова

Теория вероятностей

Сборник задач к контрольной работе

Подписано в печать 20.10.2011	Усл. печ.л. 3,8	Уч.-изд. 4,0
Формат 60х84 1/16.	Тираж 100 экз.	Заказ №