



ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Томский политехнический университет»

О. Ю. Ромашова

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И РАСЧЕТЫ НА ЭВМ
ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

Учебное пособие

**Издательство ТПУ
Томск 2007**





УДК 621.311.25
Р 69

Ромашова О. Ю.

Р 69

Методы оптимизации и расчеты на ЭВМ технико-экономических задач: учебное пособие. – Томск : Изд-во ТПУ, 2007. – 210 с.

Целью предлагаемого учебного пособия, как и одноименного курса, является:

- теоретическое освоение методов оптимизации и основ технико-экономической оптимизации теплоэнергетического оборудования;
- приобретение навыков математического моделирования процессов и оборудования ТЭС в оптимизационных задачах.

Содержание пособия включает теорию математических методов одномерной и многомерной оптимизации, основы математического моделирования теплоэнергетических установок (ТЭУ) и методики технико-экономического выбора наилучших вариантов при проектировании оборудования и тепловых схем ТЭС и АЭС. В пособии также приведены многочисленные примеры использования математического аппарата в типичных оптимизационных задачах ТЭУ.

Пособие подготовлено на кафедре атомных и тепловых электростанций и предназначено для студентов ИДО, обучающихся по направлению 140100 «Теплоэнергетика и теплотехника».

УДК 621.311.25

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом Томского политехнического университета

Рецензенты:

В. В. Литвак – д.т.н., зам. директора Регионального центра управления энергосбережением (г. Томск);

С. А. Косяков – к.т.н., руководитель Центра комплексных энергосберегающих технологий (г. Северск).

© Томский политехнический университет, 2007



ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время теория оптимизации вносит заметный вклад в ускорение научно-технического прогресса. Успешному применению методов оптимизации способствует современная вычислительная техника. Трудно назвать такую область инженерной деятельности, где бы не возникали задачи оптимизационного характера: определение наиболее эффективного режима работы различных технических систем, организация производства, дающего наибольшую возможную прибыль при заданных ограниченных ресурсах, и др.

Оптимизация – это выбор наилучшего решения из всех возможных. Выбор наилучшего варианта технической системы осуществляется путем вариации независимых параметров системы на основании некоторого *критерия эффективности.*

Независимые параметры системы, влияющие на эффективность работы системы, называются *оптимизируемыми* (или *управляемыми*) параметрами.

В процессе оптимизации требуется найти *оптимальные* значения оптимизируемых параметров.

Оптимальные параметры соответствуют наиболее эффективной работе системы.

Число оптимизируемых параметров характеризует *размерность* задачи оптимизации.

Выбор оптимальных параметров осуществляется с помощью некоторой функции, связывающей эти параметры и позволяющей судить об эффективности работы системы. Функцию, связывающую оптимизируемые параметры и являющуюся критерием оптимальности (качества) системы, называют *целевой функцией*. Целевая функция достигает минимума (максимума) при оптимальных значениях оптимизируемых параметров. Таким образом, инженерная оптимизационная задача формулируется следующим образом: ***для технической системы путем вариации независимых параметров найти их оптимальные значения, выбрав в качестве критерия эффективности некоторую функцию, которая достигает минимума (максимума) в оптимальной точке и называется целевой функцией.***

Ограничения, накладываемые на оптимизируемые параметры, определяют *допустимую область* решений.

Схема решения практической оптимизационной задачи включает следующие этапы:

- 1) создание математической модели объекта (*специалист*);
- 2) выбор метода решения (*математик*);
- 3) составление программы на ЭВМ, проведение вычислений (*программист*).

В идеальном случае полученные результаты должны удовлетворять специалиста. Однако, как это часто бывает, идеальная и на первый взгляд безупречная схема в реальных условиях не действует. Дело в том, что все этапы взаимосвязаны. Специалист, создающий модель, должен смотреть вперед – предвидеть возможные затруднения при программной реализации. Со своей стороны, математик или программист часто вынужден упрощать модель, изменяя ее. Для этого нужны консультации специалиста. Только после многочисленных корректировок удается добиться от ЭВМ удовлетворительных результатов.

В такой ситуации возрастают требования к математической и компьютерной подготовке специалистов. В новых условиях инженер должен уметь грамотно переводить на математический язык технические задачи, анализировать зависимость их решений от условий, режимов, параметров реальных процессов и выбирать наилучшие варианты, т. е. обладать навыками математического моделирования и оптимизации технических систем. Поэтому курсу методов оптимизации и практическому применению их для технико-экономических расчетов отводится значительная роль в профессиональной подготовке студентов Томского политехнического университета. Поскольку в большинстве случаев аналитическое решение задач оптимизации затруднительно или невозможно, инженер-исследователь должен владеть численными методами, рассчитанными на применение ЭВМ.

Роль ЭВМ в решении оптимизационных задач трудно переоценить. Известно, что первый численный метод оптимизации – линейное программирование – был опубликован в 1939 г. в брошюре советского ученого Л. В. Канторовича «Методы организации и планирования производства». В ней излагались методы, слишком сложные для ручного счета, поэтому работа была практически забыта. И только с появлением ЭВМ линейное программирование возродилось. За применение линейного программирования в экономике Л. В. Канторовичу в 1975 г. была присуждена Нобелевская премия.

Между потребностью решить задачу оптимизации и ее приведением к однозначной, подходящей для решения на ЭВМ форме существует значительная дистанция. Этот этап называется *постановкой задачи*. От постановки задачи значительно зависит качество и достоверность получаемых результатов, а также скорость их получения. Постановка каждой задачи оптимизации включает два объекта: множество допустимых решений и целевую функцию, которую следует минимизировать или максимизировать на указанном множестве.

Математическая формулировка оптимизационной задачи в общем виде

$$F(X) \rightarrow \min (\max),$$

$$X \in D$$

где n – размерность задачи;

$F(X)$ – целевая функция;

$X(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n -мерный вектор независимых оптимизируемых параметров;

D – допустимая область решений. Множество допустимых решений задается системой ограничений на оптимизируемые параметры в виде равенств и неравенств.

В дальнейшем будем рассматривать лишь задачи и методы *минимизации*, т. к. любую задачу поиска максимума функции

$$F(X) \rightarrow \max,$$

$$X \in D$$

можно свести к задаче минимизации заменой целевой функции на противоположную величину

$$-F(X) \rightarrow \min,$$

$$X \in D.$$

Классификация методов оптимизации

В зависимости от числа оптимизируемых параметров задачи и методы оптимизации делятся на *одномерные* ($n = 1$) и *многомерные* ($n \geq 2$).

В зависимости от характера функции и области определения решать многомерные задачи минимизации можно *аналитически* (точно) либо одним из *численных* методов (с заданной погрешностью).

При *отсутствии ограничений* на оптимизируемые параметры задачи оптимизации и методы их решения называются *безусловными* (т. е. без условий, без ограничений).

При *наличии ограничений* задачи и методы называются *условными* (иначе – с условиями). Для численного решения задач *с ограничениями* используются методы *математического программирования*.

Для решения безусловных задач минимизации аналитическим методом используется классический аппарат, заключающийся в приравнивании нулю частных производных целевой функции по всем оптимизируемым параметрам и решении полученной системы уравнений. Аналитическое решение условных задач минимизации с ограничениями дает метод неопределенных множителей Лагранжа. Аналитические методы имеют ограниченное применение в инженерных задачах, т. к. требуют дифференцируемости исследуемой функции и накладывают особые условия на ограничения. Основными методами являются *численные*, успешному использованию которых способствуют ЭВМ.

Основные понятия и определения хорошо изложены в [1–4].

1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЪЕКТОВ ОПТИМИЗАЦИИ

Оптимизация – это выбор наилучшего решения из всех возможных. Для того чтобы использовать методы оптимизации на практике, надо прежде всего сформулировать рассматриваемую задачу на математическом языке, т. е. построить математическую модель объекта оптимизации.

Математическое моделирование – это замещение оригинала математической моделью. Математическое моделирование наилучшим образом подходит для целей оптимизации, т. к. позволяет сравнивать между собой большое число вариантов.

Этапы построения математической модели приведены на рис. 1.1. Общий подход к моделированию теплоэнергетических установок изложен в [5].



Рис. 1.1

1.1. Основы теории погрешностей

Общие методические указания изложены в [6].

Обозначим: A – точное число; a – приближенное число.

Абсолютная погрешность

$$\Delta = |a - A|.$$

Относительная погрешность

$$\delta = \frac{\Delta}{|A|}.$$

Десятичная запись числа

$$a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots,$$

где α_i – цифры числа ($i = 1, 2, \dots, n$); $\alpha_1 \neq 0$;

m – старший десятичный разряд.

Значащие цифры

Значащими цифрами приближенного числа a называются все цифры в его десятичном изображении, отличные от нуля, и нули, если они содержатся между значащими цифрами или расположены в конце числа и указывают на сохранение разряда точности.

Пример 1.1. В числе 0,001405 значащими являются четыре цифры: 1, 4, 0, 5.

Верные знаки в узком смысле

Приближенное число $a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots$ содержит n верных знаков в узком смысле, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит половины единицы десятичного разряда, выражаемого n -й значащей цифрой, считая слева направо, т. е. если выполняется неравенство

$$\Delta \leq 0,5 \cdot 10^{m-n+1}.$$

Пример 1.2. Приближенное число $a = 7,21508$ имеет абсолютную погрешность $\Delta = 0,00007$.

$\Delta = 0,00007 \leq 0,5 \cdot 10^{-3}$; разряд 10^{-3} указывает позицию последней справа верной значащей цифры, т. е. число a имеет четыре верных знака в узком смысле: 7, 2, 1, 5.

Верные знаки в широком смысле

Приближенное число $a = \alpha_1 \cdot 10^m + \alpha_2 \cdot 10^{m-1} + \dots + \alpha_n \cdot 10^{m-n+1} + \dots$ содержит n верных знаков в широком смысле, если абсолютная погрешность этого числа не превосходит единицы десятичного разряда, выражаемого n -й значащей цифрой, считая слева направо, т. е.

$$\Delta \leq 1 \cdot 10^{m-n+1}.$$

Пример 1.3. $a = 7,21508$; $\Delta = 0,00007$.

$\Delta = 0,00007 \leq 1 \cdot 10^{-4}$; разряд 10^{-4} указывает позицию последней справа верной значащей цифры, т. е. число a имеет пять верных знаков в широком смысле: **7, 2, 1, 5, 0**.

Предельная абсолютная погрешность

Предельная абсолютная погрешность может быть вычислена по формуле

$$\Delta^* \leq \omega \cdot 10^{m-n+1},$$

где m – верхний разряд;

n – количество верных значащих цифр;

$\omega = 0,5$, если верные значащие цифры указаны в узком смысле;

$\omega = 1$, если верные значащие цифры указаны в широком смысле.

Предельная относительная погрешность

Предельная относительная погрешность может быть вычислена по формуле

$$\delta a^* = \frac{\omega}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}},$$

где α_1 – первая значащая цифра числа a ;

n – количество верных значащих цифр;

$\omega = 0,5$, если верные значащие цифры указаны в узком смысле;

$\omega = 1$, если верные значащие цифры указаны в широком смысле.

Пример 1.4. Определить, какое равенство точнее: $a_1 = 13/19 \approx 0,684$ или $a_2 = \sqrt{52} \approx 7,21$.

Находим предельные абсолютные погрешности чисел a_1 и a_2 . Для этого берем числа a_1 и a_2 с большим числом десятичных знаков: $13/19 \approx 0,68421$; $\sqrt{52} \approx 7,2111$. Определяем предельные абсолютные погрешности, округляя их с избытком:

$$\Delta a_1^* = |0,68421 - 0,684| \leq 0,00022;$$

$$\Delta a_2^* = |7,2111 - 7,21| \leq 0,0012.$$

Находим предельные относительные погрешности:

$$\delta a_1^* = \Delta a_1^* / a_1 = 0,00022 / 0,684 \approx 0,00033 = 0,033 \quad \% ;$$

$$\delta a_2^* = \Delta a_2^* / a_2 = 0,0012 / 7,21 \approx 0,00017 = 0,017 \quad \% .$$

Второе равенство является более точным, поскольку $\delta a_2^* < \delta a_1^*$.

Пример 1.5. Определить предельные абсолютную и относительную погрешности приближенного числа $a = 96,387$, если оно содержит только верные цифры в узком смысле.

Так как для числа $a = 96,387$ последняя верная значащая цифра 7 стоит в разряде тысячных долей (10^{-3}), то $\Delta a \leq 0,5 \cdot 10^{-3}$, т. е. $\Delta a \leq 0,0005$, или $\Delta a^* = 0,0005$. Тогда число a можно записать как $96,387 \pm 0,0005$.

Предельная относительная погрешность

$$\delta a^* = \frac{1}{2,9 \cdot 10^{5-1}} = 0,000005 = 5 \cdot 10^{-6}.$$

Пример 1.6. Определить предельные абсолютную и относительную погрешности приближенного числа $b = 6,32$, если оно содержит только верные цифры в широком смысле.

Последняя цифра приближенного числа $b = 6,32$ стоит в разряде сотых долей (10^{-2}). Так как это число содержит верные цифры в широком смысле, то, следовательно, $\Delta b \leq 1 \cdot 10^{-2}$, т. е. $\Delta b \leq 0,01$, или $\Delta a^* = 0,01$. Тогда число b можно записать как $6,32 \pm 0,01$.

Предельная относительная погрешность

$$\delta b^* = \frac{1}{\alpha_1 \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{6 \cdot 10^{3-1}} = 0,0016667.$$

Погрешности алгебраических действий

- суммы $\Delta(a+b) = \Delta a + \Delta b$;
- разности $\Delta(a-b) = \Delta a + \Delta b$;
- произведения $\delta(a \cdot b) = \delta a + \delta b$;
- частного $\delta(a/b) = \delta a + \delta b$;
- m -й степени $\delta a^m = m \cdot \delta a$;
- корня m -й степени $\delta \sqrt[m]{a} = \frac{1}{m} \cdot \delta a$.

Правила подсчета цифр

При *сложении и вычитании* приближенных чисел в результате следует сохранить столько десятичных знаков, сколько их в приближенном, данном с наименьшим числом десятичных знаков.

Пример 1.7. $a = 0,12$; $b = 0,37401$; $a + b = 0,49401 \approx 0,49$.

При *умножении и делении* в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в приближенном, данном с наименьшим числом значащих цифр.

Пример 1.8. $a = 0,2$; $b = 0,41$; $a \cdot b = 0,82 \approx 0,8$.

При *возведении* приближенного числа *в квадрат или куб* в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в основании степени.

Пример 1.9. $a = 9,5$; $a^2 = 90,25 \approx 90$.

При *извлечении квадратного или кубического корней* из приближенного числа в результате следует сохранить столько значащих цифр, сколько их в подкоренном числе.

Пример 1.10. $a = 12,1$; $\sqrt{a} = 3,478505426... \approx 3,48$.

При *вычислении промежуточных результатов* следует сохранить на одну цифру больше, чем требуют правила. В окончательном результате эта «запасная» цифра отбрасывается.

1.2. Определение параметров воды и водяного пара с помощью ПЭВМ

Математическое моделирование теплоэнергетических установок (ТЭУ) является составной частью большинства технико-экономических задач. Особое место в процессе моделирования ТЭУ занимает расчет термодинамических параметров воды и пара в элементах тепловой схемы с помощью ПЭВМ. Наибольшую трудность представляет определение параметров пара в процессе расширения его в турбине, т. к. выбор расчетных формул зависит от состояния пара, которое по мере его расширения в турбине может изменяться и поэтому требует контроля.

Определение термодинамических и теплофизических параметров воды и водяного пара в компьютерных расчетах можно вести с помощью *функций*, разработанных и оформленных на языке ПАСКАЛЬ в виде программного модуля TABL1.TPU сотрудниками кафедры АТЭС: доцентами А. В. Воробьевым и Л. А. Беляевым и аспирантом А. С. Матвеевым.

Подключение модуля TABL1.TPU

Программный модуль TABL1.TPU хранится в памяти ПЭВМ в объектных кодах в библиотеке модулей TPU и подключается автоматически, наряду с другими модулями (PRINTER, GRAF и т. д.), после обращения к нему предложением USES... сразу после заголовка программы, например:

```
Program TURBINA;  
Uses TABL1;  
Var...;  
...
```

1.2.1. Определение параметров перегретого пара в процессе расширения

Известно, что весь процесс расширения пара в турбине лежит в области перегретого пара (см. рис. 1.2).

Заданы:

P_0, t_0 – давление и температура пара на входе в отсек;

P_1 – давление пара за отсеком;

KPD – внутренний относительный КПД отсека.

Найти t_1, h_1 – температуру и энтальпию пара за отсеком.

Учитывая тот факт, что для теоретического процесса расширения пара в турбине выполняется $S = \text{const}$, алгоритм расчета может быть следующим.

Алгоритм расчета параметров перегретого пара	Обращение в программе к функциям из TABL1
$h_0 = f(P_0, t_0);$ $S_0 = f(P_0, t_0);$ $h_{1t} = f(P_1, S_0);$ $h_1 = h_0 - (h_0 - h_{1t}) \cdot KPD;$ $t_1 = f(P_1, h_1)$	$h0 := H_PT(P0, t0);$ $S0 := S_PT(P0, t0);$ $h1 := H_PS(P1, S0);$ $t1 := T_PH(P1, h1);$

1.2.2. Определение параметров мокрого пара в процессе расширения

Известно, что весь процесс расширения пара в турбине лежит в области мокрого пара (см. рис. 1.3).

Заданы:

P_0, x_0 – давление и степень сухости пара на входе в отсек;

P_1 – давление пара за отсеком;

KPD – внутренний относительный КПД отсека.

Найти h_1, x_1 – энтальпию и степень сухости пара за отсеком.

Алгоритм расчета параметров мокрого пара	Обращение в программе к функциям из TABL1
$h_0 = f(P_0, x_0)$	$h0 := \mathbf{H_PX}(P0, X0)$
$S_0 = f(P_0, x_0)$	$S0 := \mathbf{S_PX}(P0, X0)$
$h_1' = f(P_1)$	$h1I := \mathbf{HSW_P}(P1)$
$h_1'' = f(P_1)$	$h1II := \mathbf{HSP_P}(P1)$
$S_1' = f(P_1)$	$S1I := \mathbf{SSW_P}(P1)$
$S_1'' = f(P_1)$	$S1II := \mathbf{SSP_P}(P1)$
$x_{1t} = (S_0 - S_1'') / (S_1'' - S_1')$	
$h_{1t} = f(P_1, x_{1t})$	
$h_1 = h_0 - (h_0 - h_{1t}) \cdot KPD$	
$x_1 = (h_1 - h_1') / (h_1'' - h_1')$	

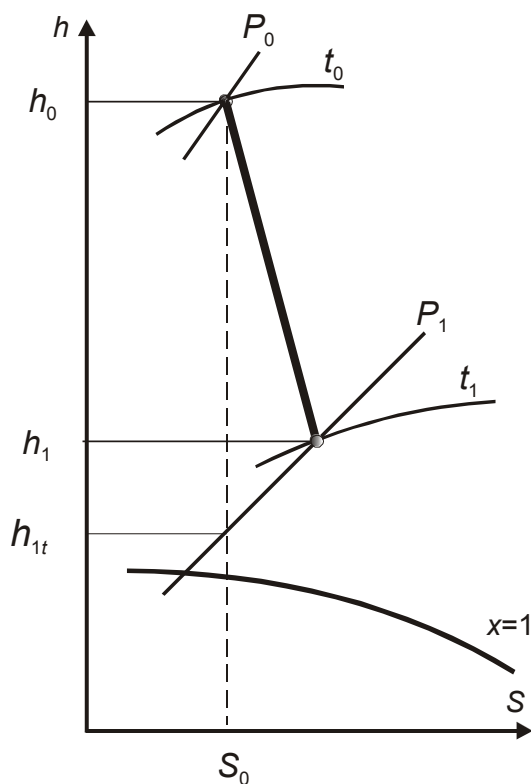


Рис. 1.2. Процесс расширения перегретого пара

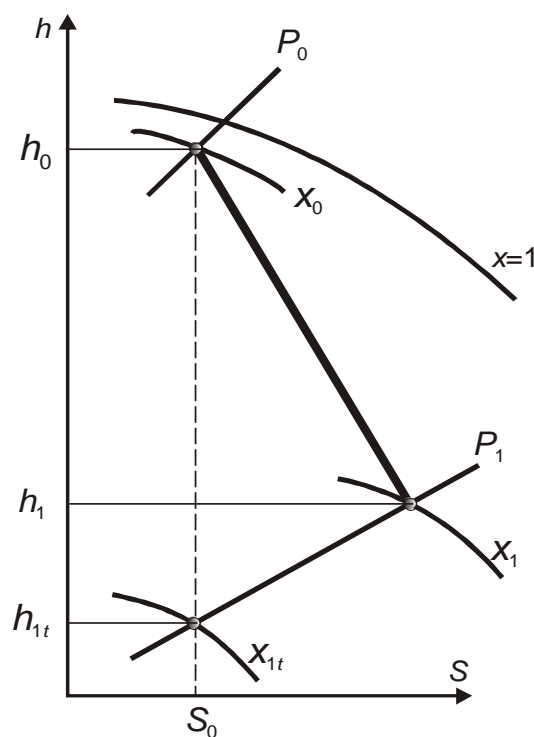


Рис. 1.3. Процесс расширения мокрого пара

Здесь и в дальнейшем в идентификаторах, обозначающих параметры кипящей жидкости (h' , S' , V') и сухого насыщенного пара (h'' , S'' , V''), для одного штриха принято обозначение «I», а для двух штрихов – «II».

1.2.3. Проверка состояния пара в конце теоретического расширения

Пар на входе в отсек – *перегретый*.

Если пар на входе в отсек – *мокрый*, то контролировать его состояние в конце расширения не требуется, т. к. в этом случае *весь процесс лежит в области мокрого пара*.

Оценить состояние пара в конце теоретического расширения от параметров на входе в отсек (P_0, t_0) до давления на выходе P_1 (рис. 1.4) можно, *сравнивая энтропию теоретического процесса S_0 с энтропией сухого насыщенного пара S_1'' при давлении P_1* .

Если $S_0 > S_1''$ (рис. 1.4, а), то конец теоретического расширения (точка $1t$) лежит в области *перегретого* пара. В этом случае для определения энтальпии h_{1t} необходимо воспользоваться функциями перегретого пара из модуля TABL1 [1].

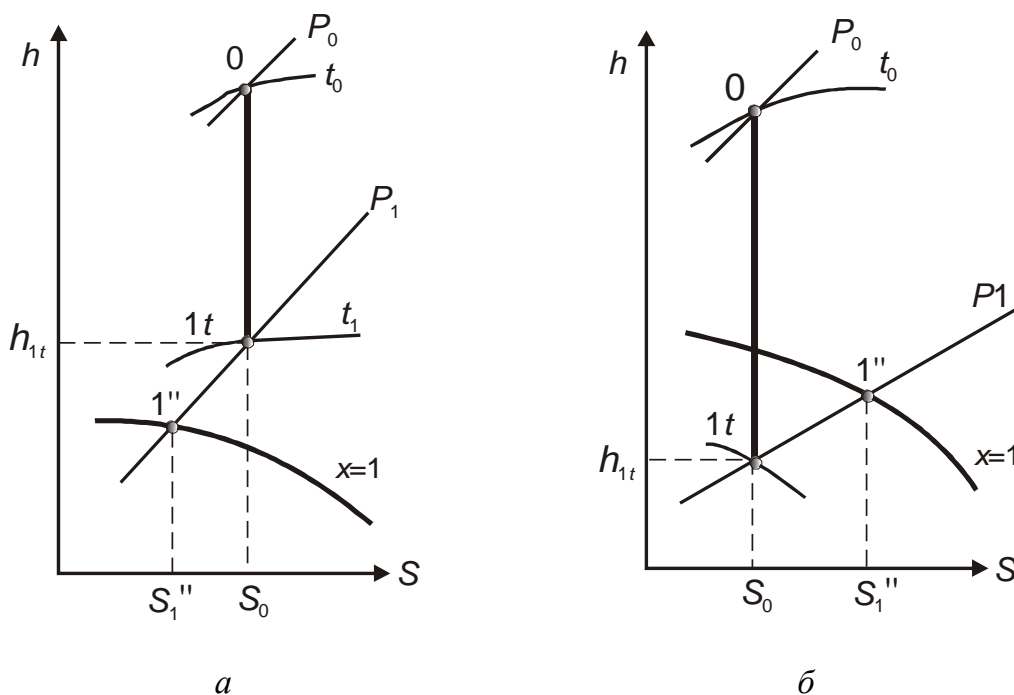


Рис. 1.4

Если $S_0 < S_1''$ (рис. 1.4, б), то конец теоретического расширения лежит в области *мокрого* пара и расчет параметров в этой точке надо выполнять с помощью функций насыщения из модуля TABL1 [1] и формул мокрого пара.

Блок-схема алгоритма проверки состояния пара в конце теоретического расширения приведена на рис. 1.5.

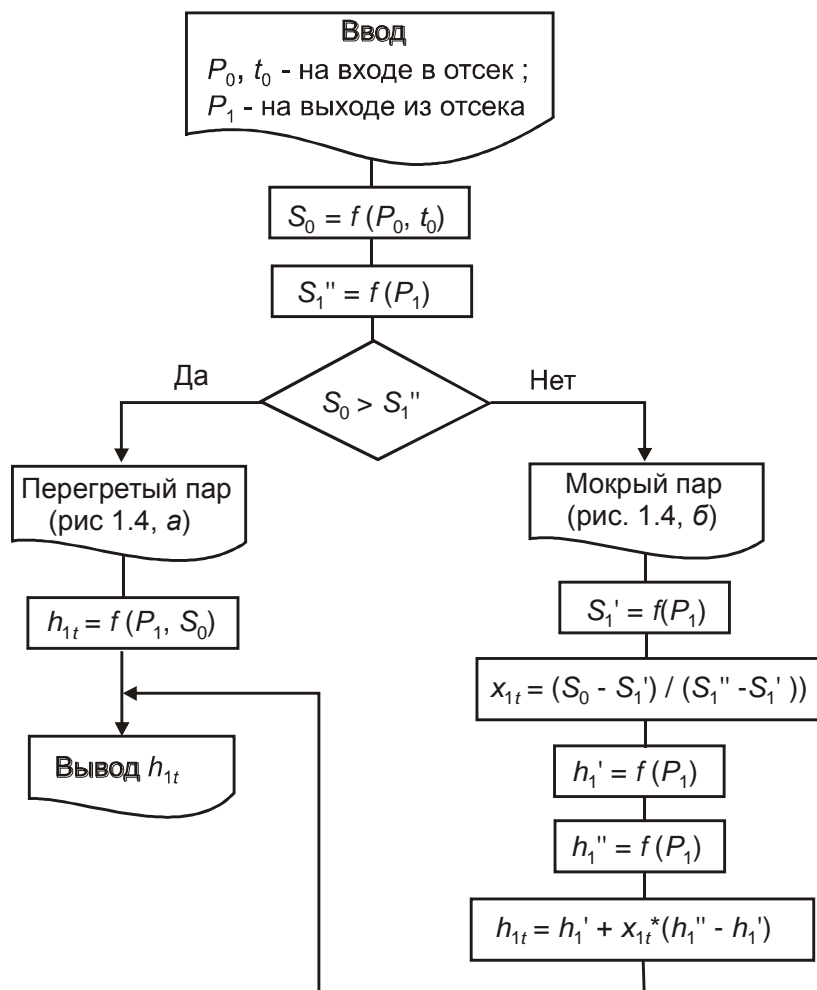


Рис. 1.5

Приведем пример программы, работающей по этому алгоритму.

```

Program PROCESS1;
Uses TABL1;
Var P0,t0,h0,S0,S1,h1t,S1I,S1II,h1I,h1II,x1t      : real;
Begin
  Writeln (' Введите P0 [МПа], t0 [C], P1[МПа] ');
  Readln (P0, t0, P1);
  h0:=H_PT(P0, t0);      S0:=S_PT(P0, t0);
  S1II:=SSP_P(P1);
  If S0>S1II then begin {перегретый пар в конце теор. расширения}
    h1t:=H_PS(P1,S0)    end
  else begin {мокрый пар в конце теор. расширения}
    S1I:=SSW_P(P1);
    x1t:=(S0-S1I)/(S1II-S1I);
    h1I:=HSW_P(P1);
    h1II:=HSP_P(P1);
    h1t:= h1I+x1t*(h1II-h1I) end;
  Writeln ('h1t=', h1t:7:1);
  Readln;
End.
  
```

1.2.4. Проверка состояния пара в конце действительного расширения

Такая проблема может возникнуть, если процесс теоретического расширения заканчивается в области *мокрого* пара.

Если же теоретический процесс заканчивается в области *перегретого* пара, то конец действительного процесса также лежит в области *перегретого* пара и *контролировать состояние пара в конце действительного расширения не надо*.

Для точки, характеризующей состояние пара в конце действительного процесса, как правило, бывают известны давление P_1 и энтальпия h_1 . Поэтому определять состояние пара (перегретый или мокрый) в этой точке удобно, *сравнивая энтальпию пара в конце действительного расширения h_1 с энтальпией сухого насыщенного пара h_1'' при давлении P_1* (рис. 1.6).

Если $h_1 > h_1''$ (рис. 1.6, а), то конец действительного расширения (точка 1) лежит в области *перегретого* пара. Для определения параметров пара в точке 1 необходимо воспользоваться функциями перегретого пара из модуля TABL1 [1, с. 4].

Если $h_1 < h_1''$ (рис. 1.6, б), то конец действительного расширения лежит в области *мокрого* пара и для расчета параметров пара в этой точке надо воспользоваться функциями насыщения из модуля TABL1 и формулами мокрого пара.

Блок-схема алгоритма определения состояния пара в конце действительного процесса расширения в турбине приведена на рис. 1.7.

Обозначения параметров в алгоритме соответствуют процессам на рис. 1.6.

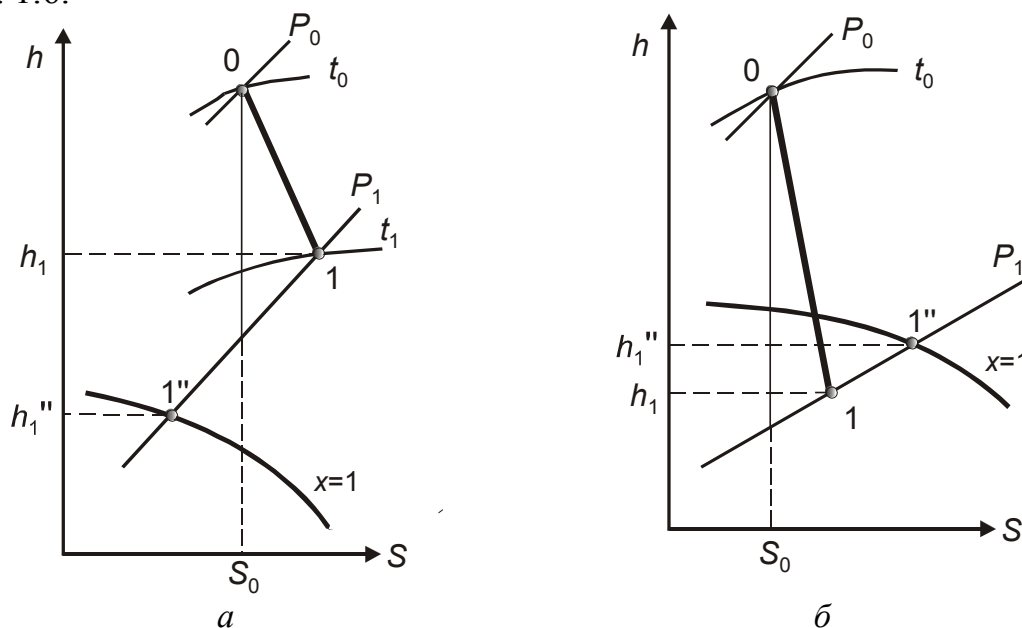


Рис. 1.6

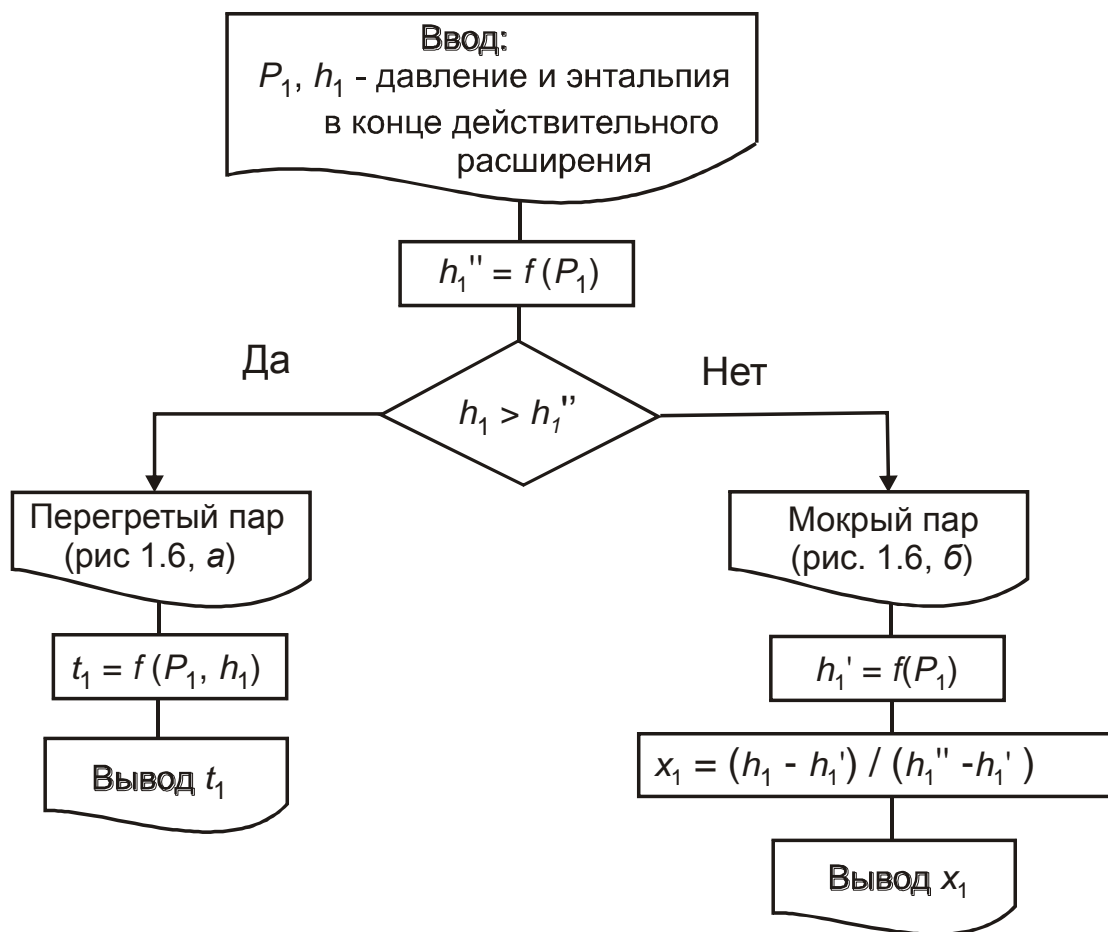


Рис. 1.7

Приведем фрагмент программы, соответствующий этому алгоритму:

```

...
h1III:=HSP_P(P1);
If h1>h1III then begin {перегретый пар в конце действ. расширения}
    t1:=T_PH(P1,h1) end
else begin {мокрый пар в конце действ. расширения}
    h1I:= HSW_P('C','P',P1);
    x1:= (h1 - h1I) / (h1III-h1I) end; ...
    
```

1.3. Численные методы решения нелинейных уравнений при моделировании теплового оборудования ТЭС

1.3.1. Численные методы решения нелинейного уравнения с одним неизвестным

Способы решения нелинейных уравнений численными методами изложены в [6–8].

Любое уравнение с одним неизвестным можно представить в виде

$$f(x) = 0. \quad (1.1)$$

Решением уравнения (1.1) называется совокупность значений x , при которых уравнение (1.1) обращается в тождество.

Каждое значение x из этой совокупности называется *корнем* ξ уравнения.

Решить уравнение численным методом означает:

- 1) установить, имеет ли оно корни, сколько корней;
- 2) найти значения корней с заданной точностью.

Задача численного решения уравнения (1.1) состоит из двух этапов:

- 1) *отделения корней* (нахождения достаточно малых окрестностей, содержащих одно значение корня);
- 2) *уточнения корня* (вычисления корня с заданной точностью).

К наиболее популярным численным методам решения нелинейного уравнения с одним неизвестным относятся:

- *метод половинного деления;*
- *метод простой итерации;*
- *метод хорд;*
- *метод Ньютона.*

1.3.1.1. Графическое решение нелинейного уравнения

Способ 1

Решить уравнение (1.1) означает *найти точки пересечения* графика функции $y = f(x)$ с *осью абсцисс* (корень ξ – на рис. 1.8).

Способ 2

Уравнение вида $f(x) = 0$ путем преобразований заменяется на уравнение

$$f_1(x) = f_2(x). \quad (1.2)$$

Графически решить уравнение (1.2) означает *найти точки пересечения графиков функций* $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (корень ξ – на рис. 1.9).

Графический способ удобно использовать для приближенной оценки значения корня с дальнейшим его уточнением одним из перечисленных выше численных методов.

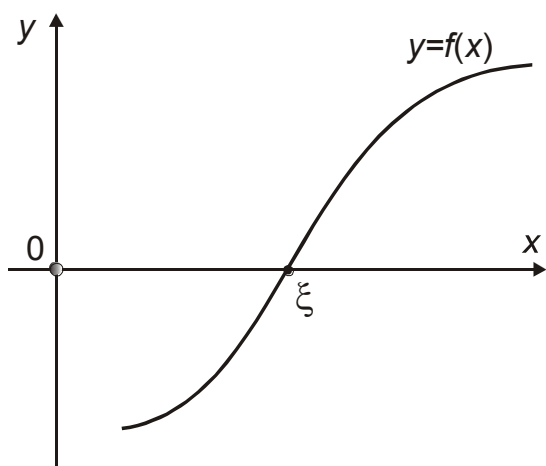


Рис. 1.8

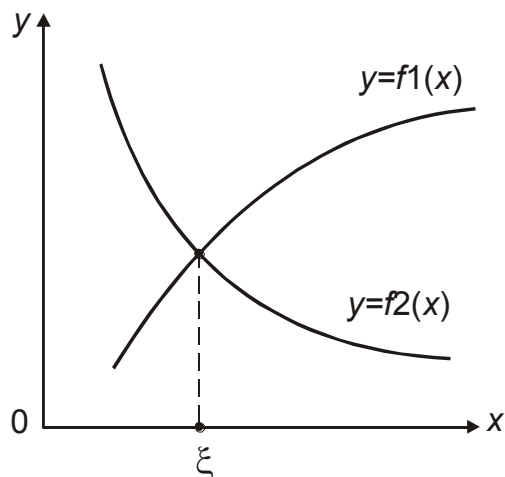


Рис. 1.9

Пример 1.11. Отделить корни уравнения $\sin(x) - \ln(x) = 0$ и найти их приближенные значения графическим способом.

Решение

Преобразуем заданное уравнение к виду (1.2) $\sin(x) = \ln(x)$ и найдем точку пересечения графиков $y = \sin(x)$ и $y = \ln(x)$ (рис. 1.10).

Единственный корень ξ лежит на отрезке $[1; \pi/2]$.

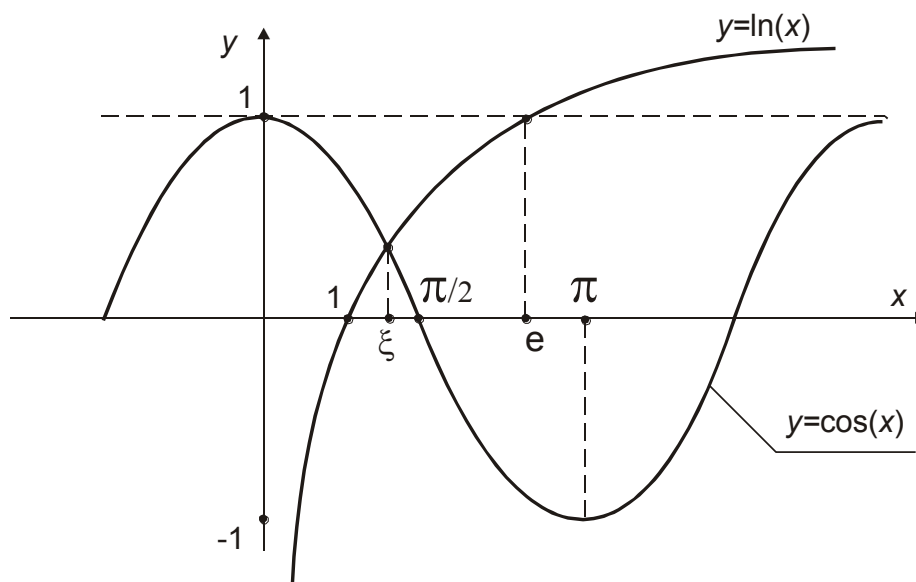


Рис. 1.10

1.3.1.2. Метод половинного деления

Известно, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет единственный корень. Это означает, что выполняется $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Суть метода половинного деления состоит в том, что для нахождения корня делим отрезок $[a; b]$ пополам точкой

$$c = (a + b) / 2,$$

определяем знак функции в точках a , b , c и выбираем каждый раз ту половину отрезка, на котором функция меняет знак (рис. 1.11):

$[a; c]$, если $f(a) \cdot f(c) < 0$;

$[c; b]$, если $f(c) \cdot f(b) < 0$.

Расчет заканчивается, когда интервал, содержащий корень, уменьшится до заданной погрешности.

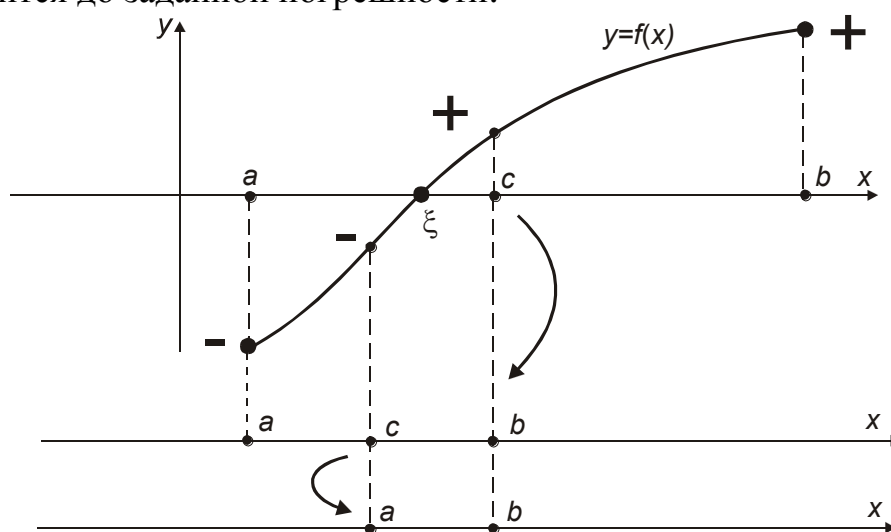


Рис. 1.11

Алгоритм метода половинного деления приведен на рис. 1.12.

1.3.1.3. Метод простой итерации

Уравнение (1) приведем к виду

$$x = \varphi(x). \quad (1.3)$$

Это можно сделать, преобразовав уравнение (1.1) различными способами.

Итерационная формула имеет вид

$$x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Схема применения этой формулы следующая.

Принимается x_0 – начальное приближение к корню уравнения (3).

Итерация 1. $x_1 = \varphi(x_0)$.

Итерация 2. $x_2 = \varphi(x_1)$ и т. д.

Таким образом, образуем числовую последовательность

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots,$$

которую называют *последовательностью приближений*, или *итерационной последовательностью* (от латинского **iteration** – повторение).

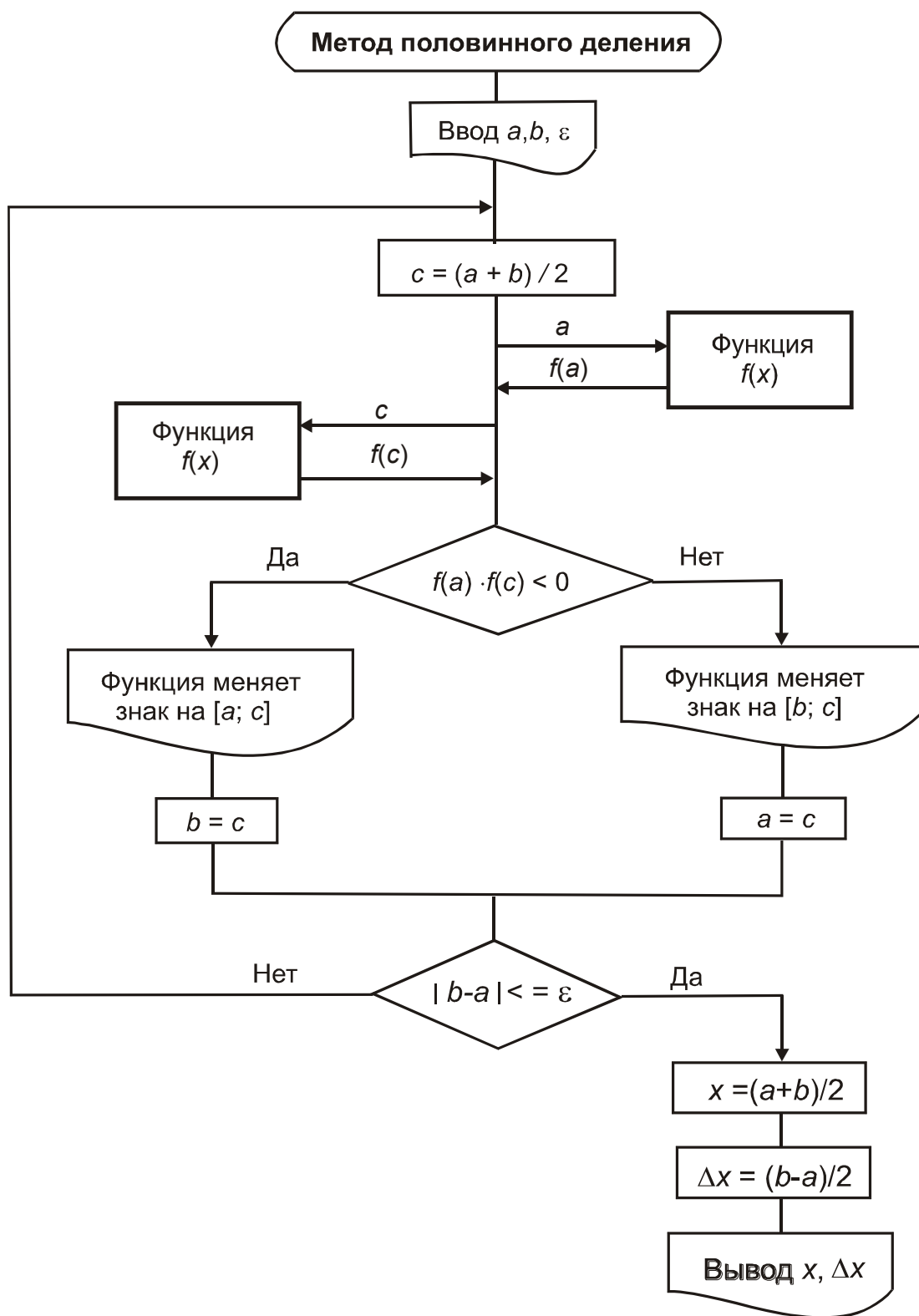


Рис. 1.12

Итерационный процесс заканчивается, когда значения x на двух последних шагах отличаются друг от друга меньше, чем на величину наперед заданного числа ε :

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon.$$

Алгоритм метода простой итерации приведен на рис. 1.13.

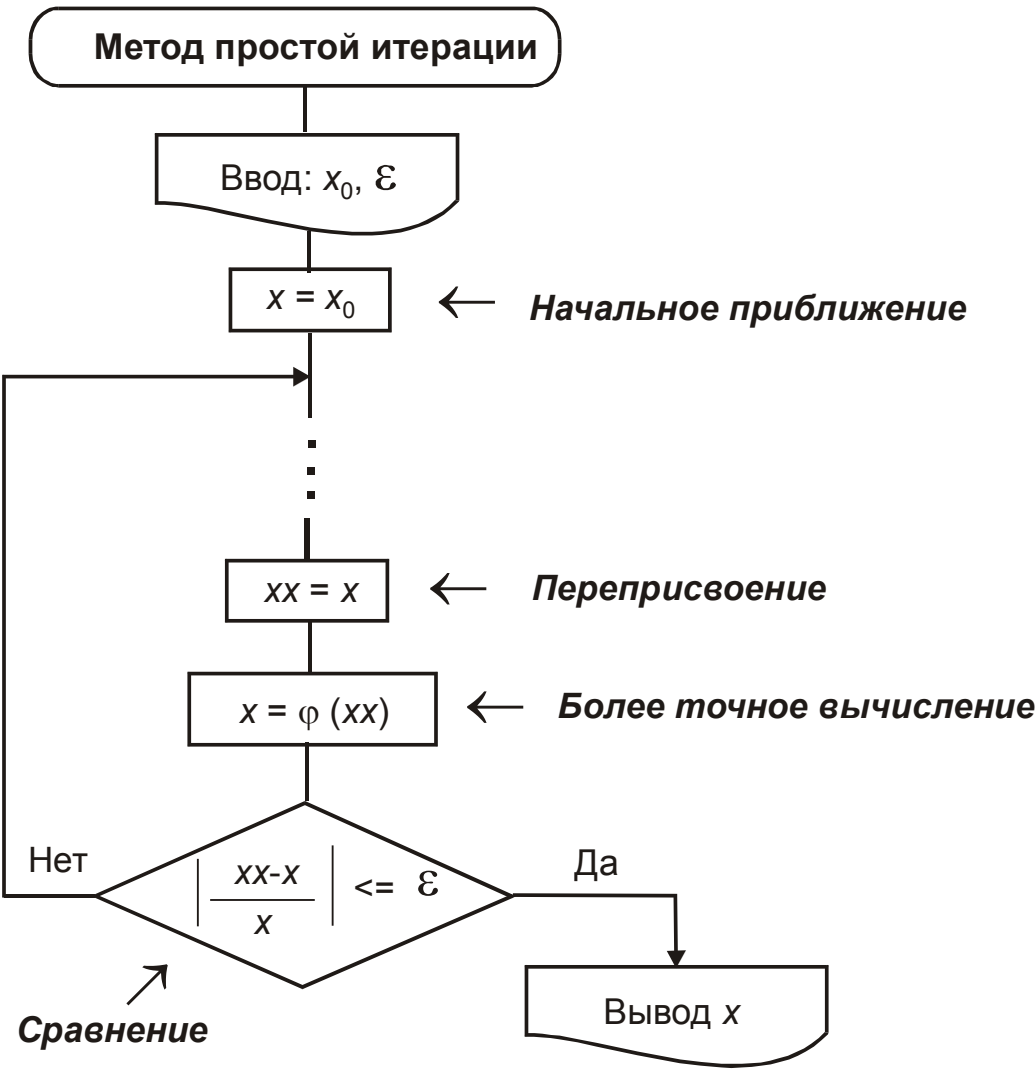


Рис. 1.13. Алгоритм метода простой итерации

Достаточное условие сходимости итерационного процесса

Если на всем интервале $[a,b]$ выполняется условие

$$|\varphi'(x)| < 1, \tag{1.4}$$

то процесс сходится.

Преобразование уравнения к итерационному виду

Сходимость итерационного процесса существенно зависит от записи функции $\varphi(x)$.

Уравнение $f(x)=0$ можно привести к виду $x=\varphi(x)$ многими способами; например, для функции $f(x)=x^2-c$, где $c \geq 0$, это можно сделать следующим образом:

- 1) прибавить к левой и правой частям x :

$$x = x^2 + x - c;$$

- 2) разделить на x :

$$x = c/x, \quad x \neq 0;$$

- 3) преобразовать к виду:

$$x = x - \left(\frac{x^2 - c}{2 \cdot x} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{c}{x} \right).$$

Однако, чтобы итерационный процесс был сходящимся, привести уравнение $y=f(x)$ к виду $x=\varphi(x)$ надо таким образом, чтобы выполнялось условие (1.4).

В некоторых случаях, помимо обычных преобразований, полезно иметь в виду следующие приемы:

- 1) уравнение (1.1) приводят к виду

$$x = x - m \cdot f(x), \quad m \neq 0,$$

где

$$\varphi(x) = x - m \cdot f(x).$$

Тогда

$$\varphi'(x) = 1 - m \cdot f'(x).$$

Подбирают (если это возможно) m таким образом, чтобы на $[a; b]$ выполнялось

$$|\varphi'(x)| = |1 - m \cdot f'(x)| < 1;$$

2) пусть $|\varphi'(x)| > 1$ на всем отрезке $[a, b]$, тогда вместо функции $y = \varphi(x)$ будем рассматривать функцию $x = \beta(y)$, обратную $\varphi(x)$. Будем решать уравнение $y = \beta(y)$, для которого

$$|\beta'(x)| = \frac{1}{|\varphi'(x)|} < 1.$$

Практическое использование метода простой итерации

Достоинство метода – простота алгоритма.

Недостатки:

- 1) не всегда обеспечивает сходимость;
- 2) для недифференцируемой функции выяснить сходимость перед использованием алгоритма невозможно, это будет известно лишь в процессе расчетов.

Недостатки метода простой итерации заставляют в любой программе, использующей этот метод, *предусматривать контроль сходимости (счетчик итераций) и прекращать счет, если сходимость не обеспечивается.*

В технических задачах продифференцировать функцию $\varphi(x)$ и тем более проанализировать поведение $\varphi'(x)$ с целью доказательства сходимости почти не предоставляется возможным. Поэтому следует помнить **основное правило**, позволяющее успешно применять метод простой итерации на практике: *чем ближе начальное приближение к точному значению корня уравнения, тем больше вероятность того, что итерационный процесс – сходящийся*, из чего следует, что в компьютерных расчетах инженерных задач *возрастает роль специалиста*, здравый смысл и опыт (решения задач подобного рода) которого заменить не сможет ни математик, ни программист.

Пример 1.12. Уточнить значение корня уравнения $1/x - \ln(x) = 0$ с точностью $\varepsilon = 0,001$ методом простой итерации, приняв в качестве начального приближения $x_0 = 2$.

Решение

Уравнение задано в виде (1.1). Приведем его к виду (1.3). Для этого прибавим к обеим частям x :

$$x = x + 1/x - \ln(x).$$

Итерация 1

$$x_0 = 2; \quad x_1 = x_0 + 1/x_0 - \ln(x_0) = 2 + 1/2 - \ln(2) = 1,8069;$$

$$|x_1 - x_0| = |1,8069 - 2| = 0,1931 > \varepsilon.$$

Итерация 2

$$x_1 = 1,8069;$$

$$x_2 = x_1 + 1/x_1 - \ln(x_1) = 1,8069 + 1/1,8069 - \ln(1,8069) = 1,7687;$$

$$|x_2 - x_1| = |1,7687 - 1,8069| = 0,1382 > \varepsilon.$$

Итерация 3

$$x_3 = x_2 + 1/x_2 - \ln(x_2) = 1,7638; \quad |x_3 - x_2| = 0,049 > \varepsilon.$$

Итерация 4

$$x_4 = x_3 + 1/x_3 - \ln(x_3) = 1,7633; \quad |x_4 - x_3| = 0,0005 < \varepsilon.$$

Расчет закончили.

1.3.1.4. Метод хорд

Известно, что функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет единственный корень. Это означает, что выполняется $f(a) \cdot f(b) < 0$.

По методу хорд за очередное приближение x_n к точному значению корня ξ принимается точка пересечения хорды, проведенной к графику функции на отрезке $[a, b]$, с осью абсцисс (рис. 1.14).

Значение абсциссы в этой точке находится из уравнения хорды

$$x_n = a - \frac{f(a)}{f(a) - f(b)} \cdot (b - a), \quad (1.5)$$

где a и b – координаты нового отрезка, изменяющиеся в процессе итераций.

При этом следует помнить, что *неподвижен тот конец*, для которого знак функции совпадает со знаком ее второй производной.

Алгоритм метода хорд приведен на рис. 1.15.

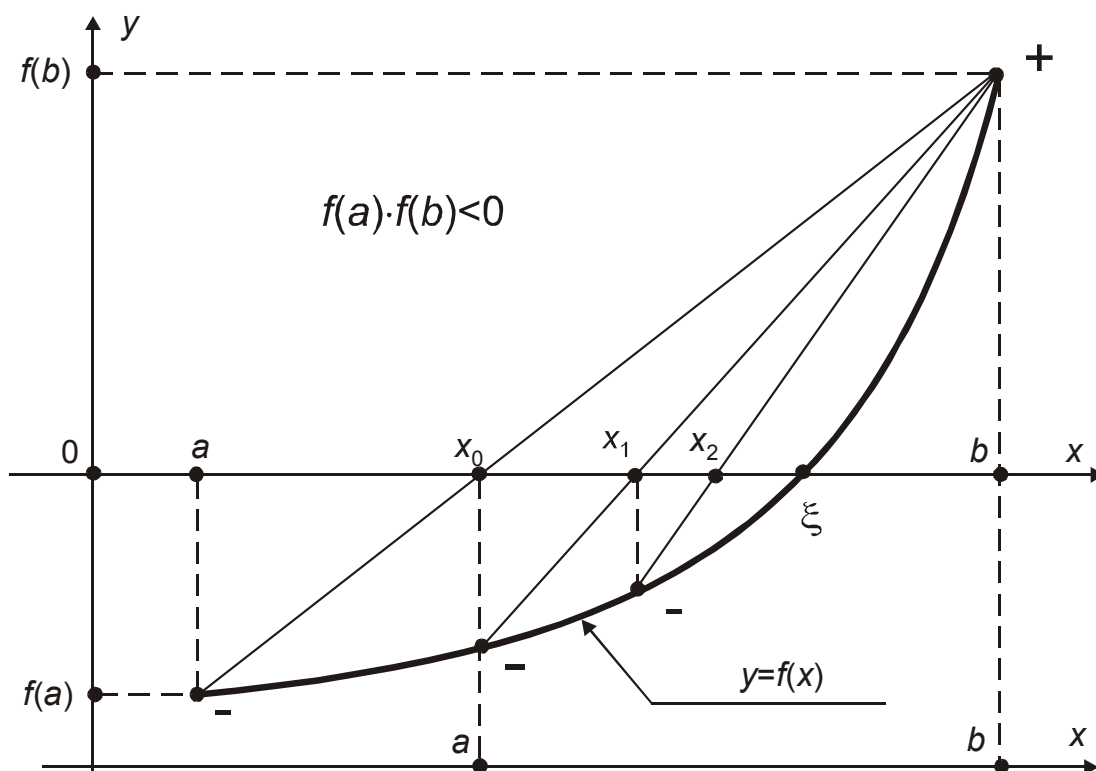


Рис. 1.14. Графическая иллюстрация метода хорд

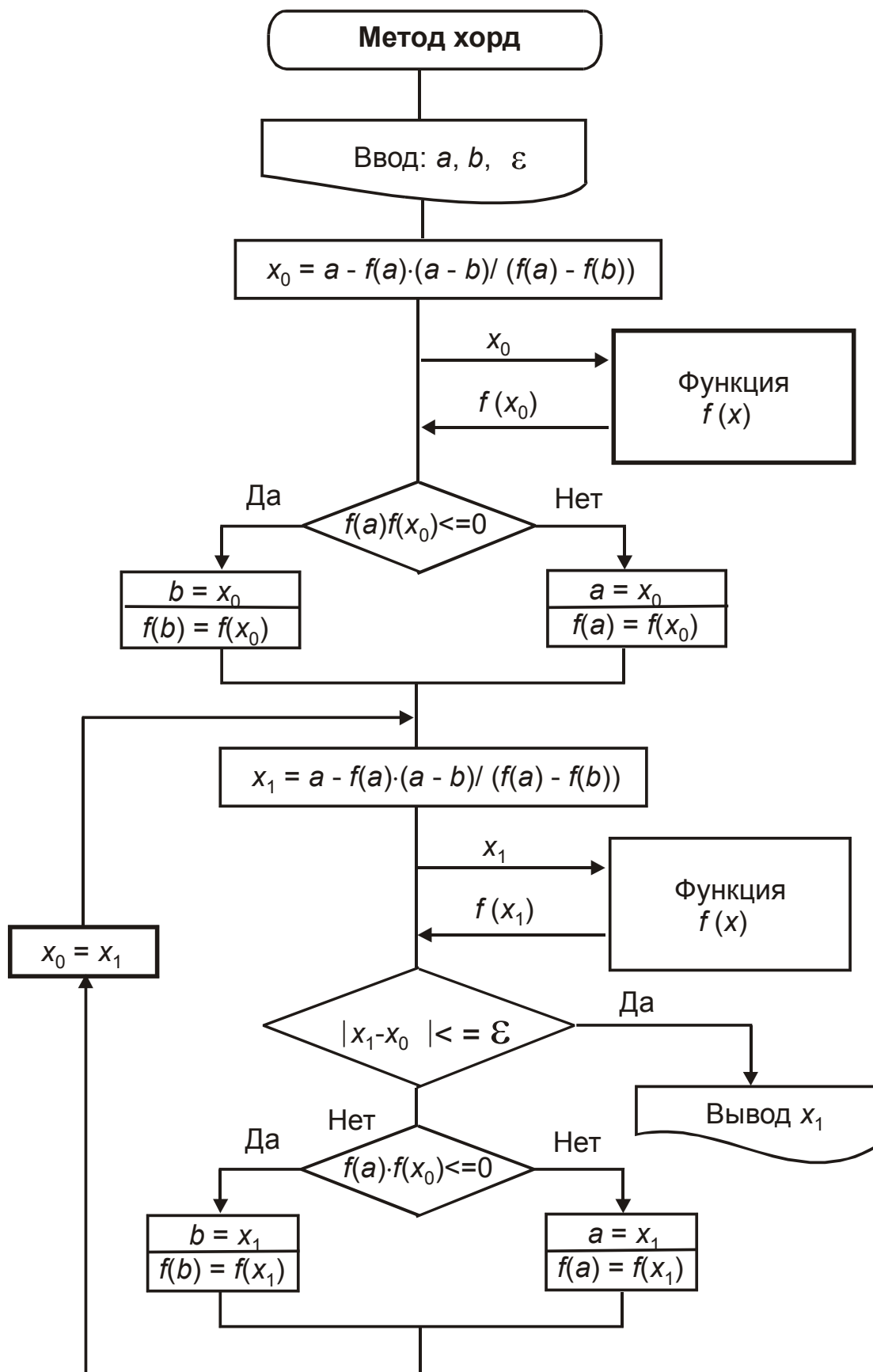


Рис. 1.15

1.3.1.5. Метод Ньютона

Известно, что функция $f(x)$ имеет корень на рассматриваемом отрезке $[a, b]$.

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене небольшой дуги кривой $y = f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой (рис. 1.16). За очередное приближение к точному значению корня ξ принимается точка пересечения касательной с осью абсцисс.

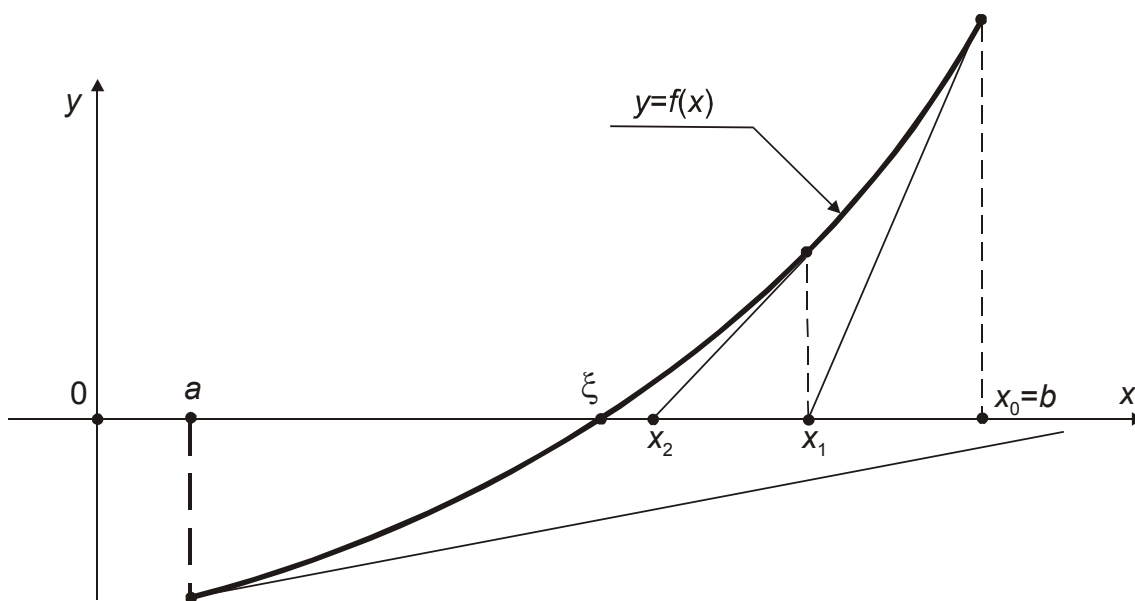


Рис. 1.16. Графическая иллюстрация метода Ньютона

Итерационная формула Ньютона –

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

В качестве начального приближения x_0 можно принять тот конец отрезка $[a, b]$, на котором знаки функции и ее второй производной совпадают.

Алгоритм метода Ньютона приведен на рис. 1.17.

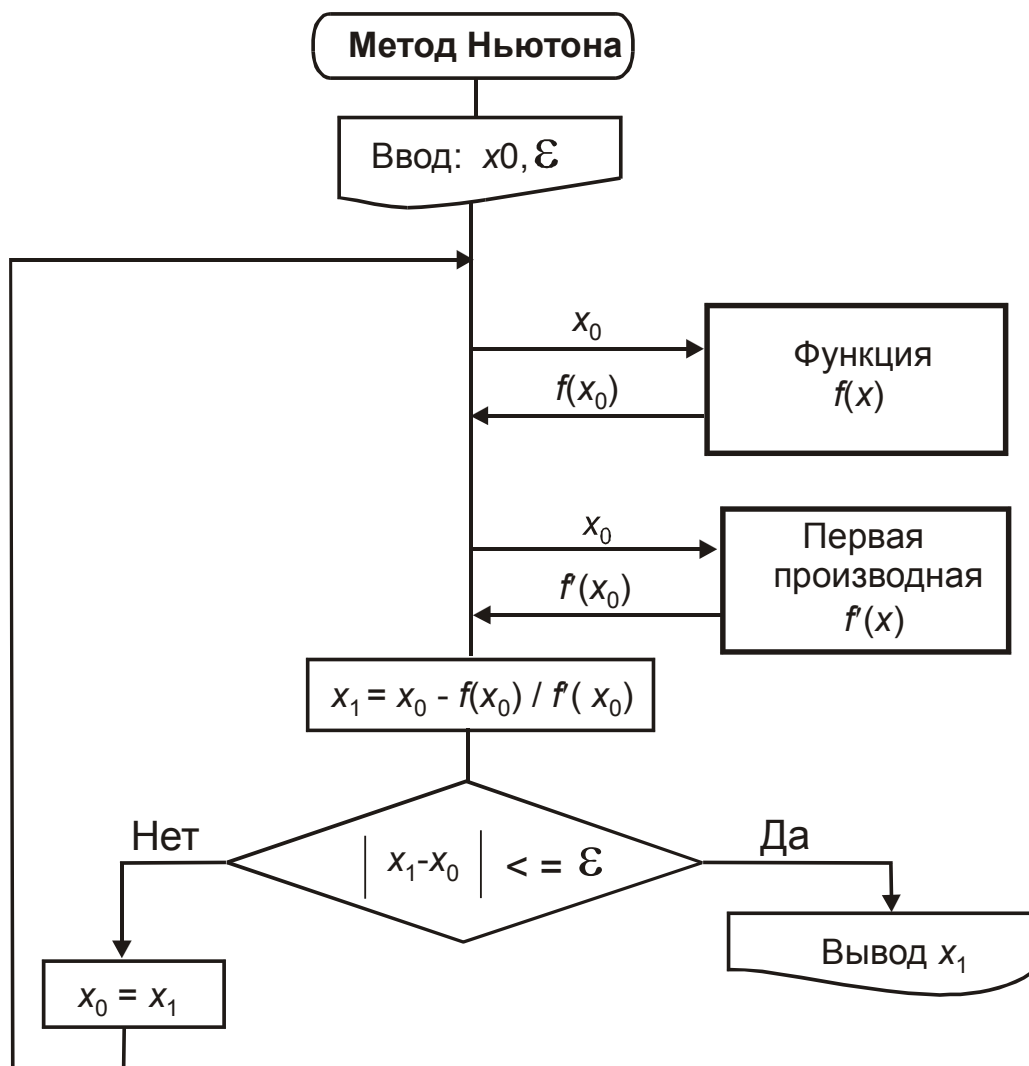


Рис. 1.17. Алгоритм метода Ньютона

1.3.1.6. Видоизмененный метод Ньютона

Вычисления упрощаются, если производную вычислять один раз – в точке начального приближения x_0 .

Итерационная формула видоизмененного метода Ньютона –

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.7)$$

1.3.2. Оптимальная последовательность расчета схем теплоэнергетических установок

Сложность и трудоемкость расчета тепловых схем ТЭС и АЭС в значительной мере обусловлены наличием расчетных циклов как в технологической схеме, так и в элементах оборудования. С моделированием тепловых схем на основе комплексного подхода можно ознакомиться в [5, 9–10].

Существование цикла означает, что параметры, выходящие из какого-либо участка схемы, влияют на значения потоков, входящих в данный участок схемы. Для схемы на рис. 1.18 количество отсепарированной воды $\alpha_{с.в.}$ зависит от расхода α_c , входящего в сепаратор (С) пара из части высокого давления (ЧВД) турбины. Вместе с тем величина α_c определяется с помощью расхода пара α_1 на подогреватель П1: $\alpha_c = \alpha_0 - \alpha_1$, в то время как значение α_1 , в свою очередь, зависит от $\alpha_{с.в.}$. Таким образом, в данной схеме поток α_c выступает в качестве *обратной связи*, а совокупность элементов **ЧВД–С–П1** представляет собой *замкнутый контур* или *цикл*.

Расчет замкнутого контура основывается на *разрыве обратных связей* в нем. Такой разрыв делает схему *разомкнутой*, что позволяет осуществить последовательный безытерационный ее расчет. Например, разорвав связь α_c между ЧВД и сепаратором в схеме на рис. 1.18, получим новую схему, лишенную контура между элементами **ЧВД, С, П1** (см. рис. 1.19). В разомкнутой схеме появился новый входящий в сепаратор поток α_c^* . Если задать значение потока α_c^* , то можно определить $\alpha_c = f(\alpha_c^*)$, рассчитав последовательно элементы **С, П1, ЧВД**.

Для того чтобы все параметры в разомкнутой схеме соответствовали параметрам в замкнутой, необходимо выполнение равенства

$$\alpha_c^* = \alpha_c$$

или

$$\alpha_c^* = f(\alpha_c^*).$$

Этим как бы замыкаются разорванные связи.

Последнее равенство есть математическое подтверждение возможности использования для решения задачи методов последовательных приближений.

Пример 1.13. Пусть для схемы на рис. 1.18 известны

$$h_0, h_1, h_2, h_3, h_c, h_k, h'_1, h'_2, h'_3, h'_k, h_{в1}, h_{в2}, \alpha_0 = 1.$$

Найти относительные расходы пара и воды.

Последовательность расчета может быть следующей.

1. Задаем начальное приближение $\alpha_c^* = 0,8$.
2. Из уравнений материального и теплового балансов сепаратора

$$\alpha_c^* = \alpha_{с.п.} + \alpha_{с.в.}, \quad (1.7)$$

$$\alpha_c^* \cdot h_2 \cdot 0,99 = \alpha_{с.п.} \cdot h_c + \alpha_{с.в.} \cdot h'_2 \quad (1.8)$$

определяем $\alpha_{с.п.}$ и $\alpha_{с.в.}$.

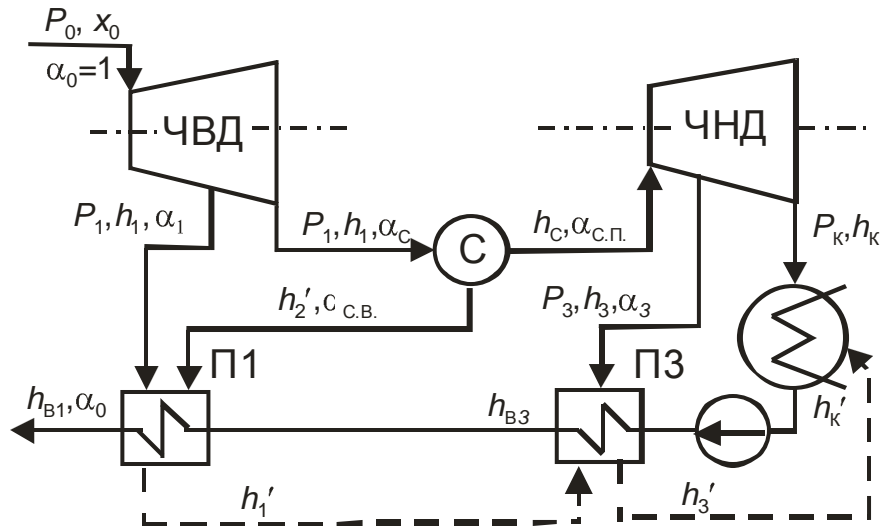


Рис. 1.18. Схема паротурбинной установки

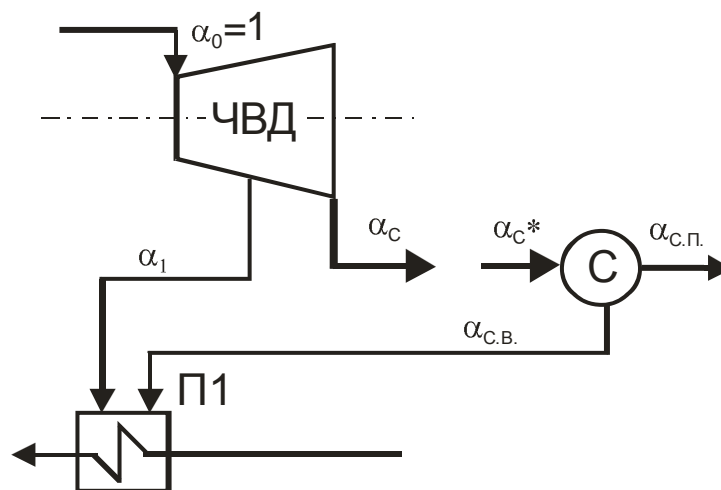


Рис. 1.19. Фрагмент схемы паротурбинной установки

3. Составляем уравнение теплового баланса для подогревателя П1

$$(\alpha_1 \cdot (h_1 - h'_1) + \alpha_{с.в.} \cdot (h'_2 - h'_1)) \cdot 0,98 = \alpha_0 \cdot (h_{в1} - h_{в3}) \quad (1.9)$$

и определяем из него α_1 .

4. Рассчитываем расход пара на выходе из ЧВД

$$\alpha_c = \alpha_0 - \alpha_1.$$

5. Сравниваем α_c и α_c^* . Если $\left| \frac{\alpha_c - \alpha_c^*}{\alpha_c} \right| > \varepsilon$, где ε – наперед задан-

ная погрешность, то полагаем $\alpha_c^* = \alpha_c$ и расчет повторяем, начиная с п. 2. В противном случае переходим к п. 6.

6. Рассчитываем подогреватель ПЗ, не входящий в замкнутый контур, и определяем расход пара α_3 :

$$(\alpha_3 \cdot (h_3 - h'_3) + (\alpha_1 + \alpha_{c.в.}) \cdot (h'_1 - h'_3)) \cdot 0,98 = \alpha_0 \cdot (h_{в3} - h'_k). \quad (1.10)$$

Блок-схема расчета относительных расходов рабочего тела для схемы на рис. 1.18 приведена на рис. 1.20.

Перед составлением программы расчета относительных расходов требуется переписать уравнения (1.7–1.10), выразив из них соответствующие переменные:

$$\alpha_{c.п.} = (\alpha_c \cdot h_2 \cdot 0,99 - \alpha_c \cdot h'_2) / (h_c - h'_2); \quad (a)$$

$$\alpha_{c.в.} = \alpha_c - \alpha_{c.п.}; \quad (b)$$

$$\alpha_1 = (\alpha_0 \cdot (h_{в1} - h_{в3}) / 0,98 - \alpha_{c.в.} \cdot (h'_2 - h'_1)) / (h_1 - h'_1); \quad (c)$$

$$\alpha_3 = \dots \quad (d)$$

Программа, соответствующая алгоритму на рис. 1.20, представлена ниже.

```
PROGRAM ITERAC;
USES TABL1;
VAR h0,h1,h2,hc,hk,... : VAR;
BEGIN
  { Ввод исходных данных } A0:=1; Eps=0.005; ...
  Ac:=0.8; { Начальное приближение }
  REPEAT
    Ac_p:= ...; { Из уравнения a }
    Ac_w:= ...; { Из уравнения b }
    A1:=...; { Из уравнения c }
    AAc:=Ac; { Переприсвоение }
    Ac:=A0-A1; { Уточнение }
  B:=(AAc-Ac)/Ac;
  UNTIL ABS(B)<=Eps;
  A3:=...; { Из уравнения d }
  WRITELN('A1=',A1:7:4,'Ac=', Ac:7:4, ...);
  READLN;
END.
```

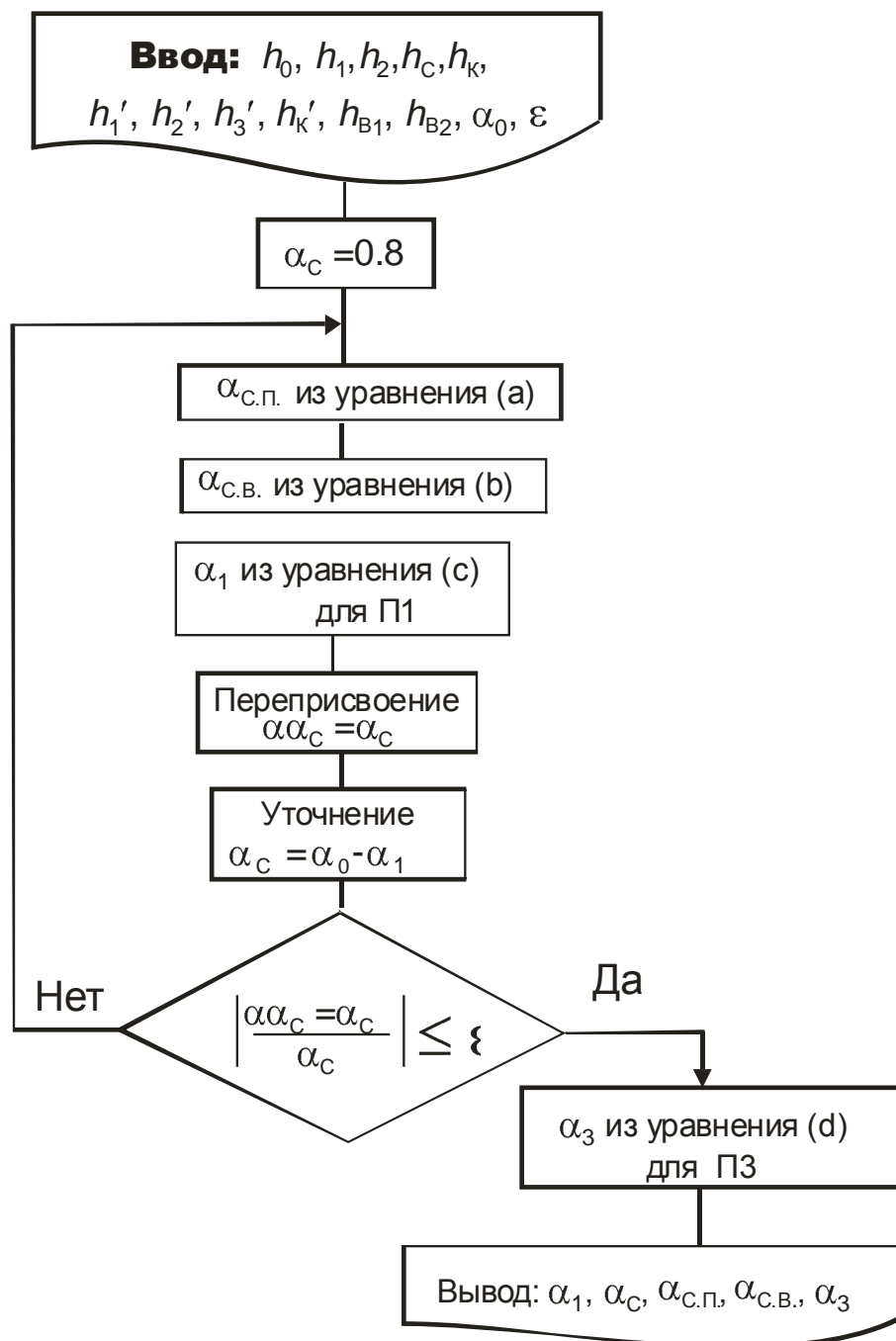


Рис. 1.20. Алгоритм расчета относительных расходов пара и воды

Анализ сложных схем показывает, что разрыв обратных связей можно осуществить множеством путей, следовательно, можно получить множество последовательностей расчета.

Возникает задача поиска наиболее рационального пути, при котором уменьшается порядок системы уравнений и время ее счета. Покажем существующие приемы снижения трудоемкости итерационного расчета на примере схемы на рис. 1.21 [5].

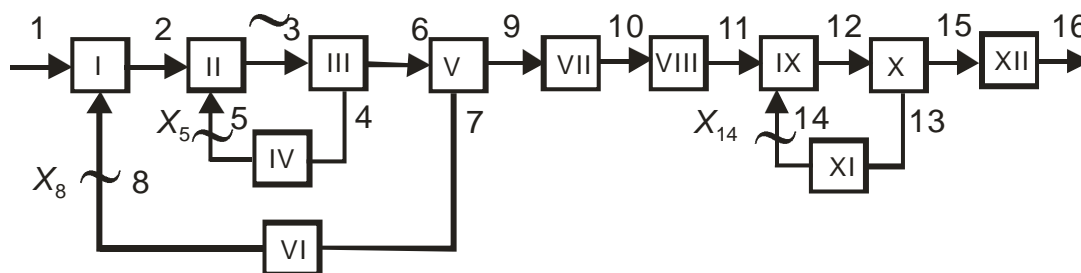


Рис. 1.21

1-й способ. Разорвем потоки **5, 8, 14**. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} X_5 = f(X_5); \\ X_8 = f(X_8); \\ X_{14} = f(X_{14}). \end{cases} \quad (1.11)$$

Если потоки однопараметрические, например, под неизвестными подразумеваются расходы рабочего тела, то система (1.11) включает три уравнения. Если же потоки трехпараметрические (расход G , давление P , энтальпия h):

$$X_5 = f(G_5, P_5, h_5); \quad X_8 = f(G_8, P_8, h_8); \quad X_{14} = f(G_{14}, P_{14}, h_{14}),$$

то система (1.11) включает уже 9 уравнений.

2-й способ. Разрыв обратных связей можно осуществить в два этапа.

I этап. Сначала разрываются связи **5** и **8** и рассчитывается совокупность элементов **I–VI**, что означает расчет системы

$$\begin{cases} X_5 = f(X_5); \\ X_8 = f(X_8), \end{cases}$$

после этого рассчитываются элементы **VII, VIII**, не охваченные контуром.

II этап. Разрывается связь **14** и рассчитывается совокупность элементов **IX–X–XI**, охваченных системой уравнений

$$\{X_{14} = f(X_{14}),$$

а затем выполняется расчет последнего элемента **XII** схемы.

Достоинства 2-го способа – элементы **VII, VIII** и **XII**, не охваченные контурами, рассчитываются один раз.

3-й способ. Разорвем поток **3**. Это позволит заменить систему уравнений

$$\begin{cases} X_5 = f(X_5); \\ X_8 = f(X_8) \end{cases}$$

системой более низкого порядка

$$\{X_3 = f(X_3).$$

Таким образом, при решении систем уравнений ТЭУ итерационными способами надо помнить:

1. Правильным выбором разрываемых потоков (обратных связей) можно существенно уменьшить размерность решаемой задачи. Очень часто задачу решения системы уравнений высокого порядка можно свести к решению нескольких систем более низкого порядка.

2. Размерность решаемой задачи можно снизить с помощью двух операций:

а) выделением в схеме элементов, охваченных контурами, и элементов, которые не входят ни в один из контуров;

б) выбором внутри контура наилучшей совокупности потоков, разрыв которых превращает контур в разомкнутую последовательность.

Учет рекомендаций, изложенных выше, позволяет успешно использовать в итерационных расчетах *метод Зейделя*.

1.3.3. Решение системы нелинейных уравнений методом простой итерации

Задана система n нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Чтобы использовать метод простой итерации, систему (1.12) надо представить в виде

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (1.13)$$

Затем, задав n начальных приближений $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$ и столько же значений погрешностей по каждой переменной $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$, можно выполнить итерационный расчет согласно блок-схеме на рис. 1.22.

Практическая реализация этого алгоритма наталкивается на значительные проблемы сходимости, которые в большинстве случаев могут быть преодолены, если квалификация специалиста позволяет оценить начальные приближения очень близкими к значениям корней.

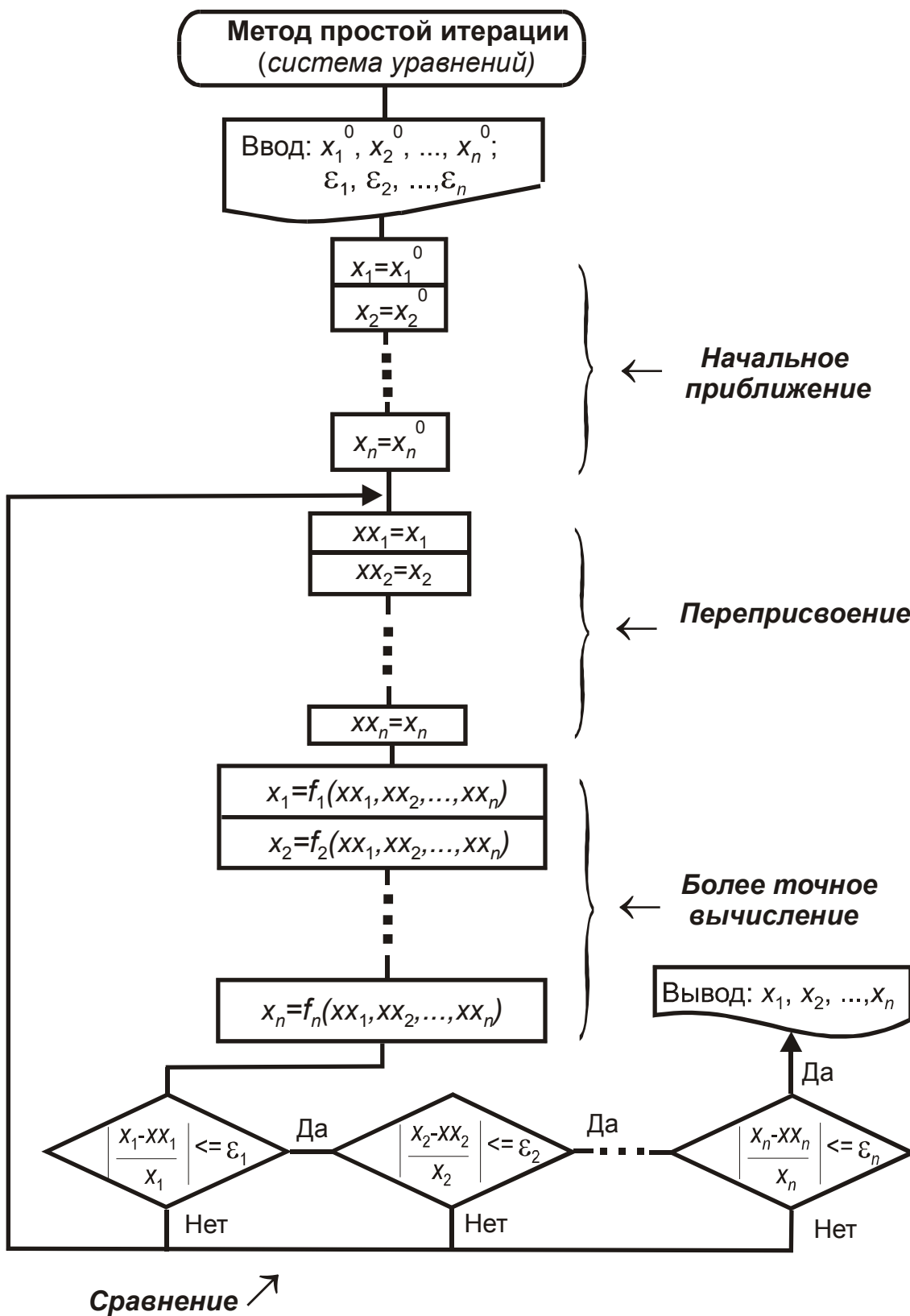


Рис. 1.22. Алгоритм метода простой итерации для системы уравнений

1.3.4. Решение системы нелинейных уравнений методом Зейделя

Основная идея метода заключается в том, что *при вычислении $(k+1)$ -го приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$ -е приближения неизвестных x_1, x_2, \dots, x_{i-1} .*

Сравнение метода Зейделя с методом простой итерации приведем для системы трех уравнений.

Метод простой итерации		Метод Зейделя	
Начальные приближения x_1^0, x_2^0, x_3^0			
Шаг 1	$x_1^1 = \varphi_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$	Шаг 1	$x_1^1 = \varphi_1(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$
	$x_2^1 = \varphi_2(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$		$x_2^1 = \varphi_2(x_1^1, x_2^0, x_3^0)$
	$x_3^1 = \varphi_3(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$		$x_3^1 = \varphi_3(x_1^1, x_2^1, x_3^0)$
Шаг 2	$x_1^2 = \varphi_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$	Шаг 2	$x_1^2 = \varphi_1(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$
	$x_2^2 = \varphi_2(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$		$x_2^2 = \varphi_2(x_1^2, x_2^1, x_3^1)$
	$x_3^2 = \varphi_3(x_1^1, x_2^1, x_3^1)$		$x_3^2 = \varphi_3(x_1^2, x_2^2, x_3^1)$
и т. д.		и т. д.	

1.3.5. Использование метода половинного деления в поверочном тепловом расчете поверхностного пароводяного подогревателя

Постановка задачи

Для регенеративного поверхностного подогревателя ТЭС (рис. 1.23) известны:

P_1, t_1 – давление (МПа) и температура ($^{\circ}\text{C}$) греющего пара;

G_B – расход нагреваемой воды, кг/с;

t_{B1} – температура воды на входе, $^{\circ}\text{C}$;

F – площадь теплообменной поверхности, м^2 .

Составить математическую модель теплообменника с целью расчета температуры воды t_{B2} на выходе из подогревателя (недогрева θ).

Изменением теплоемкости воды c_p пренебречь.

Математическое описание задачи

В основу расчета положены два уравнения

1) уравнение теплового баланса

$$Q = G_1 \cdot (h_1 - h'_1) \cdot \eta = G_B \cdot (t_{B2} - t_{B1}) \cdot c_p; \quad (1.14)$$

2) уравнение теплопередачи

$$Q = K \cdot F \cdot (t_{B2} - t_{B1}) / \ln((t_{s1} - t_{B1}) / (t_{s1} - t_{B2})). \quad (1.15)$$

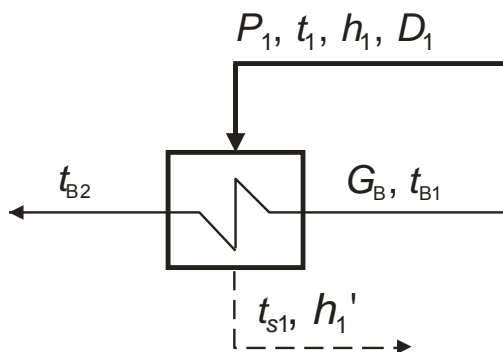


Рис. 1.23. Схема пароводяного подогревателя

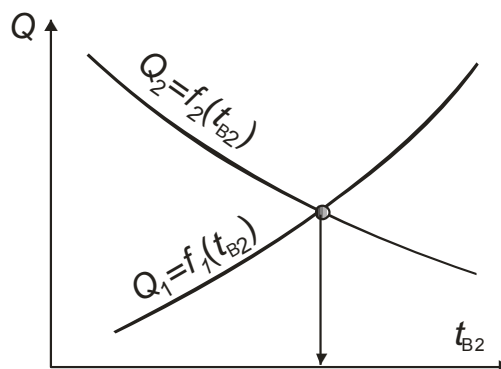


Рис. 1.24. Графическое решение уравнений (1.13) и (1.14)

Термодинамические параметры

- энтальпия пара в отборе $h_1 = f(P_1, t_1)$;
- температура и энтальпия дренажа греющего пара в состоянии насыщения

$$t_{s1} = f(P_1);$$

$$h'_1 = f(P_1).$$

Если коэффициент теплопередачи K не задан, то необходимо написать ряд зависимостей для его нахождения. Чтобы не загромождать алгоритм метода половинного деления, положим $K = \text{const}$, что реально при малых отклонениях от расчетного режима.

Выбор численного метода

Чтобы определить t_{B2} , надо совместно решить систему уравнений (1.14–1.15). Аналитического решения у этой задачи нет. Для ее решения традиционно применяется *графо-аналитический метод*. Согласно этому методу принимается ряд значений t_{B2} , для которых вычисляются значения Q по формулам (1.14) и (1.15) и строятся две графические за-

висимости $Q_1 = f_1(t_{B2})$ и $Q_2 = f_2(t_{B2})$. Точка пересечения полученных графиков дает решение задачи (см. рис. 1.24).

Графо-аналитический метод не годится для компьютерных расчетов, поэтому приведем систему уравнений (1.14–1.15) к уравнению вида (1.1) и применим один из численных методов. Для этого приравняем правые части уравнений теплового баланса и теплопередачи и перенесем все в одну сторону

$$G_B \cdot (t_{B2} - t_{B1}) \cdot c_p - \frac{K \cdot F \cdot (t_{B2} - t_{B1})}{\ln \left(\frac{t_{s1} - t_{B1}}{t_{s1} - t_{B2}} \right)} = 0. \quad (1.17)$$

Имеем нелинейное трансцендентное уравнение $f(t_{B2}) = 0$, к которому можно применить *метод половинного деления*.

Определим границы отрезка $[a, b]$, содержащего искомый корень t_{B2} :

$$a = t_{B1} + \delta t;$$

$$b = t_s - \delta t,$$

где δt – малое число, например: $\delta t = 0,01$.

Для использования метода *простой итерации* уравнение (1.16) надо представить в виде $t_{B2} = f(t_{B2})$

$$t_{B2} = t_{B1} + \frac{K \cdot F}{G_B \cdot c_p} \cdot \frac{(t_{B2} - t_{B1})}{\ln \left(\frac{t_{s1} - t_{B1}}{t_{s1} - t_{B2}} \right)}. \quad (1.17)$$

Начальное приближение можно оценить $t_{B2}^0 = t_{s1} - 5$.

Сходимость итерационного процесса для зависимости (1.17) не гарантирована, а ее проверка увеличивает трудоемкость расчета.

Когда известен отрезок, содержащий корень, наиболее простым и успешным является *метод половинного деления*.

Алгоритм расчета t_{B2} методом половинного деления

Последовательность расчета t_{B2} представлена в виде блок-схемы на рис. 1.25.

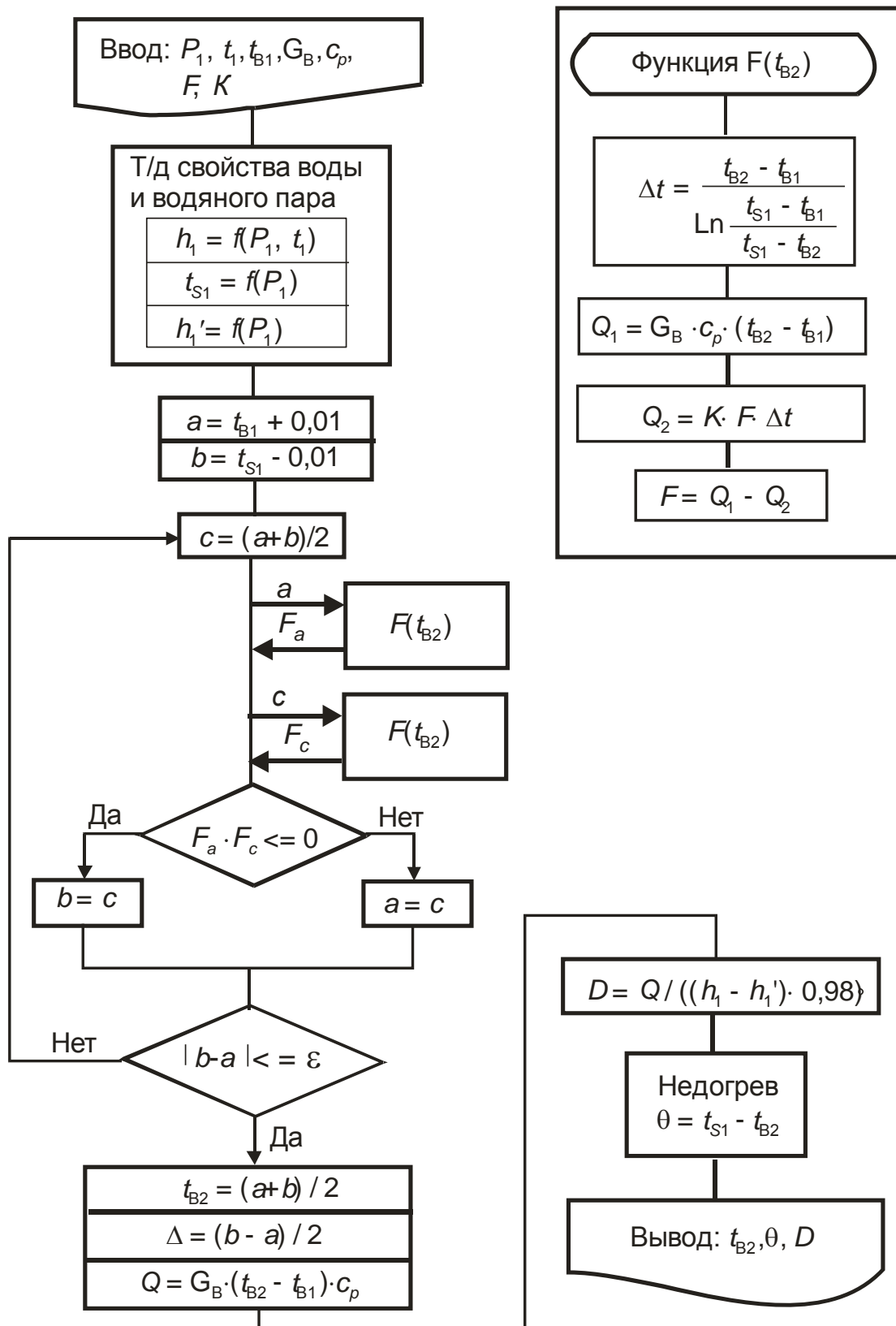


Рис. 1.25. Алгоритм поверочного теплового расчета теплообменника

Программа расчета $t_{в2}$ методом половинного деления

```
Program POL_DEL;
Uses TABL1;      { Подключение модуля расчета т/д параметров }
Const Cp=4,19;   KPD:=0,99;
Var P1, t1,... : real;
  Function F(тв2: real): real;
  Begin { Начало функции}
    delt:= (тв2-тв1)/ln((ts1-тв1)/(ts1-тв2));
    Q1:= Gв*(тв2-тв1)*Cp;
    Q2:= K*F* delt;
    F:=Q1-Q2;
  End; { Конец функции}
Begin {Начало основной программы}
  {Ввод исходных данных в программе}
  P1:=0,1; {МПа}   t1:=240; {C}   Gв:=100; {кг/с}   тв1:=70; {C}
  F:=380; {м²}   K:=3; {КВт/(м²*К)}
  Eps:=0,05;      {Погрешность расчета}
  {Конец ввода исходных данных}
  h1:=H_PT(P1,t1); { Обращение к функции из модуля TABL1 }
  ts1:=TSP(P1);    { Обращение к функции из модуля TABL1 }
  h1I:= TSW_P(P1); { Обращение к функции из модуля TABL1 }
  a:=тв1+0.01;
  b:=ts1-0.01;
Repeat
  c:=(a+b)/2;
  F1:=F(a)*F(c);
  If F1<=0      then b=c      else a=c;
Until (b-a)<=Eps;
тв2:=(a+b)/2;
Ned:=ts1-тв2;      {Недогрев, °C}
Q:=Gв*(тв2-тв1)*Cp; {Тепловая нагрузка, кВт}
D:=Q/(h1-h1I)/KPD; {Расход пара, кг/с}
Writeln (Q:9:1, D:5:1, тв2:6:1);
Readln;
End. {Конец программы}
```

1.3.6. Использование метода Зейделя для расчета теплопередачи при конденсации пара в поверхностном теплообменнике

Постановка задачи

Для регенеративного поверхностного подогревателя ТЭС (рис. 1.23) известны:

P_1, t_1 – давление и температура греющего пара;

G_B – расход нагреваемой воды;

t_{B1}, t_{B2} – температура воды на входе и выходе;

P_B – давление воды;

w – скорость воды;

$d_n, d_{вн}, \delta_{ст}$ – соответственно наружный, внутренний диаметр и толщина стенки трубок теплообменной поверхности;

H – характерный геометрический размер (для вертикальных теплообменников – среднее расстояние между перегородками);

$\lambda_{ст}$ – теплопроводность стали.

Составить математическую модель теплообменника с целью расчета коэффициента теплопередачи K и площади поверхности F .

Математическое описание задачи

Тепловой баланс

а) по воде $Q = G_B \cdot (h_{B2} - h_{B1})$;

б) по пару $Q = D_1 \cdot (h_1 - h'_1) \cdot 0,98$.

Уравнение теплопередачи

$$Q = K \cdot F \cdot \Delta t.$$

Среднелогарифмический температурный напор

$$\Delta t = \frac{t_{B2} - t_{B1}}{\ln \left(\frac{t_{s1} - t_{B1}}{t_{s1} - t_{B2}} \right)}.$$

Средняя температура воды

$$t_{cp} = t_{s1} - \Delta t.$$

Термодинамические параметры

а) воды: $h_{B1} = f(P_B, t_{B1})$; $h_{B2} = f(P_B, t_{B2})$;

б) пара (дренажа): $h_1 = f(P_1, t_1)$; $t_{s1} = f(P_1)$;

$$h'_1 = f(P_1); r = h_1 - h'_1.$$

Теплофизические параметры

а) воды: $\lambda_B = f(P_B, t_{cp})$; $\mu_B = f(P_B, t_{cp})$;

$\nu_B = f(P_B, t_{cp})$; $Pr_B = f(P_B, t_{cp})$;

б) пленки конденсата:

$\lambda' = f(t_{s1})$;

$\mu' = f(t_{s1})$;

$\nu' = f(t_{s1})$;

$\rho' = f(t_{s1})$;

$Pr' = f(t_{s1})$.

Коэффициент теплоотдачи при конденсации пара зависит от числа Рейнольдса пленки конденсата

$$Re_K = \frac{q \cdot H}{r \cdot \rho' \cdot \nu'},$$

где q – плотность теплового потока, Вт/м²;

H – характерный геометрический размер (для ПНД – среднее расстояние между перегородками, для ПВД – произведение числа змеевиков в пакете на наружный диаметр трубок $n \cdot d_H$).

Если $Re_K < 100$, то

$$\alpha_1 = 1,18 \cdot \lambda' \cdot \left(\frac{g}{(\nu')^2} \right)^{1/3} \cdot Re_K^{-1/3}.$$

Для $Re_K > 100$

$$\alpha_1 = \lambda' \cdot \left(\frac{g}{(\nu')^2} \right)^{1/3} \cdot \frac{0,16 \cdot (Pr')^{1/3} \cdot Re_K}{Re_K - 100 + 63,2 \cdot (Pr')^{1/3}}.$$

Коэффициент теплоотдачи при вынужденном течении однофазной среды внутри труб

$$\alpha_2 = 0,021 \cdot \left(\frac{\lambda_B}{d_{BH}} \right) \cdot \left(\frac{\lambda_B \cdot d_{BH}}{\nu_B} \right)^{0,8} \cdot Pr_B^{0,43}.$$

Алгоритм расчета температуры воды методом Зейделя

Последовательность расчета t_{B2} представлена в виде блок-схемы на рис. 1.26.

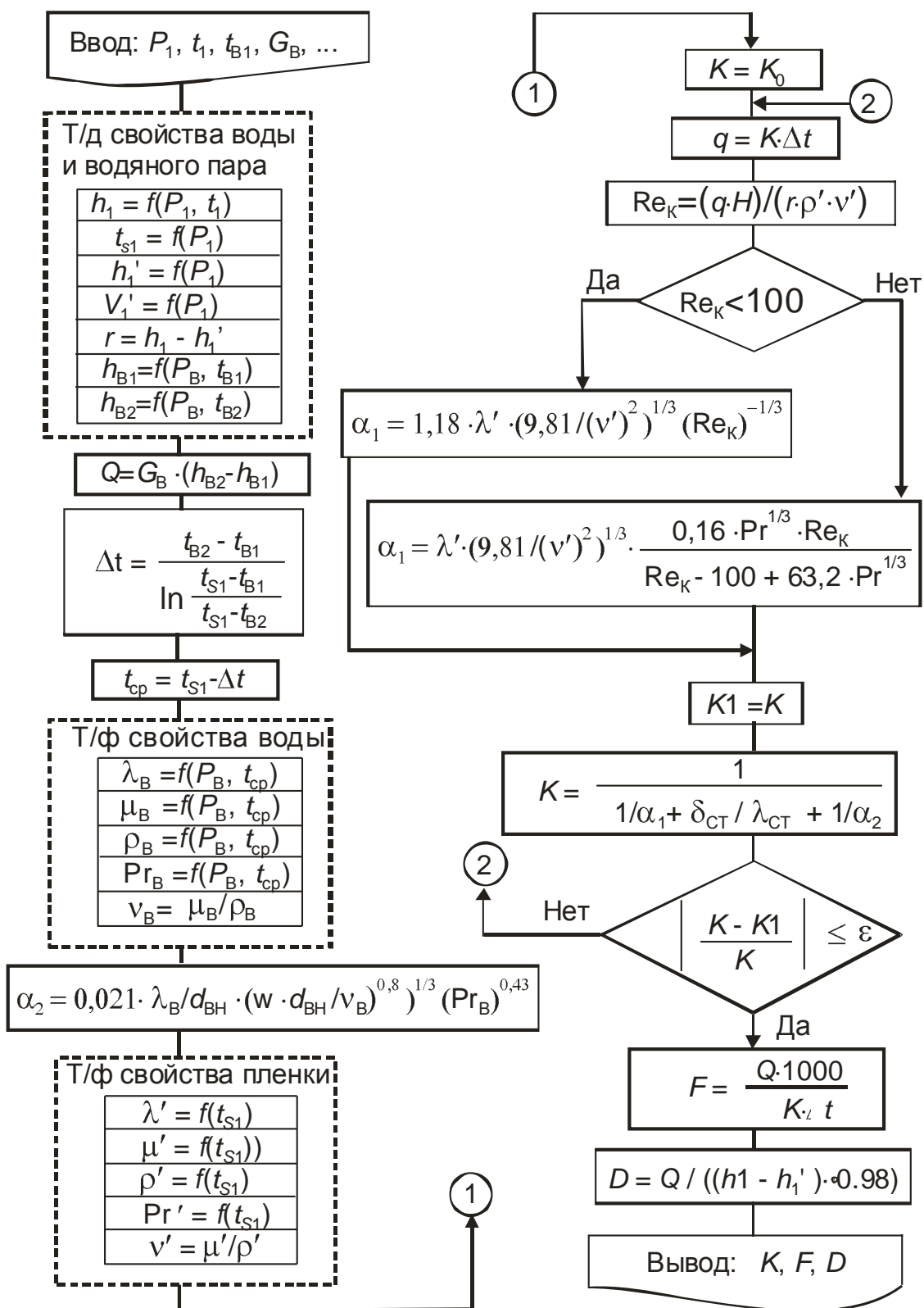


Рис. 1.26. Алгоритм теплового расчета теплообменника при конденсации пара

1.3.7. Использование метода Зейделя при переводе конденсационной турбоустановки в теплофикационный режим

Постановка задачи

Исходная схема конденсационной турбоустановки с заданными начальными параметрами P_0, t_0 и давлением в конденсаторе P_k^0 приведена на рис. 1.27. Из расчета схемы на конденсационный режим (будем в дальнейшем называть его *расчетным*) с максимальным расходом свежего пара D_0 известны параметры и расходы рабочего тела во всех элементах тепловой схемы:

$P_1^0, h_1^0, h_1'^{(0)}, D_1^0$ – для первого регенеративного отбора и подогревателя П1;

$P_2^0, h_2^0, h_2^{\prime(0)}, D_2^0$ – для второго отбора и подогревателя П2;

$$D_{\kappa}^0 = D_0 - D_1^0 - D_2^0 - \text{расход пара в конденсатор,}$$

N_3^0 – электрическая мощность турбины.

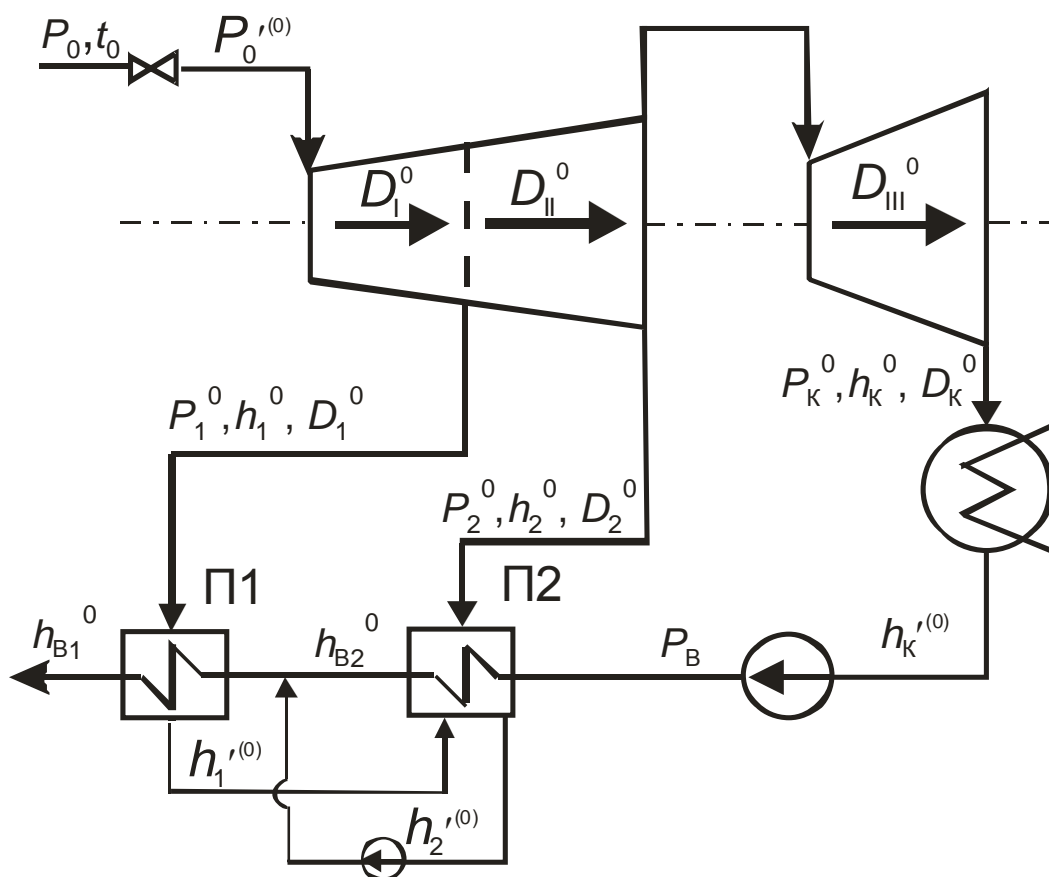


Рис. 1.27. Схема турбоустановки до реконструкції

С целью отпуска заданного количества тепла Q от турбины устанавливается сетевой подогреватель (СП) (рис. 1.28), на который организуется подача пара из камеры нижнего нерегулируемого отбора.

Требуется рассчитать тепловую схему турбоустановки в новом (теплофикационном) режиме при заданной температуре t_{oc} обратной сетевой воды и определить электрическую мощность турбины, учитывая, что зависимость внутреннего относительного КПД η'''_{oi} последнего отсека от объемного расхода пара определена в результате испытаний. Считать, что КПД проточной части первых двух отсеков η'_{oi} и η''_{oi} заданы и остаются постоянными.

Кроме того, заданы:

$P_0 = \text{const}$; $t_0 = \text{const}$, $D_0 = \text{const}$;

недогрев в регенеративных подогревателях θ ;

недогрев в сетевом подогревателе θ_c ;

давление питательной воды P_B .

Система парораспределения – дроссельная.

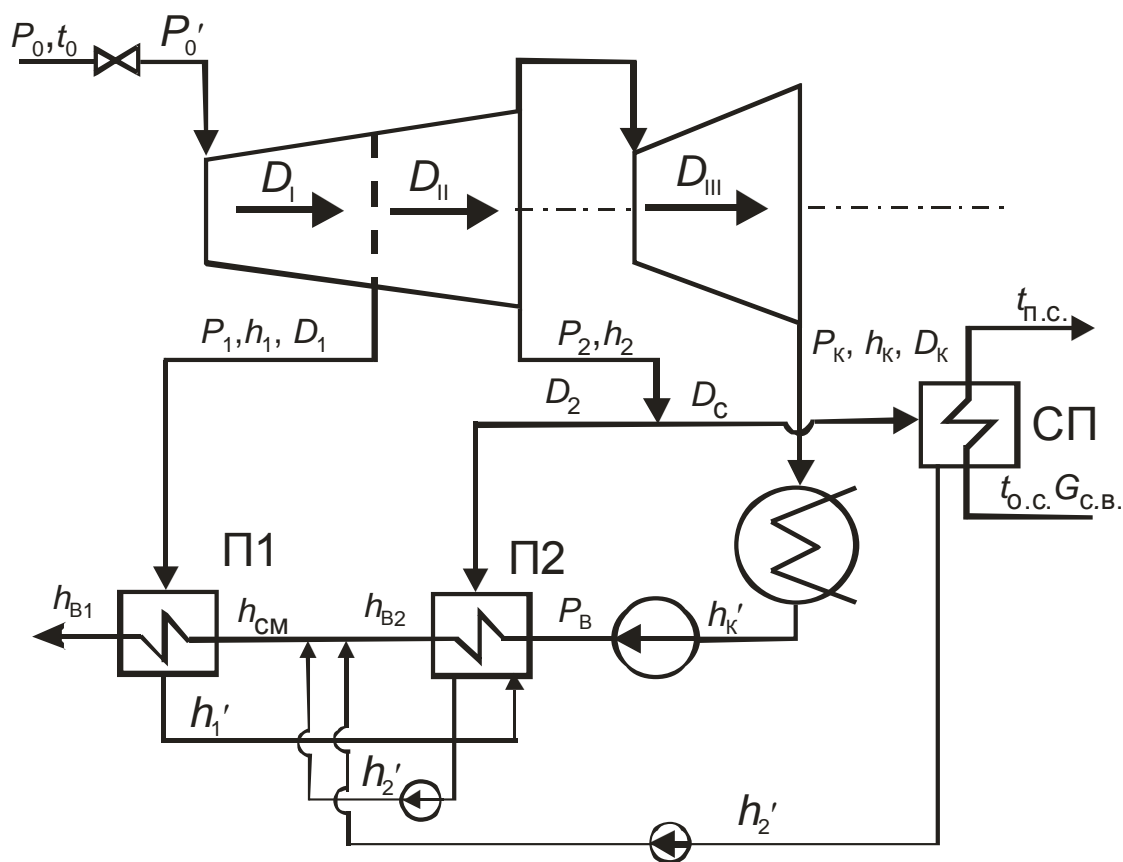


Рис. 1.28. Схема турбоустановки после реконструкции

Качественное описание задачи

При заданном расходе свежего пара D_0 дополнительный отпуск пара из нерегулируемого отбора D_c на СП приведет к изменению расхода пара по проточной части турбины по сравнению с их значениями в расчетном режиме. В соответствии с зависимостью Стодолы – Флюгеля это вызовет изменение давления пара в турбине. Значения P_1 и P_2 понизятся по сравнению со своими исходными значениями P_1^0 и P_2^0 .

При неизменном положении регулирующих клапанов (РК) ($P'_0 = \text{const}$) падение давления по проточной части вызовет увеличение расхода свежего пара D_0 . Учитывая, что расход ограничен максимальным значением, для поддержания $D_0 = \text{const}$ требуется дополнительное дросселирование в РК, что приведет к снижению давления пара P'_0 на входе в первую ступень турбины (дроссельная система парораспределения) либо в сопловой сегмент регулирующей ступени (сопловая система). Качественная картина изменения параметров пара в турбине с дроссельным парораспределением в связи с организацией нерегулируемого теплофикационного отбора приведена на рис. 1.29.

Практические расчеты режимов отпуска тепла из нерегулируемых отборов конденсационных турбин при небольшой доле тепловой нагрузки показывают, что изменение давлений пара существенно в последних ступенях и незначительно для верхних. Поэтому очень часто дополнительным дросселированием в РК можно пренебречь.

Математическое описание модели с целью расчета схемы в теплофикационном режиме

Абсолютные расходы пара через отсеки турбины в расчетном режиме:

$$D_I^0 = D_0;$$

$$D_{II}^0 = D_0 - D_I^0;$$

$$D_{III}^0 = D_0 - D_I^0 - D_2^0.$$

Расход пара на сетевой подогреватель

$$D_c = Q / (h_2 - h'_2) / 0,98. \quad (1.18)$$

Тепловой баланс сетевого подогревателя по воде

$$Q = G_{c.v.} \cdot (t_c - h_{oc}) \cdot c_p. \quad (1.19)$$

Температура сетевой воды за СП

$$t_c = t_{s2} - \theta_c. \quad (1.20)$$

Расходы по отсекам турбины в новом режиме (см. рис. 1.28)

$$D_I = D_0;$$
$$D_{II} = D_0 - D_{III}; \quad (1.21)$$

$$D_K = D_{III} = D_0 - D_I - D_2 - D_c. \quad (1.22)$$

Параметры пара в конденсаторе

$$t_{sk} = t_{bl}^0 + (t_{sk}^0 - t_{bl}^0) \cdot D_K / D_K^0; \quad (1.23)$$

$$P_K = f(t_{sk}), \quad (1.24)$$

где t_{bl}^0 – расчетная температура охлаждающей воды на входе в конденсатор; можно принять: $t_{bl}^0 = 12^\circ\text{C}$ независимо от режима;

t_{sk}^0 – температура насыщения в конденсаторе при давлении P_K^0 в расчетном режиме.

Уравнения Стодолы – Флюгеля для I, II и III отсеков турбины соответственно:

$$\frac{D_K}{D_K^0} = \sqrt{\frac{P_2^2 - P_K^2}{(P_2^0)^2 - (P_K^0)^2}} \Rightarrow P_2; \quad (1.25)$$

$$\frac{D_{II}}{D_{II}^0} = \sqrt{\frac{P_1^2 - P_2^2}{(P_1^0)^2 - (P_2^0)^2}} \Rightarrow P_1; \quad (1.26)$$

$$\frac{D_0}{D_0^0} = \sqrt{\frac{(P_0')^2 - P_1^2}{(P_0'^0)^2 - (P_1^0)^2}} \Rightarrow P_0'. \quad (1.27)$$

Уравнения теплового баланса для регенеративных подогревателей и точки смешения:

$$D_1 \cdot (h_1 - h'_1) \cdot 0,98 = D_{п.в.} \cdot (h_{bl} - h_{см}); \quad (1.28)$$

$$D_2 \cdot (h_2 - h'_2) \cdot 0,98 + D_1 \cdot (h'_1 - h'_2) \cdot 0,98 = D_K \cdot (h_{b2} - h'_K); \quad (1.29)$$

$$D_1 + D_2 + D_c + D_K = D_{п.в.};$$

$$((D_1 + D_2 + D_c) \cdot h'_2 + D_K \cdot h'_K) \cdot 0,99 = D_{п.в.} \cdot h_{см}. \quad (1.30)$$

Параметры пара в процессе расширения в турбине (см. рис. 1.29):

$$h_0 = f(P_0, t_0); \quad (1.31)$$

$$t'_0 = f(P'_0, h_0); \quad (1.32)$$

$$S_1 = f(P'_0, t'_0); \quad (1.33)$$

$$h_{1t} = f(P_1, S_1); \quad (1.34)$$

$$h_1 = h_0 - (h_0 - h_{1t}) \cdot \eta'_{oi}; \quad (1.35)$$

$$S_2 = f(P_1, h_1); \quad (1.36)$$

$$h_{2t} = f(P_2, S_2); \quad (1.37)$$

$$h_2 = h_1 - (h_1 - h_{2t}) \cdot \eta''_{oi}; \quad (1.38)$$

$$S_3 = f(P_2, h_2); \quad (1.39)$$

$$V_2 = f(P_2, h_2); \quad (1.40)$$

$$h_{kt} = f(P_k, S_3); \quad (1.41)$$

$$h_k = h_2 - (h_2 - h_{kt}) \cdot \eta^{\text{III}}_{oi}; \quad (1.42)$$

$$V_k = f(P_k, h_k); \quad (1.43)$$

$$\eta^{\text{III}}_{oi} = f(V_2, V_k, D_k). \quad (1.44)$$

Параметры дренажей:

$$h'_1 = f(P_1); \quad (1.45)$$

$$t_{s1} = f(P_1); \quad (1.46)$$

$$h'_2 = f(P_2); \quad (1.47)$$

$$t_{s2} = f(P_2); \quad (1.48)$$

$$h'_k = f(P_k). \quad (1.49)$$

Параметры воды на выходе из подогревателей:

$$t_{B1} = t_{s1} - \theta; \quad (1.50)$$

$$h_{B1} = f(P_B, t_{B1}); \quad (1.51)$$

$$t_{B2} = t_{s2} - \theta; \quad (1.52)$$

$$h_{B2} = f(P_B, t_{B2}). \quad (1.53)$$

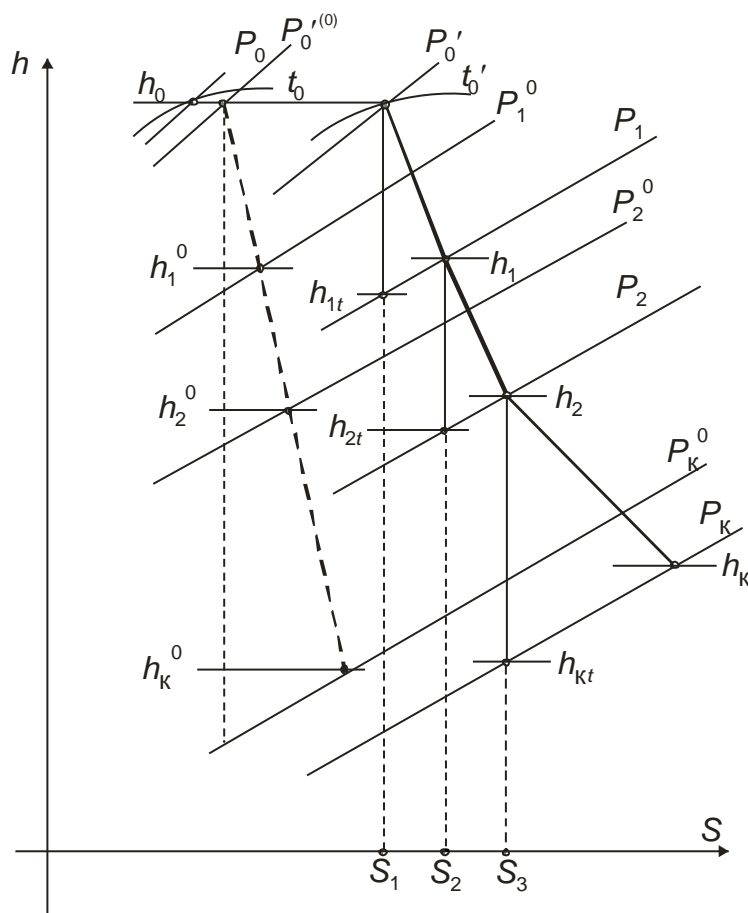


Рис. 1.29. Процесс расширения пара в турбине в конденсационном режиме (пунктиром) и теплофикационном (сплошная линия)

Выбор метода решения задачи

Для простейшей схемы турбоустановки имеем сложную систему (1.19–1.54), состоящую из тридцати шести уравнений с тридцатью шестью неизвестными: 1) D_c ; 2) $G_{c.b.}$; 3) t_c ; 4) D_{II} ; 5) D_k ; 6) t_{sk} ; 7) P_k ; 8) P_2 ; 9) P_1 ; 10) P'_0 ; 11) D_1 ; 12) D_2 ; 13) h_{cm} ; 14) h_0 ; 15) t'_0 ; 16) S_1 ; 17) h_{1t} ; 18) h_1 ; 19) S_2 ; 20) h_{2t} ; 21) h_2 ; 22) S_3 ; 23) V_2 ; 24) h_{kt} ; 25) h_k ; 26) V_k ; 27) η_{oi}^{III} ; 28) h'_1 ; 29) t_{s1} ; 30) h'_2 ; 31) t_{s2} ; 32) h'_k ; 33) t_{b1} ; 34) h_{b1} ; 35) t_{b2} ; 36) h_{b2} .

Анализируя приведенные выше зависимости (1.19–1.54), легко увидеть, что расчет значений D_1 , D_2 и D_c позволяет определить расходы пара по отсекам турбины, в том числе и в конденсатор D_k , что даст возможность пересчитать давления пара по проточной части P_k , P_2 , P_1 и P'_0 по зависимостям Стодолы – Флюгеля. Однако расчет уравнений тепловых балансов подогревателей с целью определения D_1 , D_2 и D_c требует знания параметров пара, воды и дренажей в подогревателях, которые, в свою очередь, зависят от значений P_k , P_2 , P_1 и P'_0 .

Таким образом, ни одно из уравнений (1.19–1.54) не решается самостоятельно, все они увязаны в систему. Решать систему тридцати шести уравнений методом простой итерации означает задать тридцать шесть приближений и в дальнейшем сводить все уравнения системы к тождествам до тех пор, пока значение каждой переменной будут отличаться от своего предыдущего значения менее чем наперед заданную погрешность. Естественно, процесс этот трудоемкий, кроме того – успех сомнителен, т. к. в значительной степени определяется правильным выбором начальных приближений по каждой из тридцати шести неизвестных.

Упростить решение задачи можно, разбив ее на подсистемы меньшего порядка и разомкнутые последовательности. Так, например, если определены давления пара по проточной части турбины, то определение энтальпий пара, воды и дренажей для решения уравнений теплового баланса не требует итераций, т. е. большинство зависимостей системы можно развернуть в последовательности, не вызывающие циклических вычислений. Кроме того, снизить трудоемкость расчета можно *правильным выбором начальных приближений внутри циклов*. В теории математического моделирования поставленная задача эквивалентна оптимальному выбору и разрыву обратных связей в циклических схемах. Грамотно задав начальные приближения, можно надеяться на успешное применение метода Зейделя.

Учитывая, что расход питательной воды через регенеративные подогреватели в новом режиме не изменился, можно предположить, что расходы пара на регенеративные подогреватели D_1 и D_2 будут мало отличаться от их значений D_1^0 и D_2^0 в расчетном режиме.

Поэтому в качестве начальных приближений рекомендуется принять

$$D_1 = D_1^0; D_2 = D_2^0.$$

Тогда, считая $D_0 = \text{const}$ и определив D_c из (1.19), можно оценить расход пара в конденсатор D_k из уравнения (1.23). Новое значение D_k позволяет пересчитать давление пара в конденсаторе по зависимостям (1.24–1.25). Учитывая изменения расходов пара по отсекам турбины и конечных параметров пара в новом режиме, пересчитываются давления пара в отборах P_1 и P_2 и на входе в турбину P'_0 по формулам (1.26–1.30).

Далее определяются параметры пара, дренажа и воды по уравнениям (1.32–1.54), которые позволяют уточнить значения расходов D_1 и D_2 . С новыми значениями D_1 и D_2 вычисления повторяются. Расчет заканчивается, когда значения каждого из расходов будут отличаться от своего предыдущего значения менее, чем наперед заданную погрешность.

Алгоритм расчета схемы

Алгоритм расчета схемы турбоустановки в теплофикационном режиме приведен на рис. 1.30.

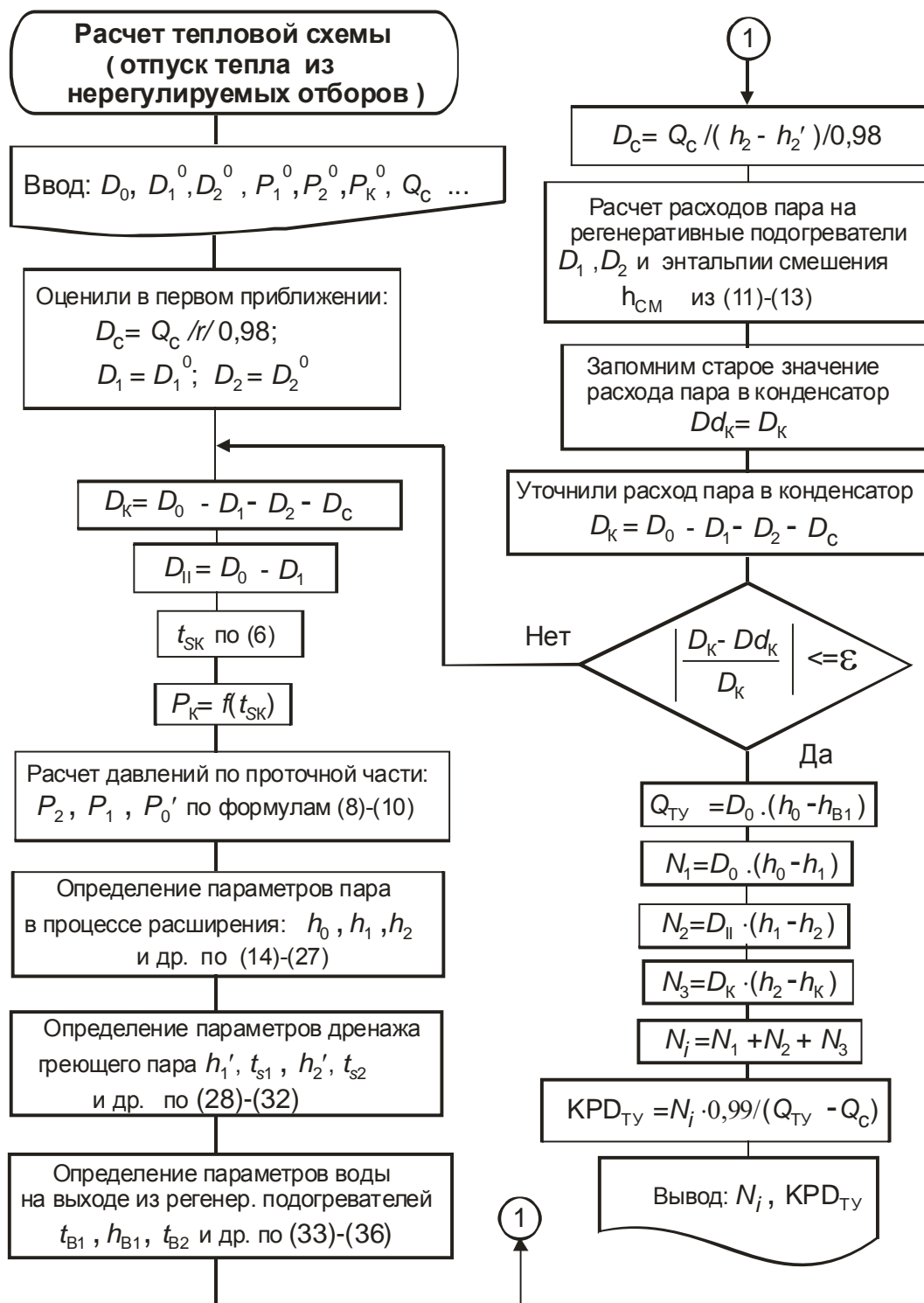


Рис. 1.30. Алгоритм расчета схемы турбоустановки после ее реконструкции с целью отпуска тепла из нерегулируемых отборов

1.3.8. Моделирование тепловой схемы

Постановка задачи

Для заданной тепловой схемы влажнопаровой турбоустановки (см. рис. 1.31) **известны** в качестве исходных данных или расчета:

P_0 – начальное давление пара;

x_0 – начальная степень сухости;

P_k – конечное давление пара;

$P_1, P_2, \dots, P_d, \dots$ – давления пара в регенеративных отборах и деаэраторе;

x_c – степень сухости пара за сепаратором;

$t_{пп1}, t_{пп2}$ – температуры пара за первой и второй ступенями промежуточного перегрева соответственно;

θ – недогрев воды до температуры насыщения пара в поверхностных регенеративных подогревателях;

определены с использованием модуля термодинамических параметров:

h_0 – энтальпия пара на входе в турбину;

h_1, h_2, h_3, \dots – энтальпии пара в регенеративных отборах;

h_c – энтальпия пара за сепаратором;

h'_0, h'_1, h'_2, \dots – энтальпии дренажа греющего пара при давлениях

P_0, P_1, P_2 и т. д.

Рассчитать относительные расходы пара и воды в характерных точках схемы: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_d, \alpha_4, \alpha_c, \alpha_{с.п.}, \alpha_{с.в.}, \alpha_{пп1}, \alpha_{пп2}, \alpha_{ок}, \alpha_{п.в.}$.

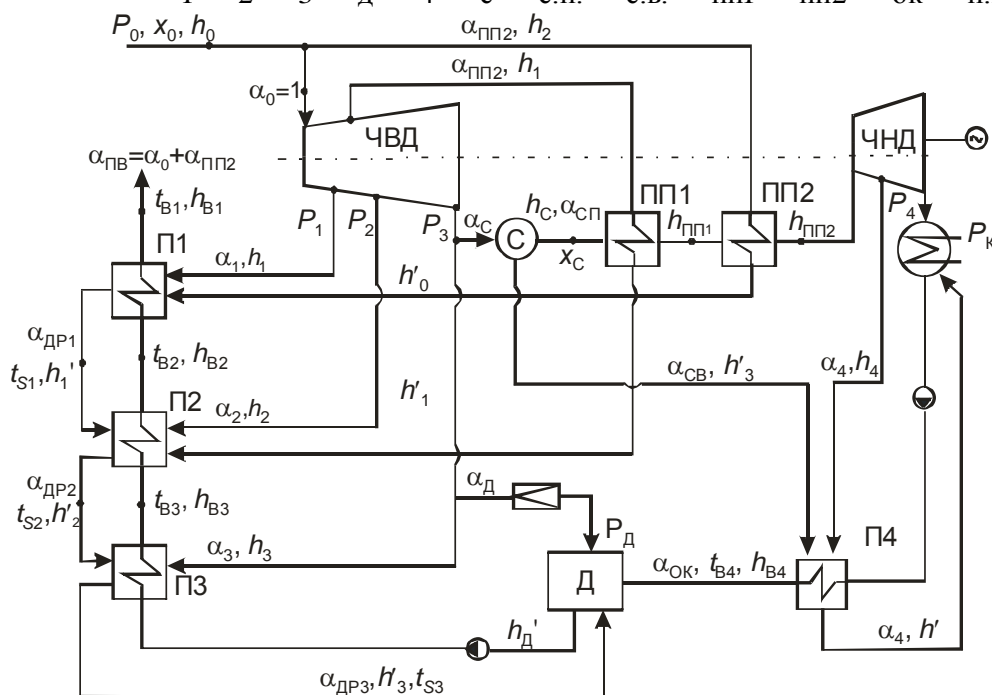


Рис. 1.31

Математическое описание

Для расчета параметров пара, дренажа и воды в характерных точках схемы на ПЭВМ необходимо воспользоваться функциями из модуля TABL1.tru. Методические указания и примеры расчета параметров пара в процессе расширения его в турбине даны в разделе 1.2 настоящей работы.

Чтобы применить функции из модуля TABL1, необходимо оценить состояние рабочего тела для всех потоков, входящих в расчет элементов заданной схемы. Состояние пара в процессе расширения в турбине (перегретый / мокрый) определяется в результате схематичного построения процесса в h, s -диаграмме (см. рис. 1.32), откуда:

– пар в процессе расширения в ЧВД (точки 0, 1*t*(1), 2*t*(2), 3*t*(3)) – *мокрый*;

– пар на выходе из сепаратора (точка с) – *мокрый* (сухой насыщенный, если $x = 1$);

– пар после пароперегревателей (точки P_1 и P_2) – *перегретый*;

– состояние пара в отборе на П4 (4*t*(4)) и на выходе из турбины ($kt(k)$) *требуется оценить*, в зависимости от давлений P_4 и P_k он может быть и перегретым, и мокрым.

Уравнения теплового и материального балансов для элементов тепловой схемы (потери тепла в окружающую среду пренебрегаем)

П1:
$$\alpha_1 \cdot (h_1 - h'_1) + \alpha_{пп2} \cdot (h'_0 - h'_1) = \alpha_{п.в.} \cdot (h_{в1} - h_{в2}), \quad (1.55)$$

где $\alpha_{п.в.} = \alpha_0 + \alpha_{пп2}$. Расчет подогревателя П1 производится с целью определения α_1 .

П2:
$$\alpha_2 \cdot (h_2 - h'_2) + \alpha_{пп1} \cdot (h'_1 - h'_2) + \alpha_{др1} \cdot (h'_1 - h'_2) = \alpha_{п.в.} \cdot (h_{в2} - h_{в3}), \quad (1.56)$$

где $\alpha_{др1} = \alpha_1 + \alpha_{пп2}$. Расчет П2 производится с целью определения α_2 . Расчет П2 производится с целью определения α_2 .

П3:
$$\alpha_3 \cdot (h_3 - h'_3) + \alpha_{др2} \cdot (h'_2 - h'_3) = \alpha_{п.в.} \cdot (h_{в3} - h'_д); \quad (1.57)$$

где $\alpha_{др2} = \alpha_{др1} + \alpha_2 + \alpha_{пп1}$. Расчет П3 производится с целью определения α_3 .

С:
$$\alpha_c = \alpha_{с.в.} + \alpha_{с.п.} \quad (1.58)$$

$$\alpha_c \cdot h_3 = \alpha_{с.в.} \cdot h'_3 + \alpha_{с.п.} \cdot h_c; \quad (1.59)$$

Цель расчета сепаратора – определение расходов воды $\alpha_{с.в.}$ и пара $\alpha_{с.п.}$ на выходе.

ПП1:
$$\alpha_{пп1} \cdot (h_1 - h'_1) = \alpha_{с.п.} \cdot (h_{пп1} - h_c) \quad (1.60)$$

Цель расчета ПП1 – определение расхода пара $\alpha_{пп1}$.

$$\mathbf{PP2:} \quad \alpha_{\text{III}2} \cdot (h_0 - h'_0) = \alpha_{\text{c II}} \cdot (h_{\text{III}2} - h_{\text{III}1}). \quad (1.61)$$

Цель расчета ПП2 – определение расхода пара $\alpha_{пп2}$.

$$\mathcal{D}: \quad \alpha_{\mathcal{D}} + \alpha_{\mathcal{D}3} + \alpha_{0.K} = \alpha_{\text{П.В.}}; \quad (1.62)$$

$$\alpha_{\Pi} \cdot h_3 + \alpha_{\Pi\text{B}3} \cdot h_3 + \alpha_{\text{O.K.}} \cdot h_{\text{B}4} = \alpha_{\Pi\text{B.}} \cdot h'_{\Pi}. \quad (1.63)$$

где $\alpha_{\text{др}3} = \alpha_{\text{др}2} + \alpha_3$. Расчет деазатора производится с целью определения $\alpha_{\text{д}}$ и $\alpha_{\text{о.к.}}$.

$$\mathbf{P4:} \quad \alpha_4 \cdot (h_4 - h'_4) + \alpha_{\text{c}_\text{B}} \cdot (h'_3 - h'_4) = \alpha_{\text{o}_\text{K}} \cdot (h_{\text{B}4} - h'_\text{K}) \quad (1.64)$$

Расчет П4 производится с целью определения α_4 .

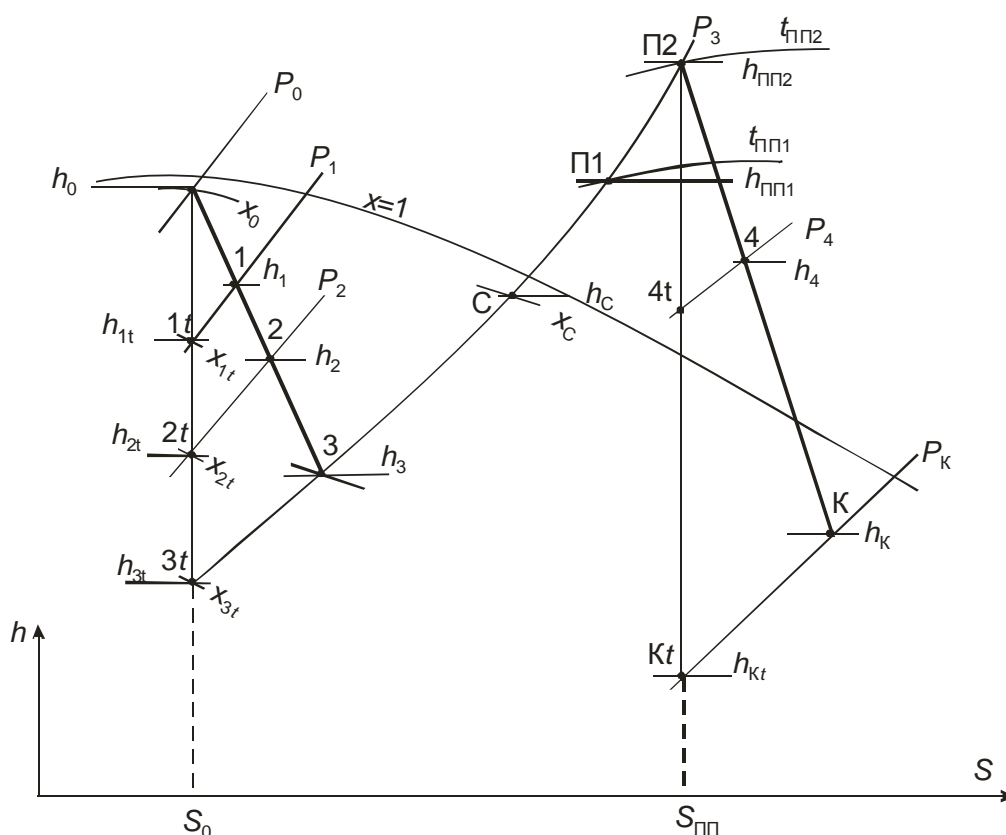


Рис. 1.32. Процесс расширения пара в турбине

Выбор численного метода

Элементы П1, П2, П3, С, Д, ПП1, ПП2 охвачены контуром, т. к. ни один из них не решается самостоятельно. Так, чтобы определить α_1 из П1, надо знать $\alpha_{пп2}$, который находится из теплового баланса ПП2 после расчета сепаратора. В расчет П2, П3 и деаэратора входят неизвестные значения дренажей вышестоящих подогревателей и поэтому эти элементы также не могут быть рассчитаны. Для расчета сепаратора

с целью определения $\alpha_{с.в.}$ и $\alpha_{с.п.}$ необходимо знать расход пара на выходе из турбины α_c , который зависит от расходов α_1 , α_2 , α_3 , α_d .

Таким образом, имеем один замкнутый контур, который описывается системой девяти уравнений (1.55–1.64) с девятью неизвестными

$$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_c, \alpha_{с.в.}, \alpha_{с.п.}, \alpha_{пп1}, \alpha_{пп2}, \alpha_d, \alpha_{о.к.}$$

Подогреватель П4 не входит в указанный контур и может быть рассчитан самостоятельно после расчета системы уравнений (1)–(10).

Превратить замкнутый контур в разомкнутую последовательность можно двумя путями:

- разорвав потоки пара на пароперегреватели ПП1 и ПП2 (что означает задать значения $\alpha_{пп1}$ и $\alpha_{пп2}$ соответственно);
- разорвав поток пара α_c на входе в сепаратор.

Наилучший способ – второй, т. к. он требует разрыва лишь одного потока и соответственно организации одного расчетного цикла.

Алгоритм расчета

Приведен на рис. 1.33 в виде блок-схемы.

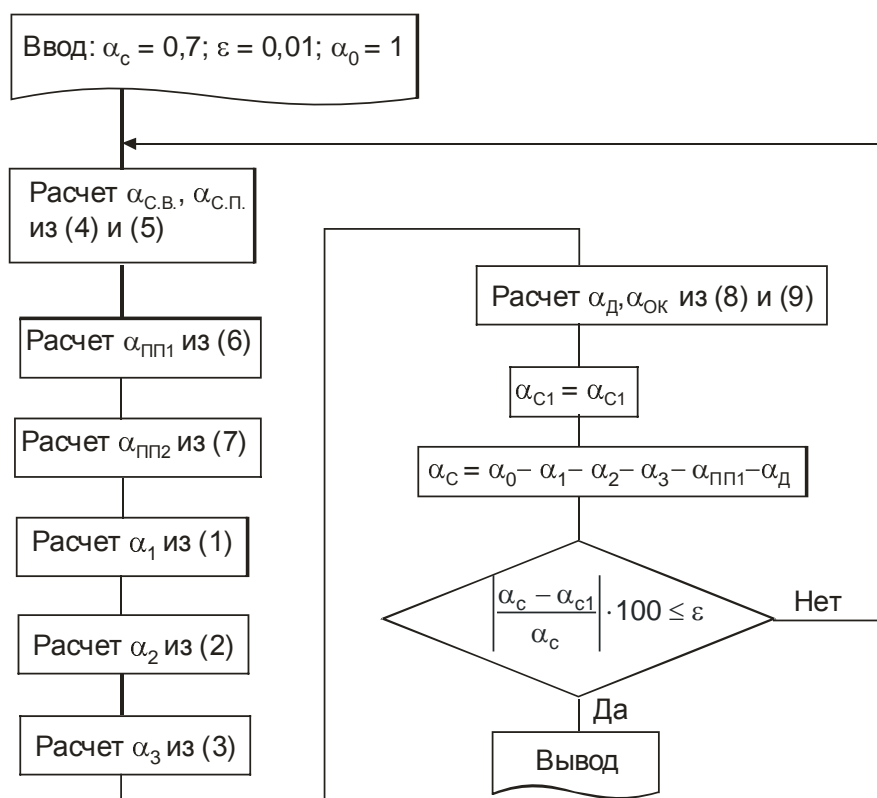


Рис. 1.33. Алгоритм расчета относительных расходов для схемы на рис. 1.31

2. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

2.1. Предварительные сведения

Рассматриваем простейшие задачи минимизации, в которых целевая функция зависит от одной переменной, а допустимым множеством является отрезок вещественной оси

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \min; \\ x &\in [a, b]. \end{aligned}$$

Теоретический материал и примеры использования различных алгоритмов приведены в [1–4].

Глобальный минимум

Число $x^* \in [a, b]$ называется *точкой глобального (абсолютного) минимума*, или просто *точкой минимума*, функции $f(x)$ на отрезке, если $f(x^*) \leq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Значение функции $f_{\min} \leq f(x^*)$ называют *глобальным (абсолютным) минимумом*, или просто *минимумом*, функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

На рис. 2.1 точка M – глобальный минимум, точка N – глобальный максимум.

Локальный минимум

Число $x^* \in [a, b]$ называется *точкой локального минимума* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если $f(x^*) \leq f(x)$ для всех $x \in [a, b]$, достаточно близких к x^* .

На рис. 2.1 точки A и B – локальные минимумы.

Необходимое условие минимума

функции одной переменной в точке x^*

$$f'(x^*) = 0. \quad (2.1)$$

Достаточные условия минимума

функции одной переменной в точке x^* :

$$\begin{aligned} 1) & f'(x^*) = 0; \\ 2) & f''(x^*) > 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

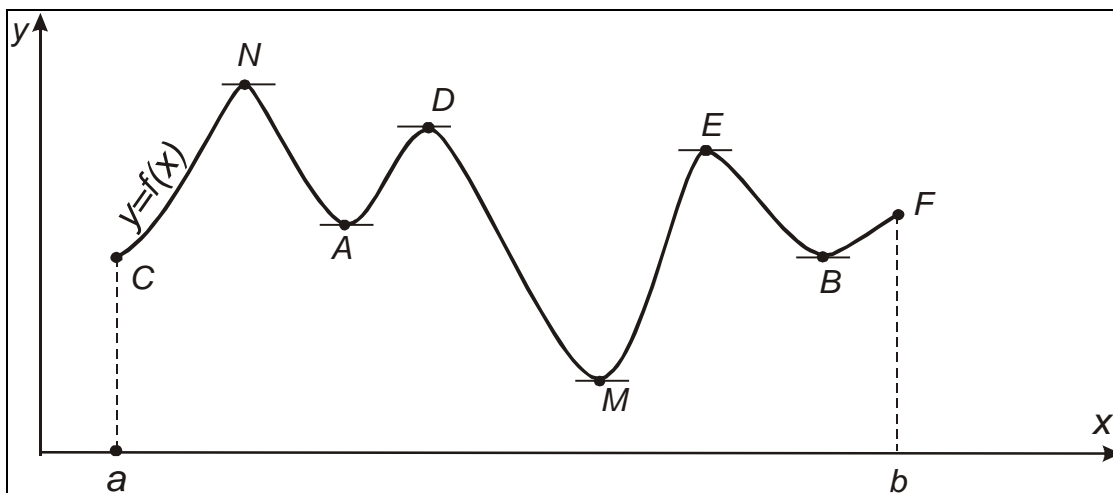


Рис. 2.1

Унимодальные функции

Многие методы поиска точки минимума $f(x)$ приспособлены только для функций, у которых каждый локальный минимум является одновременно и глобальным. Этим свойством обладают *унимодальные функции*.

Функция $f(x)$ является *унимодальной*, если с увеличением x слева от x^* она монотонно убывает, справа – монотонно возрастает. На рис. 2.2 изображены графики унимодальных функций. Пример функции, не являющейся унимодальной, приведен на рис. 2.1.

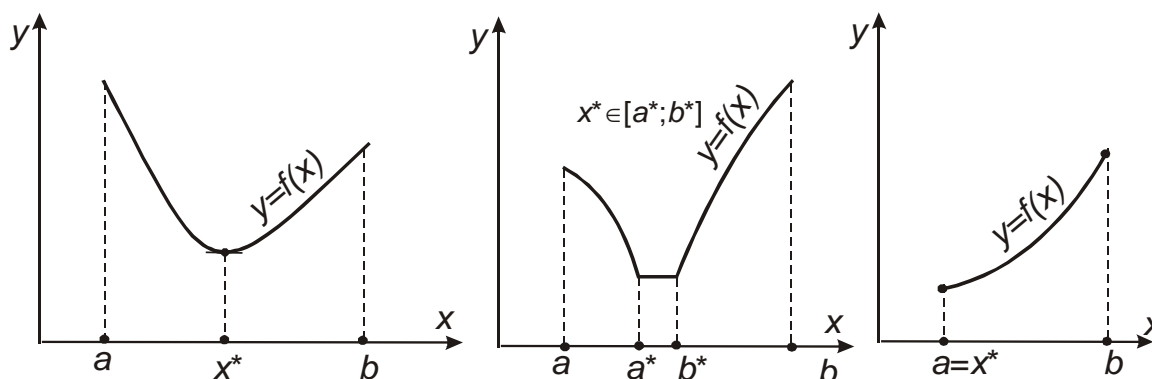


Рис. 2.2. Графики унимодальных функций

Выпуклые функции

Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, называется *выпуклой* на этом отрезке, если для всех $x', x'' \in [a, b]$ и произвольного числа $\mu \in [0; 1]$ выполняется неравенство

$$f(\mu \cdot x' + (1 - \mu) \cdot x'') \leq \mu \cdot f(x') + (1 - \mu) \cdot f(x''). \quad (2.3)$$

Если функция $f(x')$ – выпуклая на $[a, b]$, то на любом отрезке $[x', x''] \subset [a, b]$ ее график расположен не выше хорды, проведенной через точки графика с абсциссами x' и x'' (рис. 2.3).

Можно показать, что всякая выпуклая непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция является унимодальной. Обратное, вообще говоря, неверно (рис. 2.4).

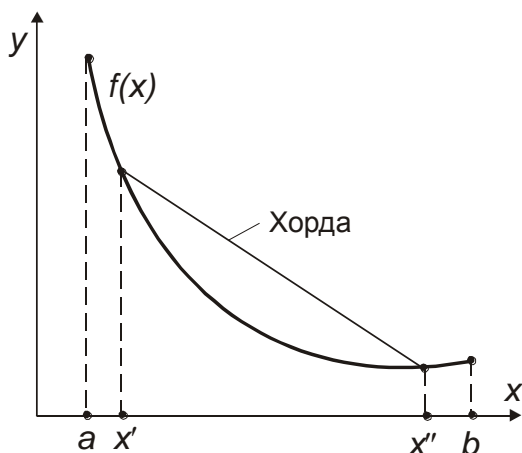


Рис. 2.3. Взаимное расположение графика выпуклой функции и хорды

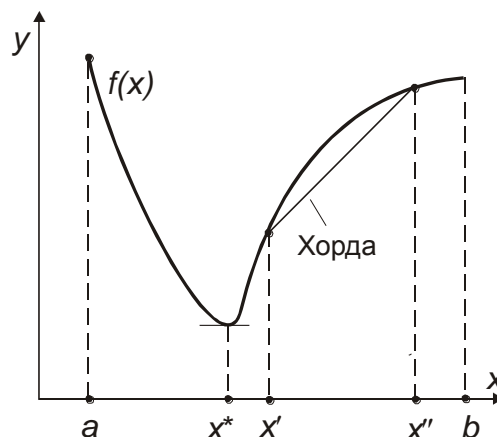


Рис. 2.4. График унимодальной, но не выпуклой функции

Условие Липшица

Функция $f(x)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ условию Липшица, если существует такое число L (константа Липшица), что выполняется

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq L \cdot |x_1 - x_2| \quad (2.4)$$

для всех x_1 и x_2 , принадлежащих $[a, b]$, т. е. если скорость изменения целевой функции $f(x)$ на любом участке отрезка $[a, b]$ ограничена некоторым числом L , одним и тем же для всех участков.

Условие (2.4) означает, что модуль углового коэффициента любой хорды графика не превосходит L . Кроме того, если в некоторой точке существует касательная к графику $f(x)$, то модуль ее углового коэффициента также не может превышать L . Так, функция $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[0; 1]$ условию Липшица не удовлетворяет, потому что при $x \rightarrow 0$ угловой коэффициент касательной к ее графику неограниченно возрастает (см. рис. 2.5).

Численные методы, в отличие от аналитических, дают *приближенное* решение. Точность расчета точки минимума x^* и минимально-

го значения функции f_{\min} определяется числом итерационных вычислений (шагов), в зависимости от метода.

Стратегия поиска (минимума) численным методом – это алгоритм выбора точек на $[a, b]$, в которых последовательно вычисляются значения функции. *Наилучшей* стратегией называется такая, которая требует *наименьшего количества вычислений функции* при заданной точности. Разные методы обладают различной стратегией.

«Удачная» тройка чисел

Тройку чисел $x_1 < x_2 < x_3$ называют «удачной», если $f(x_2) \leq \min\{f(x_1), f(x_3)\}$ и $f(x_2) < \max\{f(x_1), f(x_3)\}$ (рис. 2.6). Она называется «удачной», потому что отрезок $[x_1; x_3]$, включающий эти точки, *обязательно содержит точку минимума!*

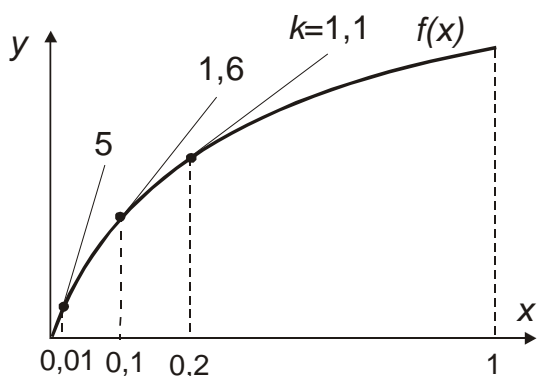


Рис. 2.5. График функции $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0; 1]$, не удовлетворяющей условию Липшица

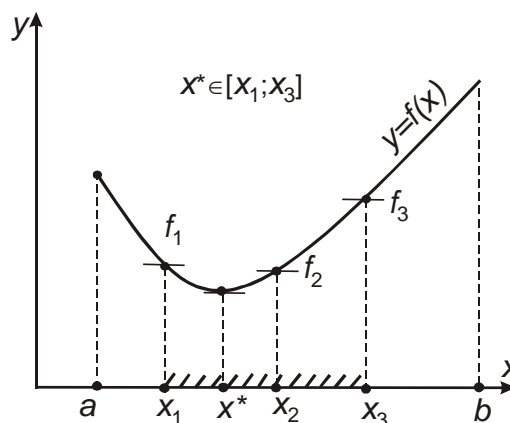


Рис. 2.6. (x_1, x_2, x_3) – «удачная» тройка чисел

Классификация численных методов одномерной минимизации

Все численные методы поиска минимума функции одной переменной можно разделить на *прямые* методы (нулевого порядка, использующие только значения функции и не требующие вычисления ее производных) и методы первого и более высоких порядков, *использующие производные*.

Достоинства прямых методов:

- позволяют исследовать целевые функции любого класса, в том числе недифференцируемые;
- имеют простые алгоритмы и программы оптимизации;
- требуют малого объема машинной памяти.

Недостатки прямых методов:

- требуют большого времени работы ЭВМ, т. к. стратегия поиска далека от наилучшей;
- для получения решения с высокой точностью необходимо большое число вычислений функции; если же существуют ограничения на число ее вычислений (например, по причине экспериментального определения функции), то прямые методы дают низкую точность.

Прямые методы:

- метод перебора;
- метод поразрядного поиска;
- методы исключения отрезков;
- метод парабол и др.

Методы исключения отрезков:

- метод дихотомии (первый метод деления отрезка пополам);
- второй метод деления отрезка пополам;
- метод Фибоначчи;
- метод «золотого сечения» и др.

Методы, использующие производные функции:

- метод средней точки;
- метод хорд;
- метод Ньютона;
- метод кубической аппроксимации и др.

Методы исключения отрезков

Все методы исключения отрезков работают по алгоритму: для унимодальной на $[a, b]$ функции $f(x)$ на каждой итерации выбирают точки x_1 и x_2 такие, что $a < x_1 < x_2 < b$. Точки x_1 и x_2 называются «пробными». Сравниваются значения $f(x)$ в этих точках (см. рис. 2.7).

Если $f(x_1) \leq f(x_2)$ (см. рис. 2.7, а), то для дальнейшего рассмотрения оставляется $[a, b]$, т. е. на следующей итерации x_2 переходит в b .

Если $f(x_1) > f(x_2)$ (см. рис. 2.7, б), это означает, что точка минимума x^* принадлежит отрезку $[x_1, b]$, т. е. на следующей итерации точка x_1 переходит в a .

При выборе точек x_1 и x_2 учитывают следующие обстоятельства:

- 1) точки x_1 и x_2 должны быть расположены симметрично относительно середины отрезка $[a, b]$, чтобы относительное уменьшение от-

резка на очередной итерации не зависело от того, какая часть $([a; x_1])$ или $(x_2; b])$ исключается из дальнейшего рассмотрения;

2) для того, чтобы максимально сузить область поиска, «отсекая, как можно, большие куски», точки x_1 и x_2 должны быть расположены близко к середине отрезка;

3) желательно одну из пробных точек (x_1 или x_2) использовать на следующей итерации, чтобы уменьшить количество вычислений функции.

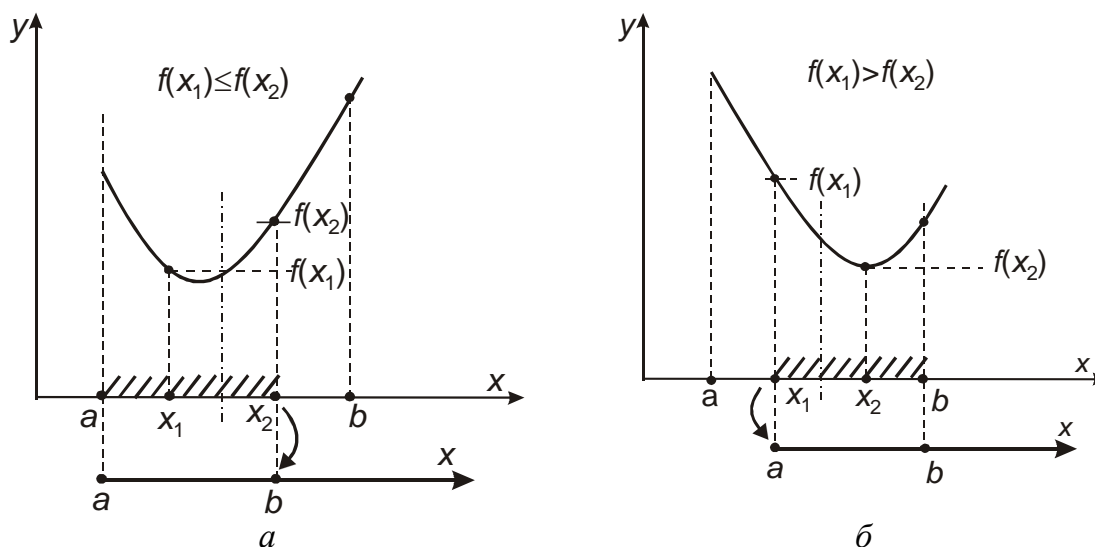


Рис. 2.7. Графическая иллюстрация методов исключения отрезков

2.2. Метод матанализа (классический)

Метод дает *точное* решение и требует дифференцируемости функции.

Необходимое условие минимума функции одной переменной в некоторой точке x^* –

$$f'(x^*) = 0. \quad (2.1)$$

Достаточные условия минимума функции одной переменной в точке x^* :

- 1) $f'(x^*) = 0$;
 - 2) $f''(x^*) > 0$.
- (2.2)

Последовательность минимизации классическим методом

1. Решаем уравнение $f'(x) = 0$ на интервале $x \in [a, b]$, корни которого являются точками возможного экстремума функции (*стационарными точками*).

2. Вычисляем значения функции во всех стационарных точках и на концах отрезка $[a, b]$.

3. Выбираем минимальное значение функции f_{\min} и соответствующее ему значение x^* .

Пример 2.1

$$f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 1 \rightarrow \min, \quad x \in [-3, 3].$$

Решение

1. $f'(x) = 3 \cdot x^2 - 3$; $3 \cdot x^2 - 3 = 0$. Стационарные точки: $x_1 = -1$; $x_2 = 1$.

2. Вычисляем значения функции в стационарных точках и на концах отрезка:

$$x = -3; f(-3) = (-3)^3 - 3 \cdot (-3) + 1 = -17;$$

$$x = -1; f(-1) = 3;$$

$$x = 1; f(1) = -1;$$

$$x = 3; f(3) = 1.$$

3. Минимальное значение функции $f_{\min} = \min\{-17, 3, -1, 1\} = -17$; точка минимума x^* .

Примечание. Для данной задачи не вызывает затруднений вычисление второй производной $f''(x) = 6 \cdot x$, поэтому точку локального минимума можно определить по ее знаку.

Определим знак второй производной в стационарных точках:

$$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \text{ — точка максимума;}$$

$$f''(1) = 6 \cdot (1) = 6 > 0 \text{ — точка минимума.}$$

Сравниваем значения функции в точке минимума и на концах отрезка и выбираем наименьшее $f_{\min} = -17$ в точке $x^* = -3$.

2.3. Метод перебора

Метод перебора – простейший из прямых методов (это его *достоинство*).

Суть метода:

1) разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_i = a + i \cdot (b - a) / n$, $i = 0, 1, \dots, n$;

2) вычислим значения $f(x)$ в точках x_i ;

3) сравнивая значения $f(x_i)$ между собой, найдем точку x_m , $0 \leq m \leq n$, для которой $f(x_m) = \min f(x_i)$, $0 \leq i \leq n$;

4) положим $x^* = x_m$; $f_{\min} = f(x_m)$.

Погрешность определения точки минимума не превосходит

$$\varepsilon_n = (b - a) / n$$

или

$$\varepsilon_N = (b - a) / (N - 1).$$

Здесь и в дальнейшем будем обозначать: N – количество вычислений функции; n – количество итераций. Для метода перебора

$$n = N - 1.$$

На практике удобно использовать алгоритм, когда задаются не количеством вычислений функции на заданном отрезке, а шагом изменения Δx оптимизируемого параметра в заданных границах x_{\min} , x_{\max} (рис. 2.8).

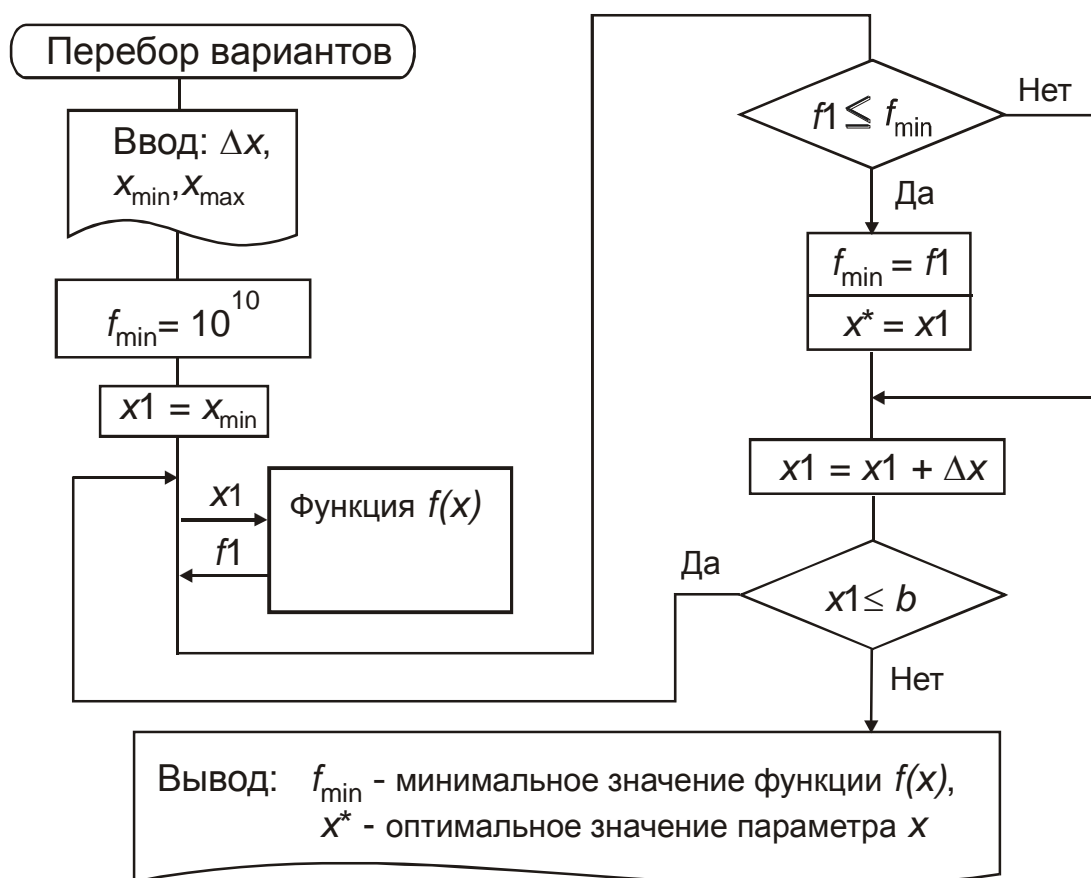


Рис. 2.8. Алгоритм метода перебора

При практической реализации метода перебора для *неунимодальных* функций основная проблема заключается в установлении величины шага Δx . Характер функции может быть таков, что даже при сравнительно малом Δx возникает опасность «проскочить» глобальный минимум (см. рис. 2.9). В общем случае невозможно решить вопрос о том,

насколько малым следует выбирать шаг, чтобы значение приближенного минимума отличалось от истинного не более, чем на $\varepsilon_f > 0$:

$$\left| \min f(x_i) - \min f(x^*) \right| \leq \varepsilon_f, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.5)$$

Однако для функций, удовлетворяющих условию Липшица с константой L , выбор шага Δx по формуле

$$\Delta x = 2 \cdot \varepsilon_f / L$$

гарантирует выполнение условия (2.5).

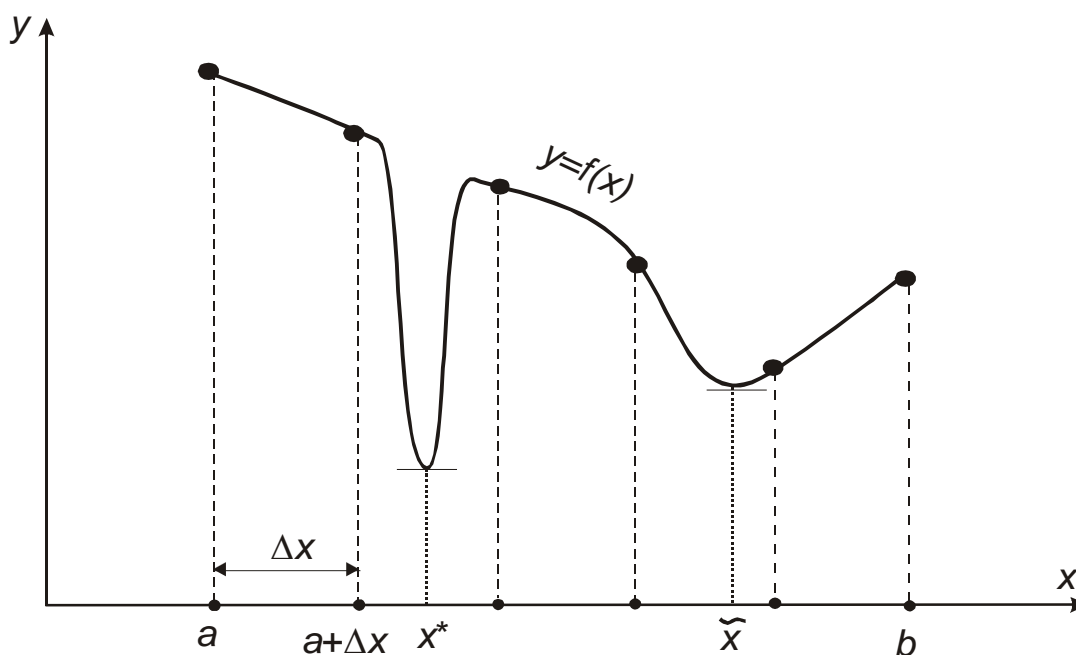


Рис. 2.9

2.4. Метод дихотомии (первый метод деления отрезка пополам)

Метод дихотомии относится к методам исключения отрезков. Точки x_1 и x_2 располагаются близко к середине отрезка $[a, b]$:

$$x_1 = \frac{a+b-\delta}{2}; \quad x_2 = \frac{a+b+\delta}{2},$$

где δ – малое число, выбирается из диапазона $[0, 2\varepsilon]$;

ε – погрешность расчета x^* .

Отношение длин нового и исходного отрезков близко к $\frac{1}{2}$, отсюда название метода.

Алгоритм метода дихотомии приведен на рис. 2.10.

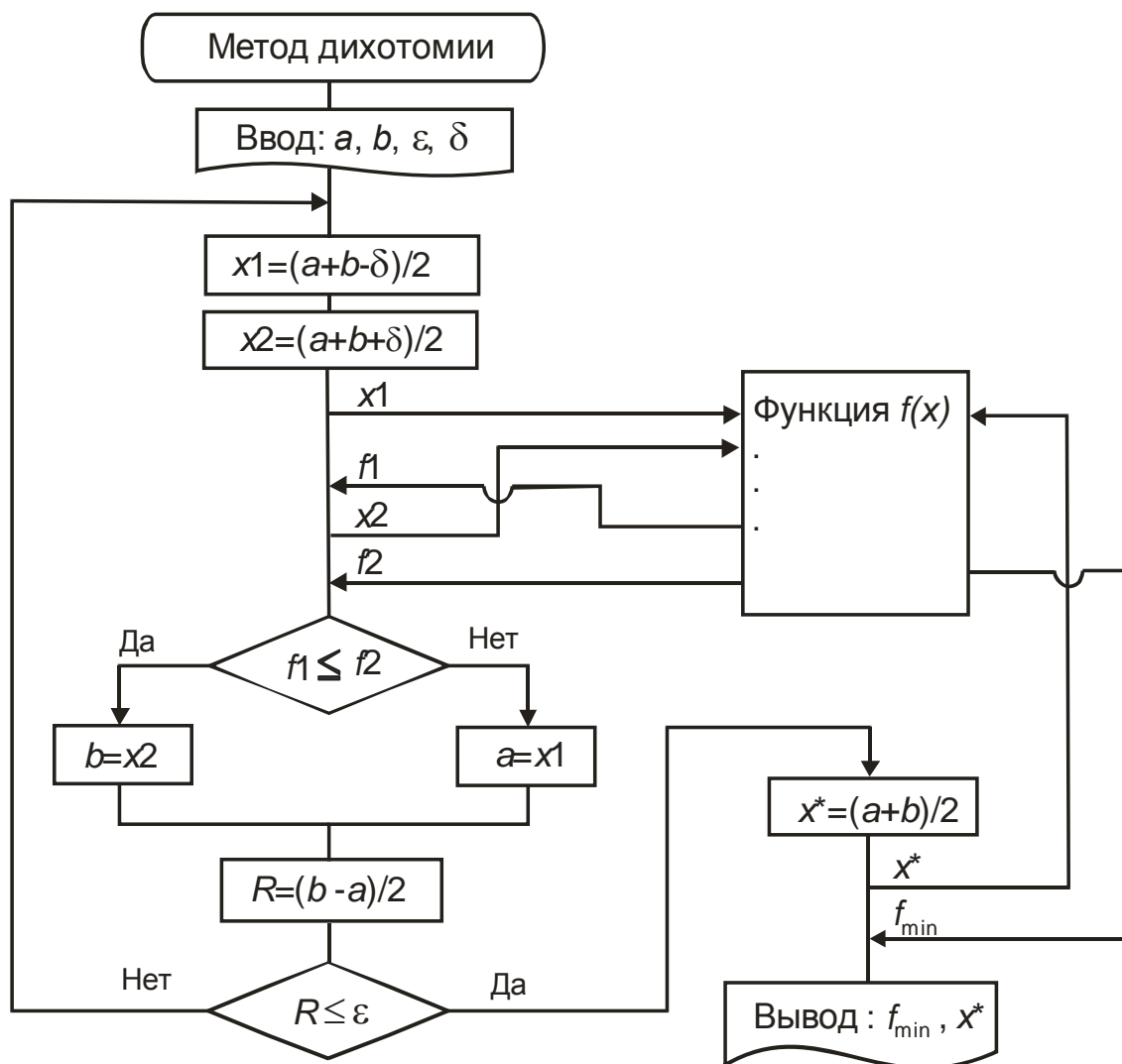


Рис. 2.10. Алгоритм метода дихотомии

Погрешность определения точки минимума после n итераций

$$\varepsilon_n \approx \frac{b-a}{2^{n+1}},$$

где a и b – координаты исходного отрезка.

Если известно число вычислений функции N , то погрешность определяется

$$\varepsilon_N \approx \frac{b-a}{2^{\frac{N}{2}+1}},$$

т. к. для метода дихотомии $n = N/2$.

Пример 2.2. Найти точку минимума функции $f(x) = x^2 + e^{-x}$ на отрезке $[0, 1]$ методом дихотомии с погрешностью $\varepsilon = 0,01$.

Решение

Примем $\delta = 0,01$. Расчеты выполняем в соответствии с алгоритмом на рис. 2.10.

Итерация 1. $a = 0$; $b = 1$;

$$x_1 = (a + b - \delta) / 2 = (0 + 1 - 0,01) / 2 = 0,495;$$

$$x_2 = (a + b + \delta) / 2 = (0 + 1 + 0,01) / 2 = 0,505;$$

$$f_1 = 0,495^2 + e^{-0,495} = 0,8545;$$

$$f_2 = 0,505^2 + e^{-0,505} = 0,8585.$$

Так как $f_1 < f_2$, принимаем $b = x_2 = 0,505$;

$$\varepsilon_n = (b - a) / 2 = (0,505 - 0) / 2 = 0,2525 > \varepsilon.$$

Переходим к следующей итерации.

Итерация 2. $a = 0$; $b = 0,505$;

$$x_1 = (0 + 0,505 - 0,01) / 2 = 0,2475; \quad f_1 = 0,2475^2 + e^{-0,2475} = 0,842;$$

$$x_2 = (0 + 0,505 + 0,01) / 2 = 0,2575; \quad f_2 = 0,2575^2 + e^{-0,2575} = 0,839;$$

Так как $f_1 > f_2$, принимаем $a = x_1 = 0,2475$;

$$\varepsilon_n = (b - a) / 2 = (0,505 - 0,2475) / 2 = 0,1787 > \varepsilon.$$

Переходим к следующей итерации.

Дальнейший расчет сводим в табл. 2.1.

Таблица 2.1

	a	b	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	Примечание	ε_n
Ит.3	0,2475	0,505	0,3713	0,3813	0,8277	0,8284	$b = x_2$	0,062
Ит.4	0,2475	0,3813	0,3094	0,3194	0,8296	0,8286	$a = x_1$	0,036
Ит.5	0,3094	0,3813	0,3404	0,3504	0,8277	0,8272	$a = x_1$	0,0204
Ит.6	0,3404	0,3813	0,3559	0,3659	0,8272	0,8275	$b = x_2$	0,0128
Ит.7	0,3404	0,3659	0,3481	0,3581	0,82720	0,8272	$b = x_2$	$\varepsilon_n = 0,009$

Результаты расчета: $x^* \approx (0,3404 + 0,3582) / 2 = 0,3493$;

$$f_{\min} \approx 0,3493^2 + e^{-0,3493} = 0,8272.$$

2.5. Метод «золотого» сечения

Метод «золотого» сечения – самый популярный из методов исключения отрезков.

Обладает *наилучшей* после метода Фибоначчи стратегией поиска точки минимума, т. к. одна из пробных точек (x_1 или x_2) переходит на следующую итерацию и поэтому на всех шагах алгоритма, кроме первого, требуется лишь одно вычисление функции.

В соответствии с алгоритмом каждая из точек x_1 и x_2 делит отрезок $[a, b]$ на две неравные части так, что *отношение длины всего отрезка к длине его большей части равно отношению длин большей и меньшей частей отрезка*:

$$\frac{(b-a)}{(x_2-a)} = \frac{(x_2-a)}{(x_1-a)}. \quad (2.6)$$

Точки, обладающие таким свойством, называются точками «золотого» сечения отрезка $[a, b]$.

Рассмотрим отрезок $[0; 1]$ (рис. 2.11). Пусть x_2 делит его в отношении некоторого числа τ , т. е. $x_2 = \tau$, тогда симметрично расположенная точка $x_1 = 1 - \tau$. Подставим $a = 0$; $b = 1$ и значения x_1 и x_2 в отношение (2.6):

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\tau}{1-\tau}.$$

Решим квадратное уравнение: $\tau^2 = 1 - \tau$; $\tau_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Положительный корень $\tau = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0,61803...$ позволяет вычислять координаты точек x_1 и x_2 отрезка $[a, b]$ на всех итерациях метода «золотого» сечения:

$$x_1 = a + (1 - \tau) \cdot (b - a); \quad x_2 = a + \tau \cdot (b - a).$$

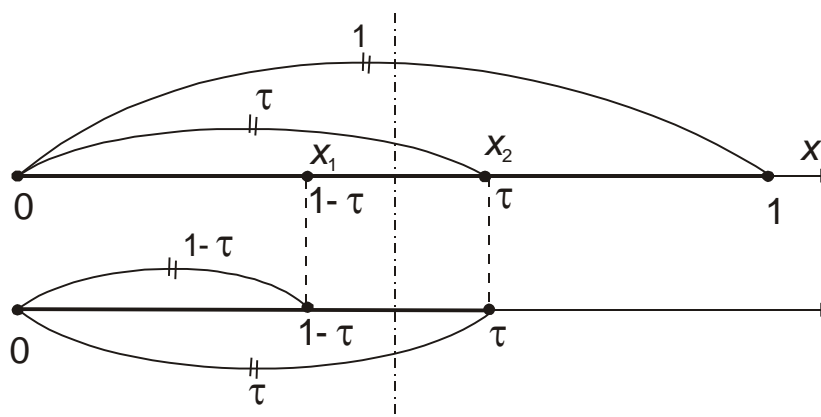


Рис. 2.11. «Золотое» сечение единичного отрезка точками x_1 и x_2

Алгоритм метода «золотого» сечения приведен на рис. 2.12.

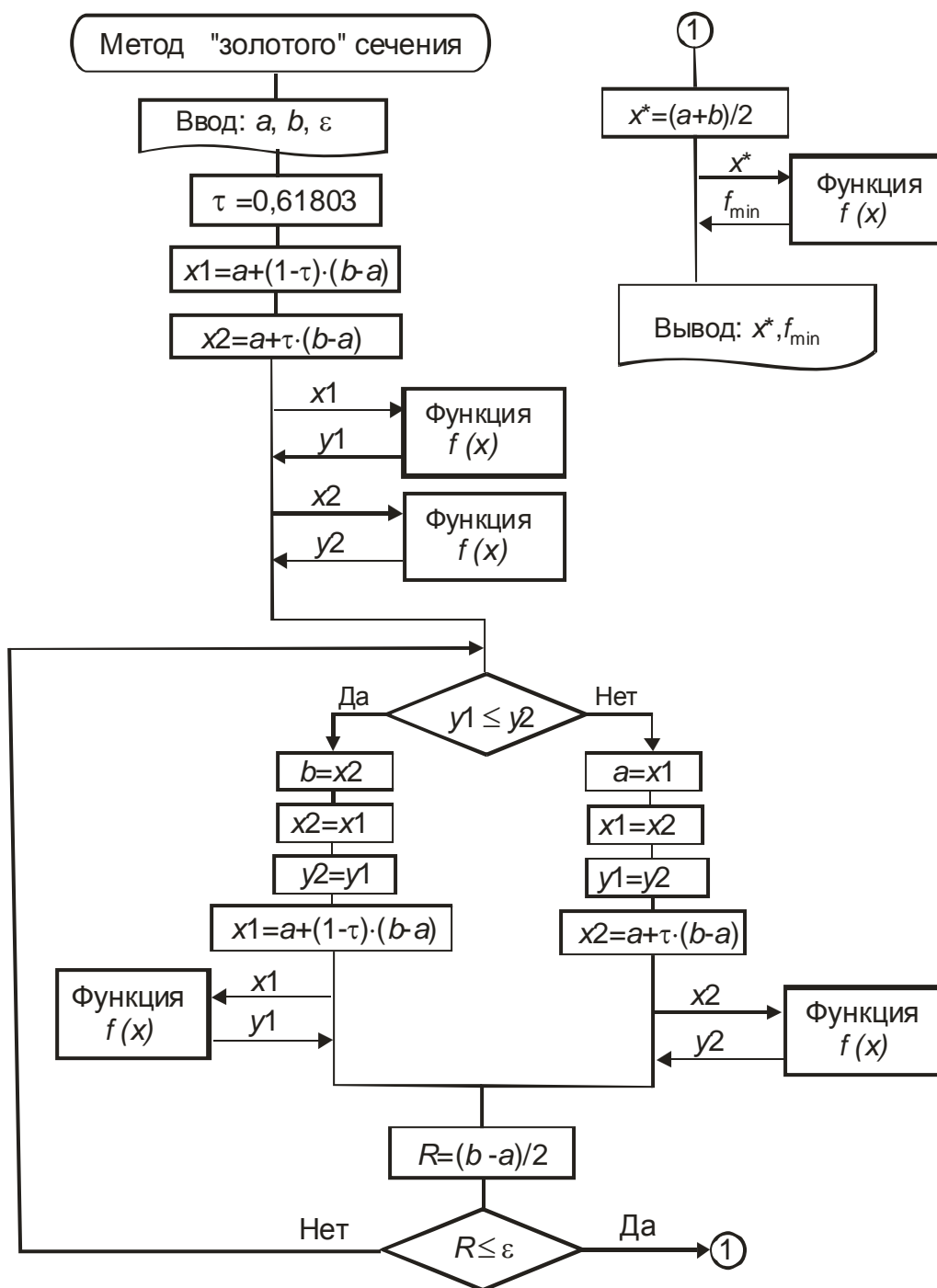


Рис. 2.12. Алгоритм метода «золотого» сечения

Точность определения точки минимума после n итераций равна

$$\varepsilon_n = \frac{1}{2} \cdot \tau^n \cdot (b - a),$$

где a и b – координаты исходного (!) отрезка.

Для метода «золотого» сечения количество вычислений функции на одно больше числа итераций: $N = n + 1$.

Пример 2.3. Найти точку минимума функции $f(x) = x^2 + e^{-x}$ на отрезке $[0,1]$ методом «золотого» сечения с погрешностью $\varepsilon = 0,01$.

Решение

Расчеты выполняем в соответствии с алгоритмом на рис. 2.12; $\tau = 0,618034$.

Итерация 1

$$a = 0; \quad b = 1;$$

$$x_1 = a + (1 - \tau) \cdot (b - a) = 0 + (1 - 0,618034) \cdot (1 - 0) = 0,3819;$$

$$x_2 = a + \tau \cdot (b - a) = 0 + 0,618034 \cdot (1 - 0) = 0,6180;$$

$$f(x_1) = 0,3819^2 + e^{-0,3819} = 0,8284;$$

$$f(x_2) = 0,6180^2 + e^{-0,6180} = 0,9209.$$

Так как $f(x_1) < f(x_2)$, принимаем:

$$b = x_2 = 0,6180; \quad x_2 = x_1 = 0,3819; \quad f(x_2) = f(x_1) = 0,8284.$$

$$\varepsilon_n = (b - a) / 2 = (0,6180 - 0) / 2 = 0,3090 > \varepsilon.$$

Переходим к следующей итерации.

Итерация 2

$$a = 0; \quad b = 0,6180; \quad x_2 = 0,3819; \quad f_2 = 0,8284;$$

$$x_1 = 0 + (1 - 0,618034) \cdot (0,6180 - 0) = 0,2361;$$

$$f_1 = 0,2361^2 + e^{-0,2361} = 0,8454.$$

Так как $f_1 > f_2$, принимаем:

$$a = x_1 = 0,2361; \quad x_1 = x_2 = 0,3819; \quad f_1 = f_2 = 0,8284;$$

$$\varepsilon_n = (b - a) / 2 = (0,6180 - 0,2361) / 2 = 0,1910 > \varepsilon.$$

Дальнейший расчет сводим в табл. 2.2.

Таблица 2.2

	a	b	x_1	x_2	$f(x_1)$	$f(x_2)$	Примечание	ε_n
Ит.3	0,2361	0,6180	0,3819	0,4721	0,8284	0,8466	$b=x_2$	0,118
Ит.4	0,2361	0,4721	0,32624	0,3819	0,82806	0,8284	$b=x_2$	0,0729
Ит.5	0,2361	0,3819	0,29179	0,32624	0,83206	0,82806	$a=x_1$	0,0451
Ит.6	0,29179	0,3819	0,32624	0,34750	0,82806	0,82721	$a=x_1$	0,0278
Ит.7	0,32624	0,3819	0,34750	0,36064	0,82721	0,82729	$b=x_2$	0,0172
Ит.8	0,32624	0,3606	0,33938	0,34750	0,82739	0,82721	$a=x_1$	0,0106
Ит.9	0,33938	0,3606	0,34750	0,35249	0,82721	0,82718	$a=x_1$	$\varepsilon_n=0,006<0,01$

Результаты расчета:

$$x^* \approx (0,3475 + 0,3606) / 2 = 0,3541; \quad f_{\min} \approx 0,3541^2 + e^{-0,3541} = 0,8272.$$

Графическая иллюстрация метода для данного примера приведена на рис. 2.13.

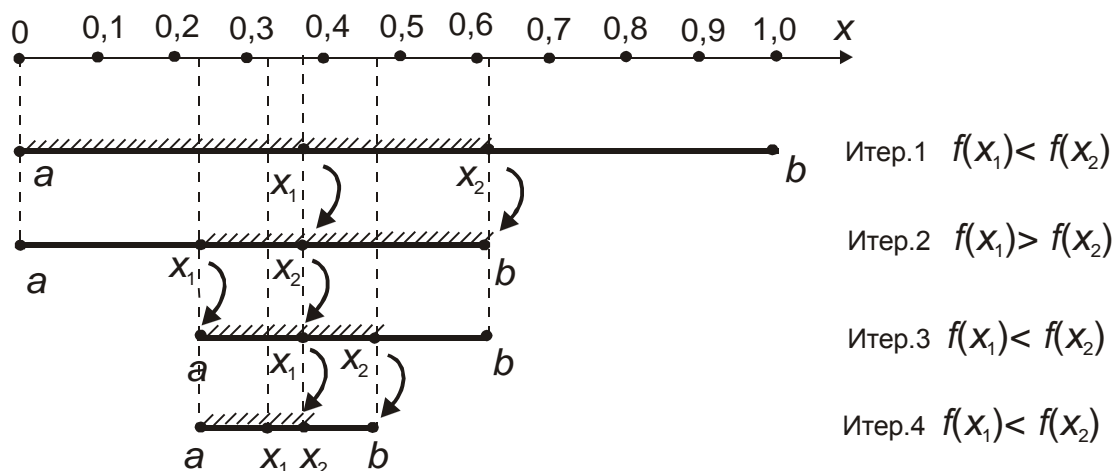


Рис. 2.13. Графическая иллюстрация метода «золотого» сечения для примера 2.3

2.6. Метод Фибоначчи

Метод Фибоначчи *теоретически* обладает *наилучшей* среди методов исключения отрезков стратегией. Однако на практике он используется редко, т. к. в соответствии с алгоритмом еще до начала расчетов надо знать количество вычислений функции N .

На каждом этапе метода Фибоначчи интервал $[a, b]$ делится точками x_1 и x_2 в отношении последовательных чисел Фибоначчи.

Числа Фибоначчи вырабатываются рекуррентной формулой

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2}; F_0 = F_1 = 1.$$

На первой итерации точка x_2 выбирается из условия деления отрезка $[a, b]$ в отношении $\frac{F_{N-1}}{F_N}$, а точка x_1 – в отношении $\frac{F_{N-2}}{F_N}$, где N – количество вычислений функции:

$$x_1 = a + \frac{F_{N-2}}{F_N} \cdot (b - a); \quad (2.7)$$

$$x_2 = a + \frac{F_{N-1}}{F_N} \cdot (b - a). \quad (2.8)$$

На k -й итерации (рис. 2.14) точки x_{1k} и x_{2k} вычисляются по формулам

$$x_{1k} = a_k + \frac{F_{N-k-1}}{F_{N-k+1}} \cdot (b_k - a_k);$$

$$x_{2k} = a_k + \frac{F_{N-k}}{F_{N-k+1}} \cdot (b_k - a_k).$$

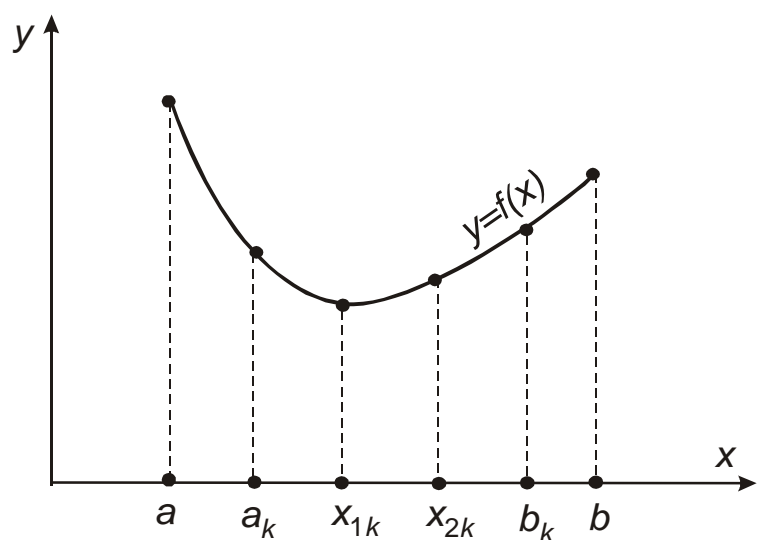


Рис. 2.14. К методу Фибоначчи

При $N \rightarrow \infty$ метод Фибоначчи переходит в метод «золотого» сечения.

Графическая иллюстрация метода Фибоначчи для числа вычислений функции $N = 6$ (количество итераций $n = 5$) приведена на рис. 2.15. Для определенности условно будем отбрасывать правую часть, считая, что всегда $f(x_1) < f(x_2)$.

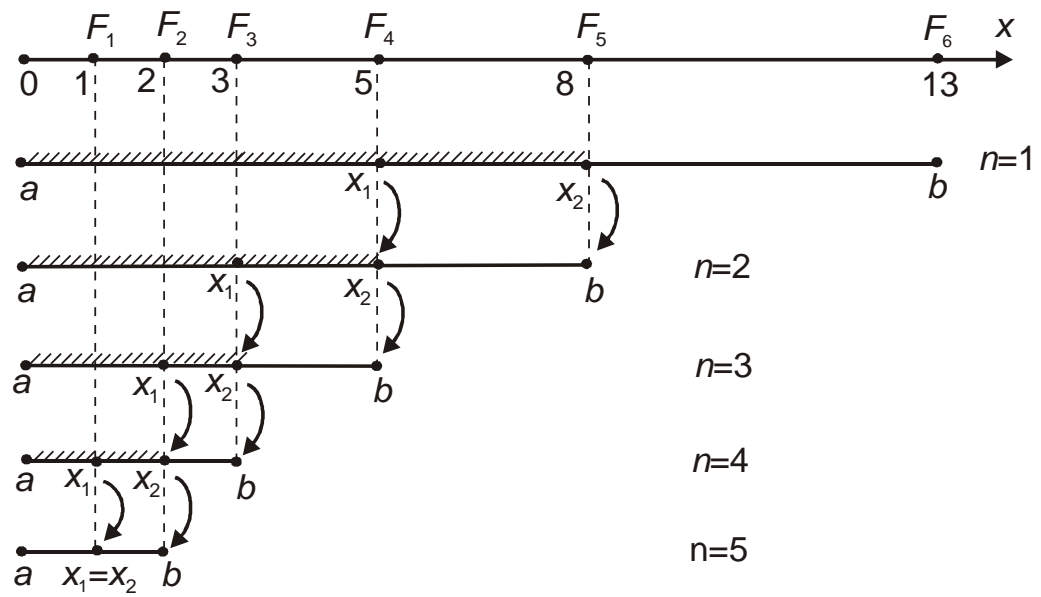


Рис. 2.15. Иллюстрация метода Фибоначчи для $N = 6$

Недостатки метода Фибоначчи (не позволяющие широко использовать его в оптимизационных расчетах):

1) так как практически никогда неизвестно, какое число вычислений функции требуется для обеспечения заданной точности, надо хранить избыточный набор чисел Фибоначчи либо многократно генерировать числа по мере необходимости;

2) метод Фибоначчи нелегко приспособить к часто используемому критерию останова, требующему, чтобы значения функции на окончательном интервале неопределенности разнились не более, чем на заданную величину.

Погрешность метода Фибоначчи

$$\varepsilon_N = \frac{1}{2 \cdot F_N} \cdot (b - a),$$

где a и b – координаты *исходного* (!) отрезка.

Согласно алгоритму метода одна из пробных точек всегда переходит на следующую итерацию, поэтому связь между числом вычислений функции N и количеством итераций n такая же, как в методе золотого сечения $N = n + 1$.

Пример 2.4. Найти минимум функции $f(x) = x^3 - 3 \cdot x + 1$ методом Фибоначчи на отрезке $[0,5; 2]$, если задано $N = 5$. Определить погрешность расчета точки минимума.

Решение

Найдем шесть последовательных чисел Фибоначчи:

$$F_0 = 1; F_1 = 1; F_2 = 2; F_3 = 3; F_4 = 5; F_5 = 8; F_6 = 13.$$

Итерация 1

$$a = 0,5; b = 2,0;$$

$$x_1 = a + \frac{F_4}{F_6} \cdot (b - a) = 0,5 + \frac{5}{13} \cdot (2 - 0,5) = 1,0769;$$

$$x_2 = a + \frac{F_5}{F_6} \cdot (b - a) = 0,5 + \frac{8}{13} \cdot (2 - 0,5) = 1,4231.$$

Значения функции в пробных точках:

$$f_1 = 1,0769^3 - 3 \cdot 1,0769 + 1 = -0,9818;$$

$$f_2 = 1,4231^3 - 3 \cdot 1,4231 + 1 = -0,3872.$$

Сравниваем значения функции в пробных точках. Так как $f_1 < f_2$, для дальнейшего рассмотрения оставляем отрезок $[a, x_2]$ и переприсваиваем $b = x_2 = 1,4231$; $x_2 = x_1 = 1,0769$; $f_2 = f_1 = -0,9818$.

Итерация 2

$$a = 0,5; b = 1,4231;$$

$$x_2 = 1,0769; f_2 = -0,9818;$$

$$x_1 = a + \frac{F_3}{F_5} \cdot (b - a) = 0,5 + \frac{3}{8} \cdot (1,4231 - 0,5) = 0,8462;$$

$$f_1 = -0,9328.$$

Так как $f_1 > f_2$, для дальнейшего рассмотрения оставляем отрезок $[x_1, b]$ и принимаем:

$$a = x_1 = 0,8462; x_1 = x_2 = 1,0769; f_1 = f_2 = -0,9818.$$

Итерация 3

$$a = 0,8462; b = 1,4231;$$

$$x_1 = 1,0769; f_1 = -0,9818;$$

$$x_2 = a + \frac{F_3}{F_4} \cdot (b - a) = 0,8462 + \frac{3}{5} \cdot (1,4231 - 0,8462) = 1,1923;$$

$$f_2 = -0,8819.$$

Так как $f_1 < f_2$, для дальнейшего рассмотрения оставляем отрезок $[a, x_2]$ и принимаем:

$$b = x_2 = 1,1923; x_2 = x_1 = 1,0769; f_2 = f_1 = -0,9818.$$

Итерация 4

$$a = 0,8462; b = 1,1923;$$

$$x_2 = 1,0769; f_2 = -0,9818;$$

$$x_1 = a + \frac{F_1}{F_3} \cdot (b - a) = 0,8462 + \frac{1}{3} \cdot (1,1923 - 0,8462) = 0,9616;$$

$$f_1 = 0,9616^3 - 3 \cdot 0,9616 + 1 = -0,9956.$$

Так как $f_1 < f_2$, для дальнейшего рассмотрения оставляем отрезок $[a, x_2]$.

$$b = x_2 = 1,0769; x_2 = x_1 = 0,9616; f_2 = f_1 = -0,9956.$$

Итерация 5 (последняя)

$$a = 0,8462; b = 1,0769;$$

$$x_2 = 0,9616; f_2 = -0,9956;$$

$$x_1 = a + \frac{F_0}{F_2} \cdot (b - a) = 0,8462 + \frac{1}{2} \cdot (1,0769 - 0,8462) = 0,9616;$$

$$f_1 = 0,9616^3 - 3 \cdot 0,9616 + 1 = -0,9956.$$

Решение задачи: $x^* \approx \bar{x} = 0,9616; f_{\min} \approx -0,9956.$

2.7. Метод средней точки

Метод средней точки используется для дифференцируемых на $[a, b]$ функций, он аналогичен методу деления отрезка пополам. Однако вместо вычисления двух значений функции вблизи середины отрезка метод требует одного вычисления производной $f'(x)$ в средней точке отрезка

$$\bar{x} = \frac{(a + b)}{2}.$$

Если $f'(\bar{x}) > 0$, то \bar{x} лежит на участке монотонного возрастания функции (рис. 2.16, а), поэтому $x^* < \bar{x}$ и точку минимума x^* надо искать на $[a, \bar{x}]$.

При $f'(\bar{x}) < 0$ \bar{x} принадлежит участку монотонного убывания функции (рис. 2.16, б), следовательно $x^* \in [\bar{x}, b]$. Если $f'(\bar{x}) = 0$, то $x^* = \bar{x}$.

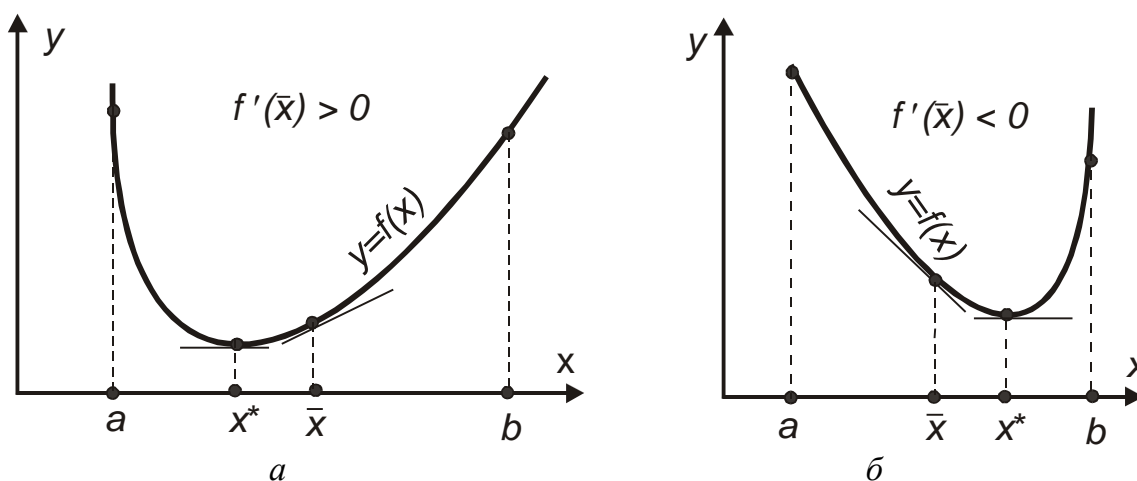


Рис. 2.16. Взаимное расположение средней точки отрезка и точки минимума

Алгоритм метода приведен на рис. 2.17.

Пример 2.6. Найти точку минимума функции $f(x) = x^2 + e^{-x}$ на отрезке $[0, 1]$ методом средней точки с погрешностью $\varepsilon = 0,01$.

Решение

Расчеты выполняем в соответствии с алгоритмом на рис. 2.17. Запишем выражение для производной

$$f'(\bar{x}) = 2 \cdot \bar{x} - e^{-\bar{x}}.$$

Итерация 1

$$a = 0; \quad b = 1;$$

$$\bar{x} = (a + b) / 2 = (0 + 1) / 2 = 0,5;$$

$$f'(\bar{x}) = 2 \cdot 0,5 - e^{-0,5} = 0,3935.$$

Так как $|f'(\bar{x})| > \varepsilon$ и $|f'(\bar{x})| > 0$, принимаем $b = \bar{x} = 0,5$ и переходим к следующей итерации.

Итерация 2

$$a = 0; \quad b = 0,5;$$

$$\bar{x} = (0 + 0,5) / 2 = 0,25;$$

$$f'(\bar{x}) = 2 \cdot 0,25 - e^{-0,25} = 0,2788 < 0. \text{ Принимаем } a = \bar{x} = 0,25.$$

Дальнейший расчет сводим в табл. 2.3.

Таблица 2.3

	a	b	\bar{x}	$f'(\bar{x})$	Примечание
Итерация 3	0,25	0,5	0,375	0,0627	$b = \bar{x}$
Итерация 4	0,25	0,375	0,3125	-0,1066	$a = \bar{x}$
Итерация 5	0,3125	0,375	0,3437	-0,0217	$a = \bar{x}$
Итерация 6	0,3437	0,375	0,3613	0,0258	$b = \bar{x}$
Итерация 7	0,3437	0,3613	0,3525	0,00207	$x^* \approx 0,3525$

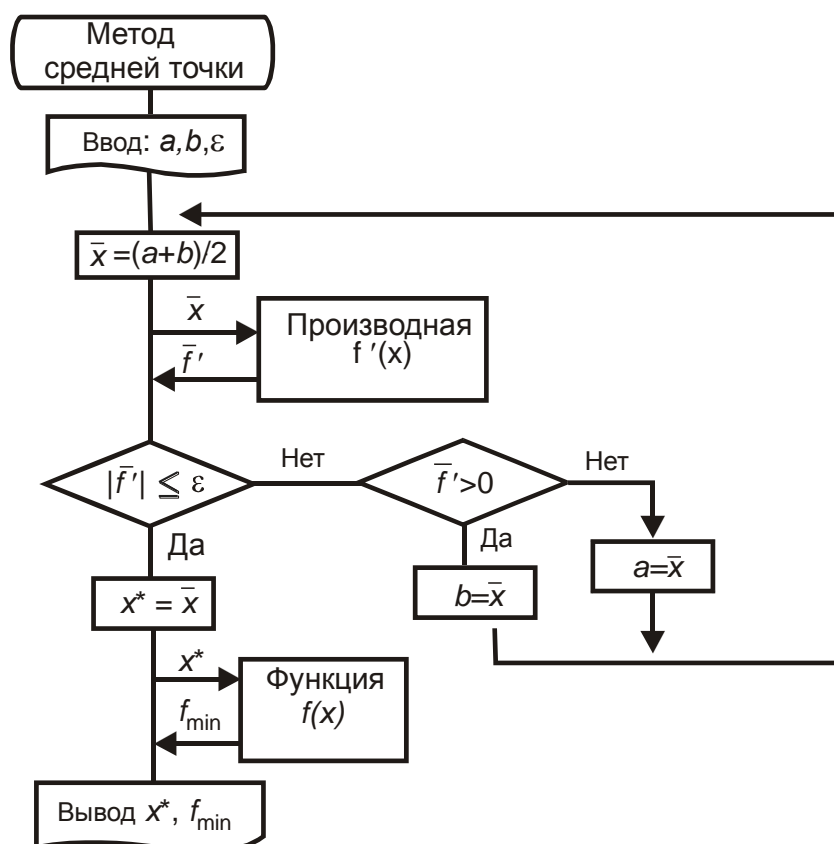


Рис. 2.17. Алгоритм метода средней точки

2.8. Метод парабол

Является методом полиномиальной аппроксимации. Идея методов полиномиальной аппроксимации заключается в том, что для функции $f(x)$ строится аппроксимирующий многочлен и его точка минимума служит приближением к x^* . Метод эффективен для функций, которые являются *унимодальными* и, кроме того, достаточно *гладкими* (по крайней мере, *непрерывными*). Метод парабол – простейший из методов полиномиальной аппроксимации, он использует полиномы второго порядка.

На каждой итерации метода парабол строится квадратный трехчлен, график которого (парабола) проходит через три выбранные точки графика функции $y = f(x)$. Точка минимума параболы \tilde{x} является очередным приближением к точке минимума x^* исследуемой функции (рис. 2.18).

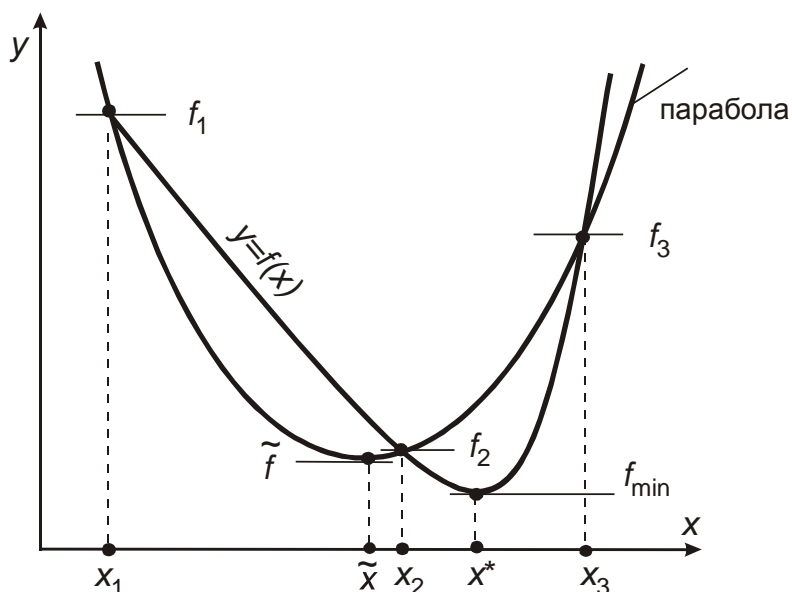


Рис. 2.18. Взаимное расположение графика функции $y = f(x)$ и параболы

Алгоритм метода парабол

Пусть $f(x)$ унимодальна на $[a, b]$ и достигает минимума во внутренней точке отрезка.

1. Выберем три точки x_1, x_2, x_3 , для которых выполняются неравенства

$$x_1 < x_2 < x_3; \quad f_1 \geq f_2 \geq f_3.$$

Из унимодальности $f(x)$ следует, что $x^* \in [x_1, x_3]$.

2. Построим квадратный трехчлен

$$q(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_1) + a_2 \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2),$$

график которого проходит через точки $A_1(x_1, f_1)$; $A_2(x_2, f_2)$; $A_3(x_3, f_3)$.

Коэффициенты a_1 , a_2 , a_3 определяем по формулам

$$a_0 = f_1 ;$$

$$a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} ;$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \cdot \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right).$$

3. Определим точку минимума квадратного трехчлена (параболы)

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 - \frac{a_1}{a_2})$$

и значение функции в этой точке $\tilde{f} = f(\tilde{x})$.

4. Выбираем из точек x_1 , x_2 , x_3 и \tilde{x} новую «удачную» тройку чисел (см. рис. 2.19).

Случай I. $x_1 \leq \tilde{x} \leq x_2$:

а) если $\tilde{f} \geq f_2$, то $x^* \in [\tilde{x}, x_3]$, т. е.

$$x_1 = \tilde{x}, \quad f_1 = \tilde{f} ;$$

$$x_2 = x_2 ;$$

$$x_3 = x_3 .$$

б) если $\tilde{f} < f_2$, то $x^* \in [x_1, x_2]$, т. е.

$$x_1 = x_1 ;$$

$$x_2 = \tilde{x}, \quad f_2 = \tilde{f} ;$$

$$x_3 = x_2, \quad f_3 = f_2 .$$

Случай II. $x_2 \leq \tilde{x} \leq x_3$:

а) если $\tilde{f} \geq f_2$, то $x^* \in [x_1, \tilde{x}]$, т. е.

$$x_1 = x_1 ;$$

$$x_2 = x_2 ;$$

$$x_3 = \tilde{x}, \quad f_3 = \tilde{f} ;$$

б) если $\tilde{f} < f_2$, то $x^* \in [x_2, x_3]$, т. е.

$$x_1 = x_2; \quad f_1 = f_2 ;$$

$$x_2 = \tilde{x}; \quad f_2 = \tilde{f} ;$$

$$x_3 = x_3 .$$

5. Алгоритм повторяем, начиная с п. 2.

Условием окончания поиска служит близость к нулю разности

$$\Delta = \left| \tilde{x}^{k+1} - \tilde{x}^k \right|$$

чисел \tilde{x} , найденных на данной и предыдущей итерациях, т. е. неравенство

$$|\Delta| \leq \varepsilon,$$

где ε – погрешность расчета.

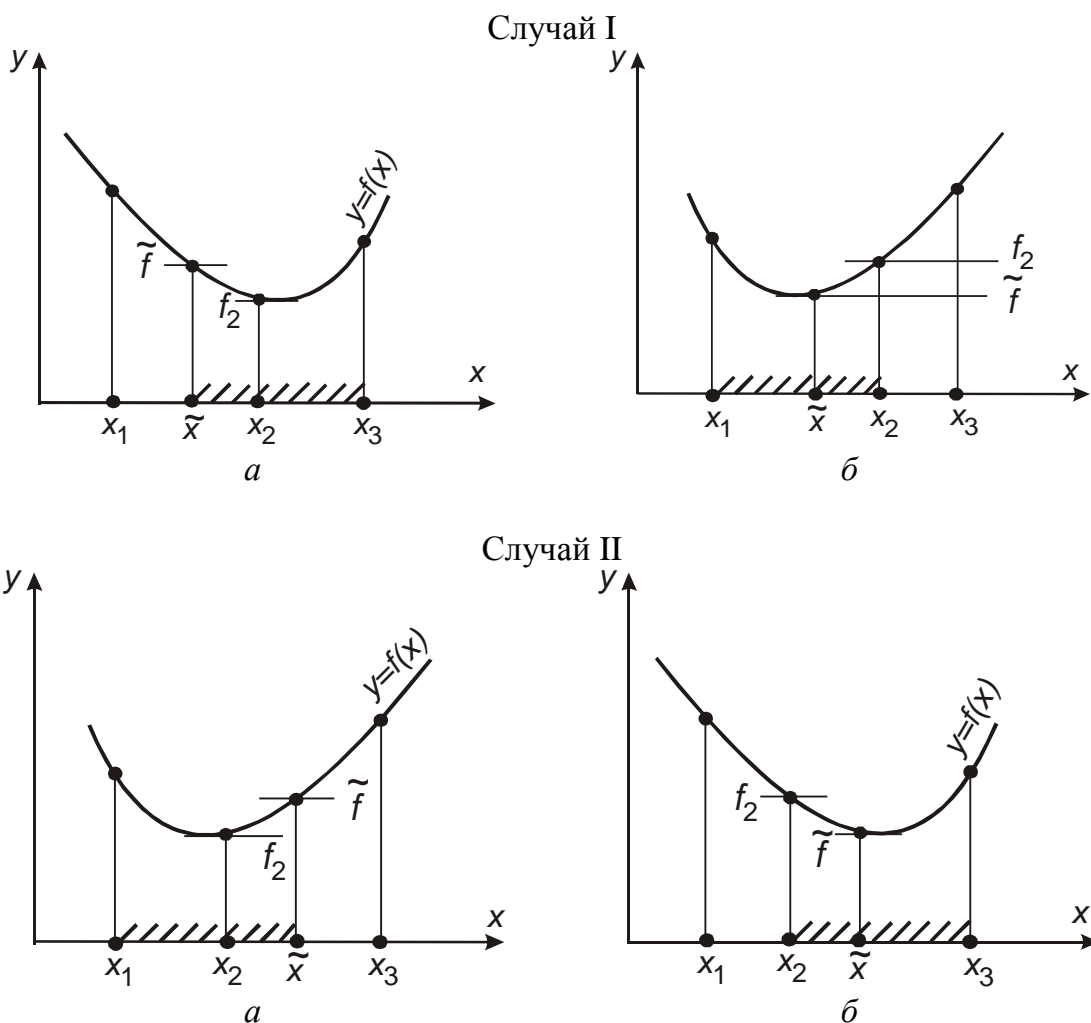


Рис. 2.19. Выбор «удачной» тройки чисел для очередной итерации метода парабол

Пример 2.7. Найти точку минимума функции $f(x) = x^2 + e^{-x}$ на отрезке $[0, 1]$ методом парабол. За критерий останова принять абсолютную разницу двух последних значений \tilde{x} не более 0,05.

Решение

Итерация 1

Выберем «удачную» тройку чисел: $x_1 = 0,1$; $x_2 = 0,3$; $x_3 = 0,9$.

Значения функции в этих точках: $f_1 = 0,9148$, $f_2 = 0,8308$, $f_3 = 1,2166$.

2. Коэффициенты квадратного трехчлена:

$$a_0 = f_1 = 0,9148;$$

$$a_1 = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = \frac{0,8308 - 0,9148}{0,3 - 0,1} = -0,4200;$$

$$a_2 = \frac{1}{x_3 - x_2} \cdot \left(\frac{f_3 - f_1}{x_3 - x_1} - \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \right) =$$
$$= \frac{1}{0,9 - 0,3} \cdot \left(\frac{1,2166 - 0,9148}{0,9 - 0,1} - \frac{0,8308 - 0,9148}{0,3 - 0,1} \right) = 1,3287.$$

Аппроксимирующий трехчлен можно записать как

$$q(x) = 0,9148 + 0,4200 \cdot (x - 0,1) + 1,3287(x - 0,1) \cdot (x - 0,3).$$

3. Точка минимума квадратного трехчлена

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \cdot (x_1 + x_2 - \frac{a_1}{a_2}) = \frac{1}{2} \cdot \left(0,1 + 0,3 - \frac{-0,42}{1,3287} \right) = 0,3580.$$

4. Значение функции в точке \tilde{x}

$$\tilde{f} = 0,3580^2 + e^{-0,3580} = 0,8272.$$

Итерация 2

Новая «удачная» тройка чисел: x_2, \tilde{x}, x_3 .

Переприсваиваем:

$$x_1 = x_2 = 0,3; \quad f_1 = f_2 = 0,8308;$$

$$x_2 = \tilde{x} = 0,3580; \quad f_2 = \tilde{f} = 0,8272;$$

$$x_3 = 0,9; \quad f_3 = 1,2166.$$

2. Коэффициенты квадратного трехчлена:

$$a_0 = f_1 = 0,8308;$$

$$a_1 = \frac{0,8272 - 0,8308}{0,3580 - 0,3} = -0,0621;$$

$$a_2 = \frac{1}{0,9 - 0,3580} \cdot \left(\frac{1,2166 - 0,8308}{0,9 - 0,3} - \frac{0,8272 - 0,8308}{0,3580 - 0,3} \right) = 1,3008.$$

3. Точка минимума квадратного трехчлена

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} \cdot \left(0,3 + 0,3580 - \frac{-0,0621}{1,3008} \right) = 0,3529.$$

4. Значение функции в точке \tilde{x}

$$\tilde{f} = 0,3529^2 + e^{-0,3529} = 0,8272.$$

5. Сравниваем значения \tilde{x} на первом и втором шагах:

$$\Delta = |0,3529 - 0,3580| = 0,0051 \approx \varepsilon.$$

За точку минимума примем последнее значение \tilde{x}

$$x^* \approx 0,3529.$$

3. МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ

В общем виде задача поиска минимума функции многих переменных может быть записана

$$F(X) \rightarrow \min ,$$

$$X \in D ,$$

где $F(X)$ – целевая функция многих переменных;

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n -мерный вектор оптимизируемых параметров;

n – размерность задачи;

D – допустимая область решения.

Теоретический материал по методам многомерной минимизации хорошо изложен в [1].

3.1. Графическая интерпретация целевой функции.

Линии уровня

Для произвольной целевой функции $Y = F(X)$ векторного аргумента $X \in E^n$ оптимизируемых параметров уравнение $Y = F(X)$ определяет в $(n+1)$ -мерном пространстве E^{n+1} некоторую *гиперповерхность*.

Когда $n=2$, это – обычная поверхность в трехмерном пространстве $Y(x_1, x_2)$ (см. рис. 3.1). При этом для каждого постоянного C из множества значений функции $F(x_1, x_2)$ уравнение $F(x_1, x_2) = C$ неявно задает кривую в координатах (x_1, x_2) на плоскости $Y = C$. На рис. 3.1 показано пересечение поверхности функции двумя такими плоскостями: $Y = F^1$ и $Y = F^2$.

Если несколько таких кривых, соответствующих некоторой выборке значений параметра $C(F^1, F^2, \dots)$, изобразить на одной плоскости, получится контурный график функции. Образующие его кривые $F^1 = \text{const}$, $F^2 = \text{const}$ принято называть *линиями уровня* (см. рис. 3.2).

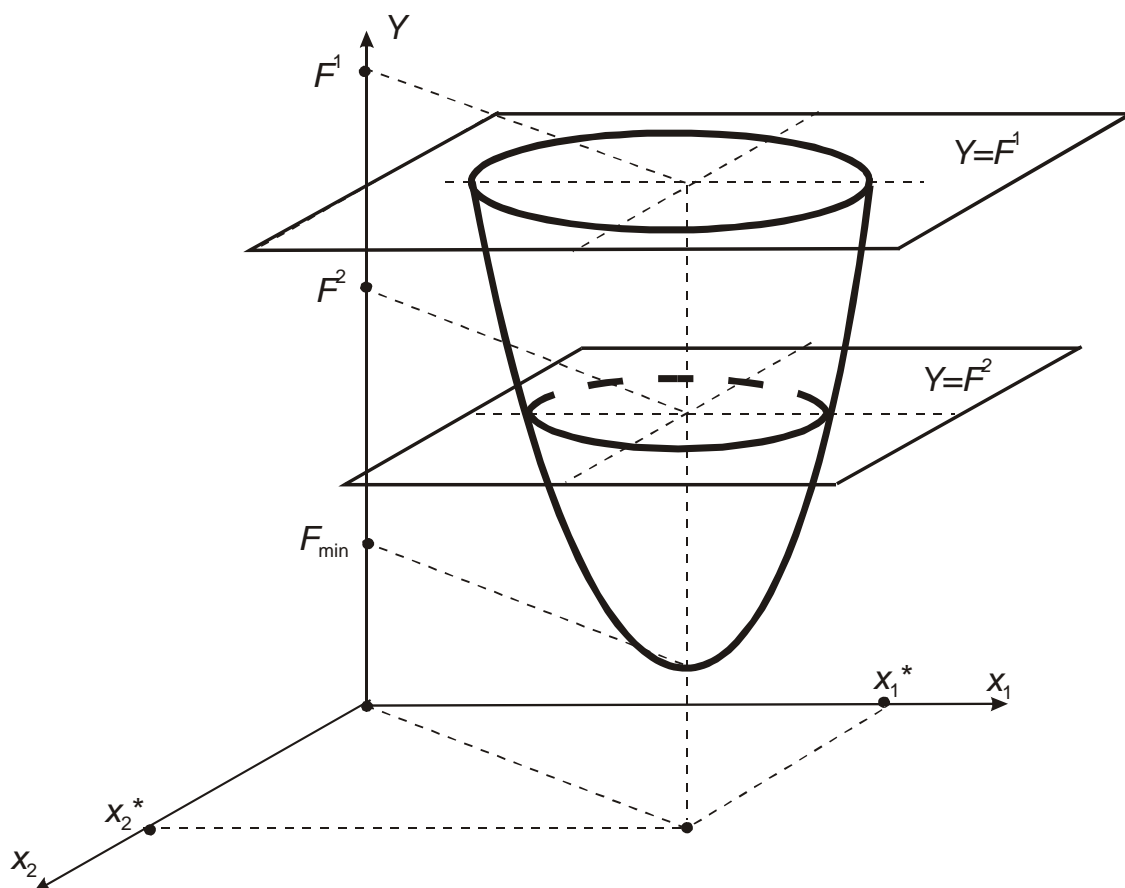


Рис. 3.1. Графическое представление целевой функции двух переменных $Y = F(x_1, x_2)$

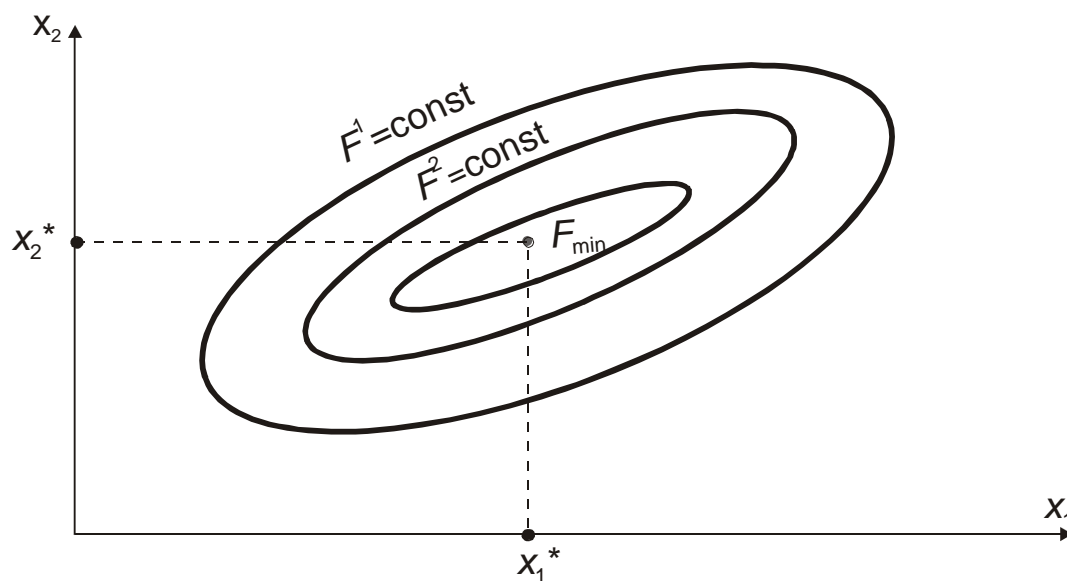


Рис. 3.2. Линии уровня целевой функции $Y = F(x_1, x_2)$

Пример 3.1. Изобразить графически несколько линий уровня целевой функции $Y = (x_1 - 2)^2 + 5 \cdot (x_2 - 1)^2 - 5 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 2$.

Решение

Построим линию уровня $F = 0$.

Будем решать уравнение

$$(x_1 - 2)^2 + 5 \cdot (x_2 - 1)^2 - 5 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 2 = 0,$$

задавая значение одной координаты и вычисляя значение второй.

Сначала найдем точки пересечения (если они существуют) с осями Ox_1 и Ox_2 .

Примем $x_2 = 0$ и найдем значения координаты x_1 :

$$(x_1 - 2)^2 + 5 \cdot (0 - 1)^2 - 5 \cdot x_1 - 4 \cdot 0 + 2 = 0;$$

$$x_1^2 - 9 \cdot x_1 + 11 = 0;$$

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 11 = 37;$$

$$x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{9 \pm \sqrt{37}}{2 \cdot 1};$$

$$x_1' = 1,46;$$

$$x_1'' = 7,54.$$

Отметим в координатах (x_1, x_2) точки $A_1(1,46; 0)$ и $A_2(7,54; 0)$ (см. рис. 3.3).

Примем $x_1 = 0$ и найдем значения координаты x_2 :

$$5 \cdot x_2^2 - 14 \cdot x_2 + 11 = 0; D = -24 < 0.$$

Отрицательное значение дискриминанта означает, что последнее уравнение не имеет действительных корней, а линия уровня $F = 0$ – точек пересечения с осью Ox_2 .

Для $x_2 = 1$ решение квадратного уравнения относительно x_1 дает корни $x_1' = 0,23$; $x_1'' = 8,77$. Отмечаем точки $A_3(0,23; 1)$ и $A_4(8,77; 1)$ (см. рис. 3.3).

Аналогично получаем попарно координаты точек $A_5(0,35; 2)$ и $A_6(8,65; 2)$; $A_7(2; 3)$ и $A_8(7; 3)$; $A_9(5; -0,54)$ и $A_{10}(5; 3,34)$; $A_{11}(3; -0,43)$ и $A_{12}(3; 3,23)$ и отмечаем их на графике.

Построим линию уровня $F = -11$.

$$(x_1 - 2)^2 + 5 \cdot (x_2 - 1)^2 - 5 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 2 = -11.$$

Точек пересечения с осями координат нет.

Примем $x_2 = 1$ и найдем значения координаты x_1 :

$$x_1^2 - 9 \cdot x_1 + 13 = 0; D = 29; x_1' = 1,81; x_1'' = 7,19.$$

Отмечаем на рис. 3.3 точки $B_1(1,81; 1)$ и $B_2(7,19; 1)$.

Примем $x_2 = 2$. Решаем квадратное уравнение $x_1^2 - 9 \cdot x_1 + 14 = 0$;
 $D = 25$; $x_1' = 2$; $x_1'' = 7$. Отмечаем точки $B_3(2; 2)$ и $B_4(7; 2)$.

Аналогично получаем координаты точек $B_5(5; 0,15)$ и $B_6(5; 2,65)$.

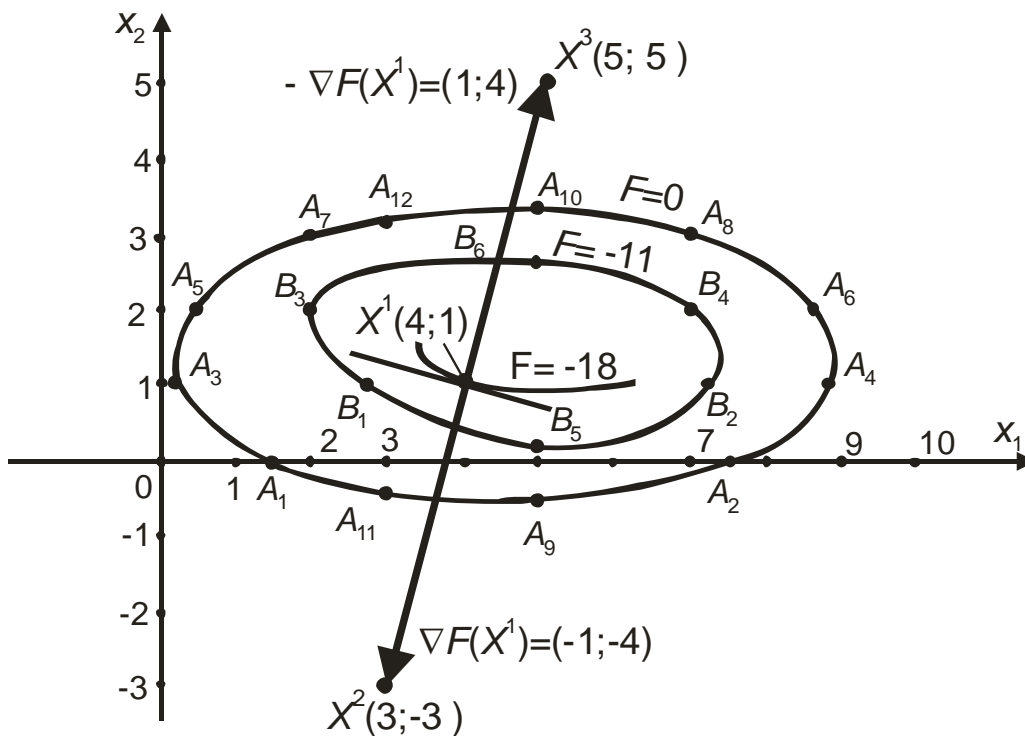


Рис. 3.3. Линии уровня целевой функции

$$Y = (x_1 - 2)^2 + 5 \cdot (x_2 - 1)^2 - 5 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 2$$

3.2. Классификация численных методов многомерной минимизации

Известно, что технические оптимизационные задачи имеют ограничения на оптимизируемые параметры и поэтому требуют привлечения методов условной минимизации. Интерес же к методам безусловной минимизации объясняется следующими причинами:

- алгоритмы условной минимизации в большинстве случаев строятся на основе алгоритмов оптимизации без ограничений;
- задачи минимизации с ограничениями очень часто решаются путем преобразования их в задачи безусловной минимизации.

В соответствии со стратегией поиска методы делятся на две большие группы:

- методы направленного поиска (методы *спуска*);
- методы «слепого» поиска.

Методы, использующие лишь значения функции и не требующие их дифференцируемости, называются методами *нулевого порядка*.

Методы *первого порядка* требуют вычисления первых производных, а методы *второго* и высшего порядков дополнительно требуют вычисления производных второго и более высокого порядков.

Для негладких функций используются преимущественно методы *нулевого порядка*, основными из них являются:

- метод *перебора*;
- метод *многогранника*;
- метод *случайного поиска*.

Методы нулевого порядка применимы для всех видов минимизируемых функций (это их *достоинство*), но в большинстве случаев их стратегия поиска уступает методам спуска.

Недостатки методов нулевого порядка:

- низкая эффективность;
- весьма сомнительные, а иногда и просто отсутствующие гарантии сходимости.

Методы спуска:

- метод *координатного спуска*;
- группа градиентных методов (методы первого порядка: градиентный, метод наискорейшего спуска, метод сопряженных направлений и др.);
- группа методов второго порядка (метод *Ньютона*; метод *переменной метрики* и др.).

3.3. Дифференцирование функции многих переменных

Градиент функции $F(X)$ многих переменных в некоторой точке $X \in E^n$ – это вектор, координатами которого являются частные производные функции в этой точке:

$$\text{Grad } F(X) = \nabla F(X) = F'(X) = \left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(X)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F(X)}{\partial x_n} \right). \quad (3.4)$$

В малой окрестности точки X градиент указывает направление *наискорейшего возрастания* функции, а его норма характеризует *скорость* этого возрастания. Вектор-антиградиент указывает направление *наискорейшего убывания* функции.

В любой точке поверхности целевой функции $F(X)$ вектор-антиградиент перпендикулярен касательной к линии уровня $F(X) = \text{const}$ в этой точке (см. рис. 3.4).

Норма вектора-градиента

$$\|\nabla F(X)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_n}\right)^2}. \quad (3.5)$$

В точке с координатами $X^*(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, где имеет место экстремум функции, *вектор-градиент и все его компоненты обращаются в ноль* $F'(X^*) = (0; 0; \dots; 0)$.

При перемещении из некоторой точки X^0 n -мерного пространства с координатами $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ в некоторую точку X^1 вдоль вектора-градиента заданной функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ координаты новой точки $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ можно рассчитать по формулам:

$$\begin{aligned} x_1^1 &= x_1^0 + \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_1}; \\ x_2^1 &= x_2^0 + \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_2}; \\ &\dots \\ x_n^1 &= x_n^0 + \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_n}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Для функции двух переменных графическая иллюстрация перемещения из точки $X^0(x_1^0; x_2^0)$ в точку $X^1(x_1^1; x_2^1)$ в направлении градиента приведена на рис. 3.5.

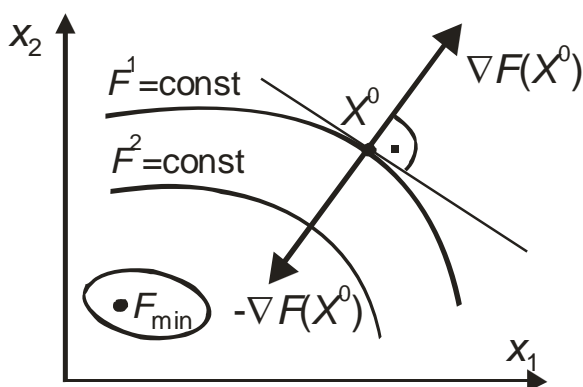


Рис. 3.4. Графическое изображение градиента и антиградиента функции двух переменных в некоторой точке

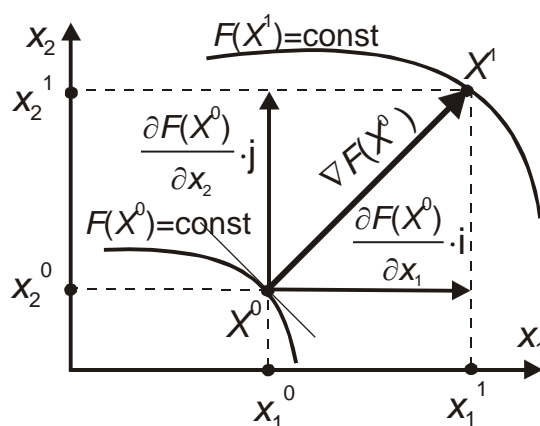


Рис. 3.5. Перемещение вдоль градиента из точки $X^0(x_1^0, x_2^0)$ в точку $X^1(x_1^1, x_2^1)$

Пример 3.3. Вычислить градиент функции

$$F(X) = x_1^2 + 3 \cdot x_2^2 - 4 \cdot (x_3 - 1)^2 - x_1 \cdot x_2 + 5 \cdot x_2 \cdot x_3 + 3 \cdot x_1 - x_2$$

в точке $X^1(1; 1; 1)$.

Решение

Частные производные:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 + 3; \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_2} = 6x_2 - x_1 + 5x_3 - 1; \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_3} = -8x_3 + 5x_2 + 8. \quad (3.9)$$

Градиент в точке X^1

$$\nabla F(1; 1; 1) = (2 \cdot 1 - 1 + 3; 6 \cdot 1 - 1 + 5 \cdot 1 - 1; -8 \cdot 1 + 5 \cdot 1) = (4; 9; -3).$$

Пример 3.4. Изобразить графически градиент и антиградиент функции

$$F(X) = (x_1 - 2)^2 + 5 \cdot (x_2 - 1)^2 - 5 \cdot x_1 - 4 \cdot x_2 + 2 \text{ в точке } X^0(4; 1).$$

Решение

Вычислим значение целевой функции в заданной точке $X^0(4; 1)$:

$F = (4 - 2)^2 + 5 \cdot (1 - 1)^2 - 5 \cdot 4 - 4 \cdot 1 + 2 = -18$. Условно покажем линию уровня $F = -18$ в координатах $(x_1 O x_2)$ (см. рис. 3.3).

Частные производные функции:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial x_1} = 2 \cdot x_1 - 9; \quad \frac{\partial F(X)}{\partial x_2} = 10 \cdot x_2 - 14.$$

Значения частных производных в точке $X^0(4; 1)$:

$$\frac{\partial F(X^0)}{\partial x_1} = 2 \cdot x_1 - 9 = 2 \cdot 4 - 9 = -1;$$

$$\frac{\partial F(X^0)}{\partial x_2} = 10 \cdot x_2 - 14 = 10 \cdot 1 - 14 = -4.$$

Градиент $\nabla F(X^0) = (-1; -4)$, антиградиент $-\nabla F(X^0) = (1; 4)$.

Учитывая, что координаты вектора – это проекции на оси координат, отмечаем на рис. 3.3 векторы $\nabla F(X^0)$ и $-\nabla F(X^0)$. Перемещение в направлении векторов градиента и антиградиента с шагом $h = 1$ дает координаты новых точек X^1 и X^2 : $X^1(3; -3)$, $X^2(5; 5)$.

С другой стороны, координаты точек $X^1(x_1^1; x_2^1)$ и $X^2(x_1^2; x_2^2)$ можно посчитать по формулам

$$\begin{aligned}x_1^1 &= x_1^0 + \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_1} = 4 + (-1) = 3; & x_2^1 &= x_2^0 + \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_2} = 1 + (-4) = -3; \\x_1^2 &= x_1^0 - \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_1} = 4 - (-1) = 5; & x_2^2 &= x_2^0 - \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_2} = 1 - (-4) = 5;\end{aligned}$$

затем отметить на рисунке точки $X^1(3; -3)$ и $X^2(5; 5)$ и, соединив их с исходной $X^0(4; 1)$, получить векторы градиента и антиградиента соответственно.

Матрица Гессе

Матрица Гессе функции $F(X)$ многих переменных – это матрица вторых производных:

$$H(X) = F''(X) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Пример 3.5. Вычислить матрицу Гессе для функции из примера 3.3.

Решение

Продифференцируем выражение (3.7) последовательно по x_1 , x_2 и x_3 и получим первую строку матрицы Гессе:

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_1} = 2; \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = -1; \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_1 \partial x_3} = 0.$$

Продифференцируем выражение (3.8) последовательно по x_1 , x_2 и x_3 и получим вторую строку матрицы Гессе:

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_1} = -1; \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_2} = 6; \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_2 \partial x_3} = 5.$$

Третья строка матрицы Гессе получается в результате последовательного дифференцирования выражения (3.9) по x_1 , x_2 и x_3 :

$$\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_3 \partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_3 \partial x_2} = 5; \quad \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_3 \partial x_3} = -8.$$

Таким образом, получили матрицу Гессе

$$H(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Первый дифференциал

Первый дифференциал функции многих переменных в точке X^0

$$dF(X^0) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j, \quad (3.11)$$

где Δx_j – приращение отдельной координаты при перемещении из некоторой точки X^0 на малую величину $\Delta X(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$.

В векторной форме первый дифференциал функции $F(X)$ в точке X^0 записывается как скалярное произведение вектора-градиента в этой точке $\nabla F(X^0)$ и вектора приращений ΔX :

$$dF(X^0) = (\nabla F(X^0), \Delta X). \quad (3.12)$$

Второй дифференциал

Второй дифференциал функции многих переменных в точке X^0

$$d^2 F(X^0) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 F(X^0)}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \Delta x_i \cdot \Delta x_j, \quad (3.13)$$

или в векторной форме

$$d^2 F(X^0) = (H(X^0) \cdot \Delta X, \Delta X). \quad (3.14)$$

Приращение функции

– через первый дифференциал

$$\Delta F(X^0) = dF(X^0) + O(|\Delta X|), \quad (3.15)$$

где $O(|X|)$ – остаточная погрешность,

$$\text{или} \quad \Delta F(X^0) \approx dF(X^0) = (\nabla F(X^0), \Delta X); \quad (3.16)$$

– через первый и второй дифференциалы

$$\Delta F(X^0) = dF(X^0) + \frac{1}{2} d^2 F(X^0) + O(|\Delta X|^2), \quad (3.17)$$

где $O(|\Delta X|^2)$ – остаточная погрешность более низкого порядка.

Вычисление частных производных

1. *Аналитический способ.* С помощью известных в математике правил частные производные определяются в виде аналитических выражений.

2. *Численный способ (численное дифференцирование).* Производные подсчитываются с помощью соответствующих разностей

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \approx \frac{F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - F(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

При численном дифференцировании следует учитывать следующие противоречивые обстоятельства:

- с одной стороны, чем меньше Δx_i ($\Delta x_i \rightarrow 0$), тем ближе приближенное значение частной производной к ее точному значению;
- с другой стороны, Δx_i не может быть сколь угодно малым, т. к. при этом возрастает погрешность расчета.

В задачах, связанных с выбором оптимальных термодинамических параметров паротурбинных установок, следует принимать относительный шаг дифференцирования равным

$$\frac{\Delta x_i}{x_i} \approx (0,0001 \div 0,005).$$

Нормированный вектор-градиент

Деление каждой компоненты вектора на его норму нормализует вектор

$$\nabla F_n(X) = \frac{\nabla F(X)}{\|\nabla F\|} = \frac{\left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_1}, \frac{\partial F(X)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial F(X)}{\partial x_n} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F(X)}{\partial x_n} \right)^2}}.$$

3.4. Классический метод минимизации функции многих переменных

Необходимые и достаточные условия минимума функции многих переменных в точке \bar{X}

Необходимые условия существования минимума

1. Градиент равен нулю в этой точке \bar{X} , т. е.

$$\|\nabla F(\bar{X})\| = 0,$$

или
$$\frac{\partial F(\bar{X})}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial F(\bar{X})}{\partial x_2} = 0; \quad \dots; \quad \frac{\partial F(\bar{X})}{\partial x_n} = 0.$$

2. Матрица Гессе функции $F(\bar{X})$ неотрицательна (положительно полуопределена): $H(\bar{X}) \geq 0$.

Достаточные условия существования минимума

1. Градиент равен нулю: $\|\nabla F(\bar{X})\| = 0$.

2. Матрица Гессе положительно определена: $H(\bar{X}) > 0$.

Алгоритм классического метода

1. Находим частные производные функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ последовательно по всем переменным и приравниваем их нулю

$$\begin{cases} \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} = 0; \\ \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_2} = 0; \\ \dots \\ \frac{\partial F(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_n} = 0. \end{cases}$$

2. Решаем полученную систему уравнений, корни которой являются *стационарными* точками.

3. Находим матрицу Гессе $H(X)$ в стационарных точках минимизируемой функции. Если $H(X) > 0$, то исследуемая точка соответствует минимуму функции.

Пример 3.11. С помощью классического метода найти стационарные точки функции $F(X) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 - 2x_3 - x_2x_3$ и определить, являются ли они точками минимума.

Решение

1. Определяем частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - 1 = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - x_3 = 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_3} = 2x_3 - x_2 - 2 = 0.$$

2. Решив полученную систему трех уравнений, получим стационарную точку

$$\bar{X} = \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right).$$

3. Матрица Гессе $H(\bar{X}) = A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$

4. Чтобы определить, является ли матрица H положительно определенной, воспользуемся критерием Сильвестра:

$$\Delta_1 = 2 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Так как все миноры положительны, матрица Гессе положительно определена, откуда следует, что стационарная точка $\bar{X} = \left(\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{4}{3} \right)$ является точкой минимума.

3.5. Теоретические основы методов спуска

Роль квадратичных функций для анализа и сравнения методов многомерной минимизации

Квадратичные функции и их свойства играют важную роль в теории многомерной минимизации. Это объясняется следующими причинами:

1) если метод непригоден для квадратичных функций, то очень мало шансов, что он может быть использован для функций с более сложной структурой;

2) в достаточно малой окрестности оптимальной точки X^* всякую неквадратичную гладкую функцию с положительно определенной матрицей Гессе можно аппроксимировать квадратичной функцией.

Квадратичная функция n переменных в общем виде

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \cdot x_i \cdot x_j + \sum_{j=1}^n b_j \cdot x_j + C. \quad (3.1)$$

Положив $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, получим симметричную матрицу $A = (a_{ij})$, с помощью которой выражение (3.1) можно записать в матричной форме

$$F(X) = \frac{1}{2} \cdot (A \cdot X, X) + (B, X) + C, \quad (3.2)$$

где $B = (b_j)$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Пример 3.2. Записать функцию

$$F(X) = 2 \cdot x_1^2 - 2 \cdot x_1 \cdot x_2 + 3 \cdot x_1 \cdot x_3 + x_2^2 - \\ - 5 \cdot x_2 \cdot x_3 + 4 \cdot x_3^2 + 7 \cdot x_1 - 8 \cdot x_2 + 9 \cdot x_3 + 10$$

в матричном виде.

Решение

$$A = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 \cdot 2 & -5 \\ 3 & -5 & 4 \cdot 2 \end{pmatrix}; \quad B = (7 \quad -8 \quad 9); \quad C = 10;$$

тогда

$$F(X) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -5 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right) + (7 \quad -8 \quad 9) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + 10.$$

Выпуклые функции

Функция $F(X)$, заданная на выпуклом множестве $D \subset E^n$, называется *выпуклой*, если для любых точек $X^1, X^2 \in D$ и любого скаляра $\mu \in [0, 1]$ выполняется неравенство

$$F(\mu \cdot X^1 + (1 - \mu) \cdot X^2) \leq \mu \cdot F(X^1) + (1 - \mu) \cdot F(X^2). \quad (3.18)$$

Для выпуклой функции любой ее локальный минимум является одновременно и глобальным.

Достаточным условием *строгой* выпуклости функции $F(X)$ является *положительная определенность* её матрицы Гессе $H(X)$, а *сильной* выпуклости – *положительная* определенность матрицы $H(X) - L \cdot E$, где E – единичная матрица, а $L > 0$.

Собственные значения и собственные векторы

Ненулевой вектор U , для которого $A \cdot U = \lambda \cdot U$, называется *собственным вектором* квадратной матрицы A , а число λ – соответствующим ему *собственным значением* этой матрицы.

Собственные значения находятся из характеристического уравнения

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0,$$

где E – единичная матрица (на главной диагонали – единицы, все остальные значения равны нулю).

Если λ_i – собственное значение матрицы A , то нетривиальное (ненулевое) решение однородной системы линейных уравнений

$$(A - \lambda_i \cdot E) \cdot U = 0$$

дает соответствующий ему собственный вектор.

Пример 3.6. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение

Матрица (2×2) имеет два собственных значения λ_1 и λ_2 .

$$A1 = A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{pmatrix};$$

$$\det A1 = (2-\lambda) \cdot (4-\lambda) - 1 \cdot 3 = \lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 5.$$

Решаем уравнение $\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 5 = 0$:

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 16; \lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a} = \frac{6 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1}.$$

Собственные значения: $\lambda_1 = 5$; $\lambda_2 = 1$.

Собственные векторы:

а) первый собственный вектор $U_1(x_1; x_2)$ определяем из решения системы уравнений $(A - \lambda_1 \cdot E) \cdot U_1 = 0$.

Обозначим $A1 = A - \lambda_1 \cdot E$, тогда

$$A1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$A1 \cdot U_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ 3 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 \end{pmatrix}.$$

Находим координаты первого собственного вектора, решая систему уравнений

$$\begin{cases} -3 \cdot x_1 + x_2 = 0; \\ 3 \cdot x_1 - x_2 = 0, \end{cases}$$

откуда x_1 – любое число, а $x_2 = 3 \cdot x_1$,

например, $U_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ или $U_1 = \begin{pmatrix} -0,5 \\ -1,5 \end{pmatrix}$ и т. д.

б) второй собственный вектор $U_2(x_1, x_2)$ определяем из решения системы уравнений $(A - \lambda_2 \cdot E) \cdot U_2 = 0$.

Обозначим $A2 = A - \lambda_2 \cdot E$, тогда

$$A2 = A - \lambda_2 \cdot E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix};$$

$$A2 \cdot U_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \end{pmatrix}.$$

Находим координаты второго собственного вектора, решая систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0; \\ 3 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = 0, \end{cases}$$

откуда x_1 – любое число, $x_2 = -x_1$ или, наоборот, x_2 – любое число, $x_1 = -x_2$, например, $U_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \end{pmatrix}$ или $U_2 = \begin{pmatrix} -0,1 \\ 0,1 \end{pmatrix}$ и т. д.

Квадратная матрица A называется *положительно определенной* ($A > 0$), если все ее собственные значения λ положительные. Матрица называется *положительно полуопределенной* ($A \geq 0$), если $\lambda \geq 0$. Матрица является *знаконеопределенной*, если среди ее собственных значений имеются и положительные, и отрицательные.

Чтобы выяснить, является ли матрица A положительно определенной, можно воспользоваться **критерием Сильвестра**: для того, чтобы матрица A была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее угловые миноры были положительными:

$$\Delta_1 = a_{11} > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0.$$

Пример 3.7. Матрица $A(2 \times 2)$ из примера 3.6 является положительно определенной, т. к. оба ее собственных значения ($\lambda_1 = 5 > 0$ и $\lambda_2 = 1 > 0$) являются положительными.

Пример 3.8. Матрица $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ является положительно полуопределенной, т. к. $\lambda_1 = 6$; $\lambda_2 = 0$.

Пример 3.9. Матрица $A = \begin{pmatrix} -7 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ является знаконеопределенной, т. к. $\lambda_1 = 7 < 0$; $\lambda_2 = 4 > 0$.

Пример 3.10. Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$ положительно определена.

Решение

Воспользуемся критерием Сильвестра:

$$\Delta_1 = 4 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & -2 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = 22 > 0.$$

Так как все миноры положительны, матрица A – положительно определена.

Возможные и приемлемые направления*Вектор направления*

Любой n -мерный вектор-столбец $d = (d_1, d_2, \dots, d_n)$ может служить направлением.

Пусть даны точка $X^0 \in E^n$ и направление $d \neq 0$. При изменении скалярной величины h от 0 до ∞ точка $X^1 = X^0 + h \cdot d$ описывает луч, исходящий из точки X^0 в направлении d .

Пример 3.12. На плоскости $X^0 = (x_1^0; x_2^0) = (1; 3); d = (d_1; d_2) = (-2; 5); h = 0,1$.

Найти новую точку $X^1 = (x_1^1, x_2^1)$ при перемещении из X^0 в направлении d с шагом h .

Решение

$$x_1^1 = x_1^0 + h \cdot d_1 = 1 + 0,1 \cdot (-2) = 0,8;$$

$$x_2^1 = x_2^0 + h \cdot d_2 = 3 + 0,1 \cdot 2 = 3,5;$$

$$X^1 = (0,8; 3,5).$$

Возможные направления:

- а) для методов без ограничений – это любое направление d ;
- б) для методов с ограничениями – это всякое направление, не нарушающее ограничений.

Приемлемые направления

– это направления, обеспечивающие убывание целевой функции (для задач с ограничениями еще и не нарушающие ни одно из ограничений).

Для двумерного случая примеры возможных и приемлемых направлений приведены на рис. 3.6.

Условие спуска

Построение убывающей последовательности значений функции в соответствии с условием (3.1) требует отрицательного приращения функции на каждой итерации $\Delta F^k = F(X^{k+1}) - F(X^k) < 0$.

Учитывая, что в первом приближении приращение функции равно ее первому дифференциалу

$$\Delta F(X^k) \approx (\nabla F(X^k), \Delta X^k),$$

и обозначив вектор приращений переменной ΔX^k на k -й итерации, как некоторый вектор направления d^k , гарантию спуска запишем

$$(\nabla F(X^k), d^k) < 0.$$

Таким образом, направление d^k в малой окрестности точки X^k обеспечивает убывание функции, если скалярное произведение вектора-градиента $\nabla F(X^k)$ в этой точке на направление d^k отрицательно.

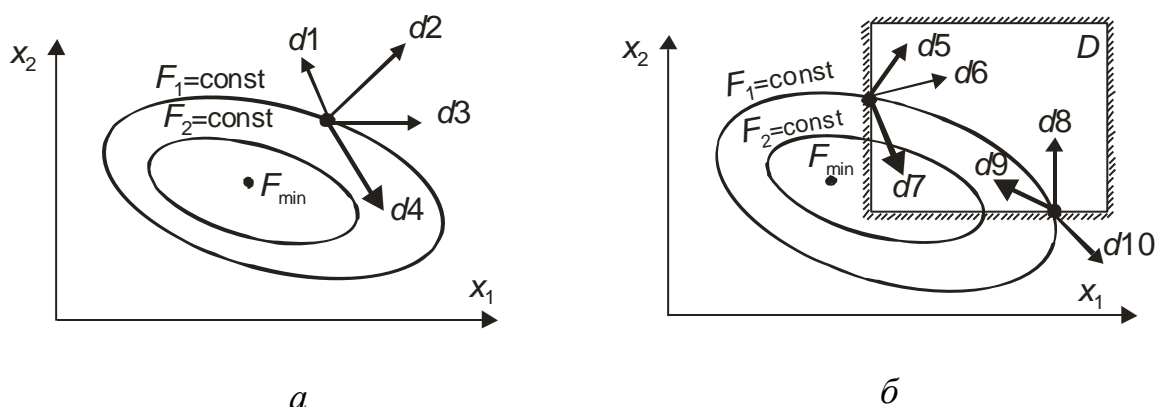


Рис. 3.6. Возможные и приемлемые направления:
а – задача без ограничений: d1, d2, d3, d4 – возможные направления, d4 – приемлемое направление;
б – задача с ограничениями: d5, d6, d7, d8, d9 – возможные направления, d7, d9 – приемлемые направления

Скалярное произведение можно расписать

$$(\nabla F(X^k), d^k) = |\nabla F(X^k)| \cdot |d^k| \cdot \cos \varphi,$$

где φ – угол между векторами $\nabla F(X^k)$ и d^k .

Таким образом, если угол φ между векторами – острый ($90 < \varphi < 180$), то в направлении d^k функция *возрастает* (см. рис. 3.7), если же угол φ – тупой ($0 < \varphi < 90$), то в направлении d^k функция *убывает* (см. рис. 3.8).

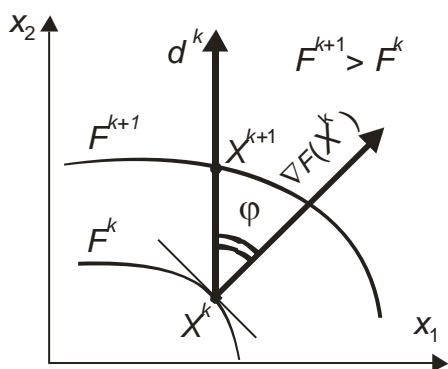


Рис. 3.7. Перемещение из точки X^k в точку X^{k+1} вдоль направления d^k возрастания функции ($0 < \varphi < 90$)

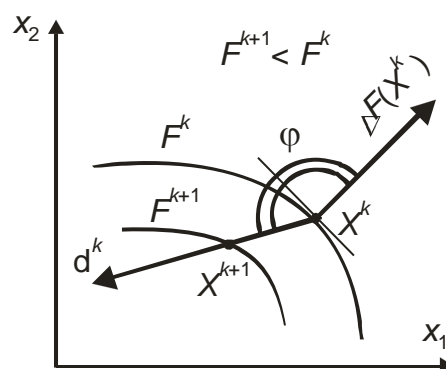


Рис. 3.8. Перемещение из точки X^k в точку X^{k+1} вдоль направления d^k убывания функции ($90 < \varphi < 180$)

Пример 3.13. Для целевой функции $F(x_1, x_2) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2$ проверить, какие из направлений $d_1(4, 0)$, $d_2(3, -3)$, $d_3(-4, -2)$ обеспечивают убывание функции из точки $X^0(1, 1)$?

Решение

1. Градиент целевой функции в точке $X^0(1, 1)$

$$\nabla F(1, 1) = (4 \cdot x_1 + x_2, 2 \cdot x_2 + x_1) = (5, 3).$$

2. Скалярные произведения градиента на заданные направления:

$$(\nabla F(X^0), d_1) = (5 \cdot 4 + 3 \cdot 0) = 20 > 0;$$

$$(\nabla F(X^0), d_2) = (5 \cdot 3 + 3 \cdot (-3)) = 6 > 0;$$

$$(\nabla F(X^0), d_3) = (5 \cdot (-4) + 3 \cdot (-2)) = -26 < 0.$$

Направление d_3 является приемлемым, т. е. указывает на убывание функции в малой окрестности точки X^0 .

Графическая иллюстрация решения задачи представлена на рис. 3.9.

Модельная схема методов спуска

Пусть X^k – текущее приближение к искомой точке минимума X^* .

Шаг 1. Проверка соблюдения условий останова алгоритма.

Если условия выполняются, то вычисления прекращают, полагая

$$X^* = X^k; \quad F_{\min} = F(X^k).$$

Шаг 2. Расчет направления поиска.

Выбрать направление, вдоль которого предполагается расположить следующую точку, т. е. рассчитать n -мерный вектор d^k , называемый направлением.

Шаг 3. Расчет длины шага.

Вычислить положительное число h^k (длину шага), обеспечивающее убывание функции

$$F(X^{k+1}) < F(X^k)$$

при перемещении из X^k в X^{k+1} .

Итерационная формула

$$X^{k+1} = X^k - h^k \cdot d^k.$$

Шаг 4. Пересчет оценки решения:

$$X^k = X^{k+1};$$

$$F(X^k) = F(X^{k+1});$$

$$k = k + 1.$$

Вернуться к шагу 1.

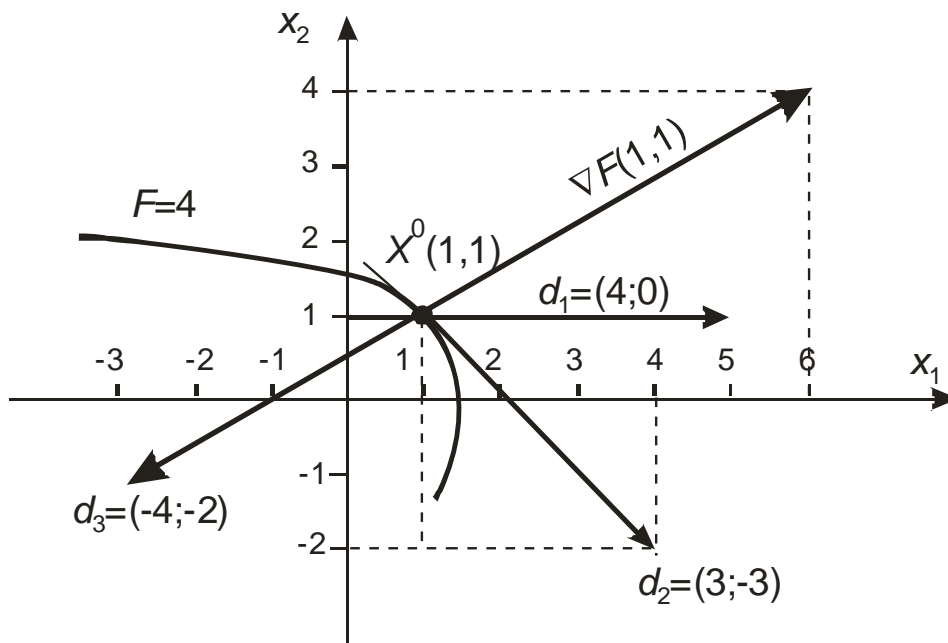


Рис. 3.9. Возможные направления функции $F = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 \cdot x_2$ точке $X^0(1,1)$

Примечание. В качестве условий останова алгоритма можно принять:

- 1) $\rho(X^{k+1}, X^k) \leq \varepsilon_\rho$, где ρ означает расстояние между точками X^k и X^{k+1} ;
- 2) $|F(X^{k+1}) - F(X^k)| \leq \varepsilon_F$;
- 3) $\|\nabla F(X^k)\| \leq \varepsilon_{\nabla F}$.

Здесь ε_ρ , ε_F , $\varepsilon_{\nabla F}$ – заранее заданные погрешности расчета расстояния между точками, значениями функции и нормы градиента соответственно.

Условия сходимости методов спуска

1. Функция F дважды непрерывно дифференцируема.
2. Функция «существенно» убывает на каждой итерации.

Неудачный выбор шага h^k может привести к тому, что величины уменьшения функции по итерациям $\Delta F = F^{k+1} - F^k$ будут слишком быстро стремиться к нулю ($\Delta F \rightarrow 0$), т. е. существенного уменьшения функции не будет.

3. При всех k (номер итерации) угол φ между направлением спуска d^k и градиентом $\nabla F(X^k)$ отличается от прямого не менее, чем на фиксированную ненулевую величину $\Delta\varphi$. Если d^k и $\nabla F(X^k)$ – ортогональны ($\varphi = 90^\circ$), то метод расчета выдает векторы, вдоль которых $F^k = \text{const}$.

4. Множество уровня $L(F(X^0))$ замкнуто и ограничено (X^0 – начальная точка спуска).

Примечание.

Для данной функции $F(X)$ и числа β множеством уровня $L(\beta)$ называется совокупность всех точек X , удовлетворяющих неравенству

$$F(X) \leq \beta.$$

Пример 3.14. Для целевой функции $F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$ найти множество уровня $L(9)$.

Решение

Множество уровня заданной функции для $\beta = 9$ – это совокупность точек, лежащих внутри круга $(x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 \leq 9$ (заштрихованная область на рис. 3.10).

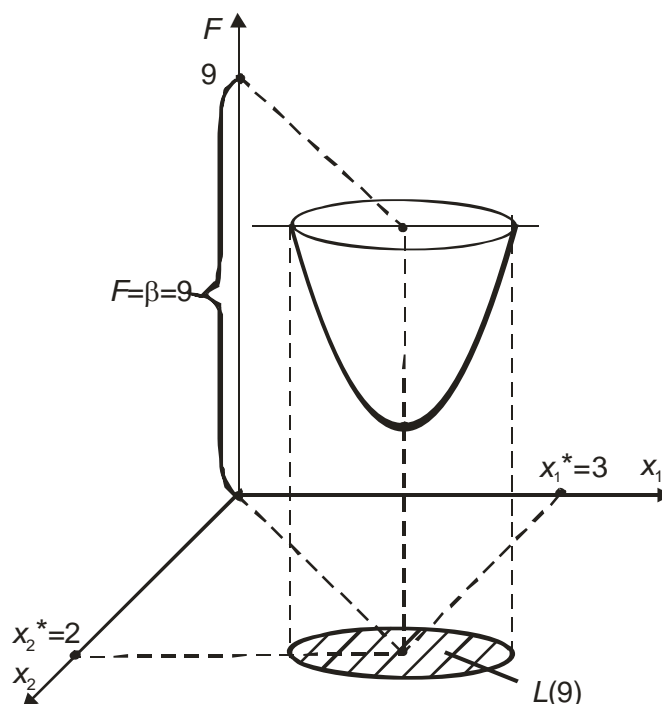


Рис. 3.10. Множество уровня $L(9)$ функции $F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$

3.6. Методы спуска

Методы спуска – это методы направленного поиска безусловного минимума функции многих переменных.

Методы спуска заключаются в построении последовательности точек $X^0, X^1, \dots, X^k, \dots$, для которых выполняется условие

$$F(X^0) > F(X^1) > \dots > F(X^k) > \dots \quad (3.3)$$

Они требуют дифференцируемости функции, что дает информацию о поведении функции в малой окрестности точек X^k и позволяет вести направленный поиск точки минимума.

3.6.1. Градиентный метод

Суть градиентного метода: **в каждой точке поиска определяется вектор-градиент и делается шаг в этом направлении (если ищем максимум) или противоположном (если ищем минимум).**

В дальнейшем будем вести речь лишь о поиске минимума целевой функции и ее антиградиенте. Последовательность расчета минимума целевой функции градиентным методом полностью укладывается в модельную схему спуска (п. 3.1.1.8), согласно которой на каждой итерации рассматриваемого метода решаются две задачи.

Задача 1. Определение направления спуска

Для этой цели вычисляют частные производные минимизируемой функции в начальной точке спуска X^0 :

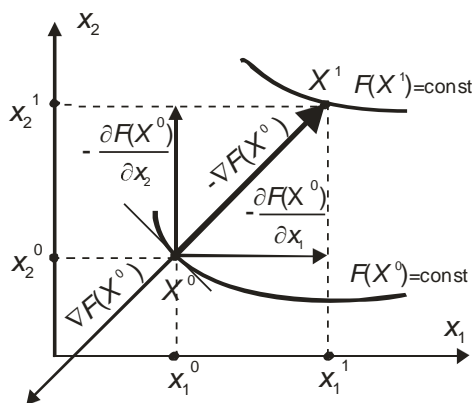
$$\frac{\partial F(X^0)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_2}, \quad \dots, \quad \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_n}.$$

Абсолютные значения частных производных по x_1, x_2, \dots, x_n — это отрезки, соответствующие перемещению вдоль осей координат Ox_1, Ox_2, \dots, Ox_n соответственно. Знак производной указывает направление перемещения.

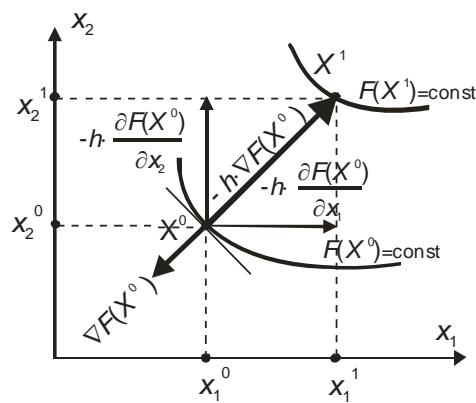
Спуск вдоль антиградиента функции F из заданной точки X^0 с координатами $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ соответствует перемещению из этой точки в некоторую точку X^1 , координаты которой $(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ вычисляются:

$$x_1^1 = x_1^0 - \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_1}; \quad x_2^1 = x_2^0 - \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_2}; \quad \dots; \quad x_n^1 = x_n^0 - \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_n}.$$

Для функции $F(x_1; x_2)$ двух переменных перемещение из точки X^0 в точку X^1 на полную длину антиградиента проиллюстрировано на рис. 3.11, а.



а



б

Рис. 3.11. Перемещение вдоль антиградиента из точки $X^0(x_1^0, x_2^0)$ в точку $X^1(x_1^1, x_2^1)$ на полную длину вектора (а) и с некоторым шагом $h > 1$ (б)

Задача 2. Выбор шага в направлении спуска

Перемещение вдоль антиградиента на всю его длину может привести к расхождению процесса минимизации (будем удаляться от F_{\min} все дальше и дальше, как на рис. 3.12). Чтобы значение функции в конечной точке спуска на каждой итерации не превышало ее значения в исходной точке, следует изменять шаг в направлении антиградиента, т. е. перемещаться не на всю длину вектора, а на величину $h \cdot \nabla F$, где h – некоторое положительное число, значение которого зависит от характера задачи и от значений координат в точке, откуда делается шаг в направлении антиградиента. По своему смыслу h – масштабный множитель, но в соответствии с принятой терминологией будем называть его *длиной шага*, или просто *шагом*.

Выбор длины шага h^k на каждой итерации должен обеспечить убывание функции при перемещении из одной точки градиентного спуска в другую

$$F(X^{k+1}) < F(X^k).$$

При выборе шага надо учитывать следующие противоречивые обстоятельства:

- 1) если шаг h выбрать достаточно малым, то движение будет происходить практически по линии антиградиента (хорошо!), но при этом – очень медленная сходимость итерационного процесса (плохо...);
- 2) если h – большой, то возникает опасность не обеспечить сходимость процесса, что графически проиллюстрировано выше (рис. 3.12).

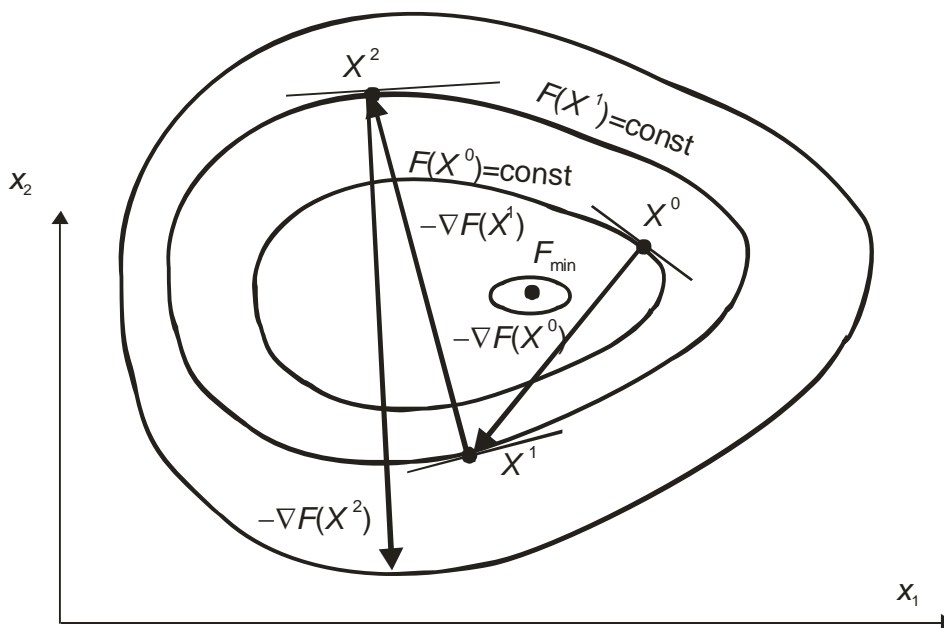


Рис. 3.12. Расходящийся итерационный процесс при неудачном выборе шага

Критерий выбора шага спуска h

Надо двигаться такими шагами, чтобы прийти к минимуму целевой функции за наименьшее число итераций!

Для конкретной задачи шаг h принимают подбором, либо, если это возможно, на каждом шаге спуска оценивают его максимальное значение с последующим дроблением, пока не будет достигнуто убывания функции на этом направлении. Выбранный шаг h позволяет переместиться в направлении антиградиента из точки $X^0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ в точку $X^1(x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1)$ (см. рис. 3.11, б), координаты которой вычисляются:

$$x_1^1 = x_1^0 - h \cdot \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_1}; \quad x_2^1 = x_2^0 - h \cdot \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_2}; \quad \dots \quad x_n^1 = x_n^0 - h \cdot \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_n}.$$

Алгоритм градиентного метода в матричной форме приведен на рис. 3.13. Развернутый алгоритм градиентного спуска для целевой функции двух переменных представлен на рис. 3.14.

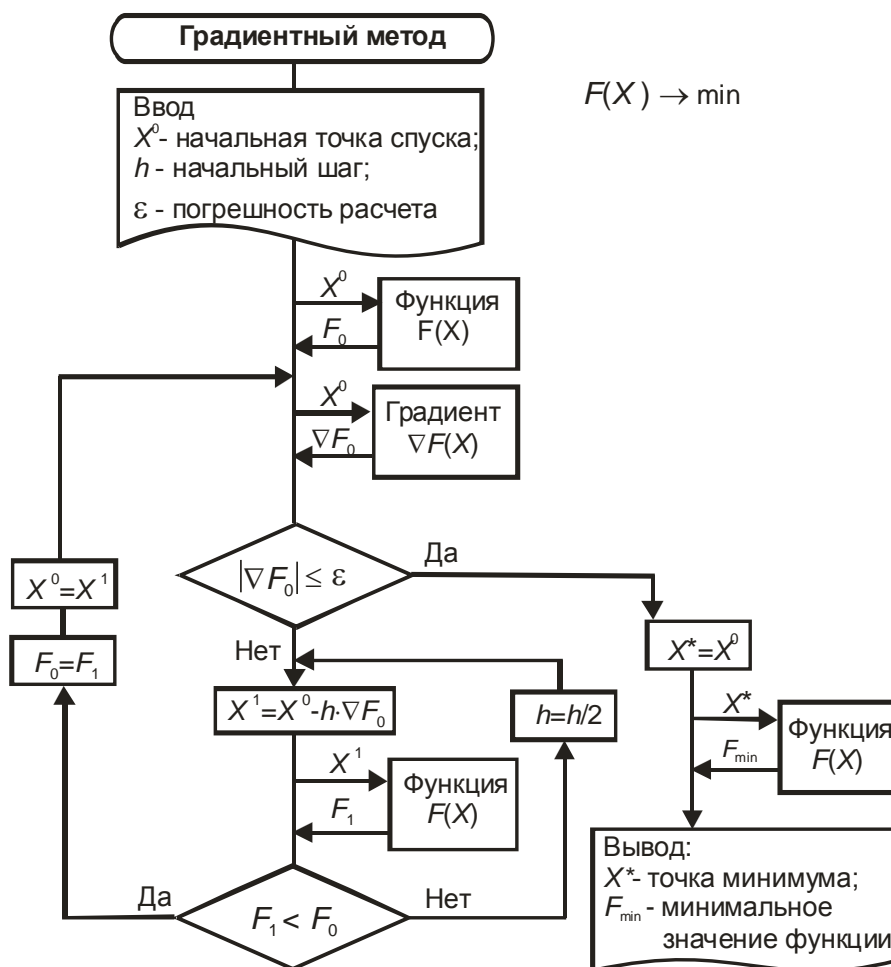


Рис. 3.13. Алгоритм градиентного метода в общем виде

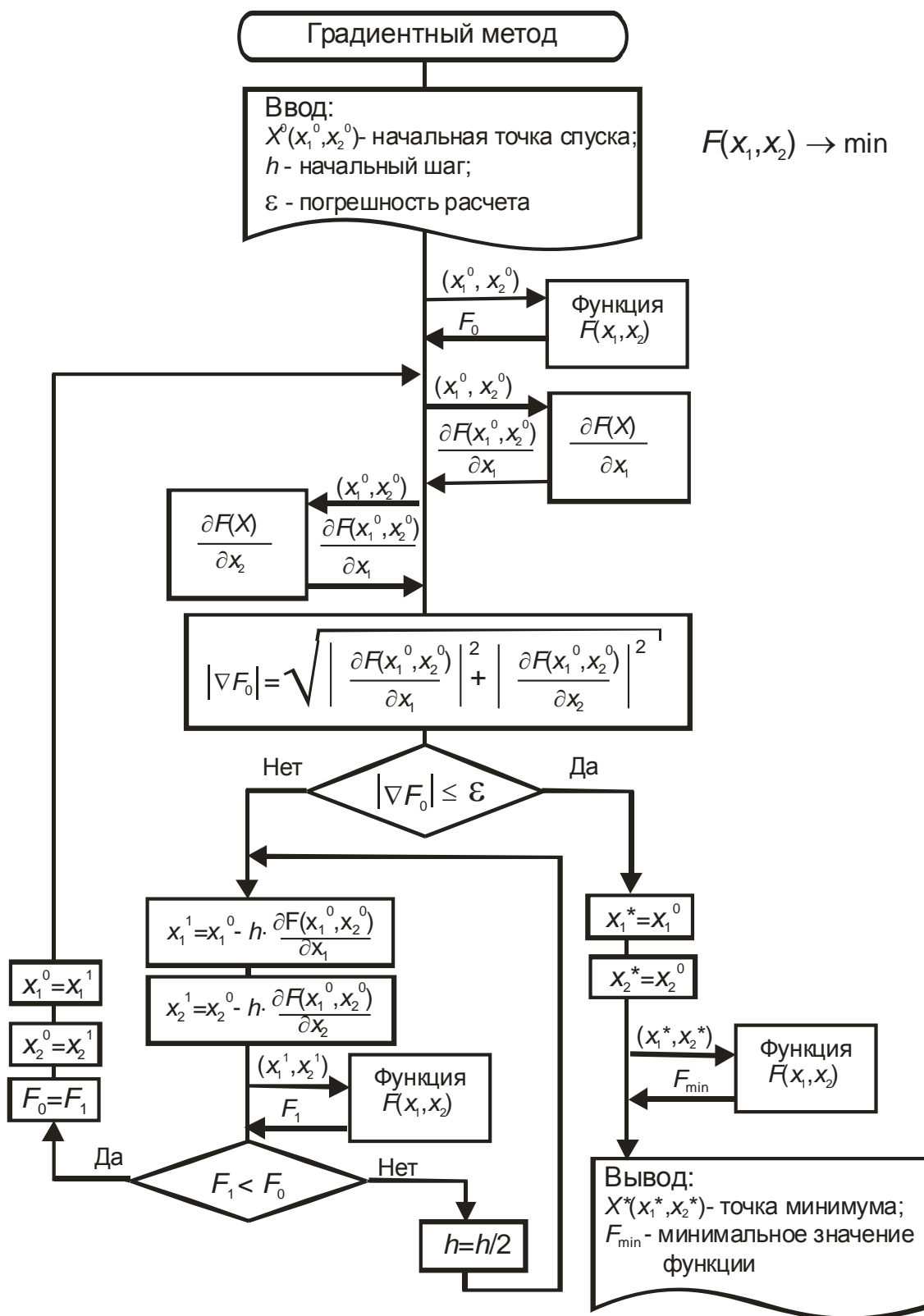


Рис. 3.14. Развернутый алгоритм градиентного метода на примере функции двух переменных

Пример 3.15. Для целевой функции $F = (x_1 - 2)^2 + 3 \cdot (x_2 - 1)^2$ найти минимальное значение градиентным методом, выбрав в качестве начальной точки спуска $X^0(0; 0)$. За критерий останова принять $\|\nabla F\| \leq \varepsilon$, где $\varepsilon = 0,25$. Начальный шаг спуска $h = 1$.

Решение

$$\text{Градиент } \nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (2(x_1 - 2); 6(x_2 - 1)).$$

Итерация 1

Начальная точка спуска $X^0(0; 0)$.

Значение функции в начальной точке

$$F_0 = F(X^0) = F(0; 0) = (0 - 2)^2 + 3 \cdot (0 - 1)^2 = 7.$$

Значение градиента в начальной точке

$$\nabla F(X^0) = \nabla F(0; 0) = (2 \cdot (0 - 2); 6 \cdot (0 - 1)) = (-4; -6).$$

Модуль градиента

$$\|\nabla F(X^0)\| = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} > \varepsilon.$$

1.1. $h = 1$

Координаты новой точки, полученной при перемещении из X^0 в направлении антиградиента с шагом $h = 1$

$$x_1^1 = x_1^0 - h \cdot \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_1} = 0 - 1 \cdot (-4) = 4;$$

$$x_2^1 = x_2^0 - h \cdot \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_2} = 0 - 1 \cdot (-6) = 6;$$

$$X^1(4; 6).$$

Значение функции в точке $X^1(4; 6)$ $F_1 = 79$. Т. к. $F_1 = 79 > F_0 = 7$, уменьшаем шаг $h = h / 2 = 1 / 2$ и пересчитываем X^1 .

1.2. $h = 0,5$

$$x_1^1 = 0 - 0,5 \cdot (-4) = 2;$$

$$x_2^1 = 0 - 0,5 \cdot (-6) = 3.$$

Значение функции $F_1 = F(X^1) = F(2; 3) = 12 > (F_0 = 7)$. Снова уменьшаем шаг $h = 0,5 / 2 = 0,25$ и пересчитываем X^1 .

1.3. $h = 0,25$

$$x_1^1 = 0 - 0,25 \cdot (-4) = 1;$$

$$x_2^1 = 0 - 0,25 \cdot (-6) = 1,5.$$

$$F_1 = F(X^1) = F(1; 1,5) = 1,75 < (F_0 = 7).$$

Итерация 2

Переприсваиваем: $X^0 = X^1 = (1; 1,5); \quad F_0 = F_1 = 1,75; \quad h = 0,25.$

$$\nabla F(X^0) = \nabla F(1; 1,5) = (2 \cdot (1 - 2); 6 \cdot (1,5 - 1)) = (-2; 3).$$

Модуль градиента

$$\|\nabla F(X^0)\| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = 3,606 > \varepsilon.$$

Координаты новой точки X^1 :

$$x_1^1 = 1 - 0,25 \cdot (-2) = 1,5;$$

$$x_2^1 = 1,5 - 0,25 \cdot 3 = 0,75.$$

$$F_1 = F(X^1) = F(1,5; 0,75) = 0,438 < (F_0 = 1,75).$$

Итерация 3

Переприсваиваем:

$$X^0 = X^1 = (1,5; 0,75); \quad F_0 = F_1 = 0,438; \quad h = 0,25.$$

$$\nabla F(X^0) = \nabla F(1,5; 0,75) = (-1; -1,5).$$

Модуль градиента

$$\|\nabla F(X^0)\| = \sqrt{1,5^2 + 0,75^2} = 1,677 > \varepsilon.$$

Координаты новой точки X^1 :

$$x_1^1 = 1,5 - 0,25 \cdot (-1) = 1,75;$$

$$x_2^1 = 0,75 - 0,25 \cdot (-1,5) = 1,125.$$

$$F_1 = F(X^1) = F(1,75; 1,125) = 0,109 < (F_0 = 0,438).$$

Итерация 4

Переприсваиваем:

$$X^0 = X^1 = (1,75; 1,125); \quad F_0 = F_1 = 0,109; \quad h = 0,25.$$

$$\nabla F(X^0) = \nabla F(1,75; 1,125) = (-0,5; 0,75).$$

Модуль градиента

$$\|\nabla F(X^0)\| = \sqrt{(-0,5)^2 + 0,75^2} = 0,901 > \varepsilon.$$

Координаты новой точки X^1 :

$$x_1^1 = 1,75 - 0,25 \cdot (-0,5) = 1,875;$$

$$x_2^1 = 1,125 - 0,25 \cdot (0,75) = 0,938.$$

$$F_1 = F(X^1) = F(1,875; 0,938) = 0,0273 < (F_0 = 0,109).$$

Итерация 5

Переприсваиваем:

$$X^0 = X^1 = (1,875; 0,938); \quad F_0 = F_1 = 0,0273; \quad h = 0,25.$$

$$\nabla F(X^0) = \nabla F(1,875; 0,938) = (-0,25; -0,375).$$

Модуль градиента

$$\|\nabla F(X^0)\| = \sqrt{(-0,25)^2 + (-0,375)^2} = 0,451 > \varepsilon.$$

Координаты новой точки X^1 :

$$x_1^1 = 1,875 - 0,25 \cdot (-0,25) = 1,938;$$

$$x_2^1 = 0,938 - 0,25 \cdot (-0,375) = 1,0131.$$

$$F_1 = F(X^1) = F(1,938; 1,031) = 0,00384 < (F_0 = 0,0273).$$

Итерация 6

Переприсваиваем:

$$X^0 = X^1 = (1,938; 1,031); \quad F_0 = F_1 = 0,00384; \quad h = 0,25.$$

$$\nabla F(X^0) = \nabla F(1,938; 1,031) = (-0,124; 0,186).$$

Модуль градиента

$$\|\nabla F(X^0)\| = \sqrt{(-0,124)^2 + 0,186^2} = 0,224 < \varepsilon.$$

Расчет прекращаем. Оптимальное решение

$$x_1^* \approx 1,938 - 0,25 \cdot (-0,124) = 1,969;$$

$$x_2^{1*} \approx 1,031 - 0,25 \cdot 0,186 = 0,969.$$

$$X^* \approx (1,969; 0,969).$$

Соответствующее ему минимальное значение целевой функции

$$F_{\min} = 0,00384.$$

3.6.2. Метод наискорейшего спуска

На каждом этапе спуска определяют вектор-градиент $\nabla F(X)$ функции $F(X)$ и двигаются в направлении антиградиента до точки, в которой целевая функция принимает минимальное значение на данном направлении. В найденной точке вновь определяется градиент и движение совершается в направлении нового антиградиента до точки минимума на новом направлении.

Таким образом, на каждом шаге метода наискорейшего спуска из некоторой точки X^k решается *задача одномерной минимизации*:

$$\varphi(h) = F(X^k - h \cdot \nabla F(X^k)) \rightarrow \min$$

при изменении h , в результате чего находится оптимальный шаг h^* на данном направлении.

При отклонении h от оптимального h^* в одну и другую сторону (например, на величину Δh) значение целевой функции на направлении вектора-антиградиента $-\nabla F(X^k)$ увеличивается:

$$F(X^j) > F(X^k - h^* \cdot \nabla F(X^k)),$$

где

$$X^j = X^k - (h^* \pm \Delta h) \cdot \nabla F(X^k).$$

Графическая иллюстрация метода наискорейшего спуска приведена на рис. 3.15.

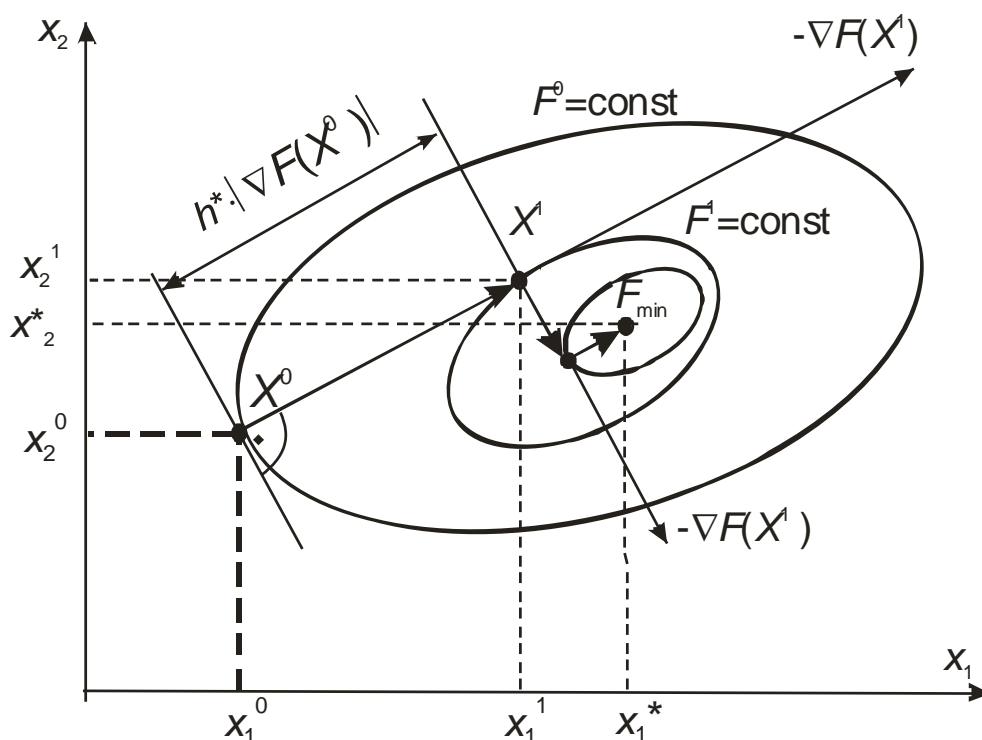


Рис. 3.15. Графическая иллюстрация метода наискорейшего спуска

Общий алгоритм метода представлен на рис. 3.16.

Способы определения оптимального шага:

- 1) графический (рис. 3.15);
- 2) путем решения задачи одномерной минимизации на каждом направлении спуска:
 - а) аналитически;
 - б) численно;
- 3) расчетом скалярного произведения векторов-градиентов в соседних точках спуска X^k и X^{k+1} (см. рис. 3.17).

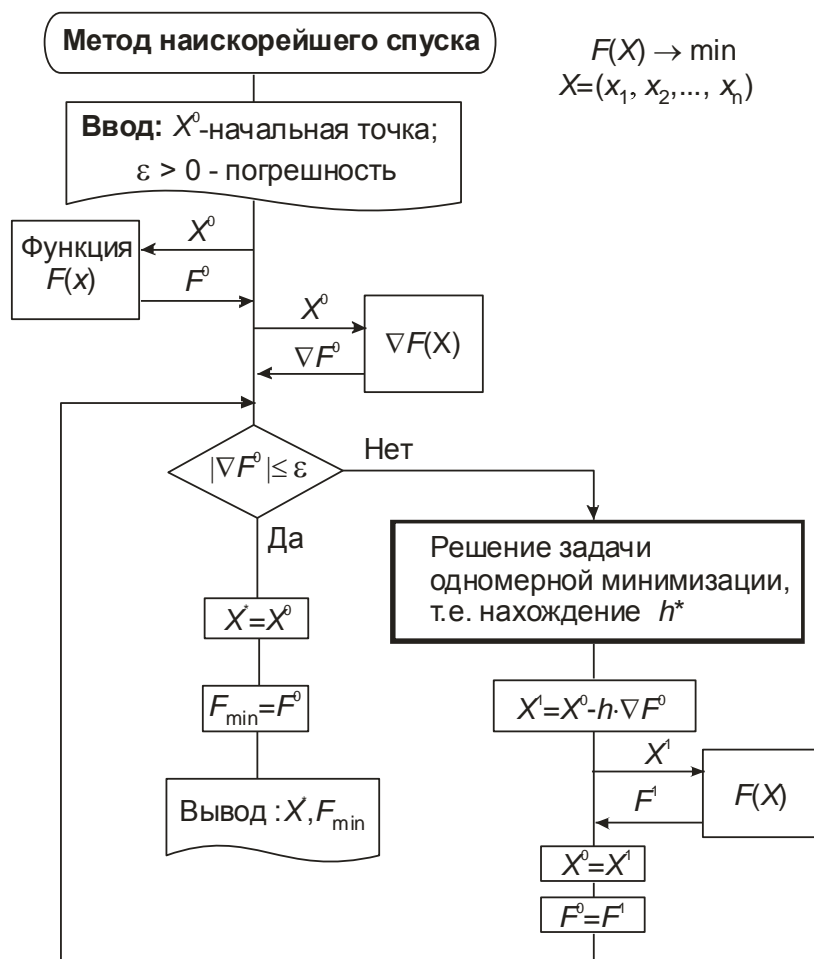


Рис. 3.16. Общий алгоритм метода наискорейшего спуска

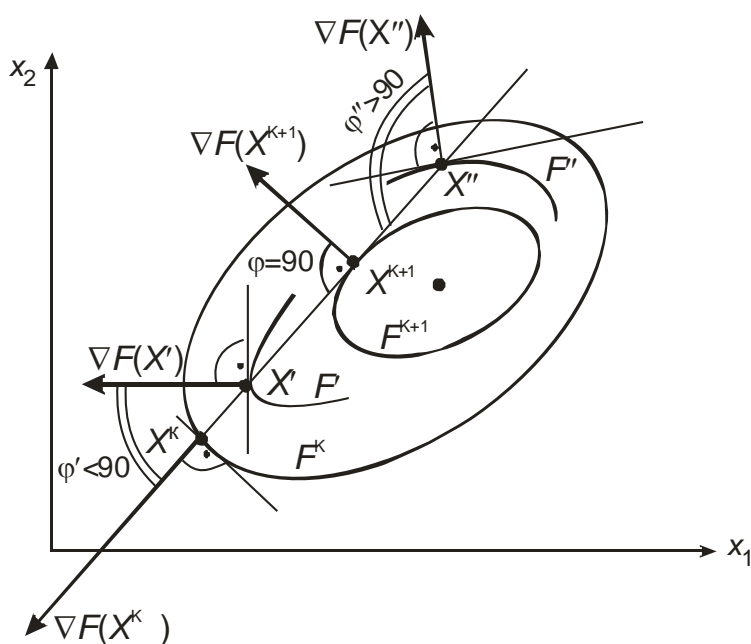


Рис. 3.17. Графическая иллюстрация выбора оптимального шага при спуске из точки X^k методом наискорейшего спуска

Расчет оптимального шага спуска

Наиболее просто определять оптимальный на выбранном направлении шаг h^* вычислением скалярного произведения векторов-градиентов в соседних точках спуска X^k и X^{k+1} :

$$S = (\nabla F(X^k), \nabla F(X^{k+1})).$$

$$X': F^k > F' > F^{k+1}; \quad S = (\nabla F(X^k), \nabla F(X')) > 0 \quad (\varphi < 90^\circ) \Rightarrow \text{надо } h \uparrow;$$

$$X'': F^k > F'' > F^{k+1}; \quad S = (\nabla F(X^k), \nabla F(X'')) < 0 \quad (\varphi > 90^\circ) \Rightarrow \text{надо } h \downarrow;$$

$$X^{k+1}: \quad S = (\nabla F(X^k), \nabla F(X^{k+1})) = 0 \quad (\varphi = 90^\circ) \Rightarrow h = h^*.$$

Для h^* выполняется $|S| = 0$. При численном определении h^* необходимо выполнить условие $|S| \leq \varepsilon$, где ε – наперед заданная погрешность расчета.

Расчет S проводится по известным в курсе линейной алгебры формулам:

$$S = \left(\frac{\partial F(X^k)}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial F(X^{k+1})}{\partial x_1} + \frac{\partial F(X^k)}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial F(X^{k+1})}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial F(X^k)}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial F(X^{k+1})}{\partial x_n} \right)$$

либо

$$S = |\nabla F(X^k)| \cdot |\nabla F(X^{k+1})| \cdot \cos \varphi,$$

где

$$|\nabla F(X^k)| = \sqrt{\left(\frac{\partial F(X^k)}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial F(X^k)}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F(X^k)}{\partial x_n} \right)^2};$$

$$|\nabla F(X^{k+1})| = \sqrt{\left(\frac{\partial F(X^{k+1})}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial F(X^{k+1})}{\partial x_2} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial F(X^{k+1})}{\partial x_n} \right)^2};$$

φ – угол между векторами $\nabla F(X^k)$ и $\nabla F(X^{k+1})$ (рис. 3.17).

Блок-схема алгоритма определения h^* на основе расчета скалярного произведения векторов-градиентов $\nabla F(X^k)$ и $\nabla F(X^{k+1})$ приведена на рис. 3.18.

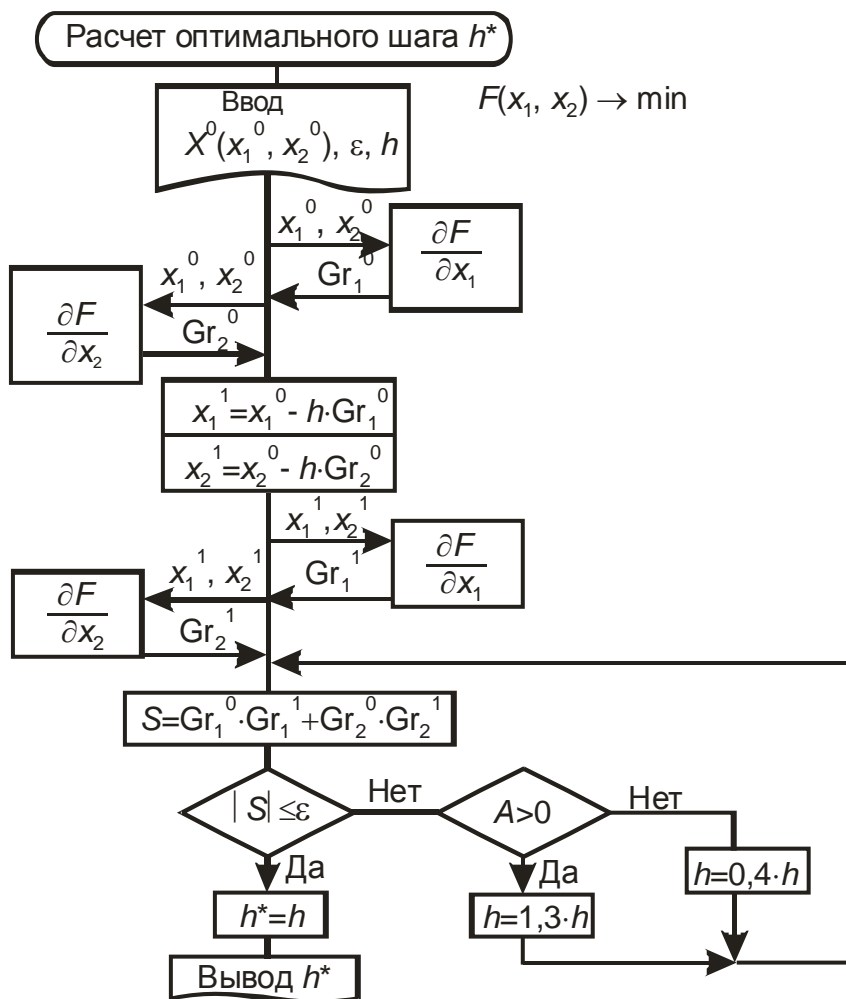


Рис. 3.18. Расчет оптимального шага (метод наискорейшего спуска)

Пример 3.13. Для функции $F = (x_1 - 2)^2 + 3 \cdot (x_2 - 1)^2$ аналитическим путем найти оптимальные значения h^* на двух шагах метода наискорейшего спуска из точки $X^0(0; 0)$.

Решение

Градиент $\nabla F(X) = (2 \cdot (x_1 - 2); 6 \cdot (x_2 - 1))$.

Итерация 1

$$F(X^0) = F(0; 0) = 7; \quad \nabla F(X^0) = (-4; -6);$$

$$x_1^1 = x_1^0 - h \cdot \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_1} = 0 - h \cdot (-4) = 4h;$$

$$x_2^1 = x_2^0 - h \cdot \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_2} = 0 - h \cdot (-6) = 6h.$$

Ищем минимум функции

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= F(x_1^1; x_2^1) = F(4 \cdot h; 6 \cdot h) = \\ &= (4 \cdot h - 2)^2 + 3 \cdot (6 \cdot h - 1)^2 = 124 \cdot h^2 - 52 \cdot h + 7\end{aligned}$$

по h классическим методом минимизации.

Для этого определяем производную $\varphi'(x)$ и приравниваем ее нулю:

$$\varphi'(x) = 248 \cdot h - 52 = 0; \quad h^* = 0,2097.$$

Положительный знак второй производной $\varphi''(x) = 248 > 0$ свидетельствует о наличии минимума функции $\varphi(h)$ при $h^* = 0,2097$.

Координаты точки, в которую переместились из $X^0(0;0)$ в результате наискорейшего спуска с оптимальным шагом $h^* = 0,2097$:

$$x_1^1 = 4 \cdot h^* = 4 \cdot 0,2097 = 0,8387;$$

$$x_2^1 = 6 \cdot h^* = 6 \cdot 0,2097 = 1,2582.$$

$$X^1 = (0,8387, 1,2582).$$

Значение функции $F(X^1) = 1,5486$.

Итерация 2

$$X^1 = (0,8387; 1,2582);$$

$$F(X^1) = 1,5486;$$

$$\nabla F(X^1) = (-2,323; 1,549);$$

$$x_1^2 = 0,8387 + 2,323 \cdot h;$$

$$x_2^2 = 1,258 - 1,549 \cdot h.$$

$$\begin{aligned}\varphi(h) &= F(x_1^2; x_2^2) = (0,8387 + 2,323 \cdot h - 2)^2 + \\ &+ 3 \cdot (1,258 - 1,549 \cdot h - 1)^2 = 12,59 \cdot h^2 - 7,792 \cdot h + 1,548;\end{aligned}$$

$$\varphi'(x) = 25,19 \cdot h - 7,792 = 0; \quad h^* = 0,3094.$$

Положительный знак второй производной $\varphi''(x) = 25,19 > 0$ свидетельствует о наличии минимума функции $\varphi(h)$ при $h^* = 0,3094$.

В результате наискорейшего спуска из точки $X^1 = (0,8387; 1,258)$ оптимальным шагом $h^* = 0,3094$ переместились в точку $X^2 = (1,557; 0,7789)$.

Значение функции $F(X^2) = 0,3429$.

Пример 3.14. Для функции из примера 3.13 на двух итерациях метода наискорейшего спуска из точки $X^0(0;0)$ найти оптимальный шаг h^* вычислением скалярного произведения векторов-градиентов

в соседних точках спуска. Начальный шаг спуска принять $h=1$. Погрешность расчета скалярного произведения $\varepsilon=0,1$.

Решение

Градиент $\nabla F(X) = (2(x_1 - 2); 6(x_2 - 1))$.

Итерация 1. Исходная точка $X^0(0; 0)$.

Градиент в точке $X^0(0; 0)$ равен

$$\nabla F(X^0) = \nabla F(0; 0) = (-4; -6).$$

Итерация 1.1. $h=1$:

а) координаты точки X^1 , в которую переместимся из X^0 , двигаясь вдоль антиградиента $(-\nabla F(X^0))$ с шагом $h=1$:

$$x_1^1 = x_1^0 - h \cdot \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_1} = 0 - 1 \cdot (-4) = 4;$$

$$x_2^1 = x_2^0 - h \cdot \frac{\partial F(X^0)}{\partial x_2} = 0 - 1 \cdot (-6) = 6;$$

б) градиент в точке $X^1 = (4; 6)$

$$\nabla F(X^1) = \nabla F(4; 6) = (4; 30);$$

в) скалярное произведение векторов $\nabla F(X^0)$ и $\nabla F(X^1)$

$$S = (\nabla F(X^0); \nabla F(X^1)) = ((-4) \cdot 4 + (-6) \cdot 30) = -196 < 0;$$

$$|S| = 196 > \varepsilon.$$

Так как $S < 0$, уменьшаем шаг $h = 0,4 \cdot 1 = 0,4$ и повторяем пункты а), б), в) с новым значением шага.

Итерация 1.2. $h=0,4$:

а) координаты точки X^1 , в которую переместимся из X^0 , двигаясь вдоль антиградиента $(-\nabla F(X^0))$ с шагом $h=0,4$:

$$x_1^1 = 0 - 0,4 \cdot (-4) = 1,6;$$

$$x_2^1 = 0 - 0,4 \cdot (-6) = 2,4.$$

б) градиент в точке $X^1 = (1,6; 2,4)$

$$\nabla F(X^1) = \nabla F(1,6; 2,4) = (-0,8; 8,4);$$

в) скалярное произведение векторов $\nabla F(X^0)$ и $\nabla F(X^1)$

$$S = (\nabla F(X^0), \nabla F(X^1)) = ((-4) \cdot (-0,8) + (-6) \cdot 8,4) = -47,2 < 0.$$

Так как $S > \varepsilon$ и $S < 0$, уменьшаем шаг $h = 0,4 \cdot 0 = 0,16$ и повторяем пункты а), б), в) с новым значением h . Дальнейший расчет сводим в табл. 3.1.

Таблица 3.1

№ итер.	h	X^1	$\nabla F(X^1)$	S	$ S $
1.3	$h=0,16$	(0,640; 0,960)	(-2,72; -0,24)	$12,3 > 0$	$> \varepsilon$
1.4	$h=1,3 \cdot 0,16=0,208$	(0,832; 1,248)	(-2,336; 1,488)	$0,416 > 0$	$> \varepsilon$
1.5	$h=1,3 \cdot 0,208=0,270$	(1,08; 1,62)	(-1,84; 3,72)	$-15,0 < 0$	$> \varepsilon$
1.6	$h=0,4 \cdot 0,27=0,108$	(0,432; 0,648)	(-3,136; -2,112)	$25,2 > 0$	$> \varepsilon$
1.7	$h=1,3 \cdot 0,108=0,1404$	(0,562; 0,842)	(-2,877; -0,946)	$17,2 > 0$	$> \varepsilon$
1.8	$h=1,3 \cdot 0,1404=0,1825$	(0,730; 1,095)	(-2,54; 0,57)	$6,74 > 0$	$> \varepsilon$
1.9	$h=1,3 \cdot 1,1825=0,2373$	(0,949; 1,424)	(-2,102; 2,543)	$-6,85 < 0$	$> \varepsilon$
1.10	$h=0,4 \cdot 0,2373=0,0949$	(0,380; 0,569)	(-3,241; -2,584)	$28,5 > 0$	$> \varepsilon$
1.11	$h=1,3 \cdot 0,0949=0,1234$	(0,494; 0,740)	(-3,013; -1,558)	$21,4 > 0$	$> \varepsilon$
1.12	$h=1,3 \cdot 0,1234=0,1604$	(0,642; 0,962)	(-2,717; -0,226)	$12,2 > 0$	$> \varepsilon$
1.13	$h=1,3 \cdot 0,1604=0,2085$	(0,834; 1,251)	(-2,332; 1,506)	$0,295 > 0$	$> \varepsilon$
1.14	$h=0,2097$ (Пример 1)	(0,839; 1,258)	(-2,322; 1,549)	$0,0072$	$< \varepsilon$

Итерация 2. Исходная точка $X^1(0,839; 1,258)$.

Градиент в точке X^1

$$\nabla F(X^1) = \nabla F(0,839; 1,258) = (-2,322; 1,549).$$

Итерация 2.1. $h = 0,2097$:

а) координаты точки X^2 , в которую переместимся из X^1 , двигаясь вдоль антиградиента $(-\nabla F(X^1))$ с шагом $h = 0,2097$:

$$x_1^2 = x_1^1 - h \cdot \frac{\partial F(X^1)}{\partial x_1} = 0,839 - 0,2097 \cdot (-2,322) = 1,326;$$

$$x_2^2 = x_2^1 - h \cdot \frac{\partial F(X^1)}{\partial x_2} = 1,258 - 0,2097 \cdot 1,549 = 0,933;$$

б) градиент в точке $X^1(1,326; 0,933)$

$$\nabla F(X^2) = \nabla F(1,326; 0,933) = (-1,348; -0,402);$$

в) скалярное произведение векторов $\nabla F(X^1)$ и $\nabla F(X^2)$

$$S = (\nabla F(X^1), \nabla F(X^2)) = ((-2,322) \cdot (-1,348) + 1,549 \cdot (-0,402)) = 2,507 > 0;$$

$$|S| = 2,507 > \varepsilon.$$

Так как $S > 0$, увеличиваем шаг $h = 1,3 \cdot 0,2097 = 0,2726$ и повторяем пункты а), б), в).

Итерация 2.2. $h = 0,2726$:

а) координаты точки X^2 , в которую переместимся из X^1 , двигаясь вдоль антиградиента $(-\nabla F(X^1))$ с шагом $h = 0,2726$:

$$x_1^2 = 0,839 - 0,2726 \cdot (-2,322) = 1,472;$$

$$x_2^2 = 1,258 - 0,2726 \cdot 1,549 = 0,8357;$$

б) градиент в точке $X^2(1,472; 0,8357)$

$$\nabla F(X^2) = \nabla F(1,472; 0,8357) = (-1,056; 0,9858);$$

в) скалярное произведение векторов $\nabla F(X^1)$ и $\nabla F(X^2)$

$$S = (\nabla F(X^1), \nabla F(X^2)) = ((-2,322) \cdot (-1,056) + 1,549 \cdot (-0,9858)) = 0,9250.$$

Т. к. $S > 0$ и $|S| > \varepsilon$, снова увеличиваем шаг $h = 1,3 \cdot 0,2726 = 0,3544$ и повторяем пункты а), б), в).

Дальнейший расчет сводим в табл. 3.2.

Таблица 3.2

№ итер.	h	X^2	$\nabla F(X^2)$	S	$ S $
2.3	$h=0,3544$	(1,662; 0,709)	(-0,676; -1,746)	$-1,13 < 0$	$> \varepsilon$
2.4	$h=0,4 \cdot 0,3544=0,1418$	(1,168; 1,038)	(-1,664; 0,228)	$4,22 > 0$	$> \varepsilon$
2.5	$h=1,3 \cdot 0,1418=0,1843$	(1,267; 0,973)	(-1,466; -0,162)	$3,15 > 0$	$> \varepsilon$
2.6	$h=1,3 \cdot 0,1843=0,2396$	(1,395; 0,887)	(-1,21; -0,678)	$1,76 > 0$	$> \varepsilon$
2.7	$h=1,3 \cdot 0,2396=0,3115$	(1,562; 0,775)	(-0,876; -1,35)	$-0,06$	$< \varepsilon$
2.8	$h=0,3094$ (Пример 1)	(1,557; 0,779)	(-0,886; -1,326)	$0,003$	$< \varepsilon$

3.6.3. Метод координатного спуска

Суть метода координатного спуска заключается в минимизации многопараметрической функции $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ сначала по одному параметру x_1 , затем по второму x_2 и т. д. до последнего параметра x_n .

На *первом* этапе решения задачи *фиксируются значения всех параметров, кроме первого*, и определяется оптимальное значение первого параметра, т. е. решается задача одномерной минимизации

$$F = F(x_1(\text{var}), x_{2f}^0, \dots, x_{nf}^0) \rightarrow \min$$

при изменении первого параметра от его минимального до максимального значения. Найденное оптимальное значение первого параметра обозначим $x_{1f}^{\text{опт*}}$.

Далее ищется минимум функции $F = F(x_{1f}^{\text{опт*}}, x_2(\text{var}), x_{3f}^0, \dots, x_{nf}^0)$ при изменении только второго параметра x_2 . При этом первый параметр фиксируется при найденном выше оптимальном значении $x_{1f}^{\text{опт*}} = x_1^{\text{опт*}}$.

Цикл оптимизации заканчивается после определения минимума функции $F = F(x_{1f}^{\text{опт}*}, x_{2f}^{\text{опт}*}, \dots, x_{(n-1)f}^{\text{опт}*}, \dots, x_n(\text{var}))$ при изменении параметра x_n , что соответствует установлению его оптимального значения $x_n^{\text{опт}*}$.

Обычно один цикл поиска не позволяет найти минимальное значение функции $F(X)$. Поэтому необходимо повторение указанного цикла.

В процессе выполнения второго цикла итераций координатного спуска определяются оптимальные значения оптимизируемых параметров во втором приближении: $x_1^{\text{опт**}}, x_2^{\text{опт**}}, \dots, x_n^{\text{опт**}}$ и т. д.

Критерием останова алгоритма является условие отличия «оптимальных» значений одноименных переменных на двух последних итерациях на величину наперед заданной погрешности

$$|x_i^{\text{опт}k} - x_i^{\text{опт}(k-1)}| \leq \varepsilon_i,$$

где i изменяется от 1 до n ;

k – номер итерации.

Алгоритм координатного спуска сводит многомерную задачу к последовательности одномерных задач, которые решаются методами одномерной минимизации.

На рис. 3.19 показана графическая иллюстрация метода координатного спуска на примере функции двух переменных $F(x_1, x_2)$.

Из рисунка видно, что количество шагов на пути поиска минимума методом координатного спуска может в значительной степени зависеть от выбора начальной точки и координаты, которую фиксируем первой.

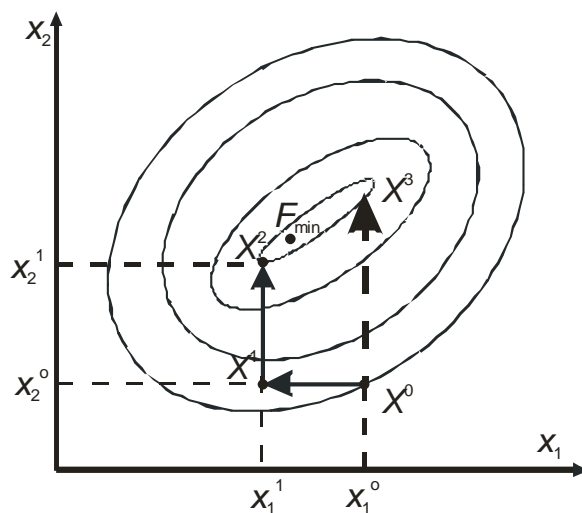
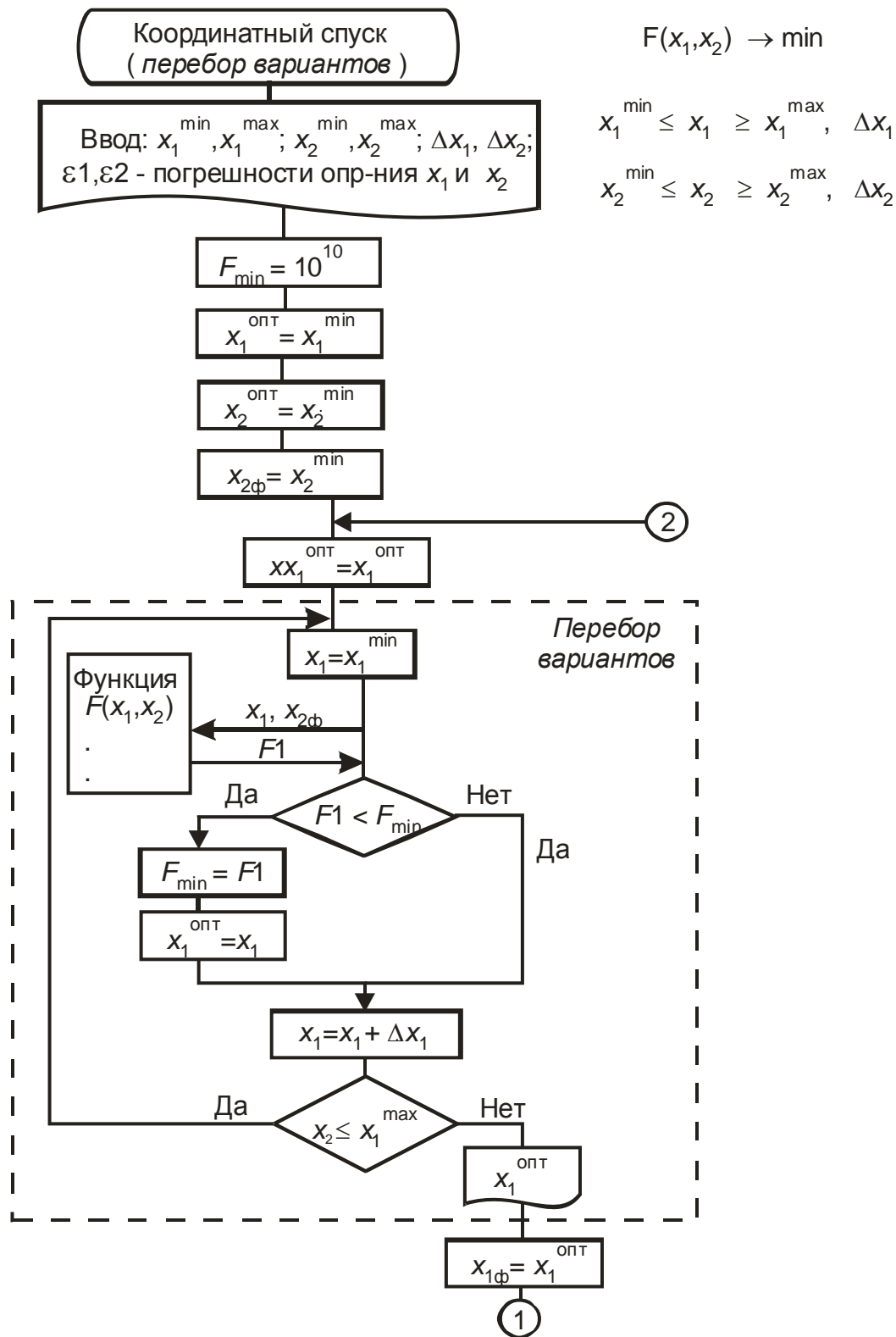


Рис. 3.19. Графическая иллюстрация метода координатного спуска

На рис. 3.20 и 3.21 приведены алгоритмы поиска минимума функции двух переменных методом координатного спуска.



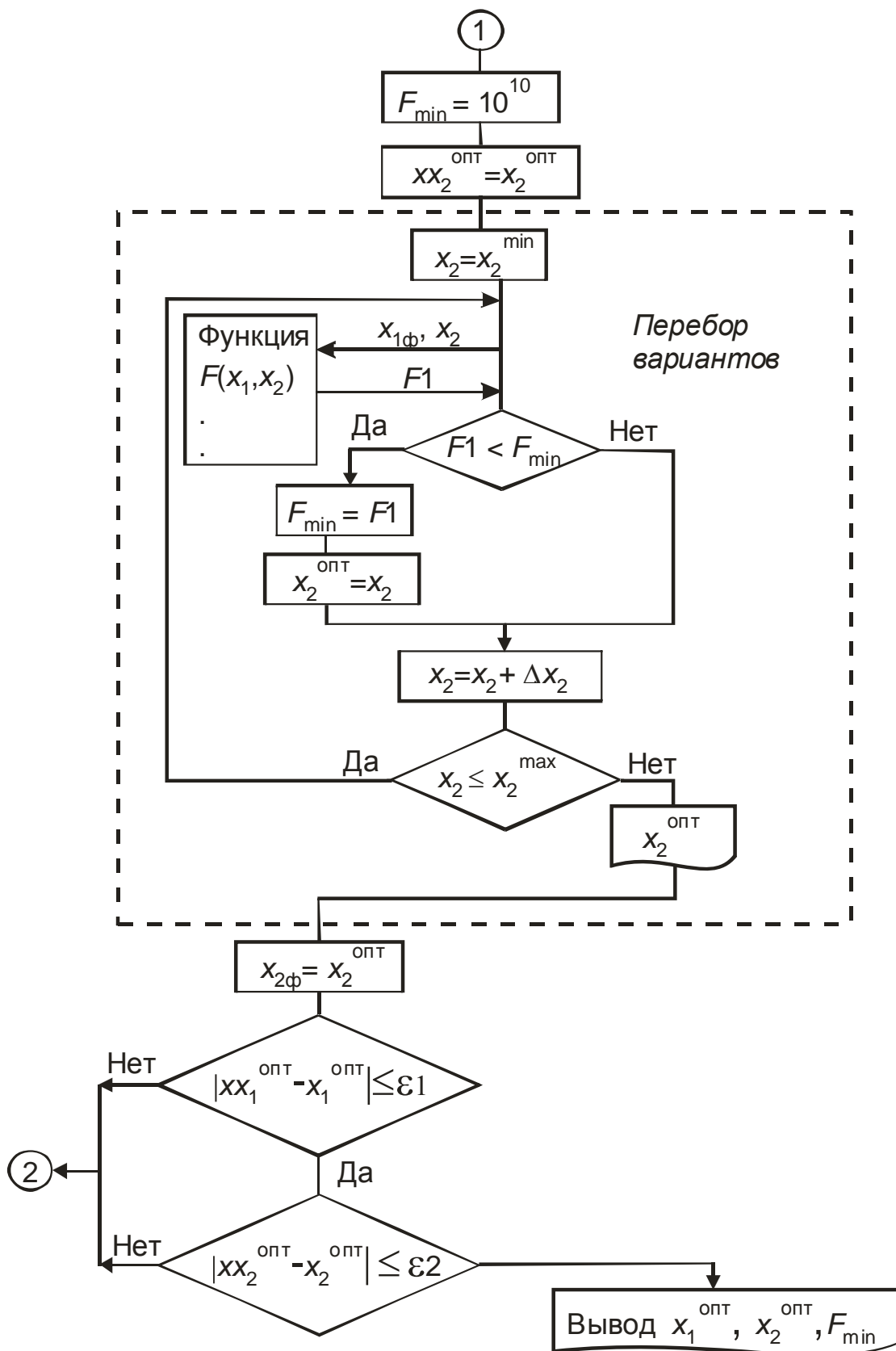


Рис. 3.21. Алгоритм метода координатного спуска (окончание)

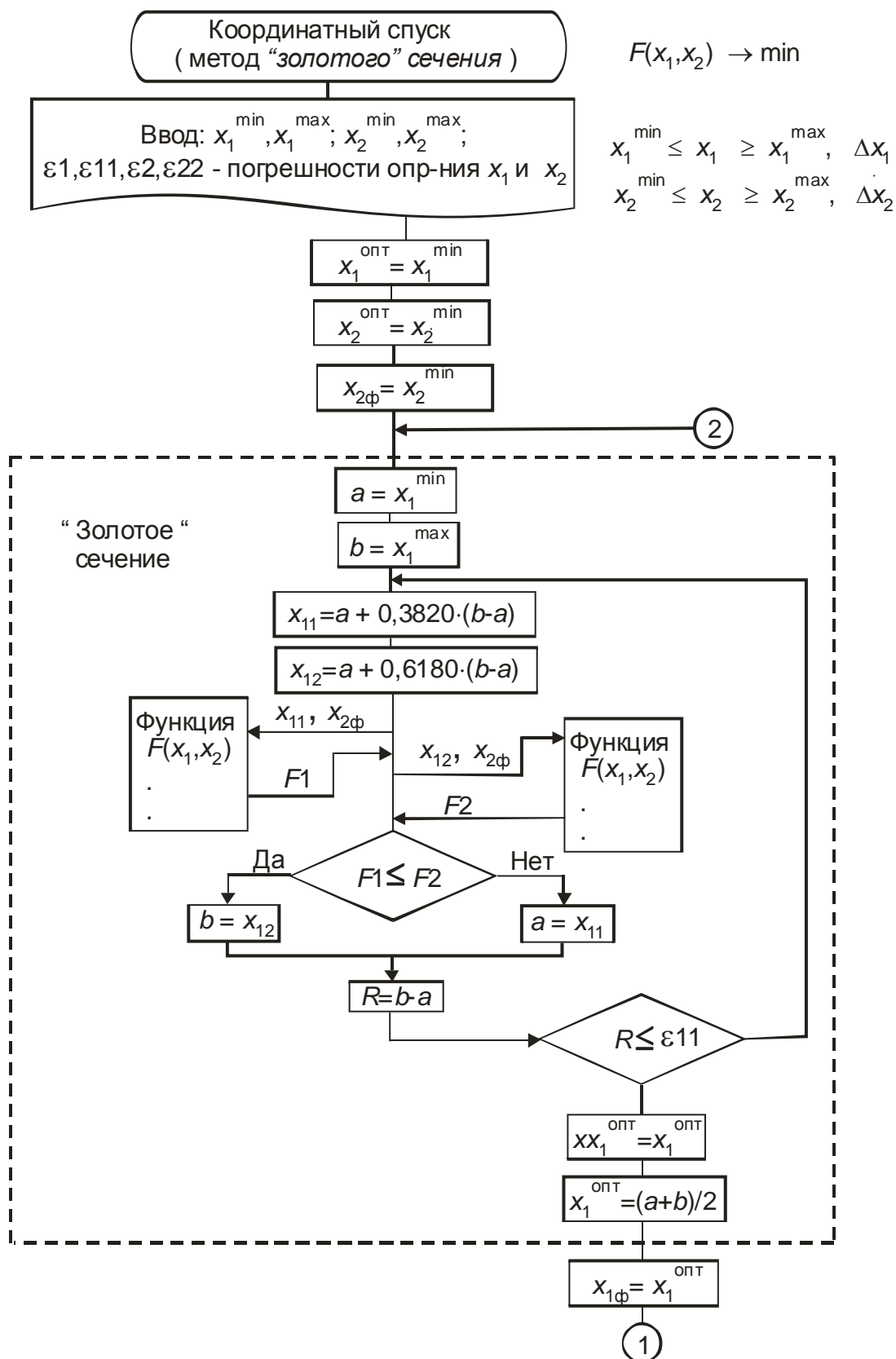


Рис. 3.21. Алгоритм метода координатного спуска (одномерная минимизация – метод «золотого» сечения) (начало)

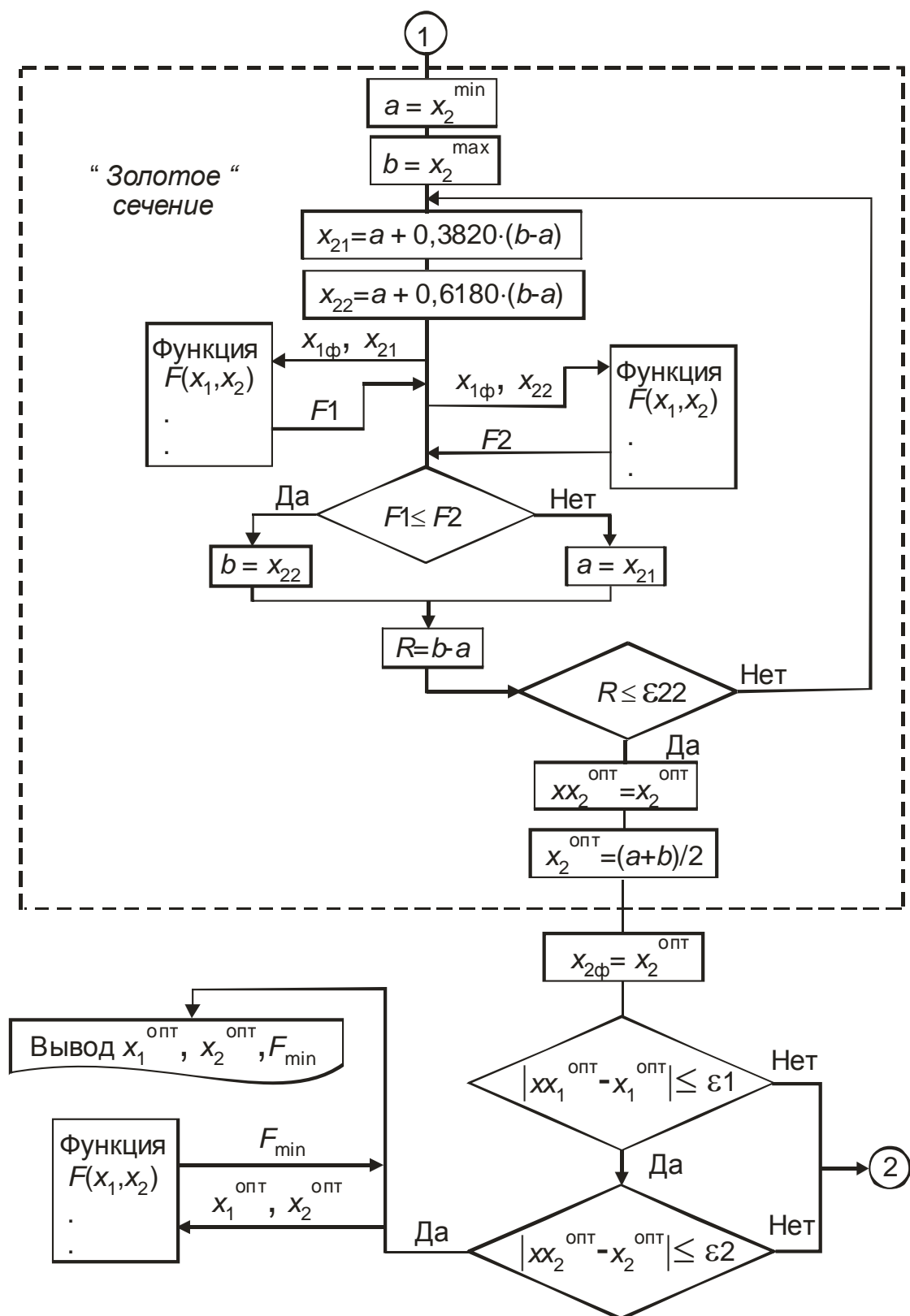


Рис. 3.21. Алгоритм метода координатного спуска (окончание)

4. ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПАРОТУРБИННЫХ УСТАНОВОК

4.1. Основные теоретические сведения

Влияние термодинамических параметров циклов паротурбинных установок (ПТУ) на экономичность изложены в [11].

4.1.1. Влияние начального давления пара на термический КПД цикла Ренкина

Схема и термический КПД паротурбинной установки

Схема ПТУ на насыщенном паре приведена на рис. 4.1, теоретический процесс расширения пара в турбине – на рис. 4.2.

Термический КПД (без учета работы насоса)

$$\eta_t = \frac{h_0 - h_{kt}}{h_0 - h'_k}, \quad (4.1)$$

где h'_k – энтальпия воды в состоянии насыщения при давлении P_k .

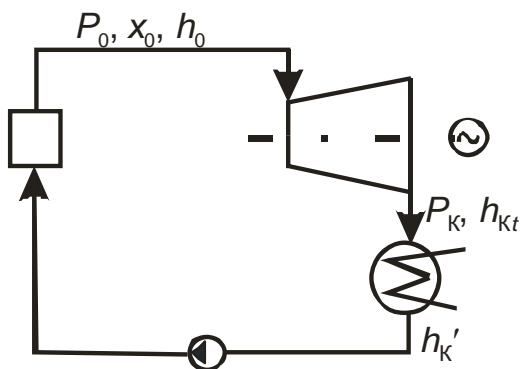


Рис. 4.1. Схема ПТУ

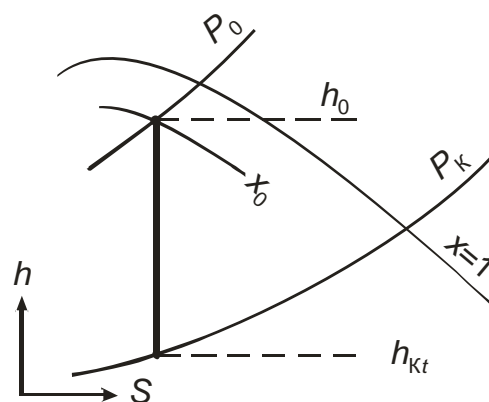


Рис. 4.2. Теоретический процесс расширения

Зависимость термического КПД ПТУ от начального давления

Влияние начального давления P_0 на термический КПД неоднозначно.

Рассмотрим цикл *сухого насыщенного пара*, применяемый на атомных электростанциях. Из h, S -диаграммы рабочего процесса пара в турбине (см. рис. 4.3) видно, что по мере повышения начального давления пара теплоперепад $H_0 = h_0 - h_{kt}$ сначала возрастает

($H_{0,3} > H_{0,2} > H_{0,1}$), достигает максимального значения $H_{0,3} = H_{\max}$, затем уменьшается ($H_{0,4} < H_{0,3}$). Теплоперепад H_0 достигает максимума в точке, в которой касательная к пограничной кривой параллельна конечной изотерме $t_k = \text{const}$ (она же изобара $P_k = \text{const}$). На рис. 4.3 это точка 3. Расход тепла $Q_0 = h_0 - h'_k$ также достигает максимума, но в точке, где энтальпия сухого насыщенного пара $h_0 = h''_{\max}$ принимает наибольшее значение (точка 2 на рис. 4.3). Точка 3 пограничной кривой, отвечающая максимуму теплоперепада H_0 , в h, S -диаграмме находится левее точки 2 максимума энтальпии сухого насыщенного пара, соответствуя более высокому начальному давлению пара и меньшему значению энтропии S . С учетом вышесказанного, при увеличении P_0 до значения в точке 3, термический КПД $\eta_t = H_0 / Q_0$ возрастает. Однако в этой точке КПД еще не достигает своего максимального значения, т. к. теплоперепад H_0 , пройдя свое максимальное значение, с дальнейшим ростом P_0 уменьшается очень (бесконечно) медленно, а расход тепла Q_0 , прошедший максимум ранее (при более низком давлении), уменьшается относительно быстрее. Таким образом, при небольшом уменьшении числителя H_0 знаменатель Q_0 снижается быстрее, т. е. η_t должен еще возрастать. В дальнейшем теплоперепад будет снижаться быстрее, чем начальная энтальпия h_0 , и КПД, пройдя свое максимальное значение, начнет уменьшаться. Расчеты подтверждают наличие максимума термического КПД цикла Ренкина сухого насыщенного пара при начальной температуре около 350°C и соответствующем начальном давлении пара около 17 МПа.

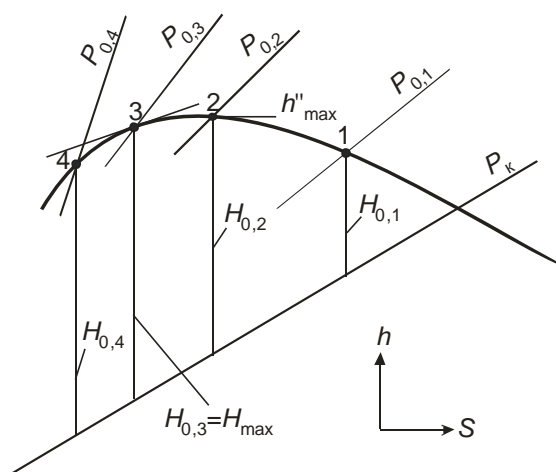


Рис. 4.3

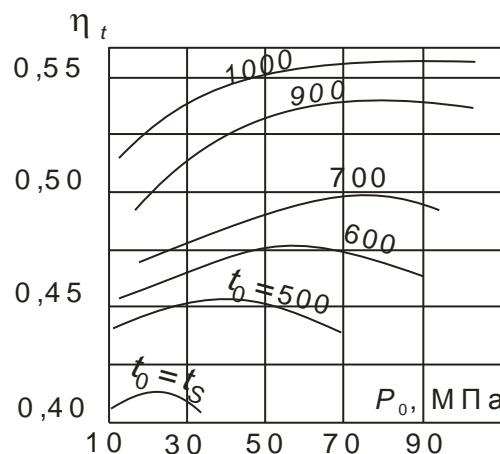


Рис. 4.4. Зависимость термического КПД идеального цикла Ренкина от начального давления

Зависимость η_t цикла сухого насыщенного пара является исходной для зависимостей $\eta_t = f(P_0)_{t_0}$ циклов перегретого пара. Так как перегрев пара повышает КПД цикла, то все кривые $\eta_t = f(P_0)$ с температурой выше критической ($t_{кр} \approx 374^\circ\text{C}$) располагаются выше кривой сухого насыщенного пара (см. рис. 4.4). Подобно кривой термического КПД сухого насыщенного пара зависимости КПД перегретого пара также имеют максимум, сдвигающийся последовательно в сторону более высокого давления с повышением начальной температуры. При увеличении начальной температуры кривая КПД становится все более полой и при очень высокой начальной температуре пара максимум КПД в интервале начальных давлений, используемых в современных паротурбинных установках, уже не наблюдается, перемещаясь в область еще более высокого начального давления пара.

4.1.2. Выбор оптимального давления промперегрева

Схема и КПД ПТУ с промперегревом

Схема турбоустановки с промежуточным перегревом пара приведена на рис. 4.5, соответствующий ей процесс расширения в h, S - диаграмме – на рис. 4.6.

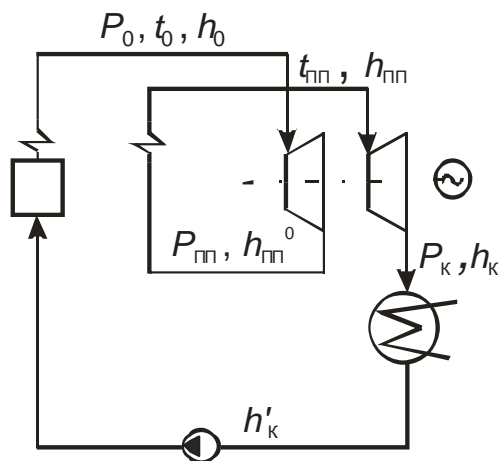


Рис. 4.5. Схема ПТУ с промежуточным перегревом пара

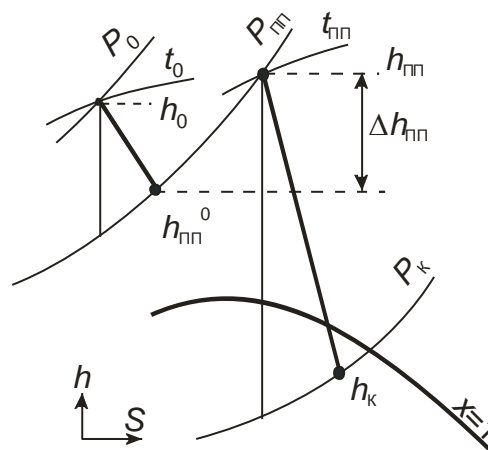


Рис. 4.6. Процесс расширения пара в турбине с промперегревом

Абсолютный внутренний КПД ПТУ с промперегревом

$$\eta_i = \frac{(h_0 - h_{пп}^0) + (h_{пп} - h_к)}{(h_0 - h'_к) + (h_{пп} - h_{пп}^0)} = \frac{h_0 - h_к + \Delta h_{пп}}{h_0 - h'_к + \Delta h_{пп}}, \quad (4.2)$$

где $h'_к$ – энтальпия воды в состоянии насыщения при давлении $P_к$.

Зависимость КПД паротурбинной установки от давления промежуточного перегрева

Рассмотрим цикл ПТУ с промежуточным перегревом пара в T, S -диаграмме. Такой цикл является сложным, состоящим из исходного цикла без промежуточного перегрева и из дополнительного цикла, соответствующего промежуточному перегреву пара. КПД цикла с промежуточным перегревом пара может быть выше, равен или ниже КПД исходного цикла без промежуточного перегрева пара. Это зависит от средних температур подвода тепла в основном и дополнительном циклах. Если средняя температура подвода тепла T_0 в цикле Карно, эквивалентном дополнительному циклу, выше такой температуры в исходном цикле, то промежуточный перегрев дает повышение КПД. В противном случае повышения КПД не происходит.

Наличие оптимального значения $P_{пп}$ можно проиллюстрировать, рассматривая, как ведут себя числитель $H_0 = h_0 - h_k + \Delta h_{пп}$ и знаменатель $Q_0 = h_0 - h'_k + \Delta h_{пп}$ в формуле (2) по мере снижения $P_{пп}$.

С уменьшением абсолютного значения $P_{пп}$ от P_0 до P_k тепло, затрачиваемое на промперегрев $\Delta h_{пп}$, а также общий расход тепла на производство 1 кг пара Q_0 непрерывно возрастают, в то время как значение H_0 сначала увеличивается, а затем падает, приближаясь к значениям, которые имеют место при отсутствии промперегрева. Очевидно, что увеличение КПД может иметь место только до тех пор, пока с уменьшением $P_{пп}$ теплоперепад H_0 возрастает и притом относительно быстрее, чем Q_0 . В определенном диапазоне давлений это действительно имеет место, т. к. средний температурный уровень подвода тепла к дополнительному циклу сначала, при высоких давлениях $P_{пп}$ выше, чем в исходном цикле. Таким образом, если построить кривую изменения внутреннего КПД цикла с промперегревом в зависимости от $P_{пп}$, то такая кривая будет иметь вид, приведенный на рис. 4.7.

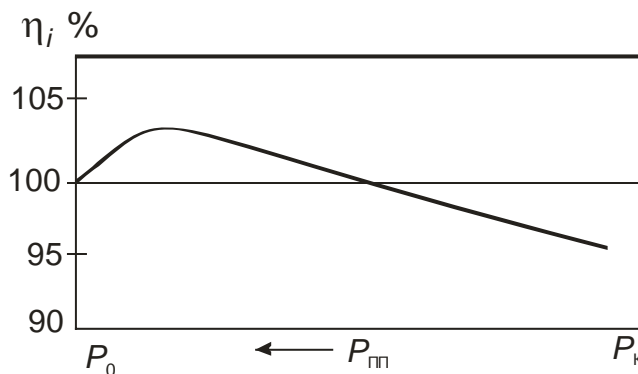


Рис. 4.7. Зависимость внутреннего КПД ПТУ от давления промперегрева

Давление, при котором значение η_i максимально, зависит от начальных и конечных параметров цикла, схемы регенеративного подогрева питательной воды и температуры питательной воды. Оптимальные значения КПД устанавливаются, когда

$$P_{\text{пп1}} = (0,15 - 0,30) \cdot P_0$$

(при одноступенчатом промежуточном перегреве) и

$$P_{\text{пп2}} = (0,06 - 0,09) \cdot P_0$$

(при двухступенчатом).

Эффективность промежуточного перегрева пара в действительном цикле проявляется в большей мере, чем в теоретическом. Это объясняется благоприятным действием промежуточного перегрева на внутренний относительный КПД ступеней после промперегрева.

4.1.3. Выбор оптимальной температуры питательной воды

Схема и КПД паротурбинной установки с одним регенеративным отбором

Схема турбоустановки с регенеративным подогревателем *смешивающего* типа представлена на рис. 4.8, соответствующий ей процесс расширения пара в h, S -диаграмме – на рис. 4.9.

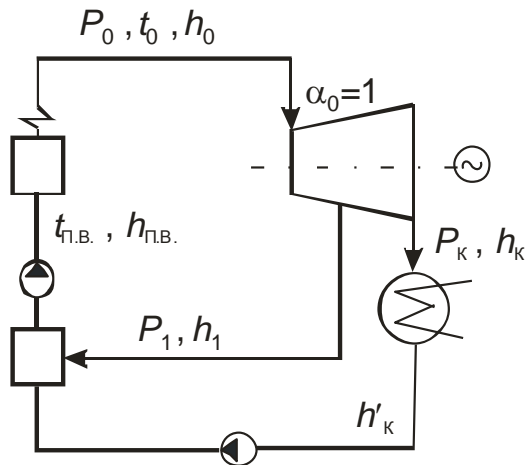


Рис. 4.8. Схема ПТУ с одноступенчатым регенеративным подогревом

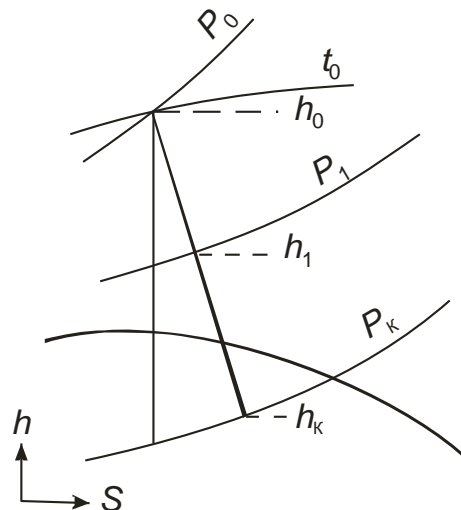


Рис. 4.9. Процесс расширения пара в турбине с регенеративным отбором

Абсолютный внутренний КПД:

$$\eta_i = \frac{\alpha_0 \cdot (h_0 - h_1) + (\alpha_0 - \alpha_1) \cdot (h_1 - h_k)}{\alpha_0 \cdot (h_0 - h_{\text{п.в.}})}, \quad (4.3)$$

где $\alpha_0 = 1$ – относительный расход пара на турбину;

$h_{п.в.} = h'_1$ – энтальпия воды в состоянии насыщения при давлении P_1 ; значение относительного расхода пара α_1 определяется из уравнения теплового баланса для смешивающего подогревателя

$$\alpha_1 \cdot h_1 + (\alpha_0 - \alpha_1) \cdot h'_k = \alpha_0 \cdot h_{п.в.} \quad (4.4)$$

Влияние регенеративного подогрева на тепловую экономичность ПТУ

В схемах с регенеративным подогревом питательной воды пар регенеративных отборов совершает работу в турбине **без потери тепла в конденсаторе**, поэтому регенеративный подогрев **всегда** повышает КПД турбоустановки. Теоретически это доказано в [1]. Степень повышения КПД благодаря регенерации в значительной мере зависит от того, при каких давлениях пар отбирается из турбины на регенеративные подогреватели. Действительно, при одном отборе, когда на регенерацию отбирается пар высокого давления, нагрев ведется до более высокой температуры питательной воды $t_{п.в.}$, чем в условиях, когда отбирается пар низкого давления. Количество отбираемого пара α_1 здесь также выше, однако при этом используется небольшой тепловой перепад ($h_0 - h_1$) – см. рис. 4.9. При обогреве паром низкого давления перепад ($h_0 - h_1$) возрастает, но зато уменьшается $t_{п.в.}$ и количество пара α_1 , которое может быть отведено в отбор. Очевидно, что существует *оптимальное давление пара в регенеративном отборе* P_1 и соответствующая ему температура $t_{п.в.}$, при которой тепловая экономичность паротурбинной установки наивысшая. Это положение подтверждается вариантными расчетами. На рис. 4.10 приведены типичные зависимости относительного повышения абсолютного внутреннего КПД установки от температуры питательной воды $t_{п.в.}$ и числа регенеративных подогревателей Z при равномерном подогреве в каждой ступени. При одной ступени подогрева кривая относительного повышения КПД проходит через нулевые значения в двух крайних случаях: при $t_{п.в.} = t_{кS}$ ($t_{кS}$ – температура воды в состоянии насыщения при давлении P_k) и $t_{п.в.} = t_{0S}$ (t_{0S} – температура воды в состоянии насыщения при давлении P_0) и через максимум, когда подогрев воды в подогревателе составляет примерно 1/2 общего подогрева ($t_{0S} - t_{кS}$). При двухступенчатом подогреве наивысшее значение КПД устанавливается, когда подогрев составляет примерно 2/3 от ($t_{0S} - t_{кS}$), при трехступенчатом, – когда подогрев равен примерно 3/4 от ($t_{0S} - t_{кS}$), и т. д.

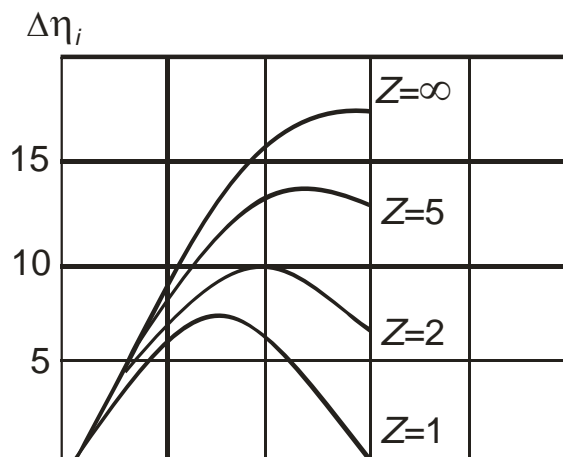


Рис. 4.10. Зависимость относительного повышения внутреннего КПД от температуры питательной воды и числа регенеративных подогревателей

4.1.4. Выбор оптимального разделительного давления в паротурбинных установках насыщенного пара с сепарацией

Для снижения влажности пара в процессе его расширения в турбинах насыщенного пара применяют сепарацию и паровой промежуточный перегрев.

Схема и КПД влажнопаровой турбоустановки с однократной сепарацией

Схема влажнопаровой установки с однократной сепарацией приведена на рис. 4.11, соответствующий ей процесс расширения пара в турбине – на рис. 4.12.

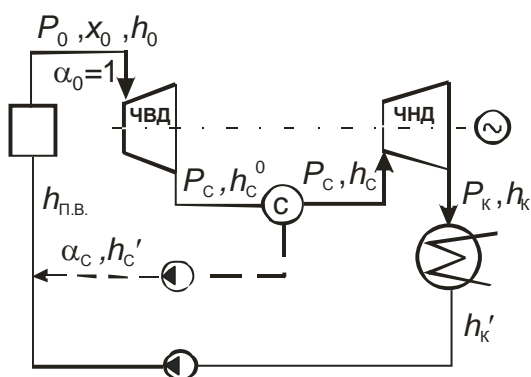


Рис. 4.11. Схема влажнопаровой ПТУ с однократной сепарацией

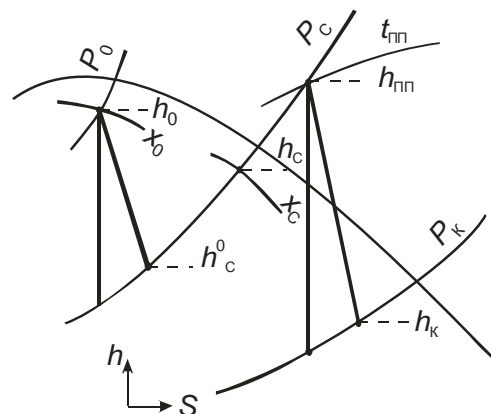


Рис. 4.12. Процесс расширения пара в турбине с однократной сепарацией

Абсолютный внутренний КПД:

$$\eta_i = \frac{\alpha_0 \cdot (h_0 - h_c^0) + (\alpha_0 - \alpha_c) \cdot (h_c - h_k)}{\alpha_0 \cdot (h_0 - h_{п.в.})}, \quad (4.5)$$

где $\alpha_0 = 1$ – относительный расход пара на турбину;

α_c – количество отсепарированной влаги; определяется из уравнения теплового баланса сепаратора

$$\alpha_0 \cdot h_c^0 = \alpha_c \cdot h'_c + (\alpha_0 - \alpha_c) \cdot h_c, \quad (4.6)$$

а $h_{п.в.}$ – из уравнения теплового баланса для точки смешения

$$\alpha_c \cdot h'_c + (\alpha_0 - \alpha_c) \cdot h'_k = \alpha_0 \cdot h_{п.в.} \quad (4.7)$$

Значения энтальпий h'_c и h'_k определяются для воды в состоянии насыщения по давлениям P_c и P_k соответственно.

Схема и КПД влажнопаровой турбоустановки с однократной сепарацией и одноступенчатым паровым промежуточным перегревом

Схема паротурбинной установки приведена на рис. 4.13, соответствующий ей процесс расширения пара в h, S -диаграмме – на рис. 4.14.

Абсолютный внутренний КПД

$$\eta_i = \frac{\alpha_0 \cdot (h_0 - h_c^0) + (\alpha_0 - \alpha_c) \cdot (h_{пп} - h_k)}{(\alpha_0 + \alpha_{пп}) \cdot (h_0 - h_{п.в.})}, \quad (4.8)$$

где $\alpha_0 = 1$ – относительный расход пара на турбину;

α_c – количество отсепарированной влаги, определяется из уравнения теплового баланса сепаратора

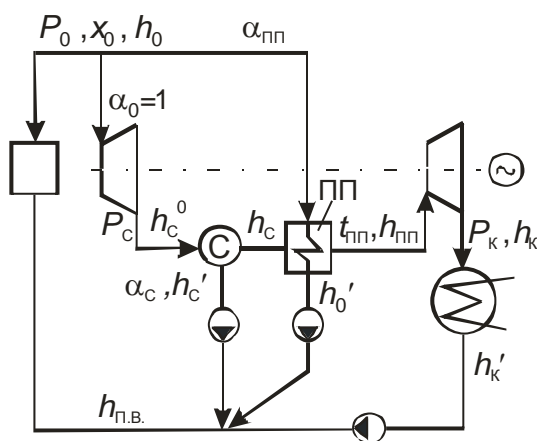


Рис. 4.13. Схема влажнопаровой ПТУ с сепаратором и пароперегревателем

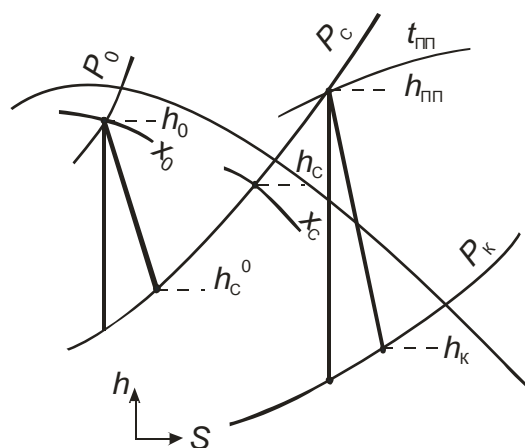


Рис. 4.14. Процесс расширения пара в турбине с сепарацией и пароперегревом

$$\alpha_0 \cdot h_c^0 = \alpha_c \cdot h'_c + (\alpha_0 - \alpha_c) \cdot h_c; \quad (4.9)$$

$\alpha_{пп}$ – относительный расход греющего пара в промежуточном пароперегревателе; находится из уравнения теплового баланса пароперегревателя

$$\alpha_{пп} \cdot (h_0 - h'_0) = (\alpha_0 - \alpha_c) \cdot (h_{пп} - h_c), \quad (4.10)$$

а $h_{п.в.}$ – из уравнения теплового баланса точки смешения трех потоков

$$\alpha_c \cdot h'_c + \alpha_{пп} \cdot h'_0 + (\alpha_0 - \alpha_c) \cdot h'_k. \quad (4.11)$$

Значения энтальпий h'_0 , h'_c и h'_k определяются для воды в состоянии насыщения по давлениям P_0 , P_c и P_k соответственно.

Зависимость КПД паротурбинной установки от разделительного давления

Давление пара между цилиндрами, при котором производится внешняя сепарация, называется *разделительным*. В схеме с однократной сепарацией (см. рис. 4.11) сепаратор необходимо устанавливать так, чтобы во всех ступенях ЧВД и ЧНД турбины влажность пара Y не превышала допустимых значений $Y_{доп} = (12-14) \%$. По мере повышения абсолютного давления в сепараторе P_c влажность пара, поступающего в него, уменьшается, а влажность пара на выходе из ЧНД турбины увеличивается. Зависимость влажности на выходе из ЧНД и ЧВД турбины от выбранного давления в сепараторе показана на рис. 4.15. Там же пунктиром указано предельно допустимое значение влажности $Y_{доп}$ в турбине. Так как влажность пара не должна превышать $Y_{доп}$, то, очевидно, давление в сепараторе может быть выбрано в интервале $P'_c \div P''_c$, если точка пересечения кривых 1 и 2 лежит ниже допустимого значения влажности. Если кривые, определяющие влажность пара перед сепаратором и перед конденсатором турбины, пересекаются при $Y > Y_{доп}$, то это означает, что при заданных начальных и конечных давлениях и принятом КПД η_{oi} во всех ступенях турбины при одном сепараторе не может быть обеспечена допустимая влажность. В этом случае, чтобы влажность не превышала допустимых значений, необходимо установить две ступени сепарации (см. рис. 4.17) либо сепаратор с пароперегревателем (см. рис. 4.18).

Наличие сепаратора меняет цикл и КПД установки. Типичная кривая, характеризующая зависимость изменения абсолютного КПД от давления в сепараторе (взятого по отношению к начальному давлению) показана на рис. 4.16. Расчеты показывают, что внутренний КПД имеет

наибольшее значение, когда значения влажности пара, поступающего в сепаратор и конденсатор турбины, примерно равны между собой (т. е. при P_c , соответствующем пересечению кривых 1 и 2).

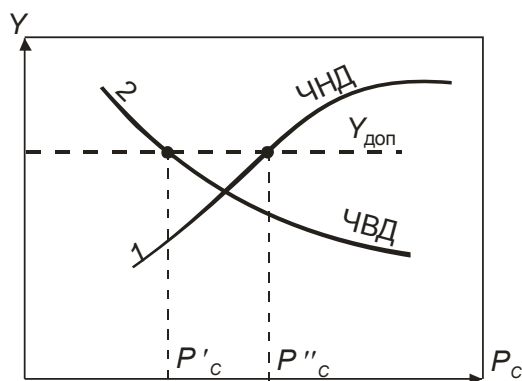


Рис. 4.15. Изменение влажности пара от давления в сепараторе

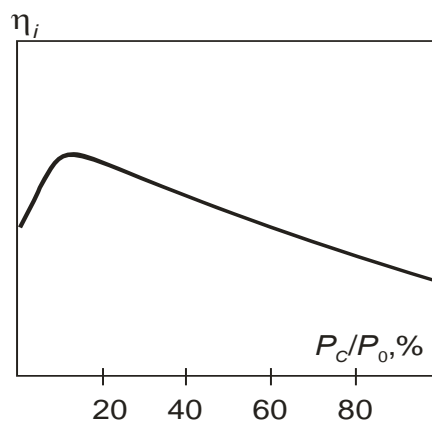


Рис. 4.16. Зависимость внутреннего КПД ПТУ от давления в сепараторе

При установке двух или трех сепараторов необходимо стремиться к тому, чтобы влажность пара на входе в сепараторы была примерно равна влажности на выходе из ЧНД турбины.

В циклах насыщенного пара с промежуточным паровым перегревом значения влажности на выходе из ЧВД и ЧНД также должны быть ниже допустимых. В оптимальных условиях влажность пара на выходе из ЧВД должна быть примерно равна влажности пара на выходе из ЧНД. Из этого следует, что при одних и тех же значениях P_0 и P_k в схемах с промперегревом давление пара на выходе из ЧВД будет выше, чем в схемах без промежуточного перегрева, и средняя влажность пара понизится в обеих частях турбины.

Повышение внутреннего относительного КПД ступеней турбины за счет сепарации и промперегрева приводит к тому, что в целом внутренний КПД ПТУ увеличивается несмотря на низкий температурный уровень подвода тепла в промпароперегревателе. Давление в сепараторе, при котором достигается наибольшее значение КПД в схемах с паровым промежуточным перегревом, в зависимости от P_0 в первом приближении выражается уравнением [2]

$$P_c \approx 0,675 + 0,12 \cdot (P_0 - 4,5), \text{ МПа.}$$

Оптимальные значения P_c практически не изменяются при переходе от одноступенчатой схемы парового промперегрева к двухступенчатой (схема турбины с двухступенчатым промперегревом приведена на рис. 4.18).

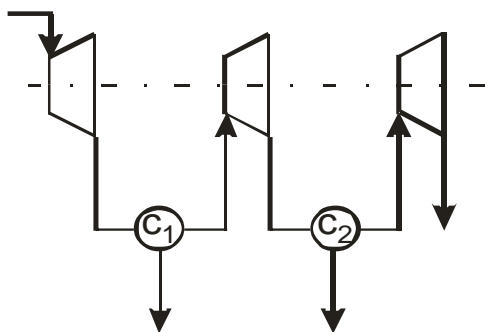


Рис. 4.17. Схема турбины с двукратной сепарацией пара

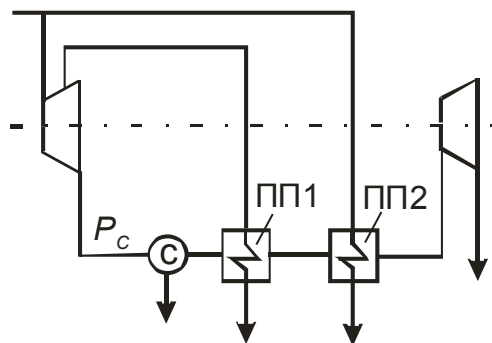


Рис. 4.18. Схема турбины с сепарацией и двукратным промпрегревом

4.2. Использование методов минимизации для выбора оптимальных термодинамических параметров ПТУ

4.2.1. Метод перебора для поиска оптимальных начальных параметров ПТУ

1. Постановка задачи

Паротурбинная установка (ПТУ) работает по идеальному циклу Ренкина на сухом насыщенном паре с параметрами:

$P_0(t_{0S})$ – начальное давление пара;

$x_0 = 1$ – начальная степень сухости;

P_k – давление в конденсаторе.

Найти максимальное значение термического КПД η_t при изменении t_{0S} от температуры насыщения пара в конденсаторе t_{kS} до температуры в критической точке $t_{кр}$, соответствующей критическому давлению ≈ 22 МПа. Повышение энтальпии воды в насосе не учитывать.

С целью привлечения к решению задачи *максимума* КПД методов *минимизации* за целевую функцию примем отрицательное значение КПД.

2. Качественное и математическое описание задачи

Схема ПТУ приведена на рис. 4.19, процесс расширения пара в турбине в h, S – диаграмме представлен на рис. 4.20. Из теории термодинамических циклов известен характер кривой $\eta_t = f(t_{0S})$ для водяного пара (см. рис. 4.21).

Целевая функция – термический КПД установки η_t ; *оптимизируемый* параметр – начальная температура t_{0S} (однозначно определяющая начальное давление P_0); *ограничения* $t_{kS} \leq t_{0S} \leq t_{кр}$.

Задача относится к одномерным оптимизационным.

В диапазоне $t_{0S} \leq t_{кр}$ функция η_t унимодальна.

Термический КПД цикла Ренкина сухого насыщенного пара

$$\eta_t = (h_0'' - h_{kt}) / (h_0'' - h'_k).$$

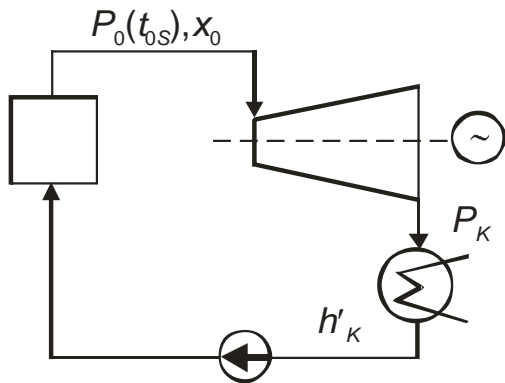


Рис. 4.19. Схема ПТУ

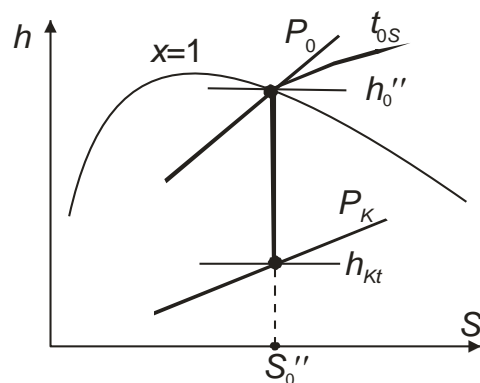


Рис. 4.20. Идеальный процесс расширения сухого насыщенного пара

3. Алгоритм расчета термического КПД

Алгоритм расчета термического КПД для простейшего цикла сухого насыщенного пара приведен на рис. 4.22.

4. Функция расчета термического КПД на языке ТУРБОПАСКАЛЬ

```
Function KPDt (t0S:real):real;
Uses TABL1;                                { Подключение модуля расчета }
                                           { термодинамических параметров }
Begin P0:=PST (t0S);
      h0II:=HSP_T (t0S);
      S0II:=SSP_T (t0S);
      PK:=0.005;      {МПа}
      SKI:=SSW_P (PK);
      SKII:=SSP_P (PK);
      XKt:=(S0II- SKI) / ( SKII- SKI);
      hKI:=HSW_P (PK);
      hKII:=HSP_P (PK);
      hKt:= hKI+ XKt·(hKII- hKI);
      KPDt:=(h0II-hKt) / (h0II-hKI);
End;
```

В тексте программы выделены обращения к функциям расчета параметров воды и водяного пара из модуля TABL1. Подробно о расчете параметров рабочего тела на ПЭВМ смотри выше (раздел 1).

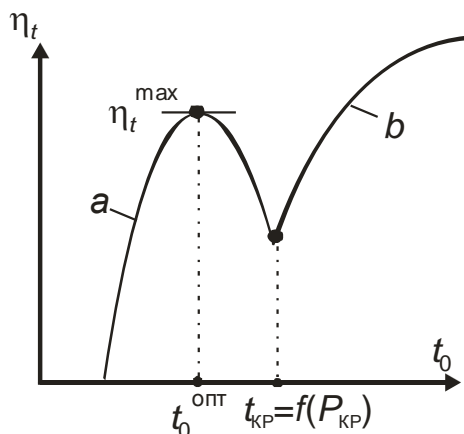


Рис. 4.21. Зависимость термического КПД цикла Ренкина от начальной температуры пара: *a* – сухой насыщенный пар; *b* – перегретый пар

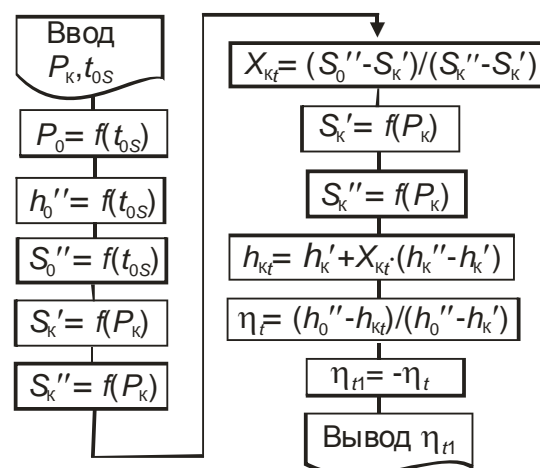


Рис. 4.22. Блок-схема расчета термического КПД цикла Ренкина сухого насыщенного пара

5. Программа расчета максимального значения КПД методом перебора

Программа составлена в соответствии с алгоритмом метода перебора (см. рис. 2.9). Ввод исходных данных для простоты приведен в тексте основной программы.

```

Program KPDmax;
Uses TABL1;
Var t0min, t0max, ... : real;
Function KPDt(t0S:real):real; {Начало функции}
Begin P0:=PST(t0S);
    ...
    KPDt:= ... ;
End; {Конец функции}
Begin {Начало основной программы}
    PK:=0.005; {МПа}
    Pkr:=22; {МПа}
    DELT:=1; {Шаг изменения начальной температуры, °C};
    t0min:=TSP(PK);
    t0max:=TSP(Pkr);
    KPDmin:= 1E10;
    REPEAT
        t1:=t0min; f1:= - KPDt(t1);
        If f1<=KPDmin then Begin KPDmin:=f1;
    t0opt:=t1 End;
        t1:=t1+DELT;
    UNTIL t1> t0max;
    KPDmax:= - KPDmin;
    Writeln ('KPDmax=', KPDmax:6:4, 'Оптим. tos=', t0opt:6:1); End.
  
```

4.2.2. Градиентный метод для выбора оптимальных значений давления двукратного промперегрева

1. Постановка оптимизационной задачи

ПТУ с начальными параметрами пара P_0 и t_0 и конечным давлением P_k работает по циклу Ренкина с двукратным (газовым) промежуточным перегревом пара. Схема установки приведена на рис. 4.23, действительный процесс расширения пара в турбине – на рис. 4.24.

Определить давления P_1 и P_2 в ступенях промперегрева, при которых абсолютный внутренний КПД турбоустановки достигает максимального значения. Выбор оптимальных значений P_1 и P_2 осуществить градиентным методом. *Целевая функция* – абсолютный внутренний КПД; *оптимизируемые параметры* – P_1 и P_2 ; *система ограничений* – $P_k \leq P_2 \leq P_1$; $P_2 \leq P_1 \leq P_0$.

Размерность задачи равна двум.

2. Качественное описание задачи

Из термодинамики известен экстремальный характер целевой функции по обоим параметрам [5, с. 8–9]. Оптимальные давления промперегрева соответствуют значениям:

– при *одноступенчатом* промежуточном перегреве

$$P_{\text{пп}} = (0,15 - 0,30) \cdot P_0;$$

– при *двухступенчатом*:

$$P_{\text{пп1}} = (0,25 - 0,30) \cdot P_0; \quad P_{\text{пп2}} = (0,06 - 0,09) \cdot P_0.$$

Анализируя графическое представление целевой функции от оптимизируемых параметров, можно сделать вывод, что оптимизационная задача относится к *многомерным выпуклым нелинейным* задачам и на допустимом множестве решений имеет единственный максимум.

3. Математическое описание задачи

Абсолютный внутренний КПД установки

$$\eta_i = \frac{(h_0 - h_1) + (h_{p1} - h_2) + (h_{p2} - h_k)}{(h_0 - h_k) + (h_{p1} - h_1) + (h_{p2} - h_2)}. \quad (4.12)$$

Работой насоса пренебрегаем.

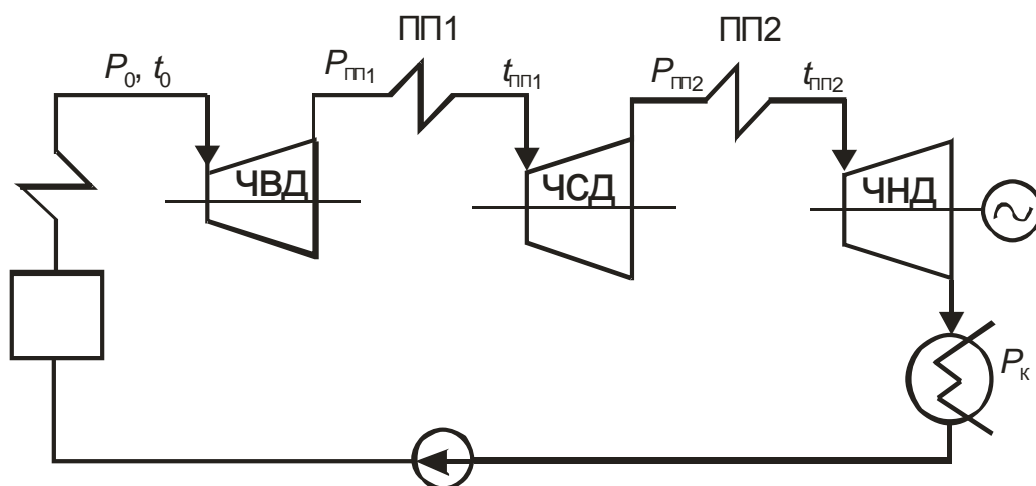


Рис. 4.23. Схема ПТУ с двукратным газовым промпрегревом

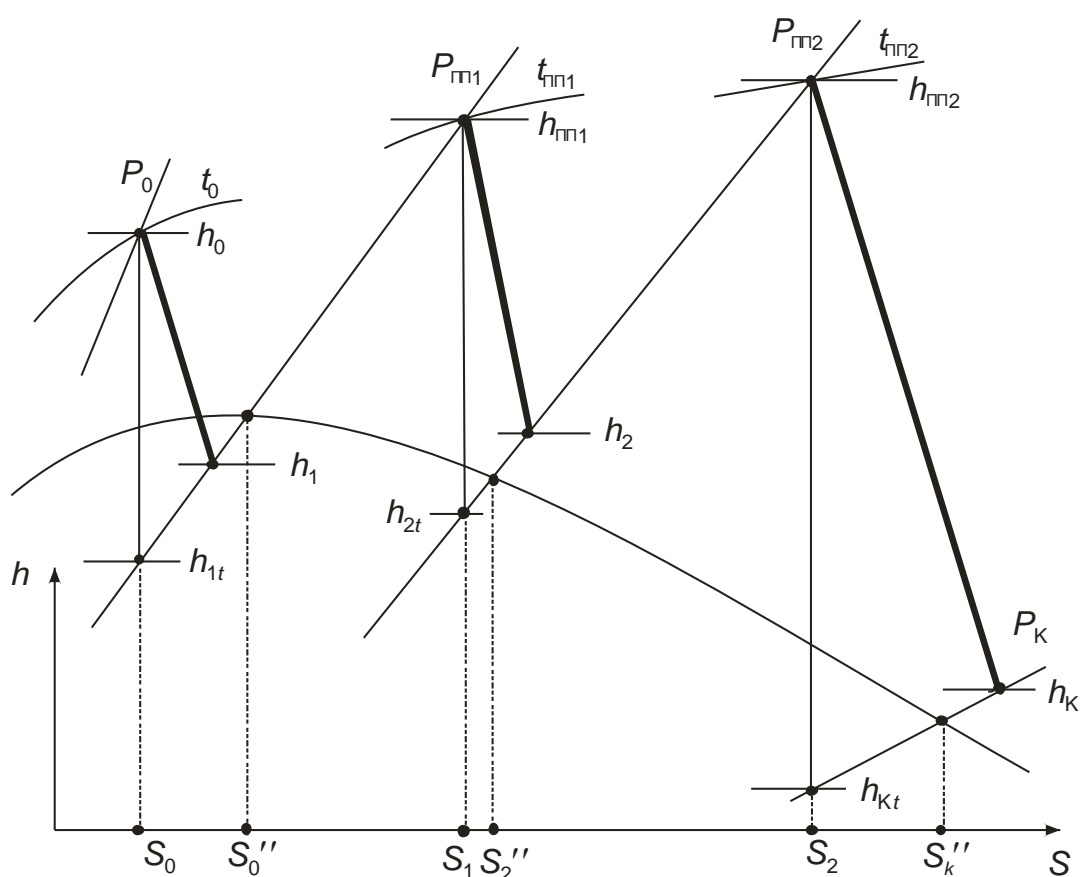
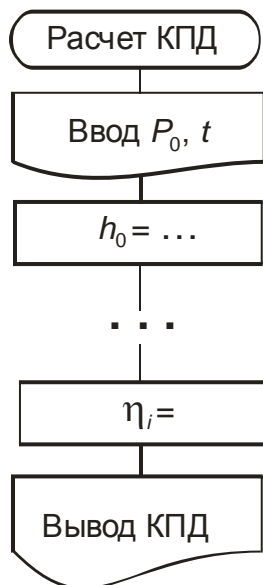


Рис. 4.24. Процесс расширения пара в турбине в h, S -диаграмме

4. Моделирование целевой функции

Алгоритм расчета КПД

Алгоритм приведен на рис. 4.25.



```
Program KPD_pr;  
  Uses TABL1;  
  Var P0, t0, P1, P2, t1, t2,  
      h0, KPD, ... :real;  
  BEGIN  
    Writeln('Введите  
    P0,t0,Pk,P1,P2....');  
    Readln  
    (P0,t0,Pk,P1,P2,t1,t2,...);  
    h0:=...{Определение т/д }  
           {параметров с помощью }  
           {модуля TABL1}  
    KPD:=  
    Writeln('КПД=', KPD);  
    Readln  
  END.
```

Рис. 4.25. Алгоритм расчета КПД

Программа расчета КПД

Структура программы на языке ТУРБОПАСКАЛЬ представлена ниже.

Оформление программы расчета КПД в виде функции

Входные параметры функции – оптимизируемые давления P_1 и P_2 .

Выходной параметр – KPD.

Следует помнить:

1. Переменные P1, P2 и KPD описываются в заголовке функции, поэтому из предложения “Var...” их следует убрать.

2. Значения параметров P1 и P2 должны передаваться из основной программы, поэтому их не надо задавать в функции расчета КПД.

3. Из основной программы (оптимизации) обращение к функции будет многократным. По этой причине ввод исходных данных, значения которых должны оставаться постоянными в процессе работы основной программы (P0, t0, t1, t2, внутренние относительные КПД частей высокого, среднего и низкого давления турбины), желательно выполнять из файла исходных данных. Для этого файл исходных данных должен быть создан. Назовем его “**GRAD-ish**”.

4. Учитывая тот факт, что справедливо

$$\max F(X) = -\min(-F(X)),$$

сведем задачу поиска максимума функции КРД к задаче минимизации функции КРД1, положив

$$\text{КРД1} = -\text{КРД}.$$

Описание функции КРД1 может быть следующим:

```
Function КРД1(P1,P2:real):real;
Uses TABL1;
Var P0,t0,Pk,t1,t2,... :real;
    IMF : string [20]; {Описание имени файла}
    F : text ; { Описание файла }
BEGIN
    IMF:='GRAD.ISH' ; { Начало функции }
    { Начало ввода исходных }
    { данных из файла }

    Assign (F,IMF) ;
    Reset (F) ;
    Readln (P0) ;
    Readln (t0) ;
    ...
    Close (F) ; { Конец ввода исходных }
    { данных из файла }

    h0:=...
    ...
    КРД:=... PD1:= - КРД; END. {Конец описания функции }
```

Вычисление частных производных КПД по давлениям

Обозначим градиент КПД η_i как $\text{Grad}\eta$, а его составляющие по давлениям P_1 и P_2 (производные) соответственно Grad1 и Grad2 .

Частная производная КПД по давлению P_1 в точке с заданными параметрами (P_1^0, P_2^0) приближенно может быть найдена

$$\text{Grad1} = \frac{\partial \eta_i(P_1^0, P_2^0)}{\partial P_1} \approx \frac{\eta_i(P_1^0 + \Delta P_1, P_2^0) - \eta_i(P_1^0, P_2^0)}{\Delta P_1}, \quad (4.13)$$

где $\Delta P_1 \approx (0,0001 - 0,005) \cdot P_1^0$ – пробный шаг дифференцирования по P_1 .

Частная производная КПД по давлению P_2 в точке с заданными параметрами (P_1^0, P_2^0) вычисляется аналогично:

$$\text{Grad2} = \frac{\partial \eta_i(P_1^0, P_2^0)}{\partial P_2} \approx \frac{\eta_i(P_1^0, P_2^0 + \Delta P_2) - \eta_i(P_1^0, P_2^0)}{\Delta P_2}, \quad (4.14)$$

где $\Delta P_2 \approx (0,0001 - 0,005) \cdot P_2^0$ – пробный шаг дифференцирования по P_2 .

Оформляем частные производные в виде функций на языке ПАС-КАЛЬ.


```
Function GRAD1 (P1,P2,dP1:real):real;  
Begin  
    K1:=KPD1 (P1,P2) ;  
    K2:=KPD1 (P1+dP1,P2) ;  
    GRAD1:=(K2-K1)/dP1;  
Function GRAD2 (P1,P2,dP2:real):real;  
Begin  
    K1:=KPD1 (P1,P2) ;  
    K2:=KPD1 (P1,P2+dP2) ;  
    GRAD2:=(K2-K1)/dP2;  
End;
```

Описание КПД и его производных в составе модуля

Модуль – самостоятельная программная единица. Она компилируется и записывается на диск в объектных кодах. К модулю можно обращаться из разных программ.

Внимание! Имена модуля и файла, содержащего модуль, должны совпадать.

Приведем модуль, включающий функции KPD, GRAD1 и GRAD2.

```
Unit GRAD_mod;                                     ( Заголовок модуля )  
INTERFACE  
    Uses TABL1;  
    Function KPD1 (P1,P2:real):real;  
    Function GRAD1 (P1,P2,dP1:real):real;  
    Function GRAD2 (P1,P2,dP2:real):real;  
IMPLEMENTATION  
Function KPD1 (P1,P2:real):real;  
    Var KPD1,  
        h0,ht1,h1,hp1,ht2,hp2,hkt,hkI,hkII,hI,hII,ht,  
        P0,PK,  
        S0,S0II,S1,S1II,S2,S2II,SI,SII,  
        t0,t1,t2,x :  
Begin { Начало функции KPD1 } ...  
    KPD1:=...  
End; { Конец функции KPD1 }  
Function GRAD1 (P1,P2,dP1:real):real;  
    Var ...  
Begin { Начало функции GRAD1 } ...  
End; { Конец функции GRAD1 }  
Function GRAD2 (P1,P2,dP2:real):real;  
    Var ...  
Begin { Начало функции GRAD2 } ...  
End; { Конец функции GRAD2 }  
END. { Конец модуля }
```

5. Моделирование оптимизационной задачи

Алгоритм оптимизации давлений промперегрева методом градиентного спуска

Для функции двух переменных алгоритм поиска ее минимума приведен на рис. 4.25. Он является универсальным и поэтому, в целом, может быть использован для широкого класса задач с той лишь разницей, что координаты начальной точки спуска $X^0(x_1^0, x_2^0)$ и значение начального шага задаются в соответствии с конкретной задачей.

В нашем случае подбором можно установить начальный шаг спуска $h = 100$. Однако с целью усовершенствования алгоритма на каждом шаге градиентного спуска будем автоматически определять максимальное значение h с учетом ограничений на оптимизируемые параметры.

Выбор максимального шага градиентного спуска

Пределы изменения P_1

В результате выполнения каждого шага градиентного спуска (из точки $X^0(P_1^0, P_2^0)$ в точку $X^1(P_1^1, P_2^1)$ переменная P_1 принимает значение

$$P_1^1 = P_1^0 - h1, \quad (4.15)$$

где

$$h1 = h \cdot \text{Grad1} \quad (4.16)$$

– составляющая градиента целевой функции по направлению P_1 .

Ограничения на давление в первой ступени промперегрева

$$P_2^1 < P_1^1 < P_0.$$

Решаем последнее неравенство с учетом (4.15) и (4.16):

$$\begin{cases} P_1^0 - h1 > P_2^1; \\ P_1^0 - h1 < P_0; \end{cases} \quad \begin{cases} h1 < (P_1^0 - P_2^1); \\ h1 > (P_1^0 - P_0); \end{cases} \quad \begin{cases} h \cdot \text{Grad1} < (P_1^0 - P_2^1); \\ h \cdot \text{Grad1} > (P_1^0 - P_0); \end{cases} \quad \begin{cases} h < (P_1^0 - P_2^1) / \text{Grad1}; \\ h > (P_1^0 - P_0) / \text{Grad1}. \end{cases}$$

$$\text{Если } \text{Grad1} > 0, \text{ то } \begin{cases} h < (P_1^0 - P_2^1) / \text{Grad1}; \\ h > (P_1^0 - P_0) / \text{Grad1}. \end{cases}$$

Примем во внимание диапазон, в котором лежат оптимальные значения давлений P_1 и P_2 , и зададим P_1 , по крайней мере, на 5 % выше P_2 , тогда максимальный шаг изменения P_1

$$h_{\max 1} = 0,95 \cdot (P_1^0 - P_2^1) / \text{Grad1}.$$

Учтем также, что $(P_1^0 - P_0) < 0$, а всегда должно выполняться $h > 0$, и примем $h_{\min 1} = 0$. Тогда

$$\begin{cases} h_{\max 1} = 0,95 \cdot (P_1^0 - P_2^1) / \text{Grad1}; \\ h_{\min 1} = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

Если **Grad1** < 0, то
$$\begin{cases} h > (P_1^0 - P_2^1) / \text{Grad1}; \\ h < (P_1^0 - P_0) / \text{Grad1}; \end{cases}$$

тогда

$$\begin{cases} h_{\min 1} = 0; \\ h_{\max 1} = 0,95 \cdot (P_1^0 - P_0) / \text{Grad1}. \end{cases} \quad (4.18)$$

Пределы изменения P_2

При перемещении из точки $X^0(P_1^0, P_2^0)$ в точку $X^1(P_1^1, P_2^1)$ новое значение переменной P_2 определяется

$$P_2^1 = P_2^0 - h2, \quad (4.19)$$

где

$$h2 = h \cdot \text{Grad2}. \quad (4.20)$$

Ограничения по второму параметру:

$$P_k < P_2^1 < P_1^1.$$

Учитывая (4.19) и (4.20), решаем последнее неравенство:

$$\begin{cases} P_2^0 - h2 > P_k; \\ P_2^0 - h2 < P_1^1; \end{cases} \quad \begin{cases} h2 < (P_2^0 - P_k); \\ h2 > (P_2^0 - P_1^1); \end{cases} \quad \begin{cases} h \cdot \text{Grad2} < (P_2^0 - P_k); \\ h \cdot \text{Grad2} > (P_2^0 - P_1^1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} h < (P_2^0 - P_k) / \text{Grad2}; \\ h > (P_2^0 - P_1^1) / \text{Grad2}. \end{cases}$$

Если **Grad2** > 0, то
$$\begin{cases} h < (P_2^0 - P_k) / \text{Grad2}; \\ h > (P_2^0 - P_1^1) / \text{Grad2}. \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} h_{\max 2} = 0,95 \cdot (P_2^0 - P_k) / \text{Grad2}; \\ h_{\min 2} = 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

Если **Grad2** < 0, то
$$\begin{cases} h > (P_2^0 - P_k) / \text{Grad2}; \\ h < (P_2^0 - P_1^1) / \text{Grad2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_{\min 2} = 0; \\ h_{\max 2} = 0,95 \cdot (P_2^0 - P_1^1) / \text{Grad}2. \end{cases} \quad (4.22)$$

Алгоритм расчета максимального шага при спуске из точки (P_1^0, P_2^0) в точку (P_1^1, P_2^1) приведен на рис. 4.26.

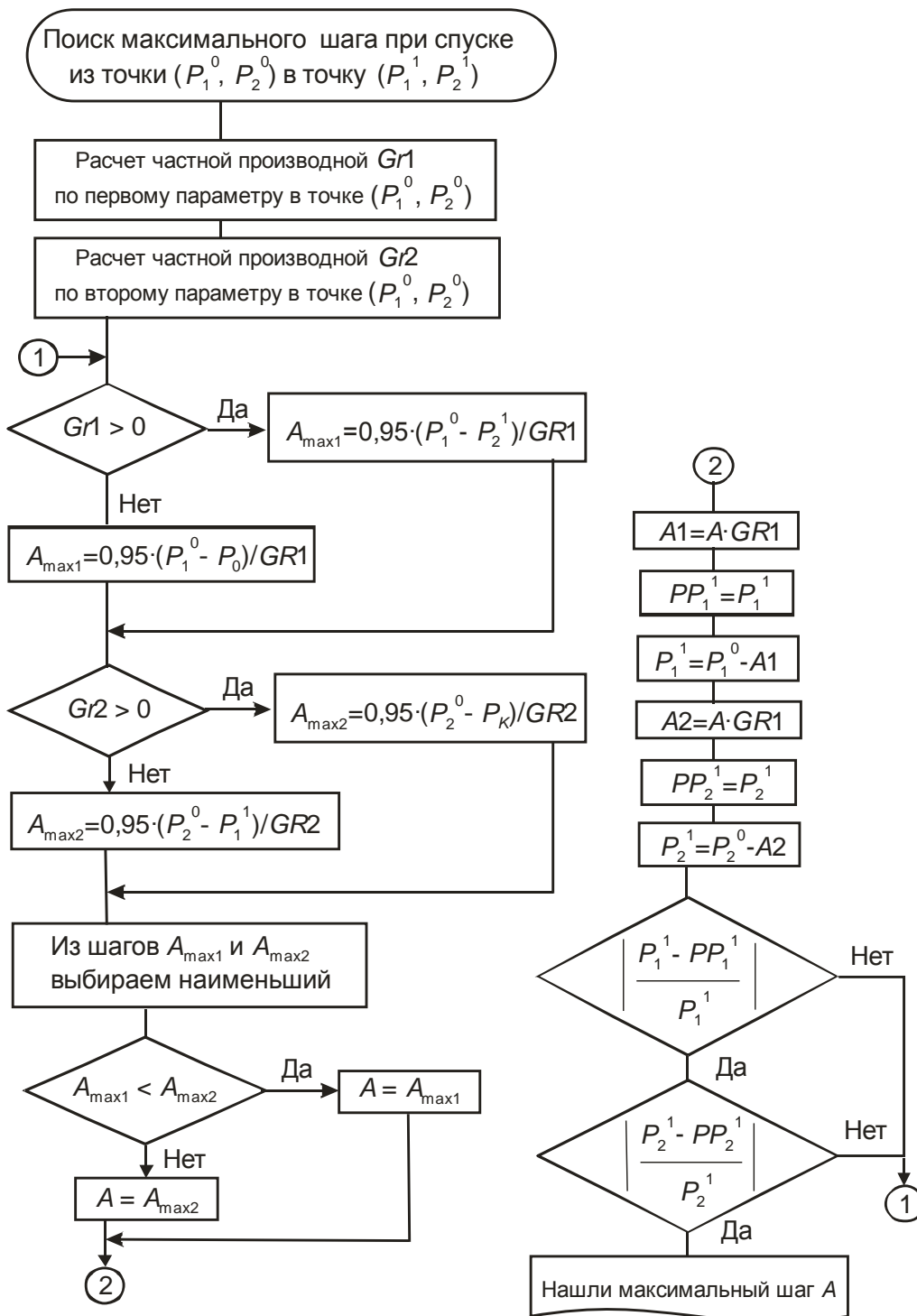


Рис. 4.26. Алгоритм расчета максимального шага

Программа расчета оптимальных давлений промперегрева

Программа составлена на языке ПАСКАЛЬ и реализована на ПЭВМ IBM PC AT. Текст программы приведен ниже.

```
Program GRADIENT;
  Uses KPDmod;
  Var A,A1,A2,Amax1,Amax2,GR1,GR2,E1,E2,dP1,dP2,KPD0,KPD1,
      KPDmax,P0,PK,P10,P20,P11,PP11,P21,PP21,P1opt,P2opt : real;
      IMF: string[20];
      F      : text;
Begin IMF:='GRAD.ISH';
  Assign(F,IMF); reset(F);
      Readln(F,P0); close (F);
  Writeln('P0=',P0:4:1,'МПа',' PK=',PK:6:4);
  Writeln('Введите нач. приближения Pп1 и Pп2 в МПа');
  Readln(P10,P20);
  E1:=0.0001; E2:=0.0001; {Погрешности определения P1 и P2}
  dP1:=0.005*P10;
  dP2:=0.005*P20;
Repeat
      GR1:=GRAD1(P10,P20,dP1);
      GR2:=GRAD2(P10,P20,dP2);
  { Выбираем пределы изменения шага A для P1 и P2 }
      P11:=P10; P21:=P20;
Repeat
      if GR1>0 then Amax1:=0.95*((P10-P21)/GR1);
      if GR1<0 then Amax1:=0.95*(P10-P0)/GR1;
      if GR2>0 then Amax2:=0.95*((P20-PK)/GR2);
      if GR2<0 then Amax2:=0.95*(P20-P11)/GR2;
  {В качестве максимального шага из Amax1 и Amax2 выбираем
  наименьший }
  If Amax1<Amax2 then A:=Amax1
      else A:=Amax2;
      A1:=A*GR1;
      PP11:=P11;
      P11:=P10-A1;
      A2:=A*GR2;
      PP21:=P21;
      P21:=P20-A2;
Until (ABS((P11-PP11)/P11)<=0.001) and (ABS((P21-PP21)/P21)<=0.01);
Repeat
      A1:=A*GR1;
      A2:=A*GR2;
      P11:=P10-A1;
      P21:=P20-A2;
```

```
KPD0:=KPD(P10,P20);  
KPD1:=KPD(P11,P21);  
A:=A/2;  
Until KPD1<=KPD0;  
P10:=P11;  
P20:=P21;  
writeln(' КПД ', -KPD1:10:8);  
Until (ABS(A1)<=E1) and (ABS(A2)<=E2);  
KPDmax:=-KPD(P11,P21);  
P1opt:=P11;  
P2opt:=P21;  
writeln('Рпп1 =',P1opt:7:4,' Рпп2=',P2opt:7:4,'  
КПД=',KPDmax:8:6); Readln;  
END.
```

4.2.3. Метод координатного спуска для расчета оптимальных значений начального давления и температуры питательной воды

1. Постановка задачи

Паротурбинная установка с одним регенеративным подогревателем работает по идеальному циклу Ренкина на насыщенном паре с заданными значениями степени сухости x_0 острого пара и конечным давлением P_k .

Найти оптимальные параметры ПТУ: давление острого пара P_0 и температуру питательной воды $t_{п.в.}$, соответствующие максимальному значению термического КПД при изменении P_0 от давления пара в конденсаторе P_k до критического давления ≈ 22 МПа и изменении $t_{п.в.}$ – от температуры насыщения при конечном давлении до температуры насыщения острого пара. Повышением энтальпии воды в насосе пренебречь.

2. Качественное и математическое описание задачи

Целевая функция – термический КПД η_t паротурбинной установки;

оптимизируемые параметры – начальное давление свежего пара P_0 и температура питательной воды $t_{п.в.}$;

размерность оптимизационной задачи равна двум по числу оптимизируемых параметров;

ограничения на оптимизируемые параметры:

$$P_K \leq P_0 \leq 22 \text{ (МПа)};$$

$$t_{KS} \leq t_{П.В.} \leq t_{0S},$$

где

$$t_{KS} = f(P_K), t_{0S} = f(P_0).$$

Схема ПТУ приведена на рис. 4.27, процесс расширения пара в турбине в h, S -диаграмме представлен на рис. 4.28.

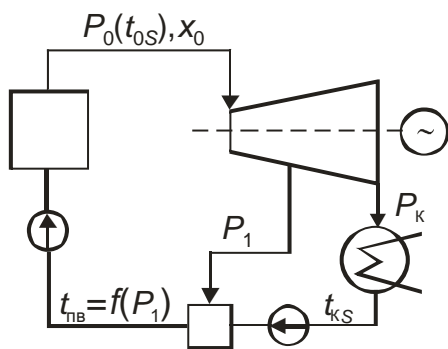


Рис. 4.27. Схема ПТУ

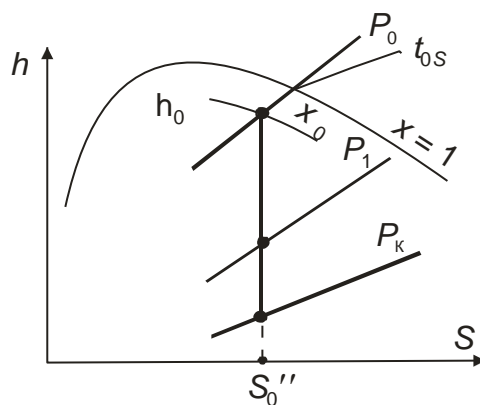


Рис. 4.28. Идеальный процесс расширения насыщенного пара

3. Моделирование целевой функции

Из теории термодинамики известен экстремальный характер функции по обоим оптимизируемым параметрам. Характер изменения η_t от P_0 аналогичен зависимости $\eta_t = f(t_{0S})$, представленной ранее на рис. 4.21. Зависимость $\eta_t = f(t_{П.В.})$ имеет параболический характер (рис. 4.29).

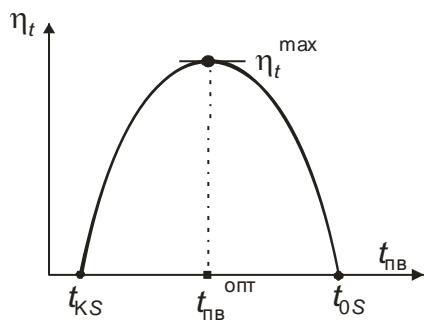


Рис. 4.29. Зависимость термического КПД цикла Ренкина от температуры питательной воды

Анализируя графическое представление целевой функции от оптимизируемых параметров, можно сделать вывод, что оптимизационная задача относится к *многомерным выпуклым нелинейным* задачам и на допустимом множестве решений имеет единственный максимум.

Сведем задачу поиска максимума целевой функции к задаче минимизации, приняв за целевую функцию отрицательное значение КПД. Решение задачи будем искать *методом координатного спуска*.

Для расчета целевой функции воспользуемся готовой программой расчета термического КПД. Для этого из приложения 1 выберем модуль **KPDMOD3**, содержащий функцию **KPD3 (P0, tpw, Pk, X0)**. Первые два параметра функции – оптимизируемые, остальные (**Pk** и **X0**) должны быть заданы в основной программе в качестве исходных данных.

4. Моделирование оптимизационной задачи

*Алгоритм расчета оптимальных значений P_0 и $t_{п.в.}$
методом координатного спуска*

Алгоритм расчета методом координатного спуска приведен на рис. 4.30. Для одномерной минимизации используется метод «золотого» сечения.

Программа расчета максимального значения КПД методом координатного спуска

Программа составлена в соответствии с алгоритмом на рис. 4.30. Ввод исходных данных для простоты приведен в тексте основной программы.

Program KOORDIN;

Uses TABL1, KPDMOD3; {Подключение модуля для расчета КПД}

Var x0, Pk, ... : real;

Begin {Начало основной программы}

PK:=0.005; {МПа} X0:=0.995;

E1:=

P0max:=22; {МПа}

tk:=**TSP**(PK); tpwmin:=tk;

P0opt:=0; tpwopt:=0;

tpwf:=100; {Зафиксировали второй параметр}

Writeln(' tpwf= ',tpwf:6:1);

REPEAT {Координатный спуск}

{Метод «золотого» сечения для оптимизации P0}

P0min:= **PST**(tpwf);

a:=P0min;

b:=P0max;

Writeln(' Границы изменения tpw ');

Writeln(' a= ', a:6:3, ' b= ', b:6:3);

REPEAT {«Золотое сечение»}

P01:=a+0.3820*(b-a);

P02:=a+0.6180*(b-a);

f1:=**KPD3**(P01,tpwf,Pk,x0);

f2:= **KPD3**(P02,tpwf,Pk,x0);

If f1<=f2 then b:=x2;

else a:=x1;

```

R:=(b-a)/2;
UNTIL R <= E1;
PP0opt:=P0opt;
P0opt:=(a+b)/2;
  { Конец метода «золотого» сечения для оптимизации P0 }
Writeln(' P0opt = ', P0opt:6:3);
KPD_1:= KPD3(P0opt,tpwf,Pk,x0);
Writeln(' КПД в точке (P0opt, tpwf) равен '; KPD_1:8:6);
P0f:=P0opt;
Writeln(' P0f= ', P0f:6:3); { Зафиксировали }
                             { первый параметр }
  { Метод «золотого» сечения для оптимизации tpw }
  tpwmax:= TSP(P0f);
  a:=tpwmin;
  b:=tpwmax;
Writeln(' Границы изменения tpw ');
Writeln(' a= ', a:6:1, ' b= ', b:6:1);
REPEAT  { «Золотое сечение» }
  tpw1:=a+0.3820*(b-a);
  tpw2:=a+0.6180*(b-a);
  f1:=KPD3(P0f,tpw1,Pk,x0);
  f2:= KPD3(P0f,tpw2,Pk,x0);
  If f1<=f2 then b:=x2; else a:=x1;
  R:=(b-a)/2;
UNTIL R <= E2;
ttpwopt:=tpwopt;
tpwopt:=(a+b)/2;
  { Конец метода «золотого» сечения для оптимизации tpw }
Writeln(' tpwopt = ', tpwopt:6:1);
KPD_2:= KPD3(P0f,tpwopt,Pk,x0);
Writeln(' КПД в точке (P0f, tpwopt) равен '; KPD_2:8:6);
tpwf:=tpwopt;
Writeln(' tpwf= ', tpwf:6:1); { Зафиксировали }
                             { первый параметр }
UNTIL (ABS(PP0opt-P0opt)<=E1) and (ABS(ttpwopt-tpwopt) ;
fmin:=KPD3(P0opt,tpwopt,Pk,x0);
KPDmax:=-fmin;
Writeln(' KPDmax= ', KPDmax:8:6); { Зафиксировали }
                                   { первый параметр }

Readln
End.  { Конец программы }
```

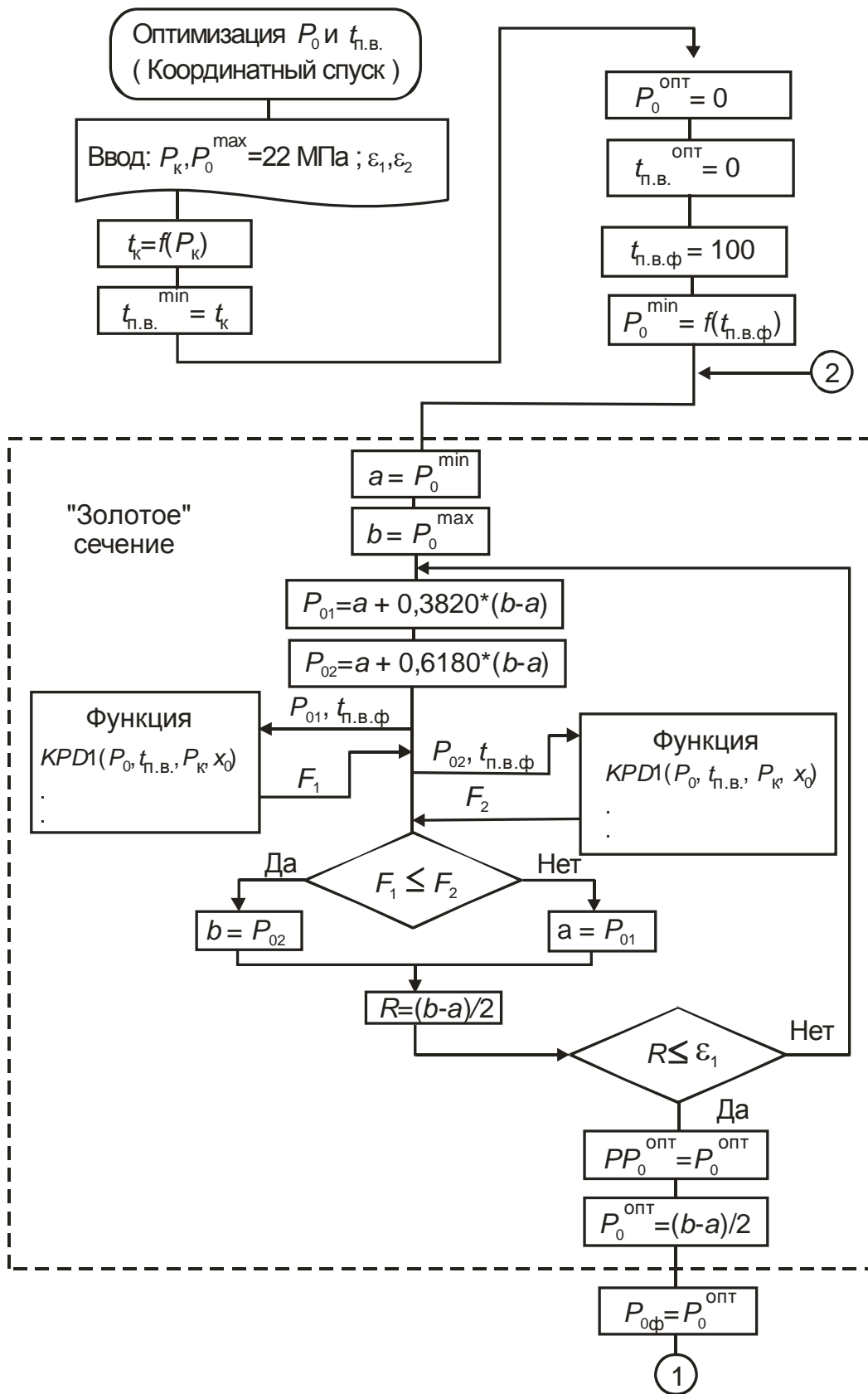


Рис. 4.30. Алгоритм координатного спуска для задачи поиска оптимальных значений P_0 и $t_{пв}$ (начало)

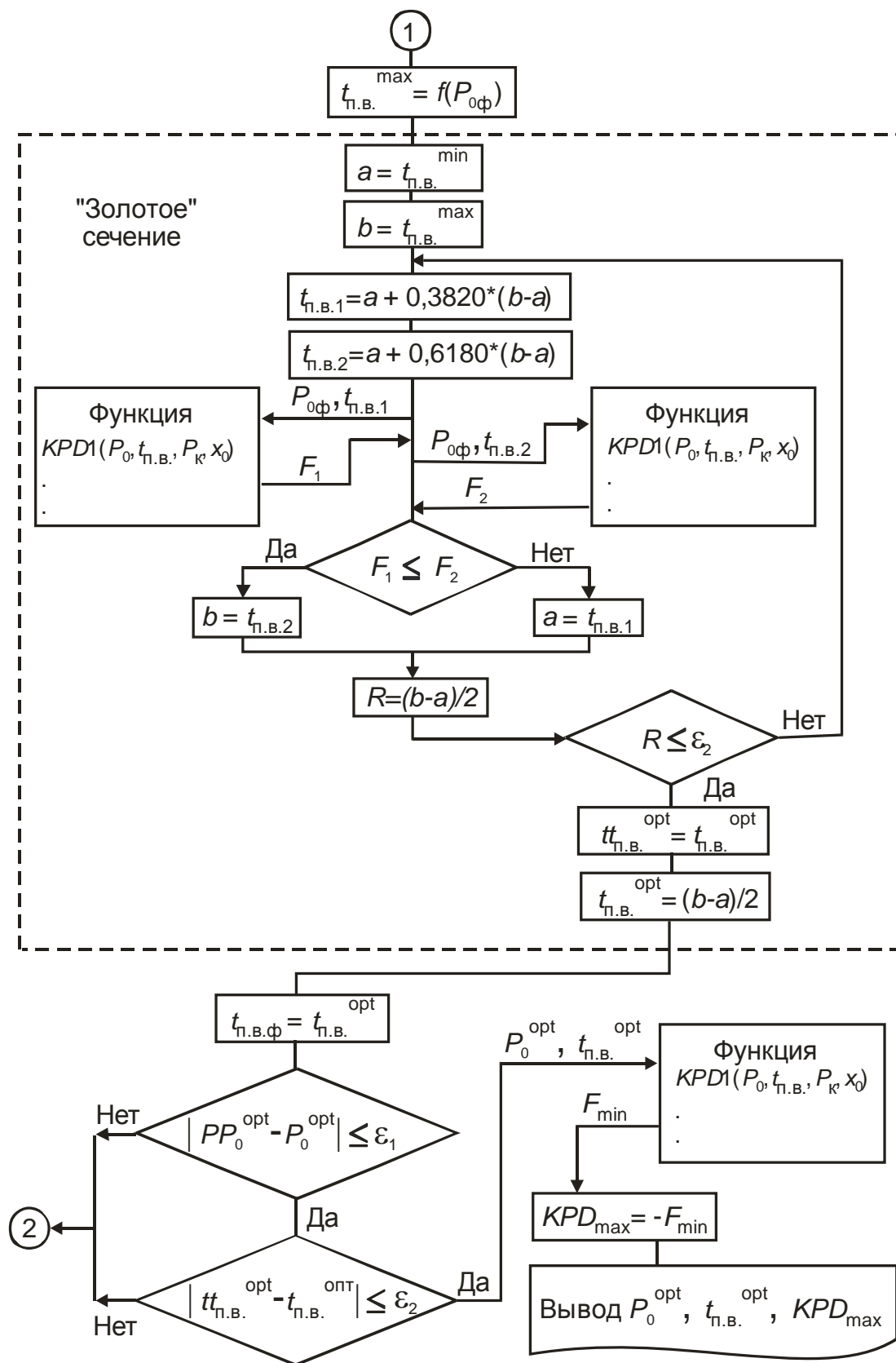


Рис. 4.30. Алгоритм координатного спуска для задачи поиска оптимальных значений P_0 и $t_{пв}$ (окончание)

5. Результаты расчета

Результаты расчета удобно представить в виде таблицы.

Таблица 4.1

№ итерации	Оптимизация P_0					Оптимизация $t_{\text{п.в.}}$				
	$t_{\text{п.в.}}^{\Phi}$	Границы изменения P_0		$P_0^{\text{опт}}$	KPD в точке $(P_0^{\text{опт}}, t_{\text{п.в.}}^{\Phi})$	P_0^{Φ}	Границы применения $t_{\text{п.в.}}$		$t_{\text{п.в.}}^{\text{опт}}$	KPD в точке $(P_0^{\Phi}, t_{\text{п.в.}}^{\text{опт}})$
		a	b				a	b		
1										
2										

5. ТИПИЧНЫЕ ЗАДАЧИ

ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ

С основами технико-экономической оптимизации теплоэнергетического оборудования и тепловых схем ТЭС и АЭС можно познакомиться в [12–15].

5.1. Выбор оптимального диаметра паропровода острого пара

1. Постановка задачи

Требуется выполнить технико-экономический расчет трубопровода острого пара заданной турбоустановки с начальными параметрами пара P_0 и t_0 при изменении его диаметра в пределах, соответствующих допустимым значениям скорости пара w , и определить значение диаметра, соответствующее минимуму приведенных расчетных затрат. В соответствии с *методикой технико-экономической оптимизации при малых изменениях в тепловой схеме* один из вариантов с соответствующим диаметром паропровода принимается за «базовый». Выбор «базового» варианта произволен. Можно принять за «базовый» вариант с наименьшим диаметром. В качестве *целевой функции* используется изменение приведенных расчетных затрат (δZ) по сравнению с «базовым» вариантом. Оптимизируемый параметр – диаметр острого пара (d) или соответствующая ему по уравнению неразрывности скорость пара (w). Оптимизационная задача относится к *одномерным*.

2. Качественное описание задачи

Согласно методике [1] фиксируется давление пара за котлом $P_0 = \text{const}$ (см. рис. 5.1) при заданных значениях расхода острого пара D_0 и начальной температуре t_0 . Изменение диаметра паропровода d неоднозначно влияет на составляющие расчетных затрат в рассматриваемую турбоустановку. Так, например, с уменьшением d снижается толщина стенки трубопровода, его вес и капитальные вложения в паропровод (*хорошо!*). Однако, с другой стороны, уменьшение d , согласно уравнению неразрывности, ведет к увеличению скорости пара w внутри паропровода и соответствующему росту гидравлического сопротивления ΔP_0 . При этом снижается начальное давление пара перед турбиной $P'_0 = P_0 - \Delta P_0$ и, соответственно, падает тепловая экономичность турбоустановки, что вызывает перерасход топлива на ТЭС (*плохо...*). Кроме того, с уменьшением P'_0 снижаются капиталовложения в паровпускную часть турбины.

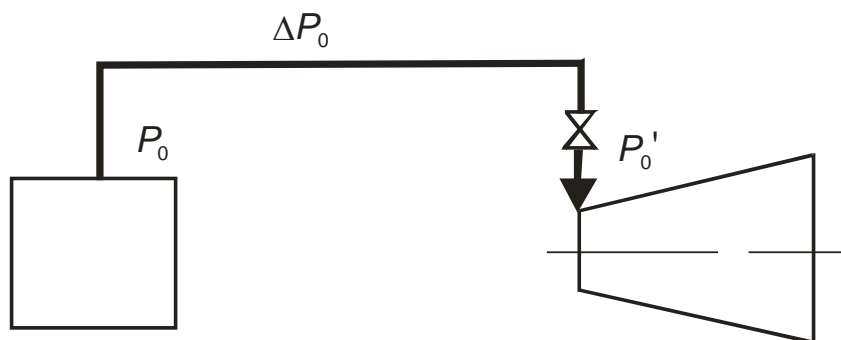


Рис. 5.1. Схема паропровода острого пара

Таким образом, при сопоставлении вариантов с разными диаметрами трубопровода острого пара должны быть учтены:

- 1) *капитальные затраты*:
 - а) на сооружение трубопровода K_1 ;
 - б) в оборудование, на стоимость которого влияет изменение диаметра K_2 ;
- 2) *ежегодные издержки*:
 - а) на амортизацию и текущий ремонт трубопровода и оборудования, стоимость которого зависит от диаметра (U);
 - б) на дополнительный расход топлива, вызванный:
 - теплопотерями в окружающую среду (B_1);
 - изменением экономичности турбоустановки (B_2).

Изменение приведенных расчетных затрат по сравнению с «базовым» вариантом:

$$\delta Z = E_H \cdot \delta K_1 + \delta U + (E_H + p_a) \cdot \delta K_2 + (\delta B_1 + \delta B_2) \cdot c_T. \quad (5.1)$$

Принципиальный характер поведения целевой функции и ее составляющих от оптимизируемого параметра представлен на рис. 5.2.

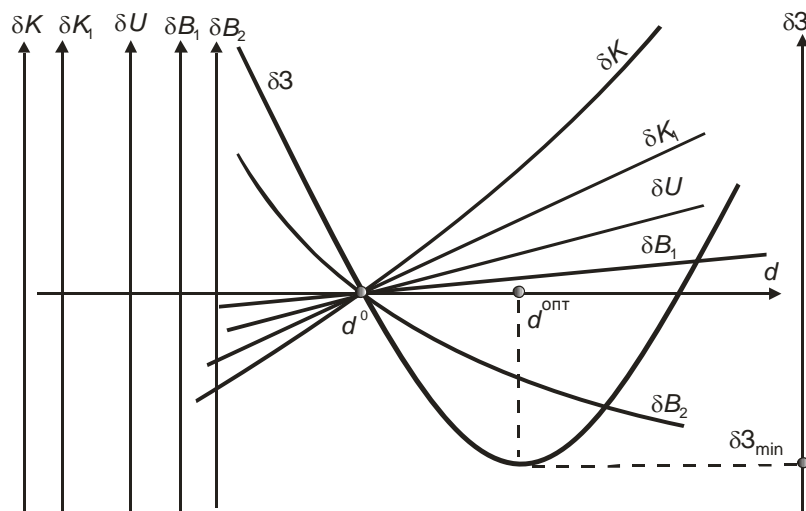


Рис. 5.2. Принципиальные зависимости целевой функции и ее составляющих от диаметра паропровода острого пара

Рекомендуемая *последовательность расчета оптимального диаметра (скорости)*

1) задается значениями скорости пара w в пределах допустимого диапазона (от w_{\min} до w_{\max}) и для них определяются внутренние диаметры d_1 согласно уравнению неразрывности;

2) один из вариантов ($w^0(d^0)$) принимается за «базовый», и для него определяются:

а) ΔP_0^0 , б) K_1^0 , в) U^0 , г) B_1^0 ;

3) для всех других вариантов ($w(d)$) рассчитываются:

а) ΔP_0 ; б) K_1 ; в) U ; г) B_1 ;

по сравнению с «базовым» вариантом

д) изменение капвложений в трубопровод

$$\delta K_1 = K_1 - K_1^0; \quad (5.2)$$

е) изменение капвложений в оборудование, на стоимость которого влияет диаметр трубопровода δK_2 ;

ж) изменение ежегодных эксплуатационных издержек в паропровод

$$\delta U = U - U^0; \quad (5.3)$$

з) изменение годового расхода топлива, вызванное теплопотерями

$$\delta B_1 = B_1 - B_1^0 \quad (5.4)$$

и соответствующее изменение топливных издержек

$$\delta U_{T1} = \delta B_1 \cdot c_T; \quad (5.5)$$

и) изменение годового расхода топлива δB_2 , вызванного изменением параметров пара перед турбиной и соответствующим изменением тепловой экономичности, и изменение топливных издержек

$$\delta U_{T2} = \delta B_2 \cdot c_T; \quad (5.6)$$

к) изменение приведенных расчетных затрат δZ :

$$\delta Z = E_H \cdot \delta K_1 + \delta U + (E_H + p_a) \cdot \delta K_2 + (\delta B_1 + \delta B_2) \cdot c_T.$$

3. Математическое описание задачи

Капиталовложения в трубопровод

$$K_1 = 1,25 \cdot k_{уд} \cdot G, \quad (5.7)$$

где $k_{уд}$ – удельные капиталовложения в трубопровод, кг/т;

G – вес трубопровода, т;

$$G = Z \cdot (\pi/4) \cdot (d_1^2 - d_2^2) \cdot L \cdot \rho, \quad (5.8)$$

где d_1 и d_2 – наружный и внутренний диаметры трубопровода, м;

L – длина трубопровода, м;
 Z – число ниток трубопровода (ориентироваться на прототип);
 ρ – удельный вес металла трубопровода, т/м³ (для стали можно принять $\rho=7850$ кг/м³).

Если задан наружный диаметр трубопровода d_1 , то *внутренний диаметр* можно определить как

$$d_2 = d_1 - 2 \cdot S, \quad (5.9)$$

вычислив *толщину стенки* S , м, по формуле

$$S = \frac{P_0 \cdot d_1}{2 \cdot \varphi \cdot \sigma + P_0} + C, \quad (5.10)$$

где σ – допускаемое напряжение металла трубопровода, *размерность величины σ должна соответствовать размерности P_0* ;

φ – коэффициент прочности, для бесшовных труб $\varphi=1,0$;

C – прибавка к расчетной толщине стенки, м; можно принять

$$C = 0,1 \cdot S. \quad (5.11)$$

Эксплуатационные издержки в паропровод можно оценить как

$$U = 0,1 \cdot K_1. \quad (5.12)$$

Изменение капиталовложений δK_2 в оборудование, на стоимость которого влияет диаметр, по сравнению с «базовым» вариантом

$$\delta K_2 = - \frac{\Delta P_0 - \Delta P_0^0}{P_0} \cdot N, \text{ р.}, \quad (5.13)$$

где $\Delta P_0, \Delta P_0^0$ – значения гидравлических сопротивлений паропровода в текущем и «базовом» вариантах соответственно, Па.

N – электрическая мощность турбины, кВт.

Гидравлическое сопротивление паропровода

$$\Delta P_0 = \left(\sum \xi_i + \xi_T \cdot \frac{L}{d_2} \right) \cdot \frac{w^2}{2 \cdot V_0}, \text{ Па}, \quad (5.14)$$

где w – скорость пара в паропроводе, м/с;

V_0 – удельный объем пара, м³/кг; зависит от начальных параметров P_0, t_0 ;

$\sum \xi_i$ – сумма местных сопротивлений;

ξ_T – коэффициент трения.

Связь между диаметром трубопровода и скоростью среды, протекающей в нем, устанавливается *уравнением неразрывности*

$$D_0 \cdot V_0 = w \cdot Z \cdot \pi \cdot d_2^2 / 4, \quad (5.15)$$

где D_0 – расход свежего пара, кг/с.

Расход топлива, вызванный теплопотерями в трубопроводе, т у.т./год

$$B_1 = (0,044 \cdot t_0 \cdot \sqrt{d_1}) \cdot L \cdot \frac{h_y \cdot \eta_t}{\eta_k \cdot 7 \cdot 10^6}, \quad (5.16)$$

t_0 – начальная температура пара, °С;

h_y – число часов использования установленной мощности;

η_t – коэффициент ценности тепла (для паропровода острого пара $\eta_t=1$, для других трубопроводов должен быть определен по методике Рубинштейна – Щепетильникова [16];

η_k – КПД котлоагрегата.

Изменение годового расхода топлива в связи с изменением тепловой экономичности турбоустановки по сравнению с «базовым» вариантом, т у.т.

$$\delta B_2 = b_0 \cdot h_y \cdot N \cdot \left(\frac{\Delta b}{b_0} \right) \cdot 10^{-3}, \quad (5.17)$$

где b_0 – удельный расход условного топлива в базовом варианте, кг у.т./(кВт·ч);

$\left(\frac{\Delta b}{b_0} \right)$ – относительное изменение удельного расхода условного топлива. Значение N_3 представлять в кВт.

Относительное изменение удельного расхода топлива, вызванное изменением параметров пара перед турбиной, по сравнению с базовым вариантом,

$$\frac{\Delta b}{b_0} = \left(0,07 + 0,013 \cdot \frac{t_0 - 600}{100} \right) \cdot \frac{(\Delta P_0 - \Delta P_0^0)}{P_0}. \quad (5.18)$$

Расчет изменения приведенных расчетных затрат δZ по сравнению с базовым вариантом выполнять по выражению (5.1).

4. Информационное обеспечение математической модели

Оптимизационные расчеты следует проводить при разных значениях стоимости топлива c_T и удельных капвложений в паропровод $k_{уд}$. Для того чтобы установить границы изменения диаметра, следует задать диапазон изменения скорости пара по рекомендациям [1]. Ориентировочно можно принять $w_{min}=20 \div 30$ м/с; $w_{max}=80 \div 100$ м/с. Исходные данные для тестового расчета приведены в табл. 5.1.

5. Алгоритм расчета оптимального диаметра на математической модели

Вычисление оптимального диаметра рекомендуется выполнять, решая последовательно следующие задачи:

1) вычислить параметры паропровода, влияющие на расчет целевой функции в зависимости от заданной скорости пара: гидравлического сопротивления ΔP_0 , капитальных вложений в трубопровод K_1 , эксплуатационных издержек U и расхода топлива B_1 . Блок-схема этого алгоритма приведена на рис. 5.3;

2) рассчитать целевую функцию (изменения приведенных расчетных затрат δZ) при любой заданной скорости пара w по сравнению с базовым вариантом w^0 . Алгоритм расчета в виде блок-схемы представлен на рис. 5.4;

3) определить оптимальное значение скорости $w^{\text{опт}}$ (диаметра) с использованием принятого метода одномерной минимизации. Алгоритм метода «золотого» сечения – на рис. 5.5, а метода перебора – на рис. 5.6.

Таблица 5.1

Исходные данные для тестового расчета паропровода

№	Название	Значение	Размерность
1	Давление острого пара	P_0	МПа
2	Температура острого пара	t_0	°С
3	Электрическая мощность турбоустановки	$N = 300000$	кВт
4	Расход острого пара	$D_0 = 230$	кг/с
5	Длина паропровода	$L = 90$	м
6	Число ниток паропровода	$Z = 2$	–
7	Сумма местных сопротивлений	$\sum \xi_i = 9$	–
8	Коэффициент трения	$\xi_T = 0,01$	–
9	Коэффициент ценности тепла	$\eta_t = 1$	–
10	КПД котла	$\eta_k = 0,92$	–
11	Удельный расход условного топлива	$b_0 = 0,330$	кг у.т./ (кВт·ч)
12	Число часов использования установленной мощности	$h_y = 6000$	ч
13	Плотность стали	$\rho = 7850$	кг/м ³
14	Допускаемое напряжение в металле трубопровода	$\sigma = 40$	МПа
15	Стоимость условного топлива (ориентировочно)	$c_T = 0,5$	р./кг у.т
16	Удельные капиталовложения в паропровод (ориентировочно)	$k_{уд} = 70$	р./кг

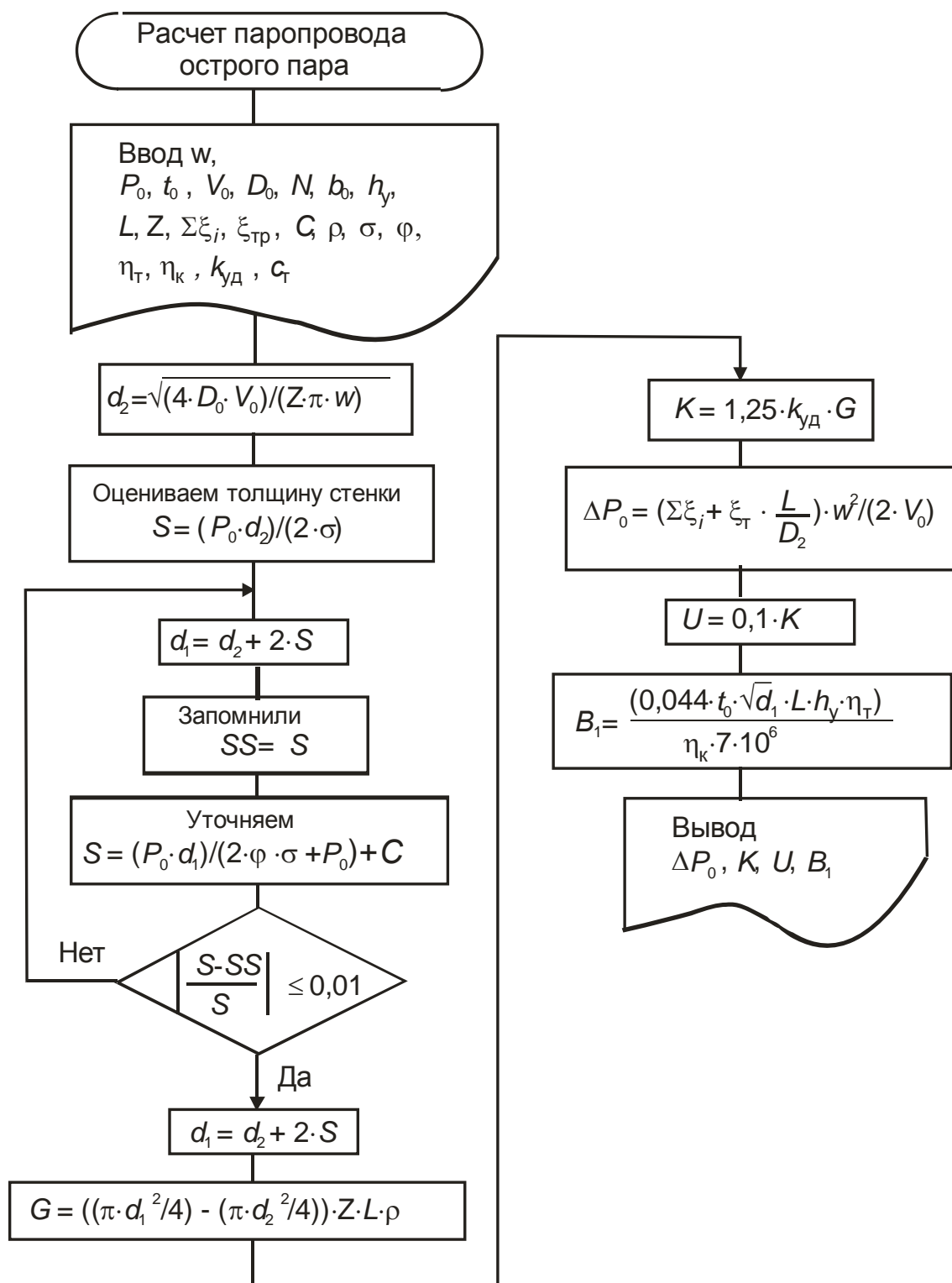


Рис. 5.3. Алгоритм расчета паропровода острого пара

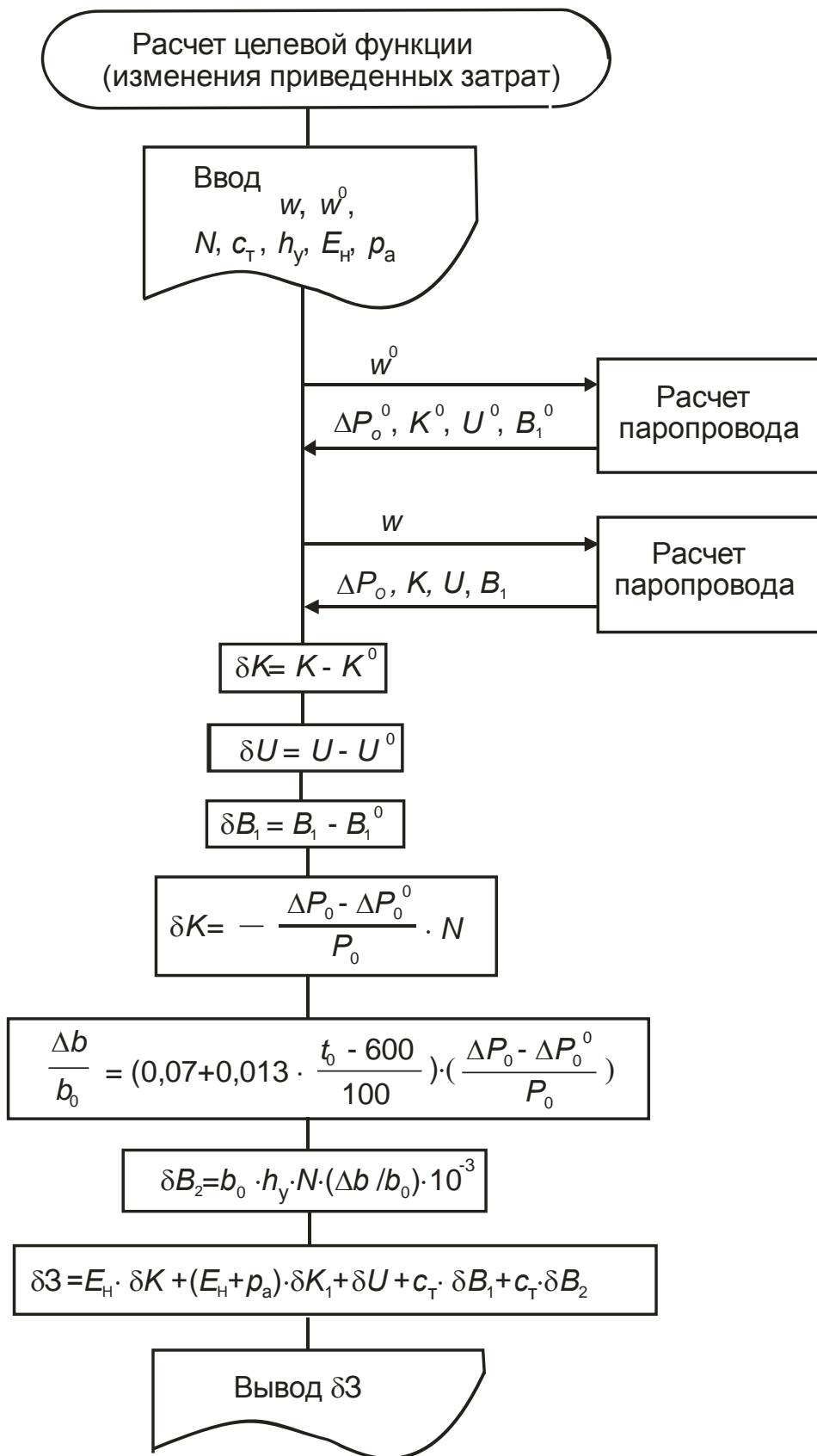


Рис. 5.4. Алгоритм расчета целевой функции

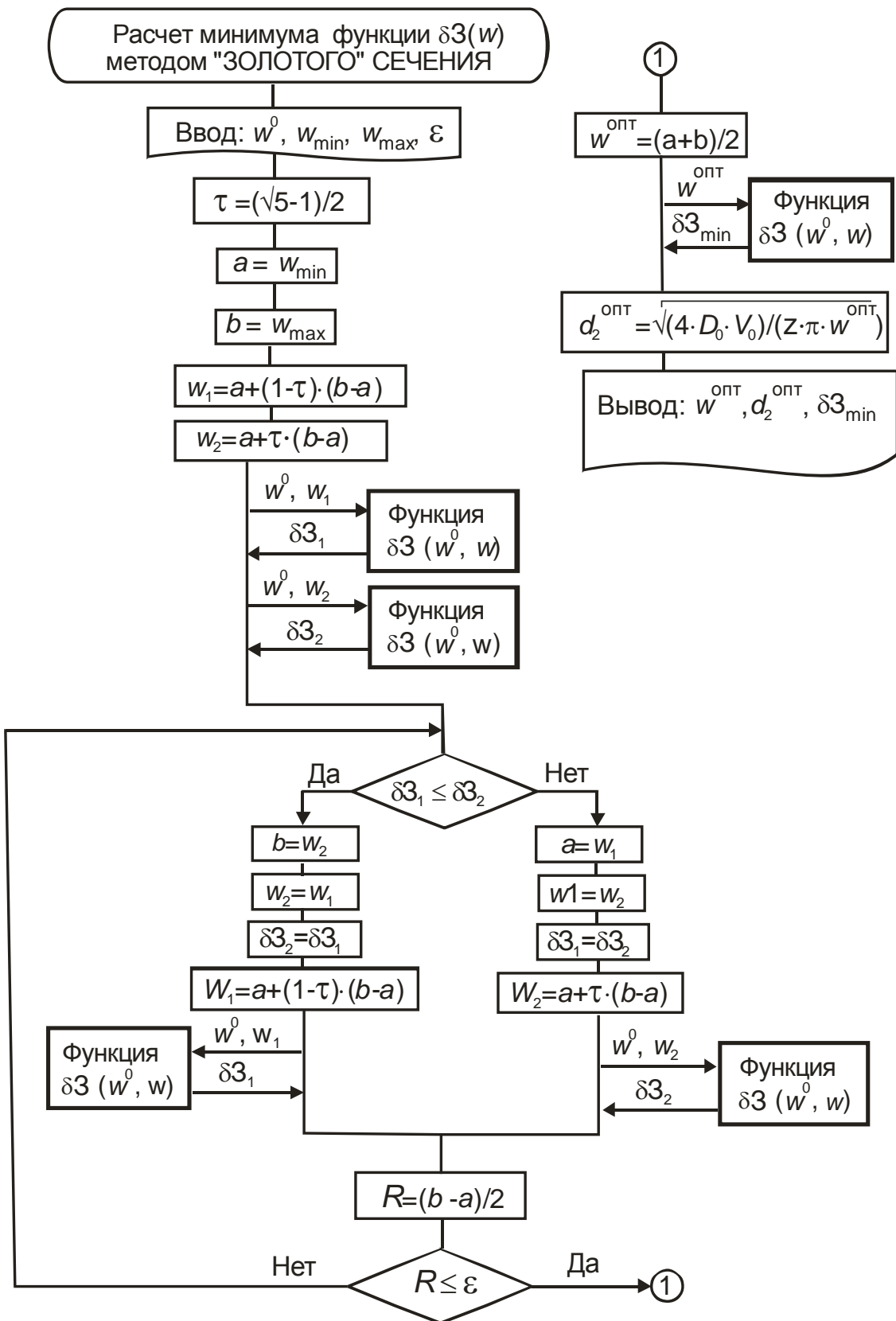


Рис. 5.5. Алгоритм поиска минимума целевой функции методом «золотого» сечения (оптимизация диаметра острого пара)

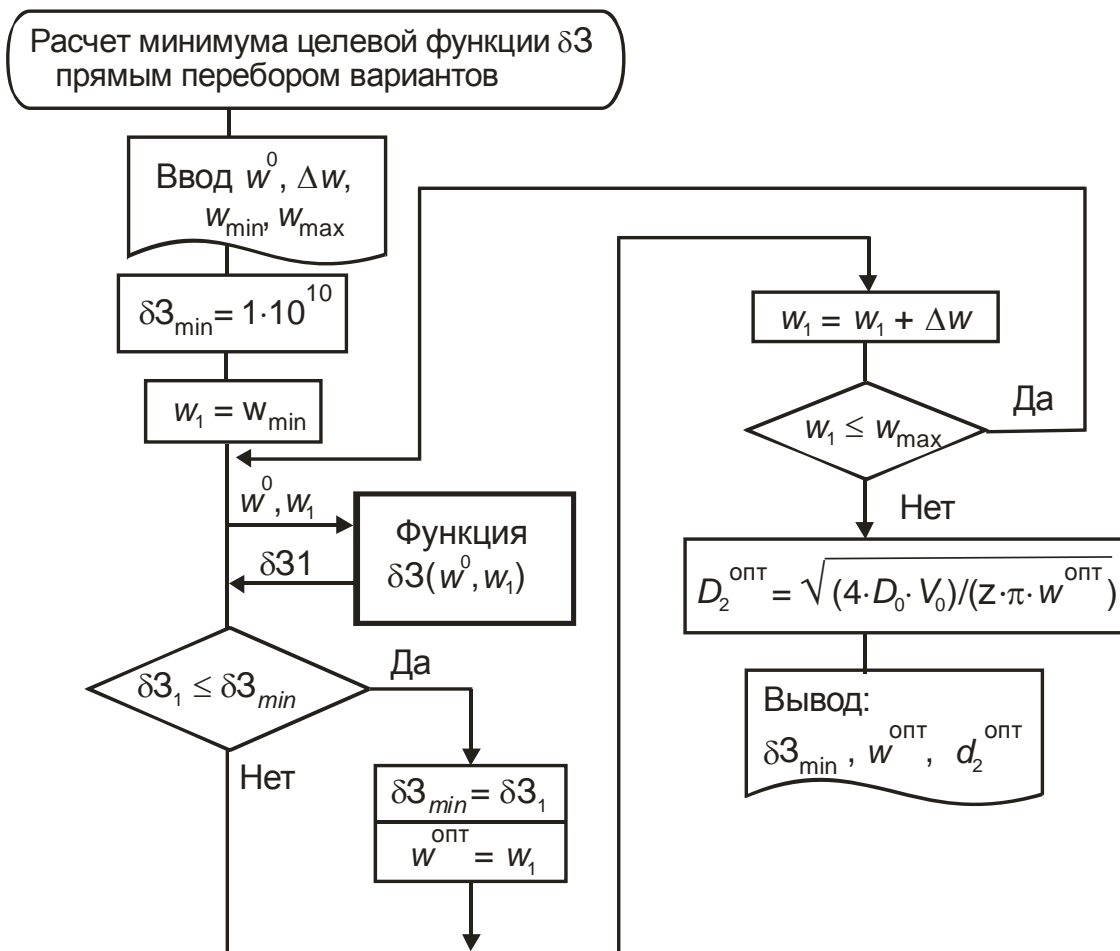


Рис. 5.6. Алгоритм поиска минимума целевой функции методом перебора (оптимизация диаметра острого пара)

5.2. Технико-экономический выбор оптимального диаметра паропровода горячей нитки промперегрева

Согласно методике фиксируется давление пара на выходе из промежуточного пароперегревателя (ПП) котла $P_{пп}$. Рассчитываем оптимальный диаметр паропровода горячей нитки промперегрева от ПП до входа в часть среднего давления (ЧСД) турбины (см. рис. 5.7). Методика выбора оптимального диаметра аналогична приведенной выше для паропровода острого пара. Формула для расчета δZ также не изменяется. Изменения касаются расчета тепловой экономичности при изменении потерь давления пара и капвложений в турбину:

$$\frac{\Delta b}{b_0} = 0,085 \cdot \frac{(\Delta P_{пп} - \Delta P_{пп}^0)}{P_{пп}}; \quad (5.19)$$

$$\Delta K_1 = 0,25 \cdot \frac{(\Delta P_{пп} - \Delta P_{пп}^0)}{P_{пп}}. \quad (5.20)$$

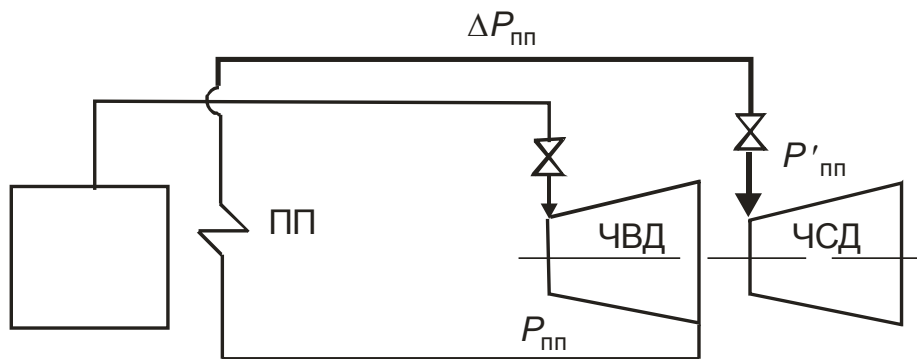


Рис. 5.7. Схема паропровода промежуточного перегрева пара

5.3. Техничко-экономический выбор температурных напоров в поверхностных регенеративных подогревателях

В тепловых схемах паротурбинных установок применяются регенеративные подогреватели смешивающего и поверхностного типов. Кроме основной поверхности или собственно подогревателя (СП), где нагрев происходит за счет тепла конденсации пара, в общем случае поверхностный подогреватель может иметь выделенные поверхности охладителя дренажа (ОД) и охладителя пара (ПО) – рис. 5.8. В ОД нагрев происходит за счет охлаждения конденсата греющего пара, в ПО – за счет снятия тепла перегрева пара.

Тепловая экономичность паротурбинной установки и затраты в регенеративных подогревателях зависят от температурных напоров в элементах подогревателей: от недогрева θ воды в зоне СП, температурного напора ОД $\Delta t_{\text{ОД}}$ и остаточного перегрева пара на выходе из ПО $\Delta t_{\text{ПО}}$. На рис. 5.9 приведена Q, t -диаграмма поверхностного подогревателя с ПО и ОД. Все обозначения соответствуют рис. 5.8. Через СП проходит весь поток воды. На ПО от этого потока отводится небольшая доля, выбираемая в зависимости от схемы включения подогревателя. В общем случае можно рекомендовать расход воды через ПО равным $(0,7 \div 1,5)$ от расхода пара на этот подогреватель. В ОД также направляется часть питательной воды, обычно 14–15 % от всего расхода воды. Изменение температуры воды в ПО и ОД показано на Q, t -диаграмме сплошными линиями, пунктиром изображено изменение температуры воды в ОД и ПО при полном расходе воды через эти зоны.

Следует помнить, что *расходы воды, отводимые на ОД и ПО, не влияют на температуру смеси после точек смешения СМ1 и СМ2, эти значения должны учитываться в тепловом расчете теплообменников.*

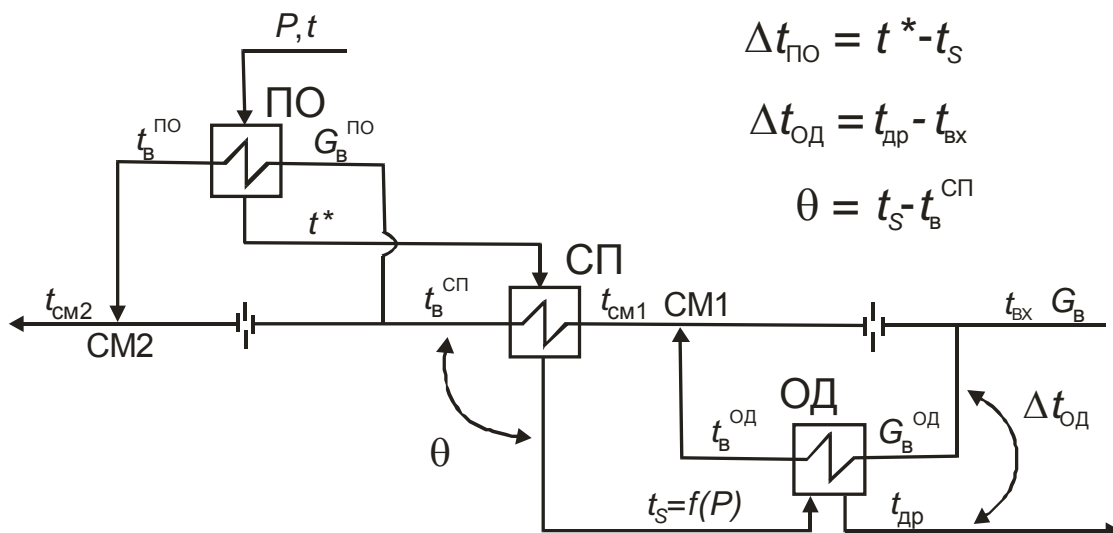


Рис. 5.8. Схема поверхностного подогревателя с выделенными зонами ОД и ПО

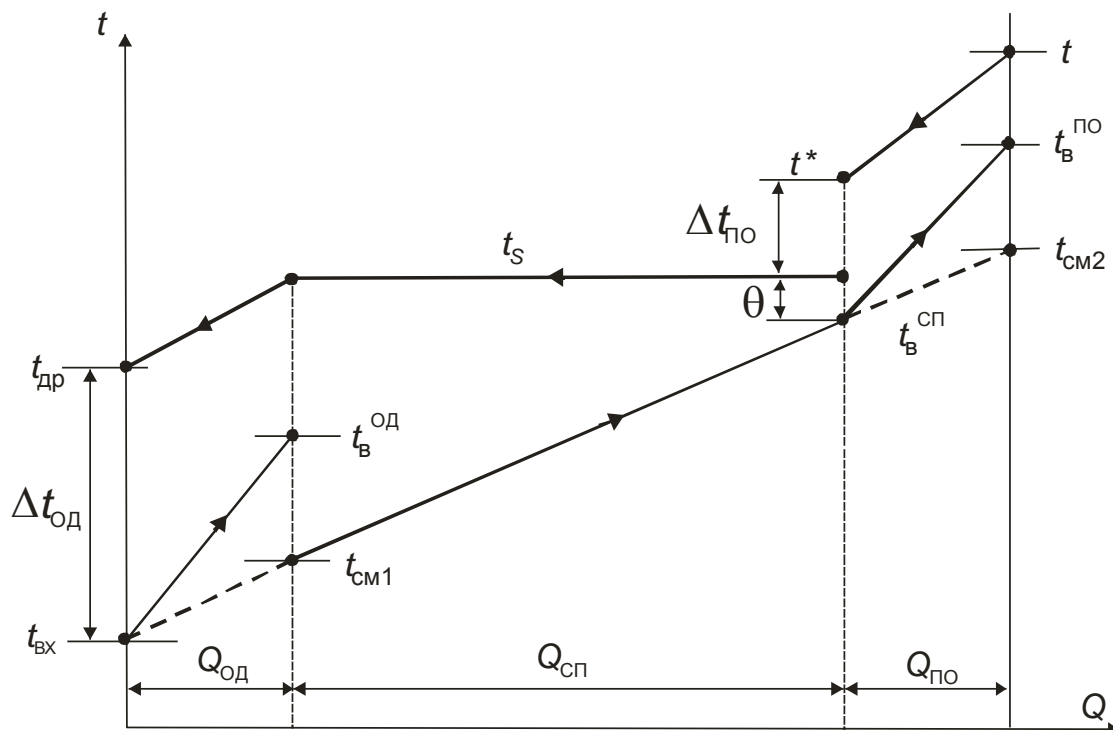


Рис. 5.9. Q, t -диаграмма подогревателя с ОД и ПО

Влияние θ , $\Delta t_{\text{ОД}}$ и $\Delta t_{\text{ПО}}$ на тепловую экономичность установки

– при снижении *недогрева* θ в рассматриваемом подогревателе при неизменном давлении в отборах увеличивается температура воды за этим подогревателем и, соответственно, на входе в следующий, в результате чего расход пара на рассматриваемый подогреватель увеличивается, а на вышестоящий по ходу воды – уменьшается;

– снижение *температурного напора* ОД $\Delta t_{\text{ОД}}$, т. е. более глубокое охлаждение дренажа увеличивает отбор пара более низкого давления на предыдущий по ходу воды подогреватель, куда отводится дренаж;

– с уменьшением *остаточного перегрева пара* $\Delta t_{\text{ПО}}$ возрастает подогрев воды в ПО и соответственно температура воды на выходе из рассматриваемого теплообменника; при этом снижается расход пара на следующий по ходу воды подогреватель более высокого давления.

Во всех указанных случаях увеличивается *регенеративная выработка электроэнергии* и КПД паротурбинной установки.

Однако при уменьшении температурных напоров *увеличиваются* поверхность нагрева, расход металла на изготовление подогревателя и его *стоимость*. Поэтому *оптимальные значения* температурных напоров в подогревателях *определяются с помощью технико-экономических расчетов*. При сравнении вариантов разница в выработке электроэнергии учитывается замещающей электроэнергией.

Полагаем расход тепла на турбоустановку неизменным $Q_0 = \text{const}$, тогда изменение затрат по сравнению с базовым вариантом

$$\delta Z = (E_n + p_a) \cdot (\delta K_1 + \delta K_2) + c \cdot h_y \cdot \delta N, \quad (5.21)$$

где δK_1 – изменение капитальных затрат в подогревателе по сравнению с базовым вариантом, р.;

δK_2 – изменение капитальных затрат в насосную установку, прокачивающую нагреваемый теплоноситель через теплообменники, р.;

p_a – коэффициент амортизационных отчислений (для энергетического оборудования можно принять $p_a = (0,06 \div 0,08)$);

δN – изменение замещающей мощности в энергосистеме, кВт;

$$\delta N = -\delta N_{\text{уст}}, \quad (5.22)$$

где $\delta N_{\text{уст}}$ – изменение мощности турбоустановки по сравнению с «базовым» вариантом, кВт;

$$\delta N_{\text{уст}} = \delta N_1 + \delta N_2; \quad (5.23)$$

δN_1 – изменение мощности турбины, кВт;

δN_2 – изменение мощности насоса, кВт;

h_y – число часов использования установленной мощности;

$$\delta K_1 = 1,25 \cdot k_{уд1} \cdot \delta F, \quad (5.24)$$

где $k_{уд1}$ – удельные капвложения в теплообменную поверхность, р./м²;
 δF – изменение поверхности нагрева подогревателей, м²;

$$\delta K_2 = 1,25 \cdot k_{уд2} \cdot \delta N_2, \quad (5.25)$$

где $k_{уд2}$ – удельные капвложения в насосную установку, р./кВт.

Мощность насоса зависит от изменения площади поверхности подогревателей. Согласно методике для всех вариантов принимаем скорость воды в трубном пучке теплообменной поверхности неизменной. Таким образом, приращение поверхности нагрева осуществляется за счет изменения длины трубок при постоянном их количестве и диаметре. Изменение мощности насосной установки, вызванное изменением гидравлического сопротивления поверхности нагрева, можно определить

$$\delta N_2 = L_{уд} \cdot \delta F, \quad (5.26)$$

где $L_{уд}$ – удельная работа насоса, кВт/м².

Формулы для расчета δN_1 , δF , $L_{уд}$ зависят от конкретной задачи и приведены ниже.

5.3.1. Выбор оптимального недогрева

1. Постановка задачи

Требуется выполнить технико-экономический расчет регенеративных подогревателей при изменении *недогрева* в одном из них и определить *оптимальный недогрев*, соответствующий минимуму приведенных расчетных затрат в турбоустановку.

Согласно методике технико-экономической оптимизации при малых изменениях в тепловой схеме за *целевую функцию* принимаем изменение приведенных расчетных затрат δZ по сравнению с произвольным (*базовым*) вариантом (5.21).

Пусть оптимизируется значение недогрева θ_j в подогревателе под номером j . Для решения данной задачи подогреватель P_j необходимо рассматривать в тепловой схеме совместно с вышестоящим P_{j+1} (см. рис. 5.10).

Решение задачи будем искать на основании того, что *вариация недогрева осуществляется изменением поверхностей нагрева* подогревателей P_j и P_{j+1} при неизменном положении точек отбора и заданных параметрах воды на входе в j -й и на выходе из $(j+1)$ -го подогревателя.

Оптимизационная задача относится к *одномерной*.

Ограничения: минимальное значение недогрева можно принять очень близким нулю, например 0,01; максимальное значение не должно

превышать разницу между температурой насыщения греющего пара и температурой входящей в подогреватель воды.

2. Качественное описание задачи

Как было отмечено выше, изменение недогрева в подогревателе Π_j неоднозначно влияет на составляющие расчетных затрат в турбоустановку. С уменьшением недогрева повышается температура воды на выходе из подогревателя Π_j и на входе в подогреватель Π_{j+1} (рис. 5.10). При заданных температурах $t_{\text{вх}}$ и $t_{\text{в}(j+1)}$ это означает увеличение подогрева воды в j -й ступени регенерации с одновременным уменьшением в $(j+1)$ -й. При постоянном расходе воды через подогреватели $G_{\text{в}} = \text{const}$ расход пара в нижестоящий подогреватель D_j увеличивается на некоторую величину ΔD , а в следующий по ходу воды D_{j+1} уменьшается на это же значение. В результате этого в турбине совершается дополнительная регенеративная выработка $\Delta N = \Delta D \cdot (h_{j+1} - h_j)$ при расширении пара от параметров $(j+1)$ -го отбора до давления P_j . Однако снижение недогрева приводит к росту требуемой поверхности теплообмена, в результате чего увеличиваются капиталовложения в регенеративную установку. Рост недогрева, наоборот, снижает выработку электроэнергии, но позволяет сэкономить на капитальных затратах. Увеличение поверхности приводит к росту стоимости установки и эксплуатационных издержек на насосы, прокачивающие воду через подогреватели.

Const: $P_j, P_{j+1}, t_{\text{вх}}, t_{\text{вх}(j+1)}$

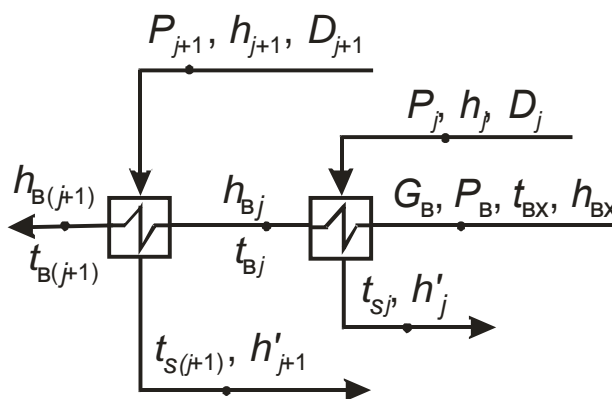


Рис. 5.10

Таким образом, при сопоставлении вариантов с разными недогревами должны быть учтены:

1) *капитальные затраты* в регенеративные подогреватели и в насосы;

2) дополнительные затраты на возмещение недоотпуска электроэнергии от турбоустановки при повышенных значениях недогрева.

Принципиальный характер поведения целевой функции и ее составляющих от оптимизируемого параметра представлен на рисунках 5.11 и 5.12.

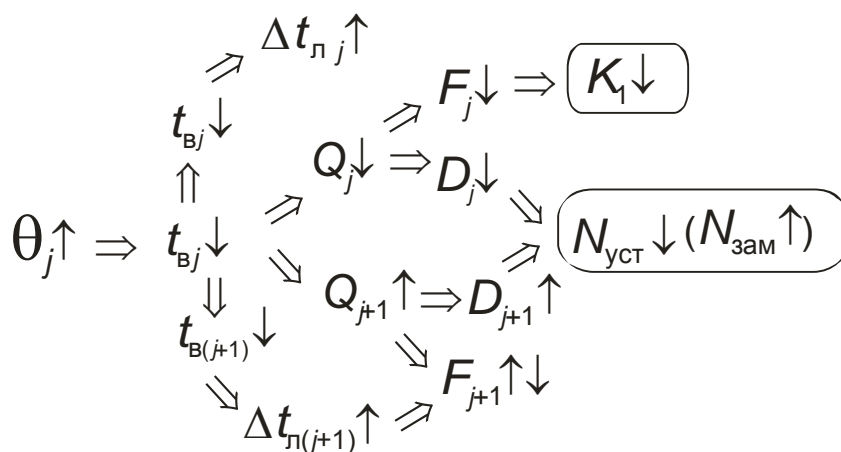


Рис. 5.11

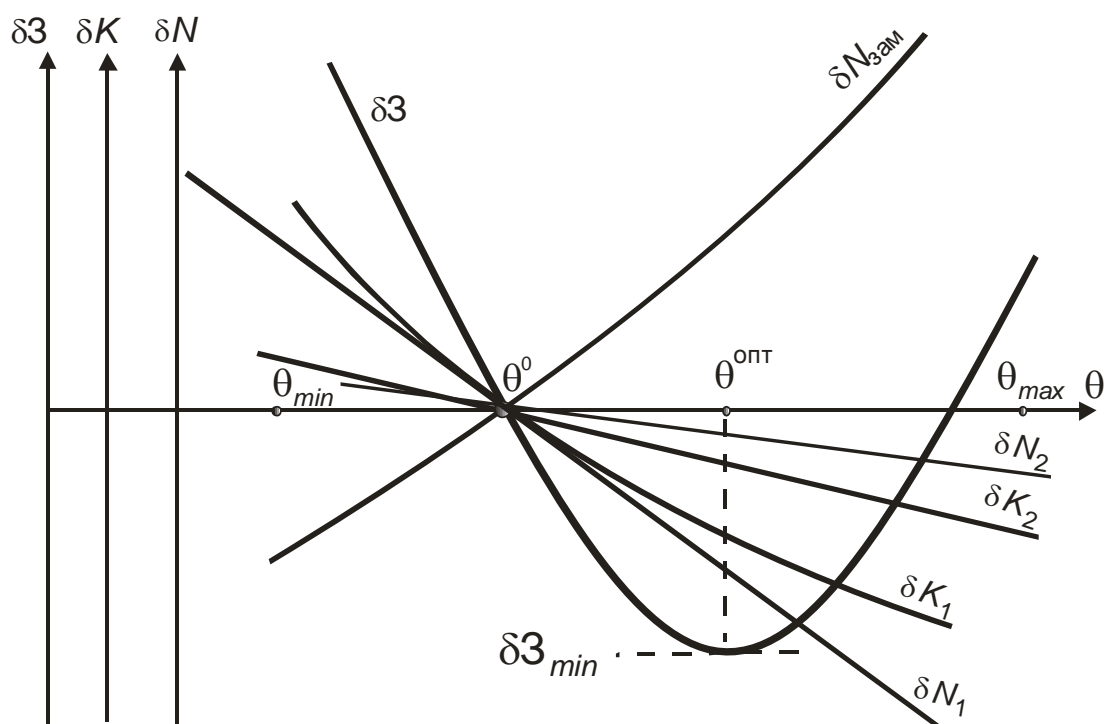


Рис. 5.12. Принципиальный характер изменения функции δZ и ее составляющих от недогрева

3. Математическое описание задачи

Термодинамические параметры воды и водяного пара, не зависящие от недогрева θ_j :

– энтальпии пара в отборах:

$$h_j = f(P_j, t_j); \quad (5.27)$$

$$h_{j+1} = f(P_{j+1}, t_{j+1}); \quad (5.28)$$

– параметры насыщения в подогревателях Π_j и Π_{j+1} :

$$t_{sj} = f(P_j); \quad (5.29)$$

$$h'_j = f(P_j); \quad (5.30)$$

$$t_{s(j+1)} = f(P_{j+1}), \quad (5.31)$$

$$h'_{j+1} = f(P_{j+1}); \quad (5.32)$$

– параметры воды за подогревателем Π_{j+1} :

$$t_{B(j+1)} = t_{s(j+1)} - \theta_{j+1}; \quad (5.33)$$

$$h_{B(j+1)} = f(P_{B(j+1)}, t_{B(j+1)}), \quad (5.34)$$

где недогрев θ_{j+1} принимаем постоянным;

– энтальпия воды на входе в рассматриваемую группу подогревателей

$$h_{BX} = f(P_B, t_{BX}). \quad (5.35)$$

Параметры воды за Π_j

$$t_{Bj} = t_{sj} - \theta_j; \quad (5.36)$$

$$h_{wj} = f(P_w, t_{wj}). \quad (5.37)$$

Тепловая нагрузка подогревателей, кВт:

$$Q_j = G_B \cdot (h_{Bj} - h_{BX}); \quad (5.38)$$

$$Q_{j+1} = G_B \cdot (h_{B(j+1)} - h_{Bj}). \quad (5.39)$$

Расходы пара, кг/с:

$$D_j = Q_j / (h_j - h'_j) / 0,98; \quad (5.40)$$

$$D_{j+1} = Q_{j+1} / (h_{j+1} - h'_{j+1}) / 0,98. \quad (5.41)$$

Среднелогарифмические температурные напоры:

$$\Delta t_j = \frac{t_{Bj} - t_{BX}}{\ln \frac{t_{sj} - t_{BX}}{t_{sj} - t_{Bj}}}; \quad (5.42)$$

$$\Delta t_{j+1} = \frac{t_{B(j+1)} - t_{Bj}}{\ln \frac{t_{s(j+1)} - t_{Bj}}{t_{s(j+1)} - t_{B(j+1)}}}. \quad (5.43)$$

Средние значения температуры воды в подогревателях:

$$t_{mj} = t_{sj} - \Delta t_j; \quad (5.44)$$

$$t_{m(j+1)} = t_{s(j+1)} - \Delta t_{j+1}. \quad (5.45)$$

Площади поверхности подогревателей, м^2 :

$$F_j = Q_j \cdot 1000 / (k_j \cdot \Delta t_j); \quad (5.46)$$

$$F_{j+1} = Q_{j+1} \cdot 1000 / (k_{j+1} \cdot \Delta t_{j+1}), \quad (5.47)$$

где k_j, k_{j+1} – коэффициенты теплопередачи теплообменников, $\text{Вт}/\text{м}^2$.

Коэффициент теплопередачи для теплообменной поверхности с относительно небольшой толщиной стенки трубок и коэффициентах теплоотдачи по греющей и нагреваемой сторонам одного порядка можно определить по выражению

$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}, \quad (5.48)$$

где α_1, α_2 – коэффициенты теплоотдачи со стороны конденсирующегося пара и воды соответственно;

δ, λ – толщина и теплопроводность стенки.

Значения величин α_1 и α_2 находятся в соответствии с характером теплообмена по известным из курса теплопередачи зависимостям. При моделировании задачи значения α_1 и α_2 можно определить с помощью функций и процедур из модулей **PWDmod.tpu** или **PNDmod.tpu** (приложение 2).

Удельная работа насоса

$$L_{\text{уд}} = \frac{G_{\text{в}} \cdot V_{\text{в}} \cdot (\Delta P_j^0 + \Delta P_{j+1}^0) \cdot 10^3}{F_j^0 + F_{j+1}^0}, \text{ кВт}/\text{м}^2, \quad (5.49)$$

где $V_{\text{в}}$ – удельный объем воды, $\text{м}^3/\text{кг}$;

ΔP_j^0 и ΔP_{j+1}^0 – гидравлические сопротивления P_j и P_{j+1} для «базового» варианта, МПа.

Изменение тепла, вносимого в j -й подогреватель в связи с изменением недогрева в нем,

$$\delta Q = G_{\text{в}} \cdot (h_{\text{в}j} - h_{\text{в}j}^0) \text{ кВт}. \quad (5.50)$$

Изменение мощности турбины

$$\delta N_1 = (e_{j+1} - e_j) \cdot \delta Q, \text{ кВт}, \quad (5.51)$$

где e_j и e_{j+1} – коэффициенты изменения мощности (КИМ) j -го и $(j+1)$ -го отборов. Методика определения КИМ приведена в [16].

Суммарное изменение мощности турбоустановки

$$\delta N_{\text{уст}} = \delta N_1 + \delta N_2,$$

где δN_2 – изменение мощности насоса (см. выше).

Изменение замещающей мощности

$$\delta N = -\delta N_{\text{уст.}}$$

Выражения для других составляющих целевой функции были представлены раньше. Целевая функция вычисляется по выражению (5.21).

4. Алгоритм расчета оптимального недогрева

Рекомендуемая *последовательность расчета оптимального недогрева* θ_j :

1) находят диапазон изменения недогрева в рассматриваемом подогревателе

$$\theta_{\min} = 0,01;$$

$$\theta_{\max} = (t_{sj} - t_{\text{вх}}) - 0,01;$$

2) задаются значениями θ_j в пределах допустимого диапазона и для них определяются:

а) тепловые нагрузки рассматриваемого и вышестоящего подогревателей Q_j и Q_{j+1} ;

б) расходы пара на подогреватели D_j и D_{j+1} ;

в) среднелогарифмические температурные напоры Δt_j и Δt_{j+1} ;

г) площади поверхности теплообменников F_j и F_{j+1} ;

3) один из вариантов $(\theta_j^0, F_j^0, F_{j+1}^0, t_{\text{вж}}^0)$ принимается за *базовый*, и для него определяется удельная работа насоса $L_{\text{уд}}$;

4) для всех других вариантов $(\theta_j, F_j, F_{j+1}, t_{\text{вж}})$ по сравнению с «базовым» рассчитываются:

а) изменение площади поверхности подогревателя Π_j

$$\delta F_j = F_j - F_j^0; \quad (5.52)$$

б) изменение площади поверхности подогревателя Π_{j+1}

$$\delta F_{j+1} = F_{j+1} - F_{j+1}^0; \quad (5.53)$$

в) суммарное изменение площади поверхности

$$\delta F = \delta F_j + \delta F_{j+1}; \quad (5.54)$$

г) изменение капиталовложений в подогреватели δK_1 ;

д) изменение мощности насосной установки δN_2 ;

е) изменение капвложений в насосную установку δK_2 ;

ж) изменение тепла δQ , вносимого в j -й подогреватель в связи с изменением недогрева в нем;

з) изменение мощности турбины δN_1 ;

- и) суммарное изменение мощности турбоустановки $\delta N_{уст}$;
- к) изменение приведенных расчетных затрат δZ .
- 5) сравниваются между собой полученные значения δZ и выбирается вариант (θ_j^{opt}), для которого величина δZ – минимальная.

5. Информационное обеспечение математической модели

Оптимизационные расчеты следует проводить при разных значениях стоимости электроэнергии c и удельных капвложениях в подогреватель $k_{уд}$. Диапазон изменения недогрева – от небольшой величины $0,01^\circ\text{C}$ до θ_{max} (см. выше). Исходные данные для тестового расчета приведены в табл. 5.2. Для примера рассматриваются последовательно включенные по питательной воде подогреватели высокого давления П6 и П7 турбоустановки К-210-130.

Таблица 5.2

Исходные данные для тестового расчета оптимального недогрева

№	Название	Значение	Размерность
1	Тип турбоустановки	К-210-130	
2	Подогреватель, для которого оптимизируется недогрев	ПВД-6	
3	Давление пара в отборе турбины на ПВД-6	$P_6=2,48$	МПа
4	Температура пара в отборе на ПВД-6	$t_6=340$	$^\circ\text{C}$
5	Давление пара в отборе на ПВД-7	$P_7=3,65$	МПа
6	Температура пара на ПВД-7	$t_6=390$	$^\circ\text{C}$
7	Расход воды через подогреватели	$G_B=176$	кг/с
8	Давление воды в подогревателях	$P_B=24$	МПа
9	Температура воды на входе в ПВД-6	$t_{вх}=183$	$^\circ\text{C}$
10	Недогрев воды в ПВД-7	$\theta_7=3$	$^\circ\text{C}$
11	Гидравлическое сопротивление ПВД-6 в базовом варианте	$\Delta P_6^0=0,047$	МПа
12	Гидравлическое сопротивление ПВД-7 в «базовом» варианте	$\Delta P_7^0=0,051$	МПа
13	Типоразмер ПВД6	ПВ-775-265-31	
14	Типоразмер ПВД7	ПВ-775-265-45	
15	Наружный диаметр спиральных трубок	$d_1=0,032$	м
16	Толщина стенки трубок	$\delta=0,004$	м
17	Число плоскостей навивки одной трубы	$m=2$	–
18	Длина труб одной спирали	$l=26,69$	м
19	Средний радиус спирали	$R=0,15$	м

Окончание табл. 5.2

№	Название	Значение	Размерность
20	Скорость воды	$w = (1,6 \div 2,0)$	м/с
21	Число часов использования установленной мощности	$h_y = 5000$	ч
22	Коэффициент изменения мощности отбора на ПВД-7	$e_7 = 0,390$	–
23	Коэффициент изменения мощности отбора на ПВД-6	$e_6 = 0,358$	–
24	Теплопроводность стали	$\lambda = 50$	Вт/(м·К)
25	Удельные капвложения в поверхность (ориентировочно)	$k_{уд1} = (60 \div 90)$	р./м ²
26	Удельные капвложения в питательный насос (ориентировочно)	$k_{уд2} = (70 \div 80)$	р./кВт
27	Стоимость электроэнергии (ориентировочно)	$c = 0,32$	р./кВтч

Температуру дренажа на выходе из ПВД-6 и ПВД-7 можно принять равной температуре насыщения при давлениях пара в соответствующих отборах.

6. Моделирование оптимизационной задачи

Общая схема моделирования оптимизационной задачи представлена на рис. 5.13. Оптимизационная модель состоит из трех основных блоков, вложенных один в другой. Подробные алгоритмы, описывающие работу этих блоков, приведены на рис. 5.14–5.16 на примере выбора оптимального недогрева θ_6 регенеративного подогревателя под номером 6 турбоустановки К-210-130. Подогреватель П6 рассматривается совместно с вышестоящим П7.

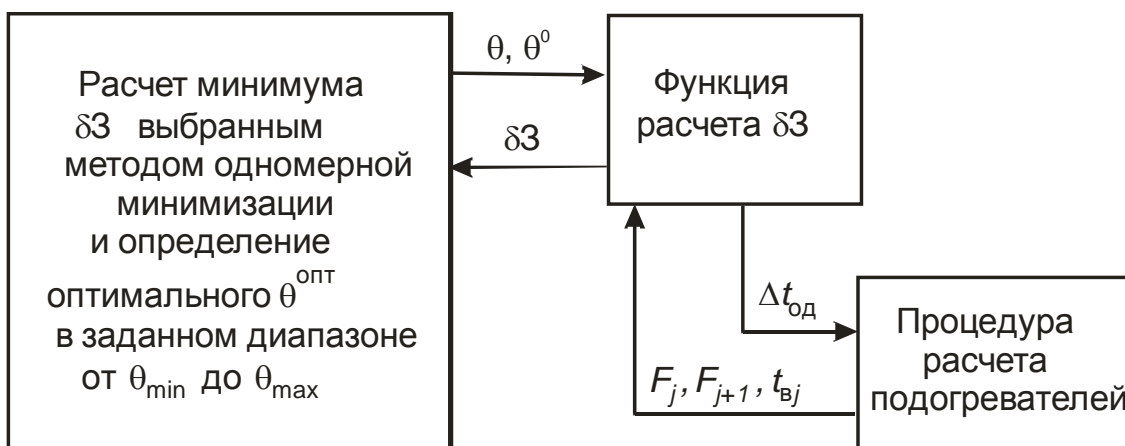


Рис. 5.13. Общая схема моделирования оптимизации недогрева

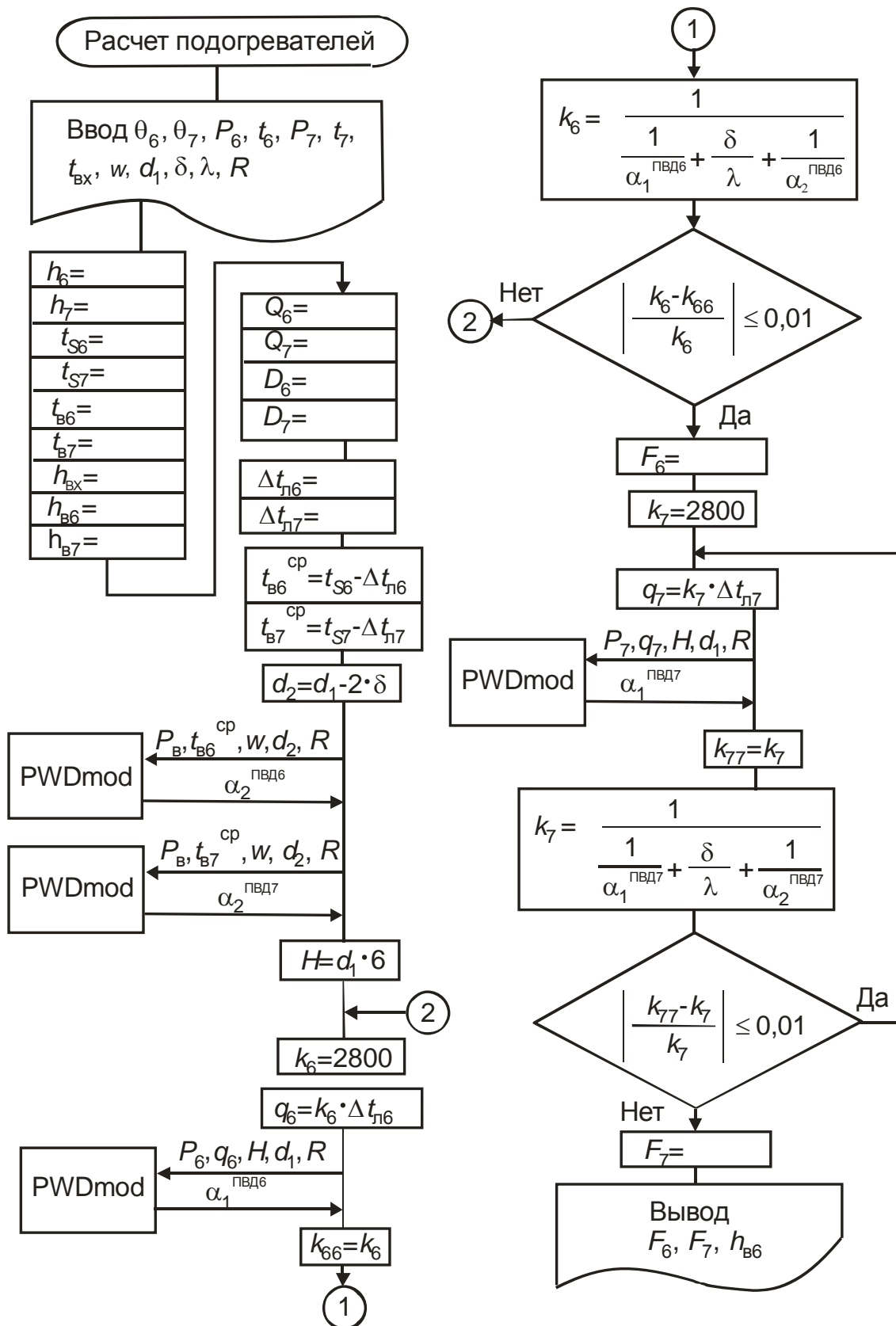


Рис. 5.14. Алгоритм теплового расчета подогревателей

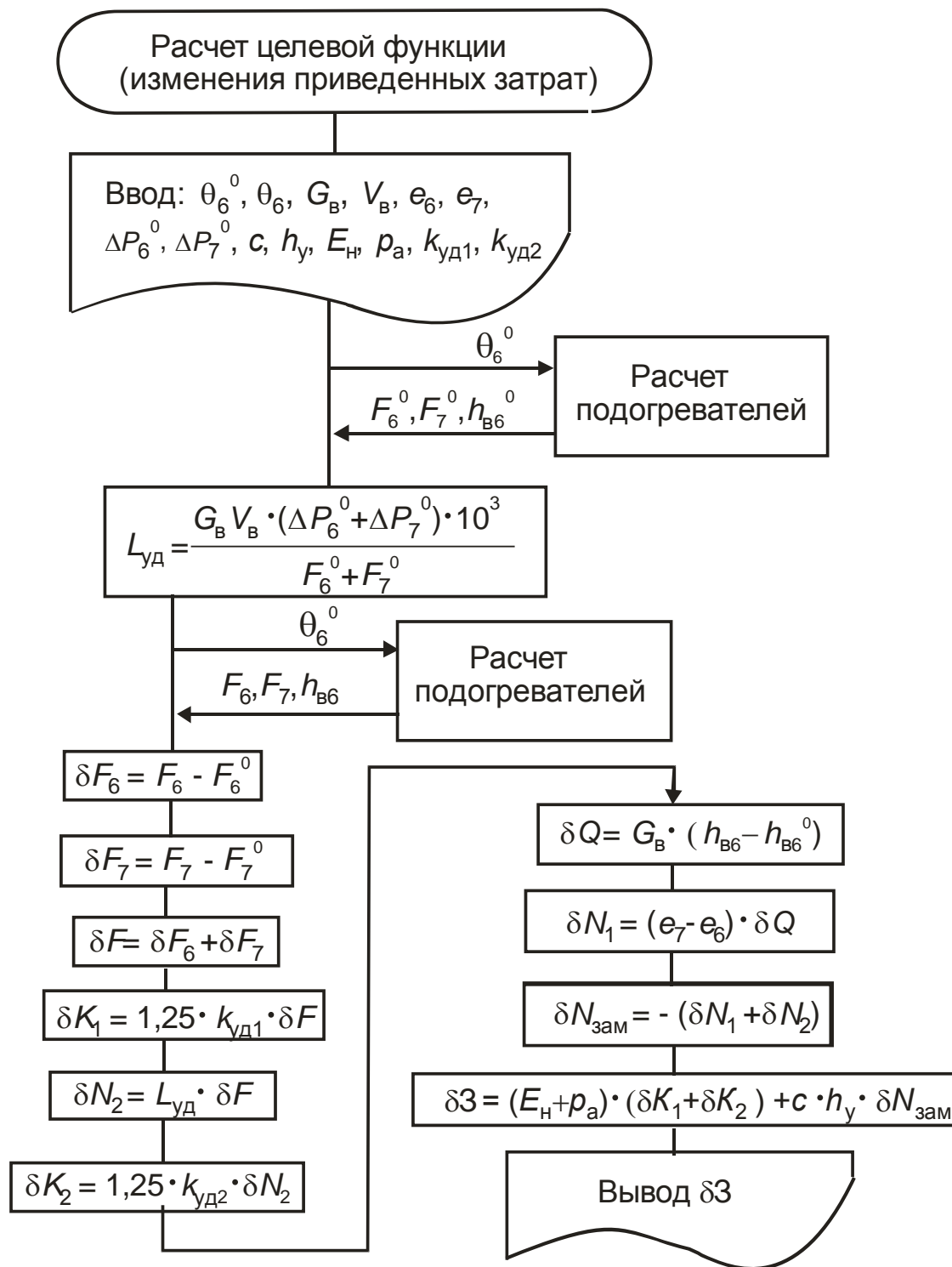


Рис. 5.15. Алгоритм расчета изменения приведенных затрат (оптимизация недогрева)

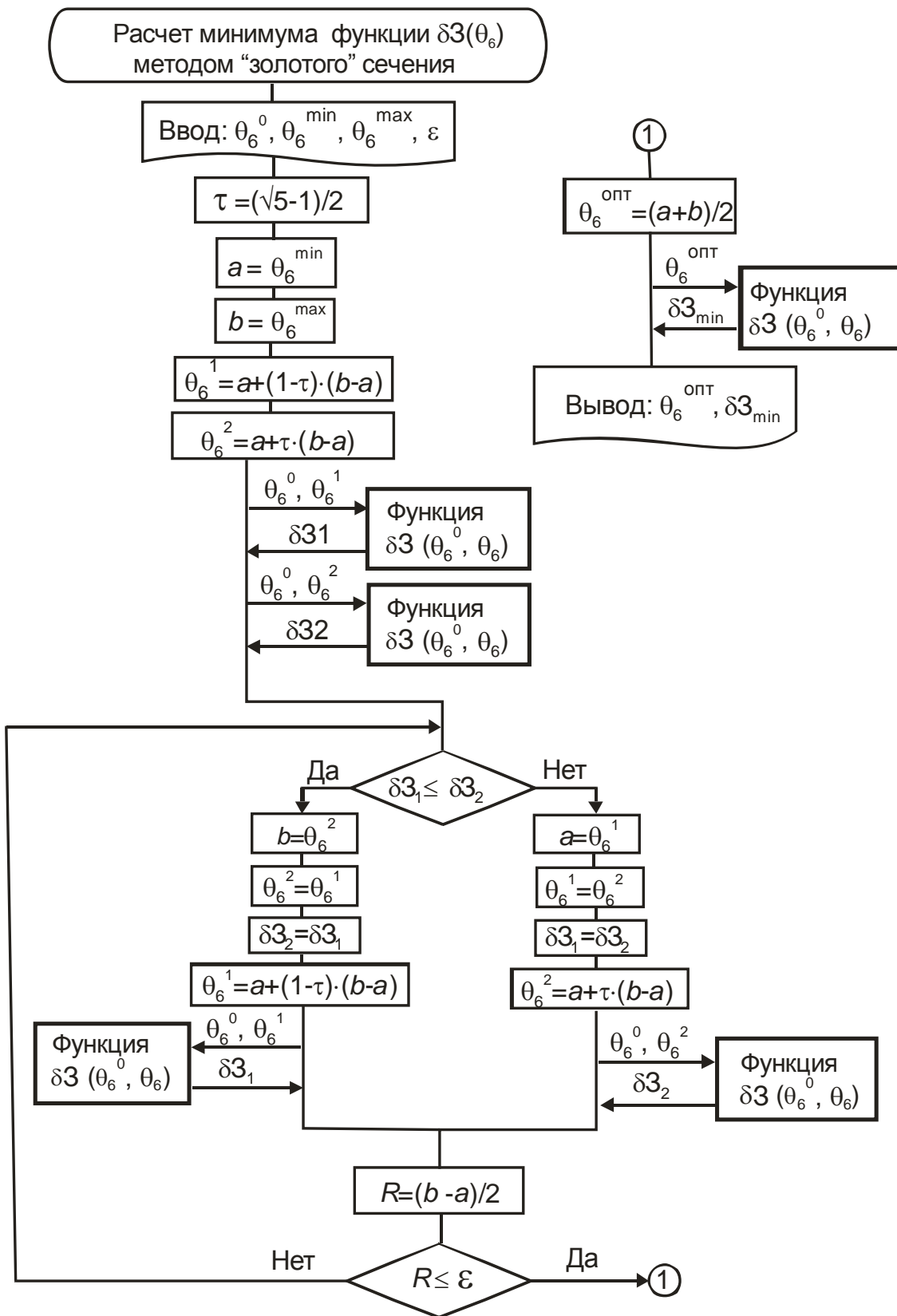


Рис. 5.16. Алгоритм поиска минимума целевой функции методом «золотого» сечения (оптимизация недогрева)

Математическое моделирование выполняется на основе последовательного решения следующих задач:

1) расчет параметров подогревателей, влияющих на расчет целевой функции (площадей поверхности теплообменников F_6 и F_7 , а также температуры воды $t_{в6}$) в зависимости от заданного недогрева θ_6 . Блок-схему расчета подогревателей см. на рис. 5.14;

2) расчет целевой функции (изменения приведенных расчетных затрат) при любом значении недогрева θ_6 по сравнению с «базовым» вариантом. Блок-схему определения целевой функции см. на рис. 5.15;

3) использование метода одномерной минимизации для расчета оптимального значения недогрева. Алгоритм метода «золотого» сечения см. на рис. 5.16.

5.3.2. Выбор оптимального температурного напора охладителя дренажа

1. Постановка задачи

Рассчитываем оптимальный температурный напор ОД подогревателя под номером j (рис. 5.17):

$$\Delta t_{\text{ОД } j} = t_{\text{др } j} - t_{\text{в}(j-1)}. \quad (5.55)$$

Const: $P_j, P_{j-1}, t_{\text{в}j}, t_{\text{в}(j-1)}$

$$\Delta t_{\text{ОД } j} = t_{\text{др } j} - t_{\text{в}(j-1)}$$

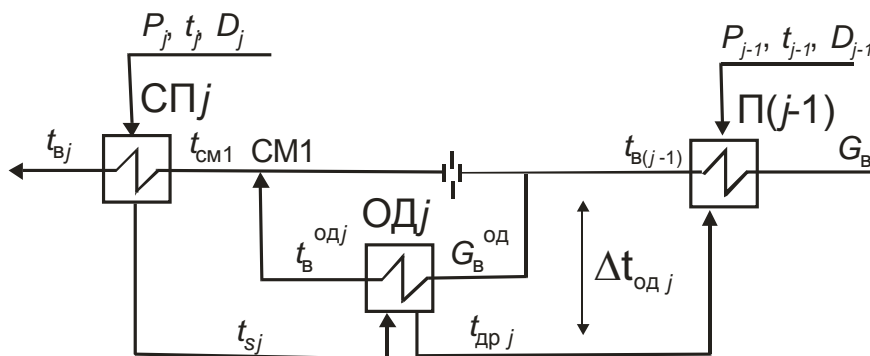


Рис. 5.17

Для решения данной задачи подогреватель Π_j необходимо рассматривать в тепловой схеме совместно с нижестоящим $\Pi_{(j-1)}$, в который отводится дренаж греющего пара из теплообменника Π_j .

Решение задачи будем искать на основании того, что *вариация* $\Delta t_{\text{ОД } j}$ осуществляется изменением поверхностей нагрева СП $_j$ и ОД $_j$ (см. рис. 5.8) при неизменном положении точек отбора на Π_j и $\Pi_{(j-1)}$ и заданных параметрах воды на входе и выходе из j -го подогревателя:

$$t_{вj} = \text{const};$$

$$t_{в(j-1)} = \text{const}.$$

Согласно методике технико-экономической оптимизации при малых изменениях в тепловой схеме за *целевую функцию* принимаем изменение приведенных расчетных затрат δZ по сравнению с произвольным («базовым») вариантом (5.21).

Оптимизационная задача относится к *одномерным*.

Ограничения: минимальное значение температурного напора соответствует минимальному значению температуры дренажа $t_{дрj}$, которая не может быть ниже температуры воды на входе $t_{в(j-1)}$:

$$\Delta t_{ОД}^{\min} \approx 0,01; \quad (5.56)$$

максимальное значение $\Delta t_{ОДj}$ соответствует температуре дренажа, равной температуре насыщения греющего пара $t_{sj} = f(P_j)$:

$$\Delta t_{ОД}^{\max} = t_{sj} - t_{в(j-1)} - 0,01. \quad (5.57)$$

2. Качественное описание задачи

Как было отмечено выше, изменение $\Delta t_{ОДj}$ в одном из подогревателей регенеративной схемы неоднозначно влияет на составляющие расчетных затрат в турбоустановку. С уменьшением температурного напора ОД_j снижается температура дренажа $t_{дрj}$, отводимого в нижестоящий $(j - 1)$ -й подогреватель и увеличивается регенеративная выработка электроэнергии турбоустановкой при неизменном расходе топлива, однако при этом увеличиваются капиталовложения в регенеративную установку из-за увеличения поверхности теплообмена в j -й подогреватель. Рост температурного напора, наоборот, снижает выработку электроэнергии, но позволяет сэкономить на капитальных затратах.

Таким образом, при сопоставлении вариантов с разными $\Delta t_{ОДj}$ должны быть учтены:

- 1) капитальные затраты в регенеративные подогреватели и в насосы в связи с увеличением поверхности нагрева;
- 2) дополнительные затраты на возмещение недоотпуска электроэнергии от турбоустановки при повышенных значениях температурного напора.

Принципиальный характер поведения составляющих целевой функции при изменении оптимизируемого параметра представлен на рис. 5.18. Целевая функция вычисляется по выражению (5.21). Графически изменения основных компонент целевой функции представлены на рис. 5.19.

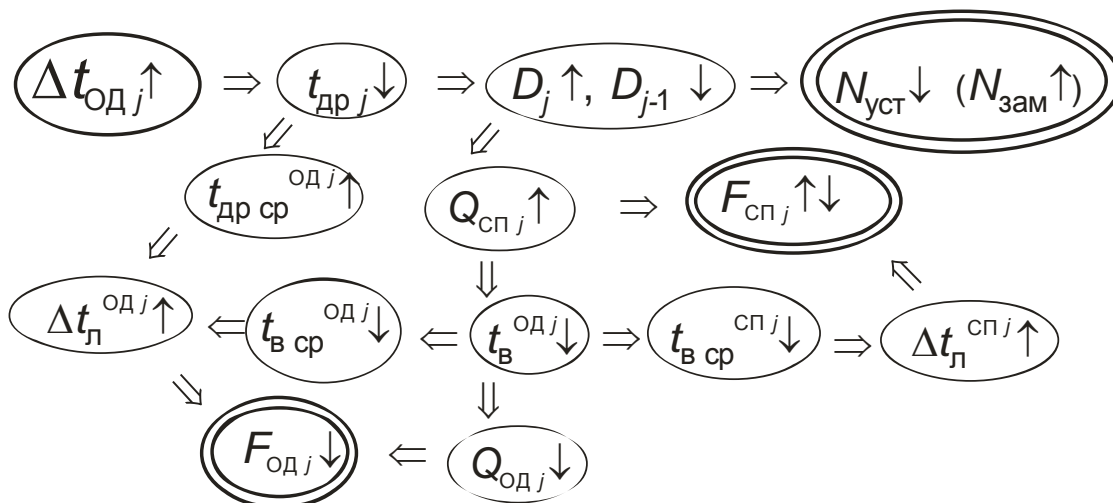


Рис. 5.18

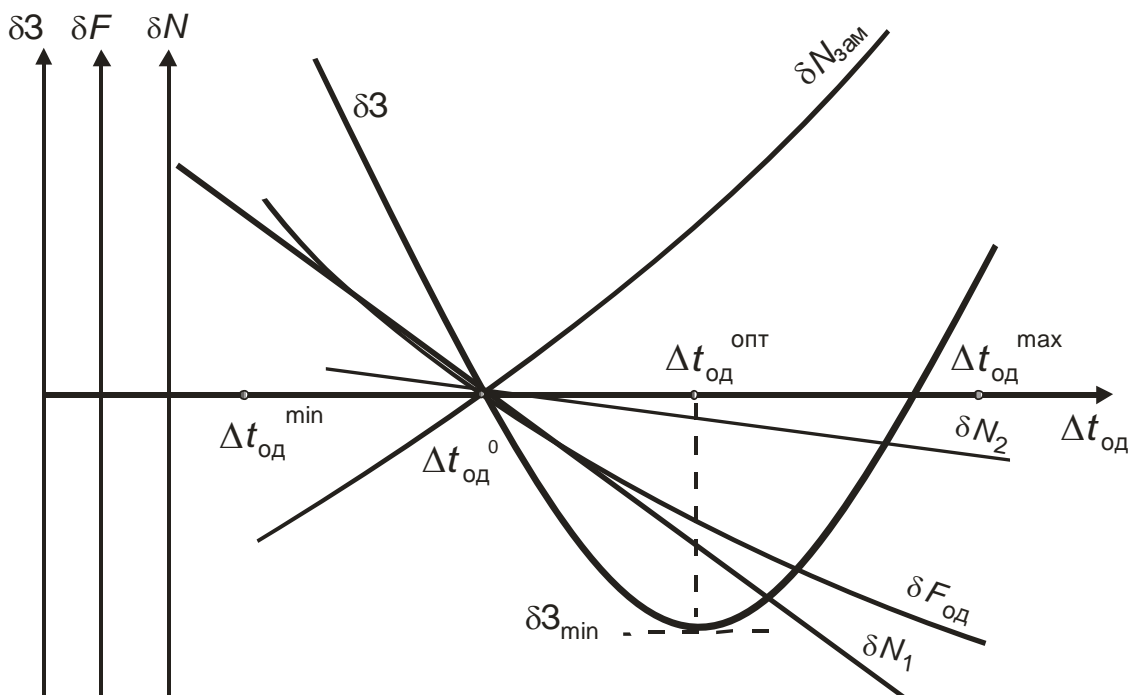


Рис. 5.19

3. Математическое описание задачи

Термодинамические параметры воды и водяного пара, не зависящие от температурного напора $\Delta t_{одj}$:

– энтальпия пара в j -м отборе

$$h_j = f(P_j, t_j);$$

– параметры насыщения в j -м подогревателе:

$$t_{sj} = f(P_j);$$

$$h'_j = f(P_j);$$

– параметры воды за подогревателями Π_j и $\Pi_{(j-1)}$:

$$h_{vj} = f(P_v, t_{vj});$$

$$h_{v(j-1)} = f(P_v, t_{v(j-1)}).$$

Температура и энтальпия дренажа на выходе из Π_j

$$t_{дрj} = t_{v(j-1)} + \Delta t_{ОДj}; \quad (5.58)$$

$$h_{дрj} = f(P_j, t_{дрj}). \quad (5.59)$$

Тепловой баланс (СП $_j$ + ОД $_j$)

$$D_j \cdot (h_j - h_{дрj}) \cdot 0,98 = G_v \cdot (h_{vj} - h_{v(j-1)}). \quad (5.60)$$

Тепловой баланс СП $_j$ по пару

$$Q_{СПj} = D_j \cdot (h_j - h'_j) \cdot 0,98. \quad (5.61)$$

Тепловой баланс СП $_j$ по воде

$$Q_{СПj} = G_v \cdot (h_{vj} - h_{см1}). \quad (5.62)$$

Тепловой баланс ОД $_j$ по пару

$$Q_{ОДj} = D_j \cdot (h'_j - h_{дрj}) \cdot 0,98. \quad (5.63)$$

Тепловой баланс ОД $_j$ по воде

$$Q_{ОДj} = G_v^{ОД} \cdot (h_{vj}^{ОД} - h_{v(j-1)}), \quad (5.64)$$

где $G_v^{ОД}$ – расход воды через зону ОД; можно принять

$$G_v^{ОД} = (0,10 \div 0,15) \cdot G_v; \quad (5.65)$$

$h_{vj}^{ОД}$ – энтальпия воды на выходе из зоны ОД $_j$ (перед точкой смешения СМ1 – см. рис. 5.8).

Температура нагреваемой воды за поверхностью ОД $_j$

$$t_{vj}^{ОД} = f(P_v, h_{vj}^{ОД}). \quad (5.66)$$

Температура нагреваемой воды после точки смешения СМ1

$$t_{см1} = f(P_v, h_{см1}). \quad (5.67)$$

Площадь поверхности теплообмена СП $_j$

$$F_{СПj} = Q_{СПj} / (k_{СПj} \cdot \Delta t_{СПj}). \quad (5.68)$$

Среднелогарифмический температурный напор СП $_j$

$$\Delta t_{л}^{СПj} = \frac{t_{vj} - t_{см1}}{\ln \frac{t_{sj} - t_{см1}}{t_{sj} - t_{vj}}}. \quad (5.69)$$

Средняя температура воды в СП $_j$

$$t_{всп}^{СПj} = t_{sj} - \Delta t_{СПj}. \quad (5.70)$$

Коэффициент теплопередачи зоны СП_j

$$K_{СПj} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1^{СПj}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2^{СПj}}}, \quad (5.71)$$

где $\alpha_1^{СПj}$ и $\alpha_2^{СПj}$ – коэффициенты теплоотдачи в зоне СП_j со стороны конденсирующегося пара и воды соответственно, их можно определить с помощью функций и процедур из модулей **PWDmod.tpu** или **PNDmod.tpu** (приложение 2).

Площадь поверхности теплообмена ОД_j

$$F_{ОДj} = Q_{ОДj} / (k_{ОДj} \cdot \Delta t_{ОДj}). \quad (5.72)$$

Среднелогарифмический температурный напор ОД_j

$$\Delta t_{л}^{ОДj} = \frac{(t_{sj} - t_{vj}^{ОД}) - (t_{дрj} - t_{в(j-1)})}{\ln \frac{t_{sj} - t_{vj}^{ОД}}{t_{дрj} - t_{в(j-1)}}} \cdot \Psi, \quad (5.73)$$

где Ψ – коэффициент, учитывающий отличие схемы движения теплоносителей от противоточной, в оптимизационных расчетах можно принять $\Psi = 1$.

Средняя температура дренажа в ОД_j

$$t_{др\text{ ср}}^{ОД} = (t_{sj} + t_{дрj}) / 2. \quad (5.74)$$

Средняя температура воды в ОД_j

$$t_{в\text{ ср}}^{ОД} = (t_{в(j-1)} + t_{vj}^{ОД}) / 2. \quad (5.75)$$

Коэффициент теплопередачи поверхности ОД_j

$$K_{ОДj} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1^{ОДj}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2^{ОДj}}}, \quad (5.76)$$

где $\alpha_1^{ОДj}$ и $\alpha_2^{ОДj}$ – коэффициенты теплоотдачи в зоне ОД_j со стороны дренажа и воды, их можно определить с помощью функций и процедур из модулей **PWDmod.tpu** или **PNDmod.tpu** (приложение 2).

Удельная работа насоса

$$L_{уд} = \frac{G_v \cdot V_v \cdot (\Delta P_{СПj}^0 + \Delta P_{ОДj}^0) \cdot 10^3}{F_{СПj}^0 + F_{ОДj}^0}, \text{ кВт/м}^2, \quad (5.77)$$

где V_v – удельный объем воды, м³/кг;

$\Delta P_{СПj}^0$ и $\Delta P_{ОДj}^0$ – гидравлические сопротивления СП_j и ОД_j для «базового» варианта.

Изменение тепла, вносимого в $(j - 1)$ -й подогреватель с дренажом вышестоящего,

$$\delta Q = D_j \cdot h_{дрj} - D_j^0 \cdot h_{дрj}^0, \text{ кВт} \quad (5.78)$$

Изменение мощности турбины

$$\delta N_1 = (e_j - e_{j-1}) \cdot \delta Q, \text{ кВт}, \quad (5.79)$$

где e_j и e_{j-1} – коэффициенты изменения мощности j -го и $(j - 1)$ -го отборов.

Изменение мощности насоса δN_2 определять по выражению (5.26), изменение мощности турбоустановки $\delta N_{уст}$ – по (5.23), изменение замещающей мощности δN – по (5.22).

Расчет целевой функции δZ выполнять по зависимости (5.21).

4. Алгоритм расчета оптимального значения $\Delta t_{поj}$

Рекомендуемая *последовательность расчета оптимального температурного напора $\Delta t_{ОДj}$ методом перебора:*

1) находят границы изменения температурного напора в рассматриваемом подогревателе по выражениям (5.56) и (5.57) соответственно;

2) принимается ряд значений $\Delta t_{ОДj}$ и для них рассчитываются:

а) температура дренажа $t_{дрj}$;

б) расход пара на рассматриваемый подогреватель D_j ;

в) тепловые нагрузки выделенных поверхностей СП_j и ОД_j, $Q_{СПj}$ и $Q_{ОДj}$;

г) температура воды за ОД_j $t_{вj}^{ОД}$ и после точки смешения $t_{см1}$ на входе в зону СП_j;

д) среднелогарифмические температурные напоры СП_j и ОД_j, $\Delta t_{СПj}$ и $\Delta t_{ОДj}$ соответственно;

е) площади поверхностей зон теплообмена $F_{СПj}$ и $F_{ОДj}$;

3) один из вариантов $(\Delta t_{ОДj}^0, F_{СПj}^0, F_{ОДj}^0, t_{дрj}^0)$ принимается за «базовый», и для него определяется удельная работа насоса $L_{уд}$;

4) для всех других вариантов $(\Delta t_{ОДj}, F_{СПj}, F_{ОДj}, t_{дрj})$, по сравнению с «базовым» вариантом, рассчитываются:

а) изменение площади поверхности зоны СП_j

$$\delta F_{СПj} = F_{СПj} - F_{СПj}^0; \quad (5.80)$$

б) изменение площади поверхности зоны ОД_j

$$\delta F_{\text{ОД}j} = F_{\text{ОД}j} - F_{\text{ОД}j}^0; \quad (5.81)$$

в) суммарное изменение площади поверхности

$$\delta F = \delta F_{\text{СП}j} + \delta F_{\text{ОД}j}; \quad (5.82)$$

г) изменение капиталовложений в подогреватели δK_1 ;

д) изменение мощности насосной установки δN_2 ;

е) изменение капвложений в насосную установку δK_2 ;

ж) изменение тепла δQ , вносимого в $(j - 1)$ -й подогреватель с дренажом из вышестоящего;

з) изменение мощности турбины δN_2 ;

и) суммарное изменение мощности турбоустановки

$$\delta N_{\text{уст}} = \delta N_1 + \delta N_2;$$

к) изменение замещающей мощности $\delta N = -\delta N_{\text{уст}}$;

л) изменение приведенных расчетных затрат δZ .

5) сравниваются между собой полученные значения δZ и выбирается вариант $(\Delta t_{\text{ОД}j}^{\text{опт}})$, для которого величина δZ – минимальная.

5. Моделирование оптимизационной задачи

Общая схема расчета оптимального значения $\Delta t_{\text{ОД}j}$ представлена на рис. 5.20. Оптимизационная модель состоит из трех основных блоков, вложенных один в другой. Математическое моделирование выполняется на основе последовательного решения следующих задач:

1) расчет параметров подогревателя, *влияющих на расчет целевой функции* (площадей поверхностей СП_j и ОД_j, $F_{\text{СП}j}$ и $F_{\text{ОД}j}$ соответственно, а также температуры дренажа $t_{\text{др}j}$) в зависимости от заданного температурного напора $\Delta t_{\text{ОД}j}$;

2) расчет целевой функции (изменения приведенных расчетных затрат) при любом значении недогрева $\Delta t_{\text{ОД}j}$ по сравнению с «базовым» вариантом;

3) использование метода одномерной минимизации для расчета оптимального значения $\Delta t_{\text{ОД}j}^{\text{опт}}$.

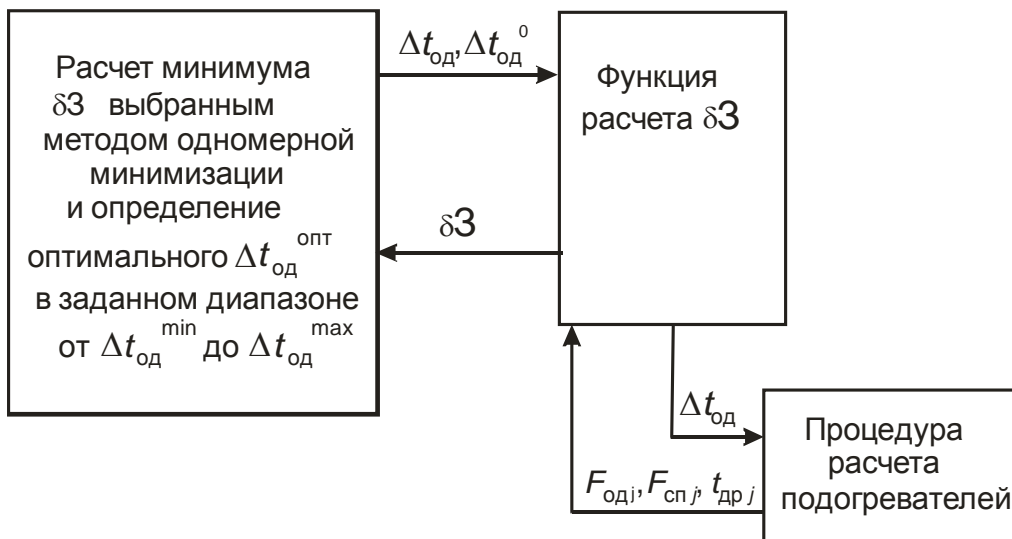


Рис. 5.20. Общая схема моделирования оптимизации Δt_{ODj}

5.3.3. Выбор оптимального остаточного перегрева пара в пароохладителе

1. Постановка задачи

Рассчитываем оптимальный температурный напор

$$\Delta t_{ПОj} = t_j^* - t_{sj} \quad (5.83)$$

пароохладителя подогревателя под номером j (см. рис. 5.21). Для решения данной задачи подогреватель $П_j$ необходимо рассматривать в тепловой схеме совместно с вышестоящим $П_{(j+1)}$. Решение задачи будем искать на основании того, что *вариация* $\Delta t_{ПОj}$ осуществляется изменением поверхностей нагрева пароохладителя $ПО_j$ и вышестоящего подогревателя $П_{(j+1)}$ (имеющего только зону конденсации пара при неизменном положении точек отбора на теплообменники $П_j$ и $П_{(j+1)}$ и заданных параметров воды на входе в $ПО_j$ и выходе из $П_{(j+1)}$):

$$t_{Bj}^{CP} = \text{const};$$

$$t_{B(j+1)} = \text{const}.$$

Согласно методике технико-экономической оптимизации при малых изменениях в тепловой схеме за *целевую функцию* принимаем изменение приведенных расчетных затрат δZ по сравнению с произвольным («базовым») вариантом (см. выражение 5.21).

Оптимизационная задача относится к *одномерным*.

Ограничения: минимальное значение $\Delta t_{ПОj}$ соответствует температуре пара на выходе из пароохладителя, равной температуре насыще-

ния при давлении в подогревателе $t_j^* \approx t_{sj}$ и может быть принято близким нулю:

$$\Delta t_{\text{ПО}}^{\min} = 0,01; \quad (5.84)$$

максимальное значение $\Delta t_{\text{ПО}j}$ соответствует условию $t_j^* \approx t_j$:

$$\Delta t_{\text{ПО}}^{\max} = (t_j - t_{sj}) - 0,01. \quad (5.85)$$

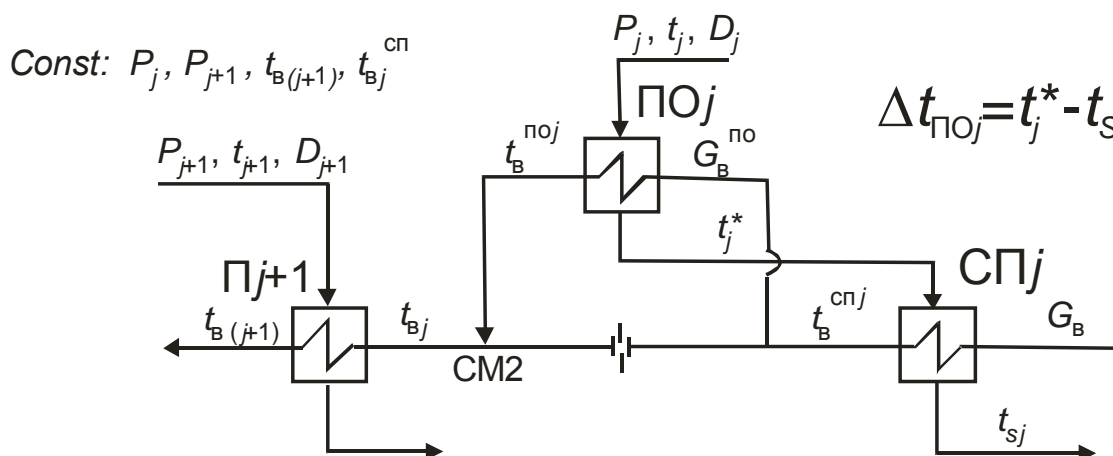


Рис. 5.21

2. Качественное описание задачи

Изменение $\Delta t_{\text{ПО}j}$ в одном из подогревателей регенеративной схемы неоднозначно влияет на составляющие расчетных затрат в турбоустановку. С уменьшением остаточного перегрева пара в ПО повышается температура воды на выходе из рассматриваемого подогревателя, что вызывает увеличение расхода пара D_j на этот теплообменник и сокращение расхода D_{j+1} на вышестоящий. При этом увеличивается работа, совершаемая в турбине паром j -й ступени при неизменном расходе топлива. Однако снижение $\Delta t_{\text{ПО}j}$ требует увеличения поверхности теплообмена зоны $\text{ПО}j$ и соответствующего роста капиталовложений. Повышение температурного напора, наоборот, снижает выработку электроэнергии, но позволяет снизить капитальные затраты.

Таким образом, при сопоставлении вариантов с разными $\Delta t_{\text{ПО}j}$ должны быть учтены:

- 1) *капитальные затраты* в регенеративные подогреватели и в насосы в связи с увеличением поверхности нагрева;
- 2) дополнительные затраты на возмещение недоотпуска электроэнергии от турбоустановки при повышенных значениях остаточного перегрева.

Принципиальный характер поведения составляющих целевой функции при изменении оптимизируемого параметра представлен на рис. 5.22. Целевая функция вычисляется по выражению (5.21). Графически изменения основных компонент целевой функции представлены на рис. 5.23.

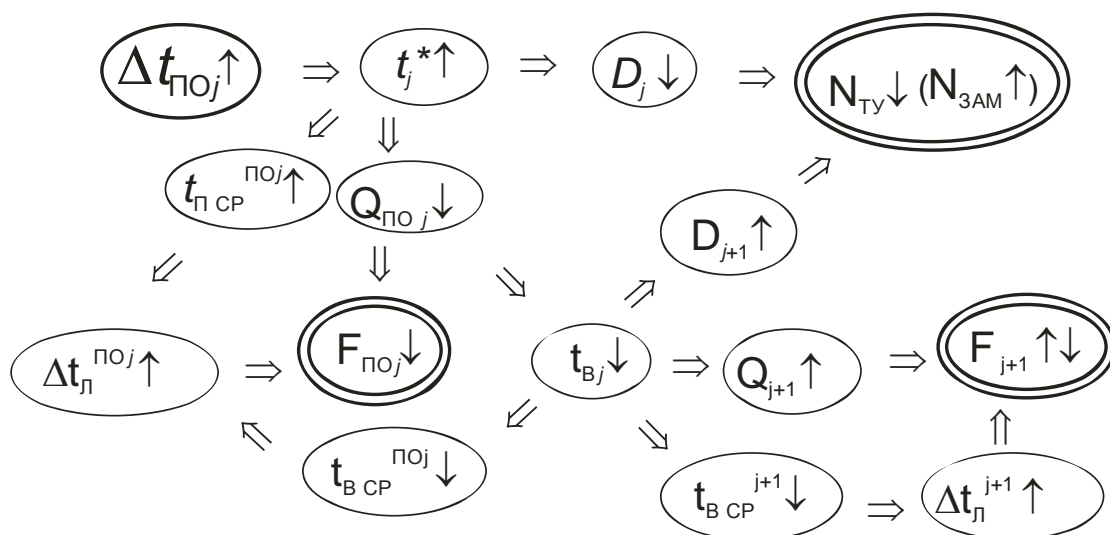


Рис. 5.22

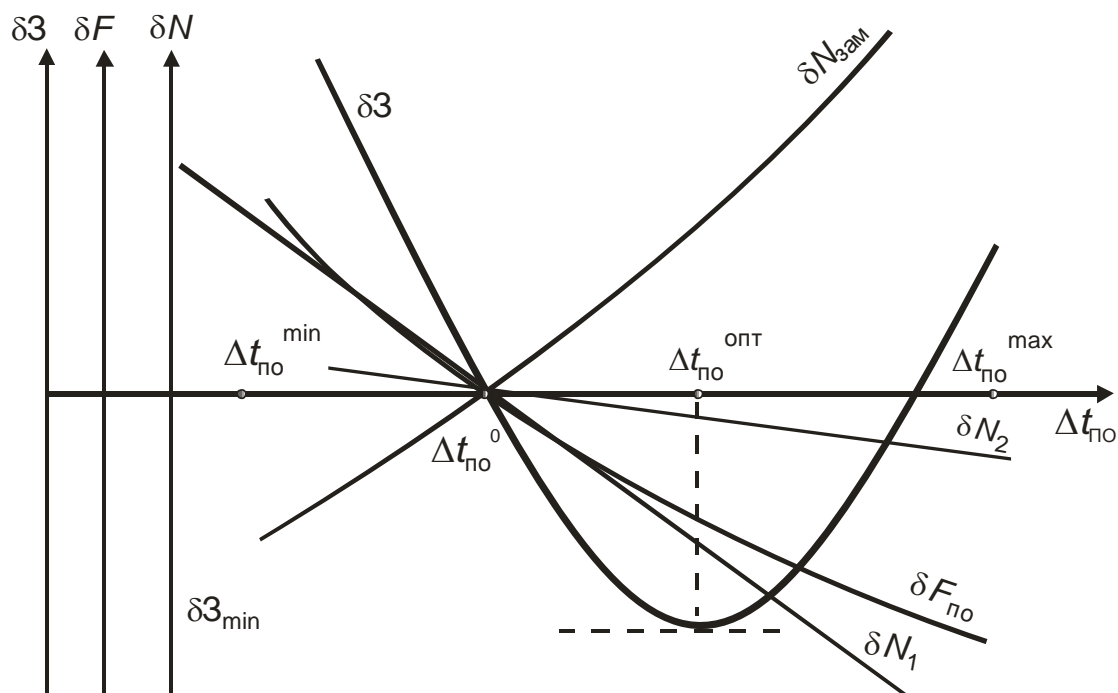


Рис. 5.23. Принципиальный характер изменения функции $\delta 3$

3. Математическое описание

Термодинамические параметры воды и водяного пара, не зависящие от температурного напора $\Delta t_{\text{ПО } j}$:

– энтальпия пара в j -м отборе

$$h_j = f(P_j, t_j);$$

– параметры насыщения в j -м подогревателе:

$$t_{sj} = f(P_j),$$

$$h'_j = f(P_j);$$

– параметры насыщения в $(j + 1)$ -м подогревателе:

$$t_{s(j+1)} = f(P_{j+1}),$$

$$h'_{j+1} = f(P_{j+1});$$

– параметры воды за зоной СП $_j$:

$$t_{\text{Bj}}^{\text{СП}} = t_{sj} - \theta_{\text{СП}j}, \quad (5.86)$$

$$h_{\text{Bj}}^{\text{СП}} = f(P_{\text{B}}, t_{\text{Bj}}^{\text{СП}}), \quad (5.87)$$

где $\theta_{\text{СП}j}$ – недогрев воды до температуры насыщения в зоне СП $_j$;

– параметры воды за подогревателем П $_{(j+1)}$:

$$t_{\text{B}(j+1)} = t_{s(j+1)} - \theta_{j+1}, \quad (5.88)$$

$$h_{\text{B}(j+1)} = f(P_{\text{B}}, t_{\text{B}(j+1)}); \quad (5.89)$$

где θ_{j+1} – недогрев воды до температуры насыщения в подогревателе П $_{(j+1)}$;

– температура воды в рассматриваемой группе теплообменников

$$h_{\text{BX}} = f(P_{\text{B}}, t_{\text{BX}}).$$

Параметры пара за ПО $_j$:

$$t_j^* = t_{sj} + \Delta t_{\text{ПО } j}; \quad (5.90)$$

$$h_j^* = f(P_j, t_j^*). \quad (5.91)$$

Тепловой баланс СП $_j$

$$D_j \cdot (h_j^* - h'_j) \cdot 0,98 = G_{\text{B}} \cdot (h_{\text{Bj}}^{\text{СП}} - h_{\text{BX}}). \quad (5.92)$$

Тепловой баланс ПО $_j$ по пару

$$Q_{\text{ПО}j} = D_j \cdot (h_j - h_j^*) \cdot 0,98. \quad (5.93)$$

Тепловой баланс ПО $_j$ по воде

$$Q_{\text{ПО}j} = G_{\text{B}}^{\text{ПО}} \cdot (h_{\text{Bj}}^{\text{ПО}} - h_{\text{Bj}}^{\text{СП}}), \quad (5.94)$$

где

$$G_{\text{B}}^{\text{ПО}} = (0,07 \div 0,15) \cdot D_j. \quad (5.95)$$

Тепловой баланс точки смешения

$$G_B^{ПО} \cdot h_{Bj}^{ПО} + (G_B - G_B^{ПО}) \cdot h_{Bj}^{СП} = G_B \cdot h_{CM2}. \quad (5.96)$$

Тепловая нагрузка $\Pi_{(j+1)}$

$$Q_{j+1} = G_B \cdot (h_{B(j+1)} - h_{CM2}). \quad (5.97)$$

Значения температуры за поверхностью $ПО_j$ и после точки смешения можно определить:

$$t_{Bj}^{ПО} = f(P_B, h_{Bj}^{ПО}); \quad (5.98)$$

$$t_{CM2} = f(P_B, h_{CM2}). \quad (5.99)$$

Площадь поверхности теплообмена $ПО_j$

$$F_{ПОj} = Q_{ПОj} / (k_{ПОj} \cdot \Delta t_{ПОj}). \quad (5.100)$$

Среднелогарифмический температурный напор $ПО_j$

$$\Delta t_{ПОj} = \frac{(t_j^* - t_{Bj}^{ПО}) - (t_j - t_{Bj}^{ПО})}{\ln \frac{t_j^* - t_{Bj}^{СП}}{t_j - t_{Bj}^{ПО}}} \cdot \Psi, \quad (5.101)$$

где коэффициент Ψ , учитывающий отличие схемы движения теплоносителей от противоточной, можно принять за 1.

Средняя температура пара в $ПО_j$

$$t_{m1}^{ПО} = (t_j + t_j^*) / 2. \quad (5.102)$$

Средняя температура воды в $ПО_j$

$$t_{m2}^{ПО} = (t_{Bj}^{СП} + t_{Bj}^{ПО}) / 2. \quad (5.103)$$

Коэффициент теплопередачи $ПО_j$

$$k_{ПОj} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1^{ПОj}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2^{ПОj}}}, \quad (5.104)$$

где $\alpha_1^{ПОj}$ и $\alpha_2^{ПОj}$ – коэффициенты теплоотдачи в зоне ПО со стороны пара и воды, их можно определить с помощью функций и процедур из модулей **PWDmod.tpu** или **PNDmod.tpu** (приложение 2).

Площадь поверхности теплообмена $\Pi_{(j+1)}$

$$F_{j+1} = Q_{j+1} / (k_{j+1} \cdot \Delta t_{j+1}). \quad (5.105)$$

Среднелогарифмический температурный напор $\Pi_{(j+1)}$

$$\Delta t_{j+1} = \frac{t_{B(j+1)} - t_{CM2}}{\ln \frac{t_{s(j+1)} - t_{CM2}}{t_{s(j+1)} - t_{B(j+1)}}}. \quad (5.106)$$

Средняя температура воды в $\Pi_{(j+1)}$

$$t_{m(j+1)} = t_{s(j+1)} - \Delta t_{j+1}. \quad (5.107)$$

Коэффициент теплопередачи $\Pi_{(j+1)}$

$$k_{j+1} = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_{1(j+1)}} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{2(j+1)}}}, \quad (5.108)$$

где $\alpha_{1(j+1)}$ и $\alpha_{2(j+1)}$ – коэффициенты теплоотдачи со стороны греющего пара и нагреваемой воды соответственно в подогревателе $\Pi_{(j+1)}$, их можно определить с помощью функций и процедур из модулей **PWDmod.tpu** или **PNDmod.tpu** (приложение 2).

Удельная работа насоса

$$L_{уд} = \frac{G_B \cdot V_B \cdot (\Delta P_{\Pi O j}^0 + \Delta P_{j+1}^0) \cdot 10^3}{F_{\Pi O j}^0 + F_{j+1}^0}, \text{ кВт/м}^2, \quad (5.109)$$

где V_B – удельный объем воды, м³/кг;

$\Delta P_{\Pi O j}^0$ и ΔP_{j+1}^0 – гидравлические сопротивления поверхностей ΠO_j и $\Pi_{(j+1)}$ для базового варианта.

Изменение тепла, вносимого в j -й подогреватель в связи с изменением остаточного перегрева пара по сравнению с «базовым» вариантом,

$$\delta Q = G_B \cdot (h_{Bj}^{\Pi O} - h_{Bj}^{\Pi O(0)}), \text{ кВт}. \quad (5.110)$$

Изменение мощности турбины

$$\delta N_1 = (e_{j+1} - e_j) \cdot \delta Q, \text{ кВт}, \quad (5.111)$$

где e_j и e_{j+1} – коэффициенты изменения мощности (КИМ) j -го и $(j+1)$ -го отборов. Методика определения КИМ приведена в [16].

Изменение мощности насоса δN_2 можно определить по выражению (5.26), изменение мощности турбоустановки $\delta N_{уст}$ – по (5.23), изменение замещающей мощности δN – по (5.22). Расчет целевой функции δZ выполнять по зависимости (5.21).

4. Алгоритм расчета оптимального значения $\Delta t_{\Pi O j}$

Рекомендуемая последовательность расчета оптимального значения $\Delta t_{\Pi O j}$ методом перебора:

1) находят границы изменения остаточного перегрева по выражениям (5.84) и (5.85);

2) принимается ряд значений $\Delta t_{\Pi O j}$ и для них рассчитываются:

а) температура пара за ΠO_j t_j^* ;

б) расход пара на рассматриваемый подогреватель D_j ;

в) тепловые нагрузки пароохладителя j -й ступени и вышестоящего $(j+1)$ -го подогревателя $Q_{\Pi O j}$ и Q_{j+1} ;

г) температура воды за ПО_j $t_{wj}^{\text{ПО}}$ и после точки смешения $t_{\text{СМ2}}$ на входе в $\Pi_{(j+1)}$;

д) площадь поверхности ПО_j в последовательности:

– среднелогарифмический температурный напор ПО_j $\Delta t_{\text{ПО}j}$;

– средняя температура пара в ПО_j $t_{m1}^{\text{ПО}}$;

– средняя температура воды в ПО_j $t_{m2}^{\text{ПО}}$;

– коэффициенты теплоотдачи по пару и по воде в зоне ПО $\alpha_1^{\text{ПО}j}$ и $\alpha_2^{\text{ПО}j}$ соответственно;

– коэффициент теплопередачи $k_{\text{ПО}j}$;

– $F_{\text{ПО}j}$;

е) площадь поверхности $\Pi_{(j+1)}$ в последовательности:

– среднелогарифмический температурный напор Δt_{j+1} ;

– средняя температура воды в подогревателе $t_{m(j+1)}$;

– коэффициенты теплоотдачи от конденсирующегося пара $\alpha_{1(j+1)}$ и от стенки к воде $\alpha_{2(j+1)}$;

– коэффициент теплопередачи k_{j+1} ;

– F_{j+1} .

3) один из вариантов ($\Delta t_{\text{ПО}j}^0, F_{\text{ПО}j}^0, F_{j+1}^0, h_{\text{СМ2}}^0$) принимается за «базовый», и для него определяется удельная работа насоса $L_{\text{уд}}$;

4) для всех других вариантов ($\Delta t_{\text{ПО}j}, F_{\text{ПО}j}, F_{j+1}, h_{\text{СМ2}}$), по сравнению с базовым вариантом, рассчитываются:

а) изменение площади поверхности зоны ПО_j

$$\delta F_{\text{ПО}j} = F_{\text{ПО}j} - F_{\text{ПО}j}^0; \quad (5.112)$$

б) изменение площади поверхности подогревателя $\Pi_{(j+1)}$

$$\delta F_{j+1} = F_{j+1} - F_{j+1}^0; \quad (5.113)$$

в) суммарное изменение площади поверхности подогревателей

$$\delta F = \delta F_{\text{ПО}j} + \delta F_{j+1};$$

г) изменение капиталовложений в подогреватели δK_1 ;

д) изменение мощности насосной установки δN_2 ;

е) изменение капвложений в насосную установку δK_2 ;

ж) изменение тепла δQ , вносимого в подогреватель j -й ступени;

з) изменение мощности турбины δN_1 ;

и) изменение мощности турбоустановки $\delta N_{\text{уст}}$;

- к) изменение замещающей мощности δN ;
 - и) изменение приведенных расчетных затрат δZ .
- 5) сравниваются между собой полученные значения δZ и выбирается вариант ($\Delta t_{\text{ПО}j}^{\text{опт}}$), для которого величина δZ – минимальная.

5.4. Выбор оптимальной скорости воды в пучке труб поверхностного теплообменника

1. Постановка задачи

Для поверхностного регенеративного подогревателя питательной воды известной конструкции найти оптимальную скорость воды ω в пучке труб, выбрав в качестве критерия эффективности изменение приведенных расчетных затрат δZ в турбоустановку по сравнению с «базовым» вариантом.

2. Качественное описание задачи

С одной стороны, скорость воды ω влияет на теплоотдачу со стороны нагреваемой среды α_2 и, следовательно, на коэффициент теплопередачи k и площадь теплообменной поверхности F . Площадь поверхности, в свою очередь, определяет капиталовложения в подогреватель. С увеличением скорости интенсивность теплообмена со стороны нагреваемой среды растет, уменьшается площадь теплообмена и соответственно снижаются капиталовложения в подогреватель.

С другой стороны, от скорости воды зависит гидравлическое сопротивление пучка труб теплообменной поверхности ΔP_v и, следовательно, затраты мощности N на прокачивание воды насосом, что отражается на эксплуатационных издержках U турбоустановки. С увеличением скорости издержки U растут.

Оптимальная скорость воды может быть выбрана из технико-экономических расчетов. В качестве критерия эффективности рекомендуется принять экономию приведенных расчетных затрат относительно «базового» варианта. При этом входные и выходные параметры теплоносителей (расход воды G_v , температура воды на входе t_{v1} и выходе t_{v2}) считаются заданными и не меняются при изменении скорости воды.

Оптимизацию рекомендуется проводить при постоянном диаметре трубок, варьируя площадь поверхности за счет изменения их длины.

Выбор «базового» варианта произволен, например, за «базовый» можно принять вариант при минимальном значении скорости воды из допустимого диапазона скоростей.

3. Математическое описание

Изменение приведенных расчетных затрат по сравнению с *базовым* вариантом

$$\delta Z = (E_n + P_a) \cdot \delta K + \delta U,$$

где δK – изменение капитальных затрат в турбоустановку в связи с изменением скорости воды в теплообменнике;

δU – изменение эксплуатационных издержек в турбоустановку.

С достаточной точностью изменение капзатрат в турбоустановку можно принять равным сумме

$$\delta K = \delta K_1 + \delta K_2,$$

где δK_1 – изменение капиталовложений в поверхность нагрева подогревателя;

δK_2 – изменение капиталовложений в насосную установку.

Изменение капвложений в поверхность нагрева подогревателя по сравнению с *базовым* вариантом

$$\delta K_{\Pi} = 1,25 \cdot k_{\text{уд}}^{\Pi} \cdot \delta F,$$

где $\delta F = F^1 - F^0$ – изменение поверхности нагрева при изменении скорости воды в трубках;

$k_{\text{уд}}^{\Pi}$ – удельные капиталовложения в 1 м² поверхности, р./м²; может быть оценена в соответствии с данными приложения 2 [2].

Изменение капиталовложений в насосную установку

$$\delta K_{\text{Н}} = 1,25 \cdot k_{\text{уд}}^{\text{Н}} \cdot \delta N_{\text{Н}},$$

где $k_{\text{уд}}^{\text{Н}}$ – удельная стоимость насосной установки, р./кВт; может быть оценена в соответствии с данными приложения 7 [2].

Тепловая нагрузка подогревателя

$$Q = G_{\text{в}} \cdot c_p \cdot (t_{\text{в2}} - t_{\text{в1}}).$$

Площади теплообменной поверхности подогревателя в текущем (F^1) и базовом (F^0) вариантах рассчитываются из уравнения теплопередачи

$$Q = K \cdot F \cdot \Delta t_{\text{срл}}.$$

Коэффициент теплопередачи через чистую поверхность для тонкостенных труб

$$K = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_{\text{ст}}}{\lambda_{\text{ст}}} + \frac{1}{\alpha_2}}.$$

При этом коэффициенты теплоотдачи α_1 и α_2 можно определить с помощью функций и процедур из модулей **PWDmod.tpu** или **PNDmod.tpu** (п.4).

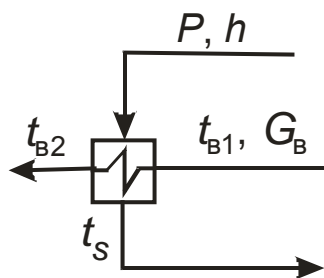


Рис. 5.24

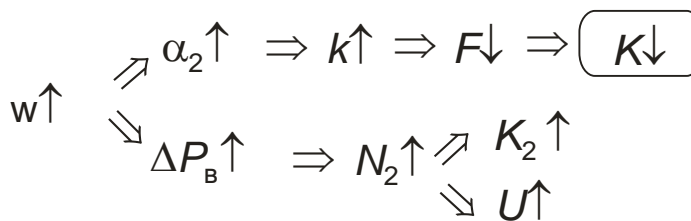


Рис. 5.25

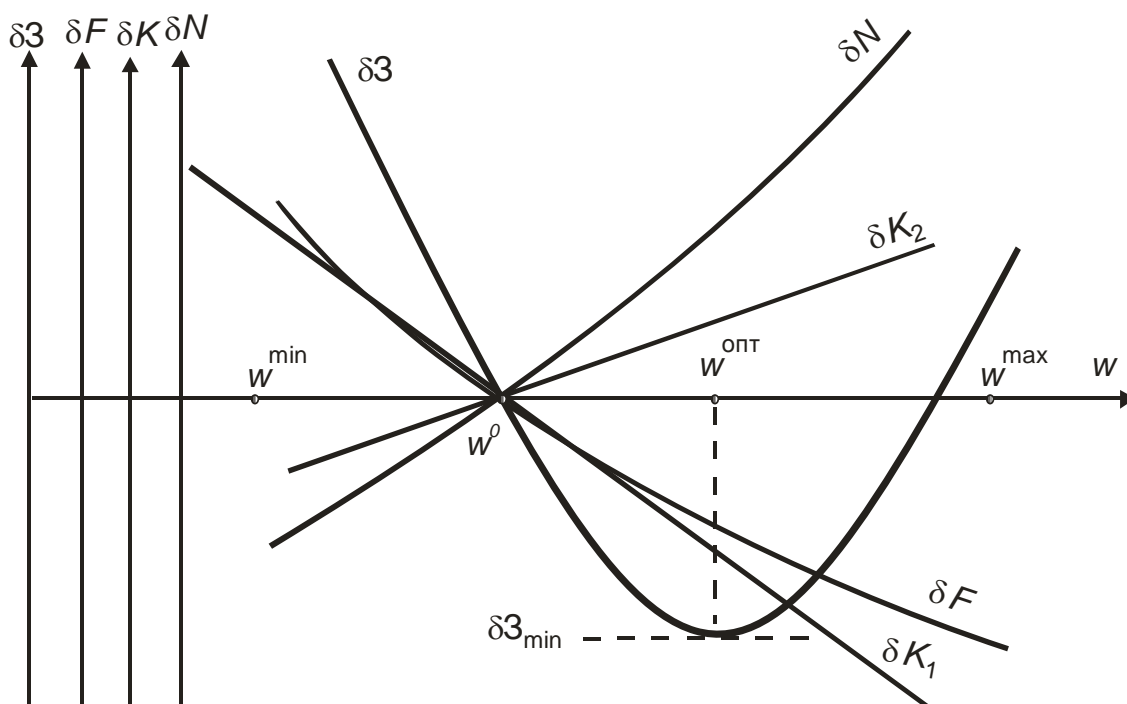


Рис. 5.26. Качественная зависимость изменения приведенных расчетных затрат от скорости воды в пучке труб

В «ручных» расчетах принять

$$\alpha_1 = 9000 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К};$$

$$\alpha_2 = \left(1630 + 21 \cdot t - 0,041 \cdot t^2\right) \cdot \frac{w^{0,8}}{d_{\text{BH}}^{0,2}}, \quad t = (t_{\text{B1}} + t_{\text{B2}}) / 2.$$

Среднелогарифмический температурный напор

$$\Delta t_{\text{срл}} = \frac{t_{\text{B2}} - t_{\text{B1}}}{\ln \frac{t_s - t_{\text{B1}}}{t_s - t_{\text{B2}}}}.$$

Изменение эксплуатационных издержек на турбоустановку в первом приближении можно считать равным изменению издержек на насос, прокачивающий жидкость через теплообменник:

$$\delta N = \delta N_H \cdot c_\varepsilon \cdot h_y,$$

где $\delta N_H = N_H^1 - N_H^0$ – изменение мощности насоса в текущем варианте по сравнению с базовым.

Мощность насоса на прокачивание жидкости через подогреватель

$$N_H = G_B \Delta P_B / (\rho_B \cdot \eta_H), \text{ Вт},$$

где G_B – расход воды через подогреватель, кг/с;

ΔP_B – гидравлическое сопротивление подогревателя, Па;

ρ_B – средняя плотность воды в подогревателе, кг/м³;

η_H – КПД насоса (можно принять 0,75÷0,83).

Гидравлическое сопротивление подогревателя по воде

$$\Delta P_B = \left(\sum \xi_M + \xi_{тр} \cdot \frac{l}{d_{BH}} \right) \cdot \frac{\rho_B \cdot w^2}{2}, \text{ Па}.$$

При расчете гидравлического сопротивления необходимо учитывать не только изменение w по вариантам, но также изменение общей длины труб l теплообменной поверхности в связи с изменением количества труб одного хода n_I по воде при изменении ее скорости и неизменном расходе.

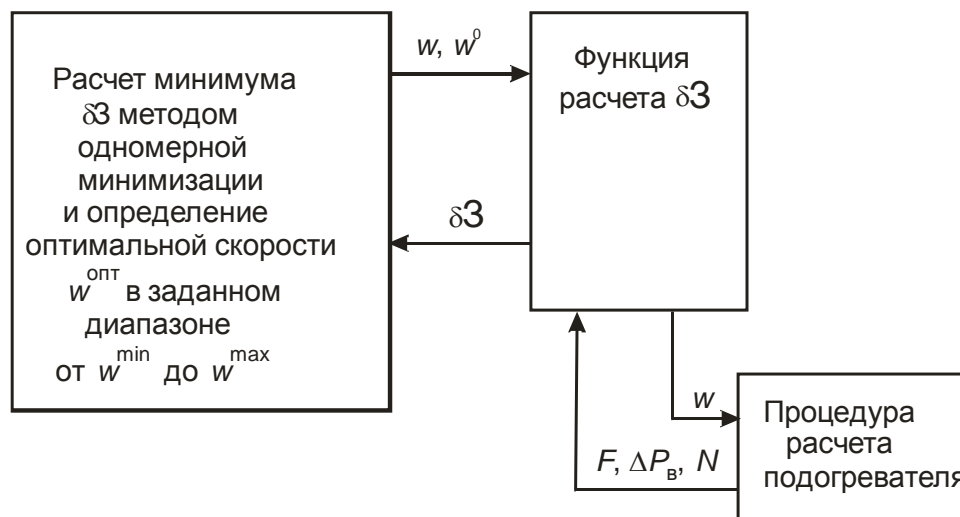


Рис. 5.27. Принципиальный алгоритм расчета оптимальной скорости

Значение n_I можно определить из уравнения неразрывности

$$G_B / \rho_B = \frac{\pi \cdot d_{BH}^2}{4} \cdot n_I \cdot w.$$

Общая длина труб

$$l = \frac{F}{\pi \cdot d_{\text{ср}} \cdot n_1}, \text{ м.}$$

Рекомендуемая последовательность расчета оптимальной скорости может быть следующей:

1) принимается ряд значений w из рекомендуемого диапазона скоростей и для них рассчитываются:

- а) коэффициент теплопередачи K ;
- б) площадь поверхности F ;
- в) количество трубок одного хода по воде n_1 ;
- г) общая длина трубок l ;
- д) гидравлическое сопротивление подогревателя по воде $\Delta P_{\text{в}}$;
- е) мощность насоса, прокачивающего жидкость через подогреватель $N_{\text{н}}$;

2) один из вариантов принимается за базовый ($w^0, F^0, \Delta P_{\text{в}}^0, N_{\text{н}}^0$) и по отношению к нему находятся для всех других вариантов:

- а) изменение поверхности нагрева подогревателя

$$\delta F = F - F^0, \text{ м}^2;$$

- б) изменение капзатрат в подогреватель $\delta K_{\text{п}}$;

- в) изменение мощности насосной установки $\delta N_{\text{н}} = N_{\text{н}}^1 - N_{\text{н}}^0$;

- г) изменение капзатрат в насосную установку $\delta K_{\text{н}}$;

- д) изменение эксплуатационных издержек δU ;

- е) изменение приведенных расчетных затрат δZ ;

3) выбирается вариант с минимальным значением δZ . Ему соответствует оптимальная скорость воды $w_{\text{опт}}$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Использование среды TURBO-PASKAL для моделирования

Моделирование объектов оптимизации и самой целевой функции требует у специалиста навыков программирования. Ниже приведены основные первоначальные сведения по использованию среды TURBO-PASKAL для моделирования оптимизационных задач.

Отладка программы расчета

1. *Компиляция программы.* Для компиляции используется клавиша **F9** либо соответствующая команда в верхней строке меню экрана. Успешное завершение этого процесса подтверждает появление на экране мигающего табло

Press any key!

2. *Запуск программы на счет.* Для отлаженной программы эта операция соответствует одновременному нажатию клавиш **Ctrl** и **F9**.

На период отладки удобно выполнять расчет по шагам. Некоторые основные операции «пошагового» расчета приведены ниже.

Пошаговый расчет

Клавиши	Результат выполнения команд
F8	Однократное нажатие этой клавиши приводит к выполнению одной строки основной программы (при этом выполняемая строка на экране выделяется). При последовательном нажатии клавиши выполняются строка за строкой (на экране выделенная строка перемещается сверху вниз)
Ctrl + F7 + + Enter	Выполнение этой операции позволяет вывести на экран значение той переменной, на которую указывает курсор (внизу окна с файлом программы появляется окно результатов расчета). Причем одновременное нажатие первых двух клавиш Ctrl и F7 выводит на экран табло с той переменной, значение которой интересует. При последующем нажатии клавиши Enter значение переменной появляется внизу экрана в окне результатов
F7	Нажатие этой клавиши позволяет войти внутрь другой программной единицы, вложенной в основную программу (процедуры, функции, модуля). Пошаговый расчет внутри процедуры (функции, модуля) выполняется последовательным нажатием клавиши F8
F4	Нажатием этой клавиши можно начать пошаговый счет с любого места программы, предварительно подведя курсор под желаемую строку
Ctrl + F2	Отмена «пошагового» счета

Ввод исходных данных и вывод результатов с использованием файлов

Обозначим исходный файл как **FI**, файл результатов – **FR**, а их имена – соответственно **IMFI** и **IMFR**.

Файлы и их имена должны быть описаны в разделе описаний программы, как переменные типа **text** и **string** соответственно.

Файл исходных данных надо *создать* в своей папке (!) и записать под каким-либо именем, например **'TEST.ish'**. Значения переменных в исходном файле набираются через пробел или запятую в том порядке, в котором предполагается их вводить в программу.

Выводу результатов в файл предшествует объявление имени файла результатов в программе. Назовем файл результатов **'TEST.rez'**.

После использования файлов **FI** и **FR** их надо закрыть оператором **Ciose**.

Фрагмент программы с использованием файлов исходных данных и результатов приведен ниже.

```
Program TEST; ; {Заголовок программы}
VAR FI, FR: text; {Описание файлов}
    IMFI, IMFR: string [20]; {Описание имен файлов}

...

BEGIN {*****Начало программы ***** }
    { Ввод исходных данных из файла FI }
    IMFI:='TEST.ish'; { Файловой переменной IMFI }
    { присвоено имя 'TEST.ish' }
    Assign(FI, IMFI); { Связывает имя файловой переменной FI }
    { в программе с именем внешнего файла }
    { на диске IMFI }

    Reset(FI); { Открывает файл FI для чтения }
    Read(FI, x1, x2, x3, ...); { Считывает в переменные x1, x2, x3, }
    { элементы файла FI }
    Ciose(FI); { Закрывает файл FI }
    Y1:=x1+x2+x3;

    { Организация файла результатов FR }
    IMFR:='TEST.rez'; { Файловой переменной IMFR присвоено }
    { имя 'TEST.rez' }
    Assign(FR, IMFR); { Связывает имя файловой переменной FR }
    { в программе с именем внешнего файла }
    { на диске IMFR }

    Rewrite (FR); { Открывает файл FR для записи }
    WRITELN(FR, 'Y1 = ', Y1:5:1 ); { Записывает значение }
    { переменной Y1 в файл FR }
    Ciose (FR); { Закрывает файл FR }

    { Вывод результатов в файл FR }
    WRITELN(FR, 'Y1 = ', Y1:5:1 );
    Readln; END. { Конец программы }
```

Описание функций и процедур в составе модуля

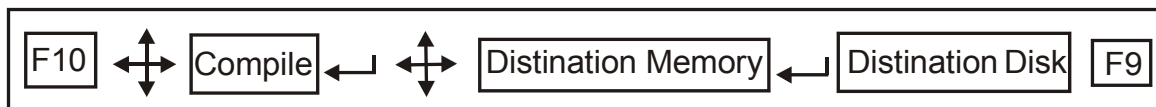
Модуль – самостоятельная программная единица. Она компилируется и записывается на диск в объектных кодах. К модулю можно обращаться из разных программ.

Внимание! Имена модуля и файла, содержащего модуль, должны совпадать.

Структура модуля (произвольного)

```
Unit < Имя модуля > { Заголовок модуля }
INTERFACE
    Uses TABL1;...
    Function F1(x1,x2:real):real;
    Proctedure PROC1(y1,y2:real; var
y3:real); ...
IMPLEMENTATION
    Function F1(x1,x2:real):real; Var ...
    Begin { Начало произвольной }
        { функции F1} ...
        F1:=...
    End; { Конец функции F1 }
    Procedure PROC1(y1,y2:real; var
y3:real); Var ...
    Begin { Начало произвольной }
        { процедуры PROC1} ...
    End; { Конец процедуры PROC1}
END. { Конец модуля }
```

Компиляция модуля на диск



Приложение 2

Набор программных модулей для расчета термического КПД ПТУ

№	Схема ПТУ	Название модуля	Обращение к функции из модуля
1	Цикл Ренкина насыщенного пара с одним регенеративным подогревателем	<i>KPDmod1</i>	<i>KPD1 (P0, P1, Pk, X0)</i>
	Цикл Ренкина насыщенного пара с одним регенеративным подогревателем	<i>KPDmod2</i>	<i>KPD2 (t0, P1, Pk, X0)</i>
3	Цикл Ренкина насыщенного пара с одним регенеративным подогревателем	<i>KPDmod3</i>	<i>KPD3 (P0, tpw, Pk, X0)</i>
4	Цикл Ренкина насыщенного пара с одним регенеративным подогревателем	<i>KPDmod4</i>	<i>KPD4 (t0, tpw, Pk, X0)</i>
5	Цикл Ренкина насыщенного пара с одним сепаратором	<i>KPDmod5</i>	<i>KPD5 (P0, Pc, Pk, X0, Xc)</i>
6	Цикл Ренкина насыщенного пара с одним сепаратором	<i>KPDmod6</i>	<i>KPD6 (t0, Pc, Pk, X0, Xc)</i>
7	Цикл Ренкина насыщенного пара с сепаратором и пароперегревателем	<i>KPDmod7</i>	<i>KPD7 (P0, Pc, Pk, X0, Xc)</i>
8	Цикл Ренкина насыщенного пара с сепаратором и пароперегревателем	<i>KPDmod8</i>	<i>KPD8 (t0, Pc, Pk, X0, Xc)</i>
9	Цикл Ренкина насыщенного пара с двумя сепараторами и двумя регенеративными отборами	<i>KPDmod11</i>	<i>KPD11 (P0, Pc1, Pk, X0, Xc1, Xc2)</i>
10	Цикл Ренкина насыщенного пара с двумя сепараторами	<i>KPDmod12</i>	<i>KPD12 (Pc1, Pc2, P0, Pk, X0, Xc1, Xc2)</i>
11	Цикл Ренкина перегретого пара с двукратным промперегревом	<i>KPDmod13</i>	<i>KPD13 (Pp1, Pp2, P0, Pk, t0, tp1, tp2)</i>
12	Цикл Ренкина перегретого пара с промперегревом и одноступенчатым регенеративным подогревом	<i>KPDmod14</i>	<i>KPD14 (Ppp, P1, P0, Pk, t0, tpp)</i>
13	Цикл Ренкина перегретого пара с промперегревом и одноступенчатым регенеративным подогревом	<i>KPDmod15</i>	<i>KPD15 (Ppp, tpw, P0, Pk, t0, tpp)</i>
14	Цикл Ренкина перегретого пара с двухступенчатым регенеративным подогревом	<i>KPDmod16</i>	<i>KPD16 (Po, tpw, Pk, t0)</i>

Окончание таблицы

№	Схема ПТУ	Название модуля	Обращение к функции из модуля
15	Цикл Ренкина перегретого пара с двухступенчатым регенеративным подогревом	KPDmod17	$KPD17(P1, P2, P0, Pk, t0)$
16	Цикл Ренкина перегретого пара с двухступенчатым регенеративным подогревом	KPDmod18	$KPD18(tw1, tw2, P0, Pk, t0)$
17	Цикл Ренкина насыщенного пара с двумя сепараторами и двухступенчатым регенеративным подогревом	KPDmod19	$KPD19(Pc1, Pc2, P0, Pk, X0, Xc1, Xc2)$
18	Цикл Ренкина насыщенного пара с двумя сепараторами и двухступенчатым регенеративным подогревом	KPDmod20	$KPD20(P1, P2, P0, Pk, X0, Xc1, Xc2)$
19	Цикл Ренкина насыщенного пара с двумя сепараторами и двухступенчатым регенеративным подогревом	KPDmod21	$KPD21(P0, tpw, Pk, X0, Xc1, Xc2)$
20	Цикл Ренкина насыщенного пара с двумя сепараторами и двухступенчатым регенеративным подогревом	KPDmod22	$KPD21(t0, tpw, Pk, X0, Xc1, Xc2)$
21	Цикл Ренкина насыщенного пара с двумя сепараторами и двухступенчатым регенеративным подогревом	KPDmod23	$KPD23 (P0, Pc1, Pk, X0, Xc1, Xc2)$
22	Цикл Ренкина насыщенного пара с двумя сепараторами и двухступенчатым регенеративным подогревом	KPDmod24	$KPD24 (t0, P1, Pk, X0, Xc1, Xc2)$

Приложение 3

Параметры регенеративной схемы некоторых ПТУ

1) Турбоустановка **К-210-130** ($P_0 = 13$ МПа, $D_0 = 186,1$ кг/с)

	P , МПа	H , кДж/кг	КИМ
ПВД-7	3,65	3200	0,3877
ПВД-6	2,48	3100	0,3579
ПВД-5	1,125	3419	0,3272
Д (предвключенный)	0,68	3419	0,3272
ПНД-4	0,595	3227	0,2840
ПНД-3	0,258	3025	0,2218
ПНД-2	0,12	2875	0,1718
ПНД-1	0,245	2640	0,0968
К	0,0034	2410	0

2) Турбоустановка **К-300-240** ($P_0 = 24$ МПа, $D_0 = 258,3$ кг/с)

	P , МПа	H , кДж/кг	КИМ
ПВД-8	6,05	3043	0,3916
ПВД-7	3,90	2961	0,3650
ПВД-6	1,57	3311	0,3317
Д-5 (самостоятельный)	1,04(0,68)	3202	0,3017
ПНД-4	0,504	3031	0,2559
ПНД-3	0,216	2872	0,2074
ПНД-2	0,090	2692	0,1407
ПНД-1	0,0167	2482	0,0648
К	0,0033	2336	0

3) Турбоустановка **К-500-240** ($P_0 = 24$ МПа, $D_0 = 458,3$ кг/с)

	P , МПа	H , кДж/кг	КИМ
ПВД-9	5,79	3012	0,3830
ПВД-8	4,10	2942	0,3599
ПВД-7	1,71	3320	0,3287
Д-6 (самостоятельный)	1,10(0,68)	3206	0,2975
ПНД-5	0,52	3031	0,2476
ПНД-4	0,29	2916	0,2097
ПНД-3	0,157	2808	0,1748
ПНД-2	0,083	2703	0,1361
ПНД-1	0,016	2487	0,057
К	0,0053	2358	0

4) Турбоустановка **К-800-240** ($P_0 = 24$ МПа, $D_0 = 736,1$ кг/с)

	P , МПа	H , кДж/кг	КИМ
ПВД-8 (две нитки)	5,72	3077	0,3849
ПВД-7 (две нитки)	3,28	2979	0,3535
ПВД-6 (две нитки)	1,6	3400	0,3310
Д-5 (самостоятельный)	1,05(0,68)	3283	0,2997
ПНД-4	0,58	3132	0,2611
ПНД-3	0,284	2975	0,2112
ПНД-2	0,147	2808	0,1555
ПНД-1	0,0211	2563	0,0665
К	0,00406	2400	0

Приложение 4

Исходные данные для теплового расчета регенеративных подогревателей ПТУ

Конструктивные параметры ПВД

Тип турбо-установки	Номер по-догре-вателя	Типоразмер подогревателя	$d_H \times \delta_{ст}$	Число плоскостей навивки одной трубы	Длина труб одной спирали	Средний диаметр спирали
К-210-130	ПВД-7	ПВ-775-265-45	32×4	2	26,69	0,3
	ПВД-6	ПВ-775-265-31				
	ПВД-5	ПВ-775-265-13				
К-300-240	ПВД-8	ПВ-1550-380-70	32×5	2	26,19	0,3
	ПВД-7	ПВ-1700-380-51	32×5	1	15,3	0,3
	ПВД-6	ПВ-1250-380-21	32×5	2	26,19	0,3
К-500-240	ПВД-9	ПВ-2100-380-61	32×5	1	19,07	0,36
	ПВД-8	ПВ-1900-380-44	32×5			
	ПВД-7	ПВ-2100-380-17	32×5			
К-800-240 (две нитки ПВД)	ПВД-8	ПВ-1600-380-66	32×6	1	15,3	0,3
	ПВД-7	ПВ-2000-380-40	32×5	1	18,09	0,34
	ПВД-6	ПВ-1600-380-17	32×5	1	15,3	0,3

Некоторые конструктивные параметры ПНД:

наружный диаметр трубок $d = 16$ мм;

толщина стенки $\delta = 1$ мм;

среднее расстояние между перегородками $H = (0,8 - 1)$ м.

Рекомендуемые скорости теплоносителей

– воды в ПНД $(1,6 \div 2,2)$ м/с;

– воды в ПВД $(1,6 \div 2,0)$ м/с;

– пара в ПО $(10 \div 25)$ м/с (максимальная – до 45 м/с);

– дренажа в ОД $(0,5 \div 1,0)$ м/с.

Теплопроводность некоторых марок сталей, Вт/(м·К)

$t, ^\circ\text{C}$	Марка стали					
	22К	12МХ	15ХМ	12Х1МФ	25Х2МФА	X18Н10Т
100	49,5	50,2	44,5	41,3	42,0	16,3
200	47,7	50,2	41,3	40,8	41,5	17,5
300	45,5	50,2	40,8	40,3	41,1	18,8
400	43,5	48,6	39,0	39,7	39,5	21,4
500	41,5	47,0	36,1	39,0	–	23,0
600	39,3	46,0	33,7	38,2	–	24,6
700	–	44,0	–	37,4	–	26,8

Приложение 5

Модуль для автоматизированного проектирования ПНД

Модуль содержит набор функций и процедур для *автоматизированного моделирования* поверхностных ПНД.

Подключение модуля в программе:

...

Uses PNDMOD;

...

Обращение в программе к процедурам и функциям из модуля PNDMOD.TPU:

1. К процедуре определения теплофизических свойств конденсата по давлению

TFSK

{Входной параметр} (P, {Давление пара, МПа}

{Выходные параметры}

Ts, { Температура насыщения, °C}

VI, { Удельный объем, м³/кг}

hl, { Энтальпия, кДж/кг}

r, { Теплота парообразования, Дж/кг}

ROk, { Плотность, кг/м³}

LAk, { Теплопроводность, Вт/(м·K)}

MUK, { Динамическая вязкость, Па·с}

NUk, { Кинематическая вязкость, м²/с}

PRk { Число Прандтля}

2. К процедуре определения теплофизических свойств воды и перегретого пара по давлению и температуре

TFSWP

{Входные параметры}

(P, { Давление, МПа}

t, { Температура, °C}

{Выходные параметры}

V, { Удельный объем, м³/кг}

RO, { Плотность, кг/м³}

LA, { Теплопроводность, Вт/(м·K)}

MU, { Динамическая вязкость, Па·с}

NU, { Кинематическая вязкость, м²/с}

PR, { Число Прандтля}

CP { Теплостойкость, Дж/(кг·K)}

3. К функции определения температуры воды по давлению и энтальпии

ТСр

{Температура, °C}

{Входные параметры}

(P, { Давление, МПа}

h) { Энтальпия, кДж/кг}

4. К процедуре расчета коэффициента теплоотдачи от стенки к воде в ПНД (*Вынужденное течение внутри прямых труб*)

ALFA2

{Входные параметры}

(Pw, { Давление воды, МПа}

tw, {Средняя температура воды, °C}

Ww, {Скорость воды, м/с }

dvn, {Внутренний диаметр трубок, м}

{Выходной параметр}

A2) {Коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·K)}

5. К процедуре определения коэффициента теплоотдачи при конденсации пара

ALFA1sp

{Входные параметры}

(P, { Давление пара, МПа}

udQ, { Удельный тепловой поток, Вт/м²}

Hsr, { сред. расстояние м/у перегородками}

{Выходной параметр}

A1sp) {Коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·K)}

6. К процедуре определения коэффициента теплоотдачи от пара к стенке в пароохладителе ПНД при наружном продольном обтекании пучка труб (Методика из журнала «Теплоэнергетика». 1987. №2. С.33)

A1NPOprod

{Входные параметры}

(P, { Давление, МПа}

tp, { Средняя температура пара, °C}

Gp, { Расход пара, кг/с}

Wp, { Скорость пара, м/с}

dn, { Наружный диаметр трубок, м}

{Выходной параметр}

A1po) { Коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·K)}

7. К процедуре определения коэффициента теплоотдачи от пара к стенке в пароохладителе ПНД при наружном поперечном обтекании пучка труб (Методика из журнала «Теплоэнергетика». 1987. №2. С. 33)

A1NPOpor

{Входные параметры}

(P, { Давление, МПа}
tp, { Средняя температура пара, °C}
Gr, { Расход пара, кг/с}
Wp, { Скорость пара, м/с}
dn, { Наружный диаметр трубок, м}

{Выходной параметр}

A1po {Коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·K)}

8. К процедуре определения коэффициента теплоотдачи от дренажа к стенке в охладителе дренажа ПНД при наружном продольном обтекании пучка труб (Методика из журнала «Теплоэнергетика». 1987. №2. С.33)

A1NODprod

{Входные параметры}

P, { Давление дренажа (пара), МПа}
td, { Средняя температура дренажа, °C}
Gd, { Расход дренажа (пара), кг/с}
Wd, { Скорость дренажа, м/с}
dn, { Наружный диаметр трубок, м}

{Выходной параметр}

A1od {Коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·K)}

9. К процедуре определения коэффициента теплоотдачи от дренажа к стенке в охладителе дренажа ПНД при наружном поперечном обтекании пучка труб (Методика из журнала «Теплоэнергетика». 1987. №2. С. 33)

A1NODpor

{Входные параметры}

(P, { Давление дренажа (пара), МПа}
td, { Средняя температура дренажа, °C}
Gd, { Расход дренажа (пара), кг/с}
Wd, { Скорость дренажа, м/с}
dn, { Наружный диаметр трубок, м}

{Выходной параметр}

A1od {Коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·K)}

Приложение 6

Модуль для автоматизированного проектирования ПВД

Модуль содержит набор функций и процедур для *автоматизированного моделирования* коллекторно-спиральных ПВД.

Подключение модуля в программе:

...

Uses PWDMOD;

...

Обращение в программе к процедурам и функциям из модуля PWDMOD.TPU:

1. К процедуре определения теплофизических свойств конденсата по давлению

TFSK

{Входной параметр} (P, {Давление пара, МПа}

{Выходные параметры}

Ts, { Температура насыщения, °C}

VI, { Удельный объем, м³/кг}

hI, { Энтальпия, кДж/кг}

r, { Теплота парообразования, Дж/кг}

ROk, { Плотность, кг/м³}

LAK, { Теплопроводность, Вт/(м · К)}

MUK, { Динамическая вязкость, Па · с}

NUK, { Кинематическая вязкость, м²/с}

PRk) { Число Прандтля }

2. К процедуре определения теплофизических свойств воды и перегретого пара по давлению и температуре

TFSWP

{Входные параметры} (P, { Давление, МПа}

t, { Температура, °C}

{Выходные параметры}

V, { Удельный объем, м³/кг}

RO, { Плотность, кг/м³}

LA, { Теплопроводность, Вт/(м · К)}

MU, { Динамическая вязкость, Па · с}

NU, { Кинематическая вязкость, м²/с}

PR, { Число Прандтля }

CP) { Теплоемкость, Дж/(кг · К)}

3. К функции определения температуры воды по давлению и энтальпии

ТСр

{Температура, °C}

{Входные параметры}

(P, { Давление, МПа}
h) { Энтальпия, кДж/кг }

4. К процедуре расчета коэффициента теплоотдачи от стенки к воде в ПВД (Вынужденное течение внутри труб с учетом поправки на изгиб спирали)

ALFA2W

{Входные параметры}

(Pw, { Давление воды, МПа}
tw, { Средняя температура воды, °C}
Ww, { Скорость воды, м/с }
dvn, { Внутренний диаметр трубок, м}
Rsr, { Средний радиус спирали, м}

{Выходной параметр}

A2) {Коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К)}

5. К процедуре определения коэффициента теплоотдачи при конденсации пара

ALFA1sp

{Входные параметры}

(P, { Давление пара, МПа}
udQ, { Удельный тепловой поток, Вт/м²}
Hsr, { Характерный геометрический размер, м;
для спирально-коллекторных ПВД
он равен $Hsr = n \cdot dn$, где
 n – число трубок м/у перегородками,
 dn – наружный диаметр трубок
змеевиков }

{Выходной параметр}

A1sp) {Коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·К)}

6. К процедуре расчета коэффициента теплоотдачи от пара к стенке в пароохладителеспирально-коллекторных ПВД (Наружное поперечное обтекание колонны змеевиков [17]).

ALFA1Wpo

{Входные параметры}

(P, { Давление пара, МПа}
t, { Средняя температура пара, °C}
Gr, { Расход пара, кг/с}
dn, { Наружный диаметр трубок змеевиков, м}
Npl, { Число плоскостей навивки змеевиков}
Npot, { Число потоков пара}
Lzm, { Длина змеевика, м}

{Выходные параметры}

A1po, { Коэффициент теплоотдачи, Вт/(м²·K)}
Wp) { Скорость пара, м/с}

ЛИТЕРАТУРА

1. Лесин В. В., Лисовец Ю. П. Основы методов оптимизации. – М.: Изд-во МАИ, 1995. – 344 с.: ил.
2. Ногин В. Д., Протодяконов И. О. Основы теории оптимизации: учеб. пособие для студентов вузов / под ред. И. О. Протодяконова. – М.: Высш. шк., 1986.
3. Аоки М. Введение в методы оптимизации. – М. : Наука, 1977.
4. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ. – М. : Мир, 1982.
5. Попырин Л. С. Математическое моделирование и оптимизация теплоэнергетических установок. – М. : Энергия, 1978.
6. Данилина Н. И. и др. Численные методы: учебник для техникумов. – М. : Высш. шк., 1976.
7. Заварыкин В. М, Житомирский В. Г., Лапчик М. П. Численные методы: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов. – М. : Просвещение, 1990. – 176 с.: ил.
8. Турчак Л. И. Основы численных методов. – М. : Наука, 1987.
9. Левенталь Г. Б., Попырин Л. С. Оптимизация теплоэнергетических установок / под ред. М. А. Стыриковича. – М. : Энергия, 1970.
10. Зорин В. М. Исследование и математическое моделирование АЭС на основе системного подхода. – М. : Изд-во МЭИ, 2002.
11. Рыжкин В. Я. Тепловые электрические станции: учебник для вузов / под ред. В. Я. Гиршфельда. – М. : Энергоатомиздат, 1987.
12. Качан А. Д., Яковлев Б. В. Справочное пособие по технико-экономическим основам ТЭС. – Минск : Высшейшая школа, 1982.
13. Качан А. Д., Муковозчик Н. В. Техничко-экономические основы проектирования ТЭС. – Минск : Высшэйшая школа, 1983.
14. Качан А. Д. Оптимизация режимов и повышение эффективности работы паротурбинных установок ТЭС. – Минск : Высшэйшая школа, 1985.
15. Соколов Е. Я. Теплофикация и тепловые сети: учебник для вузов. – 6-е изд., перераб. – М. : Изд-во МЭИ, 1999. – 472 с. : ил.
16. Рубинштейн Я. М., Щепетильников М. И. Исследование реальных тепловых схем ТЭС и АЭС. – М.: Энергоиздат, 1982. – 272 с.
17. Щепетильников М. И., Хлопушин В. И. Расчет теплообменного оборудования тепловых электрических станций: учебное пособие. – Иваново: Изд-во ИПИ, 1979.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ	
ОБЪЕКТОВ ОПТИМИЗАЦИИ	6
1.1. Основы теории погрешностей	7
1.2. Определение параметров воды и водяного пара	
с помощью ПВЭМ	10
1.2.1. Определение параметров перегретого пара	
в процессе расширения	11
1.2.2. Определение параметров мокрого пара	
в процессе расширения	11
1.2.3. Проверка состояния пара	
в конце теоретического расширения	13
1.2.4. Проверка состояния пара	
в конце действительного расширения	15
1.3. Численные методы решения нелинейных уравнений	
при моделировании теплового оборудования ТЭС	16
1.3.1. Численные методы решения нелинейных уравнений	
с одним неизвестным	16
1.3.1.1. Графическое решение нелинейного уравнения	17
1.3.1.2. Метод половинного деления	18
1.3.1.3. Метод простой итерации	19
1.3.1.4. Метод хорд	24
1.3.1.5. Метод Ньютона	26
1.3.1.6. Видоизмененный метод Ньютона	27
1.3.2. Оптимальная последовательность расчета схем	
теплоэнергетических установок	27
1.3.3. Решение системы нелинейных уравнений	
методом простой итерации	33
1.3.4. Решение системы нелинейных уравнений	
методом Зейделя	35
1.3.5. Использование метода половинного деления	
в поверочном тепловом расчете поверхностного	
пароводяного подогревателя	35
1.3.6. Использование метода Зейделя для расчета теплопередачи	
при конденсации пара в поверхностном теплообменнике	40
1.3.7. Использование метода Зейделя при переводе	
конденсационной турбоустановки	
в теплофикационный режим	43
1.3.8. Моделирование тепловой схемы	51

2. МЕТОДЫ ОДНОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ	55
2.1. Предварительные сведения	55
2.2. Метод матанализа (классический)	60
2.3. Метод перебора	61
2.4. Метод дихотомии (первый метод деления отрезка пополам)	63
2.5. Метод «золотого» сечения	65
2.6. Метод Фибоначчи	69
2.7. Метод средней точки	73
2.8. Метод парабол	75
3. МЕТОДЫ МНОГОМЕРНОЙ МИНИМИЗАЦИИ	79
3.1. Графическая интерпретация целевой функции. Линии уровня	79
3.2. Классификация численных методов многомерной минимизации	82
3.3. Дифференцирование функции многих переменных	83
3.4. Классический метод минимизации функции многих переменных	88
3.5. Теоретические основы методов спуска	90
3.6. Методы спуска	99
3.6.1. Градиентный метод	99
3.6.2. Метод наискорейшего спуска	106
3.6.3. Метод координатного спуска	114
4. ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ПАРОТУРБИННЫХ УСТАНОВОК	120
4.1. Основные теоретические сведения	120
4.1.1. Влияние начального давления пара на термический КПД цикла Ренкина	120
4.1.2. Выбор оптимального давления промперегрева	122
4.1.3. Выбор оптимальной температуры питательной воды	124
4.1.4. Выбор оптимального разделительного давления в паротурбинных установках насыщенного пара с сепарацией	126
4.2. Использование методов минимизации для выбора оптимальных термодинамических параметров ПТУ	130
4.2.1. Метод перебора для поиска оптимальных начальных параметров ПТУ	130
4.2.2. Градиентный метод для выбора оптимальных значений давления двукратного промперегрева	133
4.2.3. Метод координатного спуска для расчета оптимальных значений начального давления и температуры питательной воды	142

5. ТИПИЧНЫЕ ЗАДАЧИ	
ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ	149
5.1. Выбор оптимального диаметра паропровода острого пара	149
5.2. Техничко-экономический выбор оптимального диаметра паропровода горячей нитки промперегрева	158
5.3. Техничко-экономический выбор температурных напоров в поверхностных регенеративных подогревателях	159
5.3.1. Выбор оптимального недогрева	162
5.3.2. Выбор оптимального температурного напора охлаждителя дренажа	173
5.3.3. Выбор оптимального остаточного ререгрева пара в пароохладителе	180
5.4. Выбор оптимальной скорости воды в пучке турб поверхностного теплообменника	187
ПРИЛОЖЕНИЯ	192
Приложение 1. Использование среды TURBO-PASKAL для моделирования	192
Приложение 2. Набор программных модулей для расчета термических КПД ПТУ	195
Приложение 3. Параметры регенеративной схемы некоторых ПТУ	197
Приложение 4. Исходные данные для теплового расчета регенеративных подогревателей ПТУ	199
Приложение 5. Модуль для автоматизированного проектирования ПНД	200
Приложение 6. Модуль для автоматизированного проектирования ПВД	203
ЛИТЕРАТУРА	206



Ольга Юрьевна Ромашова

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ И РАСЧЕТЫ НА ЭВМ
ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ**

Учебное пособие

Редактор
Н. Т. Синельникова

Подписано к печати
Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Плоская печать. Усл. печ. л. 21,21. Уч.-изд. л. 11,05.
Тираж экз. Заказ . Цена свободная.
Издательство ТПУ. 634050, Томск, пр. Ленина, 30.

