**МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ**

**ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ ЗАОЧНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**Факультет механизации и технического сервиса**

**Кафедра высшей математики**

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

**ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ И ЗАДАНИЯ**

**ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ**

**Студентам 1 курса по направлениям подготовки бакалавров**

**080100 – «Экономика»**

**Профили: «Экономика предприятий и организаций»;**

**«Бухгалтерский учет, анализ и аудит»**

**Москва 2011**

Составители: доценты Лычкин В.Н., Капитонова В.А.

УДК 517. (076)

Математический анализ: Методические указания по изучению дисциплины/ Рос. гос. аграр. заоч. ун-т; Сост. Лычкин В.Н., Капитонова В.А. М., 2011. стр.

Предназначены для студентов 1, 1\* курса

Утверждены методической комиссией факультета механизации и технического сервиса

Рецензенты:

**Раздел 1. ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

## ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Дисциплина «Математический анализ» относится к базовой (обязательной) части второго цикла ООП. Методические указания по данной дисциплине составлены в соответствии с требованиями Федерального государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования, утвержденного Министерством образования и науки РФ 9 ноября 2009 г. по направлению подготовки «080100 –Экономика», примерной программой по дисциплине и рабочими учебными планами, утвержденными ученым советом ФГОУ ВПО РГАЗУ 26 января 2011 г.

1. **1. Цели и задачи дисциплины**

Целью математического образования является развитие навыков математического мышления; навыков использования математических методов и основ математического моделирования; математической культуры у обучающегося.

Ему необходимо в достаточной степени владеть как классическими , так и современными математическими методами анализа задач, возникающих в его практической деятельности, использовать возможности вычислительной техники, уметь выбирать наиболее подходящие комбинации известных методов, знать их сравнительные характеристики.

Для выработки у современных специалистов с высшим образованием необходимой *математической культуры* необходимо *решение следующих задач*:

1.Обеспечение высокого уровня фундаментальной математической подготовки студентов.

2. Выработки у студентов умения проводить логический и качественный анализ социально-экономических задач управления на основе построения математических моделей на базе различных средств информационного обеспечения.

3. Умение использовать методы современной математики, необходимые для работы по выбранной специальности.

4. Умение специалиста самостоятельно продолжить свое математическое образование.

В результате изучения дисциплины студент должен:

1) обладать следующими **общекультурными компетенциями (ОК):**

- владением культурой мышления, способностью к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей ее достижения (ОК-1);

- умением логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-2);

2) обладать следующими **профессиональными компетенциями (ПК):**

- способностью к использованию основных законов естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, применением методов математического анализа и моделирования (ПК-1);

- способностью решать инженерные задачи с использованием основных законов механики, электротехники, гидравлики, термодинамики (ПК-3);

- способностью проводить и оценивать результаты измерений (ПК-5);

- готовностью к обработке результатов экспериментальных исследований.

В результате изучения дисциплины студент **должен:**

**знать** основные понятия и методы математического анализа, теории дифференциальных уравнений, элементов теории функций комплексной переменной;

**уметь** использовать математический аппарат для обработки технической и экономической информации и анализа данных, связанных с машиноиспользо-

ванием и надежностью технических систем;

**владеть** методами построения математических моделей типовых профессиональных задач.

1. **2. Библиографический список**

*Основной*

1. Кудрявцев В.А., Демидович В.П. Краткий курс высшей математики. М.: Наука, любое издание.

2. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука, 2000.

3. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1, 2. М.: Наука, любое издание.

*Дополнительный*

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Т. 1, 2. – М.: Высшая школа, 1996.

5. Лычкин В.Н. Высшая математика в задачах. Учебное пособие.

М.: РГАЗУ, 2009.

6. Лычкин В.Н. Высшая математика. Учебное пособие. М.: РГАЗУ,

2011.

1. **3. Распределение учебного времени по модулям (разделам)**

**и темам дисциплины**

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| №  п.п. | Наименование модулей и тем  дисциплины | Всего, ч | В том числе, ч | | | Рекомендуемая литература |
| Лекции | Практические занятия | Самостоятельная  работа |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| Модуль 1. Введение в математический анализ | | 20 (20) | - (-) | 2 (-) | 18 (20) | 1-6 |
| 1. | Тема1. Предел функции | 10 (10) | - (-) | 2 (-) | 8 (10) |  |
| 2 | Тема 2. Непрерывность функции | 10 (10) | - (-) | - (-) | 10 (10) |  |
| Модуль 2. Дифференциальное исчисление функции одной переменной | | 30 (30) | 2 (-) | 2 (2) | 26 (28) | 1-6 |
| 1. | Тема1. Производная | 20(20) | 2(-) | 2(2) | 16(18) |  |
| 2 | Тема 2. Дифференциал | 10(10) | -(-) | -(-) | 10(10) |  |
| Модуль 3. Применение дифференциального исчисления к исследованию функций | | 20(20) | -(-) | 2(2) | 18(18) | 1-6 |
| 1. | Тема1. Монотонность и экстремумы функции | 10(10) | -(-) | -(-) | 10(10) |  |
| 2 | Тема 2. Схема исследования функции и построения ее графика | 10(10) | -(-) | 2(2) | 8(8) |  |
| Модуль 4. Неопределенный интеграл | | 40(40) | 2(2) | 2(2) | 36(36) | 1-6 |
| 1. | Тема1. Неопределенный интеграл | 15(15) | 2(2) | -(-) | 13(13) |  |
| 2 | Тема 2. Интегрирование рациональных и иррациональных выражений | 25(25) | -(-) | 2(2) | 23(23) |  |
| Модуль 5. Определенный интеграл | | 30(30) | -(-) | 2(-) | 28(30) | 1-6 |
| 1. | Тема1. Вычисление определенного интеграла | 10(10) | -(-) | -(-) | 10(10) |  |
| 2 | Тема2. Приложения определенного интеграла | 20(20) | -(-) | 2(-) | 18(20) |  |
| Модуль 6. Функции многих независимых переменных | | 30(30) | -(-) | 2(-) | 28(30) | 1-6 |
| 1. | Тема1. Функции многих независимых переменных | 15(15) | -(-) | 2(-) | 13(15) |  |
| 2 | Тема 2. Экстремум функции двух переменных | 15(15) | -(-) | -(-) | 15(15) |  |
| Модуль 7. Кратные и криволинейные интегралы | | 30(30) | 2(2) | 2(-) | 26(28) | 1-6 |
| 1. | Тема1. Двойной интеграл | 20(20) | 2(2) | -(-) | 18(18) |  |
| 2 | Тема 2. Тройной интеграл. Криволинейный интеграл | 10(10) | -(-) | 2(-) | 8(10) |  |
| Модуль 8. Дифференциальные уравнения первого порядка | | 30(30) | 2(2) | 2(2) | 26 (26) | 1-6 |

Продолжение таблицы 1

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 1 | Тема1. Дифференциальные уравнения первого порядка | 30(30) | 2(2) | 2(2) | 26 (26) |  |
| Модуль 9. Дифференциальные уравнения высших порядков | | 30(30) | 2(2) | 2(2) | 26 (26) | 1-6 |
| 1 | Тема1. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка | 10(10) | -(-) | 2(2) | 8(8) |  |
| 2 | Тема2. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка | 20(20) | 2(2) | -(-) | 18(18) |  |
| Модуль 10. Числовые и функциональные ряды | | 28(28) | -(-) | -(-) | 28(28) | 1-6 |
| 1. | *Тема* 1. *Числовые ряды* | 8(8) | -(-) | -(-) | 8(8) |  |
| 2. | *Тема* 2. *Степенные ряды* | 8(8) | -(-) | -(-) | 8(8) |  |
| 3. | *Тема* 3. *Тригонометрические ряды* | 12(12) | -(-) | -(-) | 12(12) |  |

Примечание: в скобках указаны часы для студентов с сокращенным сроком обучения.

**Раздел 2. СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНЫХ МОДУЛЕЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

**И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ИЗУЧЕНИЮ**

**2. 1. Модуль 1. Введение в математический анализ.**

**2. 1. 1. Содержание модуля.**

Тема 1. 1. Множество вещественных чисел. Функция. Область ее определения. Способы задания. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Сложные и обратные функции. Числовая последовательность и ее предел. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.

Предел функции в точке и в бесконечности. Первый и второй замечательные пределы. Свойства пределов функции. Бесконечно малые величины. Их свойства. Сравнение бесконечно малых.

Тема 1. 2. Непрерывность функции в точке и на интервале. Точки разрыва функции. Непрерывность основных элементарных функций. Свойства функции непрерывных на отрезке.

**2. 1. 2. Методические указания по его изучению.**

После изучения по учебникам теоретического материала разберите реше-

ние примеров 1 - 3.

**Пример 1.** Вычислить пределы:

*а*)  ; *б*) ;

*в*) ; *г*) ;

*д*)  .

*Решение*. *а)* При *х* = –3 числитель и знаменатель дроби, стоящей под знаком предела, обращаются в нуль, то есть имеем неопределенность . Для ее устранения разложим числитель и знаменатель дроби на произведение линейных множителей и сократим дробь:

.

*б)* При стремлении *х*  к бесконечности получаем неопределенность вида  .Для устранения подобной неопределенности дробной рациональной функции следует числитель и знаменатель дроби разделить на *хn* , где *n* – наивысшая степень многочленов числителя и знаменателя дроби.

Деля числитель и знаменатель данной дроби на *х*3 и применяя теоре-

мы о пределах и свойства бесконечно малых функций, имеем:

.

*в*) При *х* = –3 получаем неопределенность вида . Для ее раскрытия умножим числитель и знаменатель дроби на выражения, им сопряженные, то есть на произведение .





=.

*г*) *Пусть* *arcsin2x = y.* Тогда 2*x = siny*, *y* → 0 при *х →* 0.

Тогда

.

Здесь применялась формула первого замечательного предела

**** .

*д*) При *х*→ ∞ выражение, стоящее под знаком предела, есть неопределенность вида 1∞. Представим это выражение в виде суммы единицы и бесконечно малой при *х* → ∞ величины:  .

Обозначим . Отсюда ; ; . Если *х → ∞*, то *у* → - ∞ .

Таким образом, искомый предел имеет вид:

.

Здесь применялась формула второго замечательного предела

.

**Пример 2.** Дана функция  и значения аргумента *х*1 = - 2 и *х*2 = 3. Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной при данных значениях аргумента; 2) найти односторонние пределы в точках разрыва; 3) построить график данной функции.

*Решение.* При *х* = - 2 данная функция не существует, в этой точке функция терпит разрыв. Определим односторонние пределы функции при

 слева и справа:

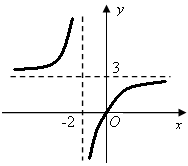
, так как знаменатель дроби стремится к нулю, оставаясь отрицательным;

, так как знаменатель дроби стремится к нулю, оставаясь положительным.

Таким образом, при *х* = - 2 данная функция имеет разрыв второго рода.

При *х* = 3 функция непрерывна, таккак выполнены следующие три условия: 1) функция определена при *х* = 3 и в окрестности этой точки;

2) она имеет при  конечные и равные односторонние пределы (они равны ); 3) односторонние пределы совпадают со значением функции в точке 3, равным .



Данная функция является дробно-линейной, ее графиком является равносторонняя гипербола, асимптоты которой параллельны осям координат и определяются уравнениями  и . График функции представлен на рис. 1.

Рис. 1

**Пример 3.** Функция *у* задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента *х*:



Требуется: 1) найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) найти односторонние пределы функции *у* в точках разрыва;

3) найти скачок функции в точке разрыва. Сделать чертеж.

*Решение.* Данная функция определена и непрерывна в интервалах

, , . При  и  меняется аналитическое выражение функции и только в этих точках функция может иметь разрыв. Определим односторонние пределы в точке :

 ;  .

В этой точке значение функции также равно нулю. Следовательно, в точке

 функция непрерывна.

Определим односторонние пределы в точке :

 ;  .

Так как односторонние пределы функции в точке  не равны между собой, то в этой точке функция имеет разрыв первого рода.

Скачком функции в точке разрыва называется абсолютная величина разности между ее односторонними пределами. Следовательно, в точке  скачок функции равен . График функции представлен на рис. 2.

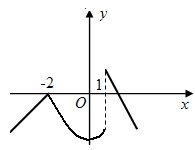


Рис. 2

**2. 1. 3. *Вопросы для самоконтроля***

1. Какая величина называется постоянной? переменной?

2. Что называется функцией одной независимой переменной?

3. Что называется областью существования (определения) функции?

4. Назовите способы задания функции.

5. Какая функция называется явной? неявной?

6. Какая функция называется возрастающей? убывающей?

7. Какая функция называется четной? нечетной?

8. Какая функция называется периодической?

9. Какая функция называется элементарной?

10. Какие функции называются основными элементарными функциями?

11. Какая функция называется сложной?

12. Что называется интервалом знакопостоянства функции?

13. Какие функции называются взаимно обратными? Как построить график обратной функции по графику данной функции в системе декартовых координат?

14. Что называется числовой последовательностью?

15. Что называется пределом числовой последовательности?

16. Сформулируйте определение предела функции.

17. Сформулируйте теоремы о пределах функций.

18. Какая функция называется бесконечно малой? бесконечно большой? Какова зависимость между ними?

19. Перечислите свойства бесконечно малых функций.

20. Напишите формулы первого и второго замечательных пределов.

21. Какие логарифмы называются натуральными?

22. Сформулируйте определения односторонних пределов функции в точке.

23. Какая функция называется непрерывной в точке? на интервале?

24. Какая точка называется точкой разрыва первого рода? второго рода?

25. Перечислите свойства непрерывных на отрезке функций.

**2. 1. 4. Задания для самостоятельной работы**

В задачах 1 – 6 вычислить пределы.

1. . 2.  . 3..

4.. 5. . 6. .

**2. 2. Модуль 2. Дифференциальное исчисление функции одной**

**переменной**

**2. 2. 1. Содержание модуля.**

Тема 2.1. Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Ее геометрический и механический смысл. Правила дифференцирования функций. Производные основных элементарных функций. Производная сложной и обратной функции. Производные высших порядков.

Тема 2. 2. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала. Дифференцирование функций, заданных параметрически. Применение дифференциала в приближенных вычислениях.

Правило Лопиталя.Точки экстремума функции. Теорема Ферма. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши

**2. 2. 2. Методические указания по его изучению.**

После изучения по учебникам теоретического материала разберите реше-

ние примеров 4, 5.

Для справок приведем правила и формулы дифференцирования основных элементарных функций.

1. . 2. .

3. . *С* – *const*. 4. .

5. Если **, где **, то .

6.  ** 7. ****.

8. . 9. .

10.  . 11. .

12. . 13. .

14. . 15. .

16. . 17. .

18. . 19. .

Если *u= х*, то *u*′ = 1.

**Пример 4.** Найти производные данных функций:

*а*)  ; б) . *в*) ;

*г*) ; *д*) .

*Решение.*

*а*) применяем правило дифференцирования сложной функции и

табличные формулы:

.

*б*) Последовательно применяем правило дифференцирования сложной функции:





*в*) Логарифмируем данную функцию: .

Дифференцируем обе части последнего равенства: .

Отсюда

.

*г*) Данная функция задана в неявной форме. Дифференцируя по *х* обе части уравнения, имеем

.

Отсюда

; .

*д*) Прологарифмируем по основанию *е* обе части данного равенства:

. Дифференцируем обе части последнего равенства по переменной *х*, считая здесь *у* функцией от *х* :

 ,

 , откуда

 .

**Пример 5.** Найти дифференциал функции .

*Решение*. . *Дифференциалом* *dy* функции  в точке *х* назы-

вается главная, линейная относительно ∆*х* часть *у*′∆*х* приращения ∆*у*

функции, то есть .Так как , то 

Исходя из определения дифференциала, имеем:

.

**2. 2. 3. Вопросы для самоконтроля.**

1. Что называется производной функции?

2. Каков геометрический, физический смысл производной?

3. Какая функция называется дифференцируемой в точке? на интервале?

4. Как взаимосвязаны непрерывность и дифференцируемость функции в точке?

5. Напишите правила дифференцирования функций.

6. Напишите формулы дифференцирования основных элементарных функций.

7. Сформулируйте правило дифференцирования сложной функции.

8. Сформулируйте определение дифференциала функции.

9. Перечислите свойства дифференциала функции.

10. Каков геометрический смысл дифференциала функции?

**2. 2. 4. Задания для самостоятельной работы**

В задачах 1 – 3 найти производные указанных функций.

1.. 2.. 3. .

4.Найти дифференциал функции .

5.Вычислить предел , используя правило Лопиталя.

**2. 3. Модуль 3. Дифференциальное исчисление функции одной**

**переменной**

**2. 3. 1. Содержание модуля.**

Тема 3. 1. Условия монотонности функций. Экстремумы функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

Тема 3. 2.Исследование выпуклости графика функции. Точки перегиба. **А**симптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения ее графика. Уравнение касательной к кривой в данной точке.

**2. 3. 2. Методические указания по его изучению.**

После изучения по учебникам теоретического материала разберите реше-

ние примеров 6, 7.

**Пример 6.** Исследовать функцию  и построить ее график.

*Решение*. Исследование функции и построение ее графика проведем по следующей схеме:

1. Найти область определения функции.

2. Исследовать функции на непрерывность.

3. Исследовать функцию на четность, нечетность.

4. Найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума.

5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции и

точки его перегиба.

6. Найти асимптоты графика функции.

7. Используя результаты пунктов 1 – 6 построить график функции.

Для уточнения вида кривой можно найти дополнительные точки графика

(например, точки его пересечения с осями координат).

Реализуем указанную схему.

1. Функция определена при всех значениях аргумента *х*, кроме *х =* 1.

2. Данная функция является элементарной, поэтому она непрерывна

на своей области определения, то есть на интервалах (−∞; 1) и (1; ∞).

В точке *х* = 1 функция терпит разрыв второго рода.

3. Для установления четности или нечетности функции проверим

выполнимость равенств  (тогда − четная функция) или

 (для нечетной функции) для любых *х*  и − *х* из области определения функции:

 ;  .

Следовательно,  и , то есть данная функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида).

4. Для исследования функции на экстремум найдем ее первую про-

изводную:

.

*у*′ = 0 при *х* = 0 и *у′* − не существует при *х* = 1. Тем самым имеем

две критические точки *х*1 = 0 и *х*2 = 1. Но точка *х*2 = 1 не принадлежит

области определения функции, экстремума в ней быть не может.

Разобьем числовую ось на три интервала: ( −∞; 0) , (0; 1), (1; ∞) (рис.3).



Рис. 3

В первом и третьем интервалах первая производная отрицательна, здесь функция убывает, во втором интервале – положительна и данная

функция возрастает. При переходе через точку *х* = 0 первая производная меняет свой знак с минуса на плюс, поэтому в этой точке функция имеет минимум: *ymin* = *y*(0) = −1. Значит *А*(0; −1) – точка минимума.

На рис. 1 знаками + , − указаны интервалы знакопостоянства про-

изводной *у*′, а стрелками – возрастание и убывание исследуемой функции.

5. Для определения точек перегиба графика функции и интервалов

выпуклости и вогнутости кривой найдем вторую производную:

 .

*у*″ = 0 при  и *у*″ − не существует при *х* = 1. Разобьем число-

вую ось на три интервала: , , (1; ∞) (рис. 4). 

На первом интервале вторая производная отрицательна и дуга кривой выпукла; на втором и третьем интервалах *у*″ > 0, тем самым график является вогнутым.



Рис. 4

При переходе через точку  вторая производная меняет свой

знак, поэтому  − абсцисса точки перегиба.

Следовательно, − точка перегиба графика функции.

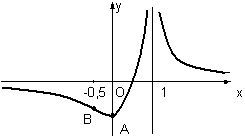
6. *х* = 1 − точка разрыва функции, причем .

Поэтому прямая *х* = 1 является вертикальной асимптотой графика. Для определения уравнения наклонной асимптоты *у = кх* + *b* воспользуемся

формулами  , .

Тогда

, .



При вычислении последнего предела использовалось правило Лопиталя.

Значит, прямая *у =* 0 (ось *Ох*) есть горизонтальная асимптота графика исследуемой функции, представленного на рис. 5.

Рис. 5

**Пример 7.** Сечение оросительного канала имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон пропускная способность канала будет

наибольшей?

Пропускная способность канала зависит от

площади его поперечного сечения: чем больше пло-

щадь трапеции, тем большее количество воды про-

ходит по каналу. Изобразим сечение канала (рис. 6)

Обозначим *АВ=ВС=АD= а*. Найдем площадь

*S* трапеции *АВСD*:

*Решение.*

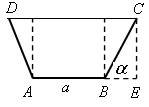


Рис. 6

.

По смыслу задачи угол α изменяется от 0 до . Решение задачи сво-

дится к нахождению наибольшего значения функции *S = S*(*α*) на отрезке

[0;].

Найдем критические точки функции *S*, принадлежащие интервалу

(0; ):



 = 0. Отсюда ,  и ,

.

Найдем значения функции *S* в точке  и на концах отрезка

:

; *S*(0) = 0 ; .

Итак, площадь сечения канала будет наибольшей, если угол наклона

боковой стороны равен 60◦ ( в этом случае верхнее основание трапеции в

два раза больше нижнего).

**2. 3. 3. Вопросы для самоконтроля.**

1. Сформулируйте теорему Ролля. Каков ее геометрический смысл?

2. Сформулируйте теорему Лагранжа. Каков ее геометрический смысл?

3. Сформулируйте достаточные признаки возрастания и убывания функции.

4. Какие точки называются стационарными точками функции?

5. Какие точки называются критическими точками функции?

6. Дайте определения максимума, минимума функции.

7. Что называется экстремумом функции?

8. Назовите необходимое условие экстремума функции.

9. Назовите достаточные признаки экстремума функции.

10. Какая кривая называется выпуклой? вогнутой?

11. Что называется точкой перегиба кривой?

12. Как найти интервалы выпуклости и вогнутости кривой?

13. Сформулируйте достаточный признак существования точки перегиба кривой.

14. Что называется асимптотой кривой?

15. Как найти вертикальные асимптоты кривой?

16. Как найти наклонные асимптоты кривой?

17. Назовите схему исследования функции и построения ее графика.

18. В каких случаях применяется правило Лопиталя при вычислении пределов?

**2. 3. 4. Задания для самостоятельной работы**

1. Найти интервалы возрастания и убывания функции

.

2. Исследовать на экстремум функцию 

3. Исследовать на экстремум функцию  .

4. Открытый сверху резервуар с квадратным дном должен вмещать

108 литров воды. Каковы должны быть размеры резервуара, чтобы на его

изготовление пошло наименьшее количество материала?

5. Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба кривой .

6. Найти асимптоты кривой  .

7. Исследовать функцию  и построить ее график.

**2. 4. Модуль 4. Неопределенный интеграл.**

**2. 4. 1. Содержание модуля.**

Тема 4. 1. Первообразная. Неопределенный интеграл, его свойства. Таблица основных интегралов. Интегрирование заменой переменной и по частям.

Тема 4. 2. Интегрирование рациональных дробей. Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции. Интегрирование некоторых иррациональных выражений.

**2. 4. 2. Методические указания по его изучению.**

После изучения по учебникам теоретического материала разберите реше-

ние примеров 8 - 10.

Для справок приведем следующую таблицу основных неопределенных интегралов.

(I) , где *n* ≠ - 1.

(II) .

(III) .

(IV) .

(V) .

(VI) .

(VII) .

(VIII) .

(IX) .

(X) .

(XI) .

(XII) .

(XIII**)** ,

где *F*(*x*) – первообразная для *f*(*x*).

**Пример 8.** Вычислить неопределенные интегралы:

*а*)  ; *б*)  ; *в*) .

*Решение.*

*а*) Чтобы данный интеграл привести к табличному, положим . Тогда  и .

Имеем

.

*б*) Для вычисления интеграла введем подстановку *sinx = t* .

Имеем *cosxdx = dt* .

Тогда

.

*в*) Под знаком интеграла имеем неправильную рациональную дробь (числитель – многочлен пятой степени, знаменатель – второй). Разделив многочлен  на , в частном получим

 и в остатке .

Тогда

.

Правильную рациональную дробь  представим в виде сле-

дующей суммы элементарных дробей:

.

После приведения в последнем равенстве к общему знаменателю

получаем тождество

; .

Имеем  , отсюда , .

Следовательно,

 и



.

**Пример 9.** Вычислить интегралы:

*а*)  ; *б*)  ; *в*) .

*Решение.*

*а*)Выделяем в знаменателе дроби полный квадрат и применяем формулу (ХI).

 =  =  =

=  =  = .

*б*) Выделим в числителе дроби производную ее знаменателя,

то есть выражение 4*х* – 5, преобразуем дробь, применяем формулы (II) и (ХI).



=  =  +

+  =  +  =

=  + .

*в*) Выделим в числителе дроби производную трехчлена , то есть , преобразуем подынтегральную дробь, применяем формулы (I) и (IX).



=  =  –

 + С =   + С.

**Пример 10.** Вычислить интегралы:

*а*) ; *б*) .

*Решение.* Применяем формулу интегрирования по частям: .

*а*) Положим . Тогда .

По формуле интегрирования по частям получаем:

 =  =

= 

*б*) Пусть *u =x*2, *dv = sinxdx*, тогда *du =* 2*xdx*, .

По приведенной выше формуле имеем:

.

Последний интеграл вычислим этим же способом, положив

*u = x*, *dv = cosxdx*, откуда *du = dx*, *v = sinx.*

Тогда

.

Имеем

.

**2. 4. 3. Вопросы для самоконтроля.**

1. Сформулируйте определение первообразной функции.

2. Что называется неопределенным интегралом от данной функции?

3. Каков геометрический смысл неопределенного интеграла?

4. Перечислите свойства неопределенного интеграла.

5. Напишите формулы таблицы основных интегралов.

6. В чем сущность метода замены переменной при вычислении неопределенных интегралов?

7. Напишите формулу интегрирования по частям в неопределенном интеграле.

8. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить при помощи метода интегрирования по частям.

9. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей.

10. Изложите методы интегрирования простейших рациональных дробей.

**2. 4. 4. Задания для самостоятельной работы**

Вычислить неопределенные интегралы.

1. ****.2. . 3. .

4. . 5. . 6. .

7. . 8. . 9. 

**2. 5. Модуль . Определенный интеграл.**

**2. 5. 1. Содержание модуля.**

Тема 5. 1.Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов. Методы вычисления определенного интеграла по формулам прямоугольников, трапеций, Симпсона. Несобственные интегралы с бесконечными пределами и от неограниченных функций, их основные свойства.

Тема 5. 2. Приложение определенного интеграла.

**2. 5. 2. Методические указания по его изучению.**

После изучения по учебникам теоретического материала разберите реше-

ние примеров 11 - 14.

**Пример 11.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями , .

*Решение*. Найдем абсциссы точек пересечения данной параболы и

прямой (рис. 7):

, , , .

Имеем



= .

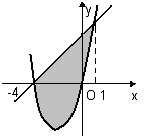


Рис. 7

**Пример 12.** Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ох* одной полуволны синусоиды *y = sinx*.

*Решение*. Если криволинейная трапеция ,ограниченная сверху кри-

вой , прямыми *х = а*, *x = b* и осью *Ох*, вращается вокруг оси *Ох*, то объем *V* тела вращения равен

.

Имеем:

.

**Пример 13.** Найти площадь поверхности эллипсоида, образованного

вращением вокруг оси *Ох* эллипса .

*Решение*. Если непрерывная на отрезке  кривая  вращается вокруг оси *Ох*, то площадь *S* поверхности вращения вычисляется по формуле

. (1)

Из уравнения эллипса находим , откуда . По формуле (1) имеем

.

Для вычисления последнего интеграла применим подстановку

, откуда . Если *х =* 0, то *t =* 0;  при *х =* 2.

Тогда



.

**Пример 14.** Найти координаты центра тяжести однородной плоской

фигуры, ограниченной линиями , *х* = 4.

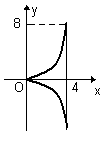
*Решение*. Координаты центра тяжести  однородной криволинейной трапеции, ограниченной кривой , прямыми *х = а*,

*x = b* и осью *Ох*, определяются по формулам

 ; (1)  (2), 

где *S* – площадь криволинейной трапеции.

Данная фигура (рис. 8) симметрична относительно оси *Ох*.



Ее центр тяжести находится на этой оси, поэтому

.

Найдем площадь *S* фигуры:

.

По формуле (1) имеем

Рис. 8

.

Итак, точка  − центр тяжести данной фигуры.

**2. 5. 3. Вопросы для самоконтроля.**

1. Назовите задачи, приводящие к понятию определенного интеграла.

2. Напишите интегральную сумму для функции  на отрезке

.

3. Что называется определенным интегралом от функции  на отрезке ?

4. Каков геометрический смысл определенного интеграла?

5. Перечислите свойства определенного интеграла.

6. Чему равна производная от определенного интеграла с переменным верхним пределом интегрирования?

7. Напишите формулу Ньютона – Лейбница.

8. Напишите формулу замены переменной в определенном интеграле.

9. Чему равен интеграл , если  есть четная функция? нечетная функция?

10. Напишите формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.

11. Сформулируйте определение несобственного интеграла с бесконечными пределами интегрирования.

12. Сформулируйте определение несобственного интеграла от разрывной функции.

13. В каком случае несобственный интеграл называется сходящимся? расходящимся?

14. Как вычисляется площадь плоской фигуры в прямоугольной системе координат с помощью определенного интеграла?

15. Напишите формулы для вычисления объемов тел, образованных вращением плоской фигуры вокруг оси *Ох* ; оси *Оу*.

**2. 5. 4. Задания для самостоятельной работы**

Вычислить определенные интегралы.

1. ****. 2. ****. 3.

4. ****. 5. ****.6. ****.

**2. 6. Модуль 6. Функции многих независимых переменных.**

**2. 6. 1. Содержание модуля.**

Тема 6. 1. Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность. Частные производные. Полный дифференциал, его связь с частными производными. Инвариантность формы полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора. Неявные функции. Теоремы существования. Дифференцирование неявных функций.

Тема 6. 2. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточные условия. Метод наименьших квадратов.

Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применений при поиске оптимальных решений.

**2. 6. 2. Методические указания по его изучению.**

После изучения по учебникам теоретического материала разберите реше-

ние примера 15.

**Пример 15.** Исследовать на экстремум функцию

.

*Решение*. Применим достаточный признак экстремума функции двух независимых переменных, состоящий в следующем.

Пусть - критическая точка функции , имеющей непрерывные частные производные первого и второго порядков.

Обозначим , ,  и составим определитель

.

Если ∆ > 0, то  есть точка экстремума, причем при *А* > 0 – минимума, при *А* < 0 – максимума.

Если ∆ < 0, в точке  экстремума нет.

При ∆ = 0 – требуется дополнительное исследование.

Находим частные производные  и , каждую из них приравняем к нулю и решаем полученную систему уравнений:

; .

Решение системы уравнений  дает *х*1 = − 12, *у*1 = − 6,

, .

Следовательно, данная функция имеет две критические точки:

, .

Найдем частные производные второго порядка:

 ,  , .

Для точки *Р*1 имеем *А* = −4, *В* = 9, *С* = −36, ∆ = 63. Так ∆ > 0 и *А* < 0,

то в точке *Р*1(−12, −6) данная функция имеет максимум: .

Для точки *Р*2 имеем *А =* −4, *В* = 9, *С* = −4,5, ∆ = − 63. Так как ∆ < 0, то

в этой точке экстремума нет.

**2. 6. 3. Вопросы для самоконтроля.**

1. Сформулируйте определение функции двух, трех и большего числа независимых переменных.

2. Что называется областью определения функции двух независимых переменных?

3. Каково геометрическое изображение функции двух переменных?

4. Сформулируйте определение предела функции двух переменных.

5. Что называется частным и полным приращениями функции двух переменных?

6. Какая функция двух переменных называется непрерывной в точке? в области?

7. Сформулируйте определение частных производных первого порядка функции двух независимых переменных. Каков их геометрический смысл?

8. Что называется полным дифференциалом функции двух переменных?

9. Как найти частные производные второго порядка функции двух переменных?

10. Что называется экстремумом функции двух независимых перемен-

ных?

11. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума функции двух переменных.

12. Сформулируйте достаточный признак экстремума функции двух переменных.

**2. 6. 4. Задания для самостоятельной работы**

В задачах 1 – 4найти частные производные первого порядка указанных функций:

1. ****. 2. . 3. ****.

4. .

В задачах 5 – 7найти частные производные второго порядка указанных функций.

5.. 6.  . 7. .

В задачах 8 – 10исследовать на экстремум следующие функции:

8. ****.

9. ****.

10. ****.

**2. 7. Модуль 7. Кратные и криволинейные интегралы.**

**2. 7. 1. Содержание модуля.**

Тема 7. 1.Задачи, приводящие к понятию двойного интеграла (в частности, задача о вычислении объема цилиндрического тела). Двойной интеграл; его определение. Формулировка теоремы о существовании двойного интеграла. Свойства двойного интеграла. Теорема о среднем значении.

Вычисление двойного интеграла по прямоугольной и произвольной областям сведением к повторному интегралу. Перемена порядка интегрирования в повторном интеграле. Переход в двойном интеграле к полярным координатам.

Геометрические и физические приложения двойного интеграла: вычисление объемов тел и площадей, массы плоских фигур, моментов инерции и статистических моментов, координат центра тяжести плоских фигур.

Тема 7. 2. Понятие о тройном интеграле. Задача о вычислении работы переменной силы. Определение криволинейного интеграла по координатам. Его простейшие свойства. Вычисление криволинейного интеграла путем сведения его к определенному интегралу. Криволинейный интеграл по дуге. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования (плоский случай). Нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу. Интеграл по поверхности. Понятие о потоке векторного поля. Дивергенция. Формула Остроградского-Гаусса.

**2. 7. 2. Методические указания по его изучению.**

После изучения по учебникам теоретического материала разберите реше-

ние примеров 16 – 18.

**Пример 16.** Вычислить двойной интеграл , где область *D* ограничена линиями .

*Решение*. Изобразим область интегрирования *D* (рис.9).

Она ограничена снизу гиперболой , сверху прямой *у = х*, справа – прямой *х =* 2.

Для любой точки этой области , а ординаты *у* этих точек изменяются от  до

*у = х.*

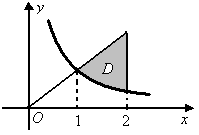


Рис. 9

Поэтому



.

**Пример 17.** Вычислитьдвойнойинтеграл , где область *D* ограничена окружностью .

*Решение*. Запишем уравнение данной окружности в полярной системе координат. Так как , то ,

, , .

Для данной области *D* угол *φ* меняется от *0* до 2π, а полярный

радиус *r* изменяется от *0* до 1. Тогда





**Пример 18.**  Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой  и прямой 

(рис.10).

*Решение*.

Пусть областью *D*  плоскости *хОу* является материальная пластинка,

масса которой распределяется с поверхностной плотностью *ρ=f* (*x,y*). Тогда масса *М* этой пластинки вычисляется по формуле

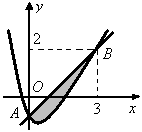
 (1)

Координаты точки , являющейся центром тяжести этой пластинки, определяются по формулам , . (2)

Если поверхностная плотность *ρ* постоянна (пластинка однородна), то из формул (2) следует:

 ,  , (3)

где *S* – площадь области *D.*



Вычислим площадь *S* данной фигуры с по-

мощью двойного интеграла: .

Парабола и прямая пересекаются в точках *А*(0, -1) и *В*(3,2).Область *D* определятся неравенствами , .

Рис. 10

Тогда

 .

Вычислим статические моменты  и  пластинки относительно осей *Ох* и *Оу*:





.



Следовательно,  ,  и точка – центр тяжести данной фигуры.

**2. 7. 3. Вопросы для самоконтроля.**

1. Что называется двойным интегралом от функции двух переменных по данной области?

2. Дайте геометрическое толкование двойного интеграла.

3. Перечислите свойства двойного интеграла.

4. Укажите способы вычисления двойного интеграла в прямоугольной системе координат.

5. Как вычисляется двойной интеграл в полярной системе координат?

6. Напишите формулы для вычисления координат центра тяжести плоских фигур с помощью двойного интеграла.

7. Дайте определение тройного интеграла.

8. Как вычисляется тройной интеграл в прямоугольной системе координат?

9. Как вычисляется тройной интеграл в цилиндрической системе координат?

10. Напишите формулы для вычисления координат центра тяжести тела с помощью тройного интеграла.

11. Что называется криволинейным интегралом по координатам?

12. Перечислите свойства криволинейного интеграла.

13. Укажите способы вычисления криволинейного интеграла.

14. Напишите формулу Грина.

15. Сформулируйте условия независимости криволинейного интеграла по координатам от пути интегрирования.

16. Изложите способ нахождения функции двух переменных по ее полному дифференциалу.

**2. 7. 4. Задания для самостоятельной работы.**

1.Вычислить двойной интеграл , если область *D* есть прямоугольник, ограниченный прямыми *х=2, х=4, у=0, у=3.*

*Ответ*: 86.

В задачах 2, 3вычислить двойные интегралы.

2. ****. 3.  ****.

4.Переходя к полярным координатам, вычислить двойной интграл , где область *D* ограничена прямыми ,  и дугой окружности , лежащей в первой четверти.

5.Найти координаты центра тяжести однородной плоской фигуры, ограниченной параболой  и осью *Ох*.

**2. 8. Модуль 10. Дифференциальные уравнения первого порядка.**

**2. 8. 1. Содержание модуля.**

Тема 8. 1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям. Дифференциальные уравнения первого порядка. Понятие об общем и частном решении. Интегральные кривые. Начальные условия

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения; линейные дифференциальные уравнения.

Формулировка теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения первого порядка. Понятие об особом решении.

Дифференциальное уравнение семейства плоских кривых, зависящих от одного параметра. Задача об ортогональных траекториях. Поле направлений дифференциального уравнения. Изоклины. Приближенное решение дифференциальных уравнений первого порядка (способ Эйлера).

**2. 8. 2. Методические указания по его изучению.**

После изучения по учебникам теоретического материала разберите реше-

ние примера 19.

**Пример 19.**  Решить уравнение .

*Решение*. Разделим обе части уравнения на :

, убеждаемся, что оно – линейное. Положим ,

тогда  и уравнение преобразуется к виду  или .

Так как искомая функция представима в виде произведения двух

вспомогательных функций *u* и *v*, то одну из них можно выбрать произ-

вольно. Выберем в качестве *v* какой-либо частный интеграл уравнения

. (1)

Тогда для отыскания функции *u* имеем уравнение

. (2)

Получаем два уравнения с разделяющимися переменными.

Решаем первое уравнение:

 ,  , , , , .

Подставим  в уравнение (2) и решим его:

,  , , .

Следовательно,  - общее решение данного уравнения.

**2. 8. 3. Вопросы для самоконтроля.**

1. Что называется дифференциальным уравнением?

2. Что называется порядком дифференциального уравнения?

3. Что называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка?

4. Что называется частным решением дифференциального уравнения

5. Каков геометрический смысл частного решения дифференциального уравнения первого порядка?

6. Приведите примеры дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

7. Какое дифференциальное уравнение первого порядка называется линейным? уравнением Бернулли? Укажите способ их решения.

**2. 8. 4. Задания для самостоятельной работы.**

В задачах 1 – 3найти общие интегралы следующих уравнений.

1.. 2. ****.

3. ****.

В задачах 4, 5 найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям.

4.; . 5. ; .

**2. 9. Модуль 9. Дифференциальные уравнения высших порядков.**

**2. 9. 1. Содержание модуля.**

Тема 9. 1. Понятие о дифференциальных уравнениях высших порядков, Общее и частное решения. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижения порядка. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка. Свойства их решений. Линейно-независимые решения. Структура общего решения.

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Запись общего решения в зависимости от корней характеристического уравнения.

Тема 9. 2.Структура общего решения линейного неоднородного уравнения. Теорема наложения. Метод вариации произвольных постоянных. Отыскание частных решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в случае специальных правых частей уравнения (многочлен, *Aekx*, *Acosnx+Bsinnx*,).

Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами высших порядков. Системы линейных дифференциальных уравнений постоянными коэффициентами, простейшие приемы решения.

**2. 9. 2. Методические указания по его изучению.**

После изучения по учебникам теоретического материала разберите реше-

ние примеров 20 – 22.

**Пример 20.** Найти частное решение уравнения , удовлетворяющее начальным условиям: .

*Решение*. Для нахождения общего решения данного однородного уравнения составляем характеристическое уравнение *к2 −*4*к* +3 = 0, имеющее корнями числа *к*1 = 1, *к*2 = 3.

Общим решением данного уравнения является функция .

Используя начальные условия, определяем значения постоянных *С*1

и *С*2 . Подставляя в общее решение заданные значения *х* = 0, *у* = 6 (первое

начальное условие), получим 6 = *С*1 + *С*2 .

Дифференцируя общее решение уравнения, имеем  и подставляя в полученное выражение *х* = 0, *у* = 10 (второе начальное условие), получаем второе уравнение с неизвестными *С*1 и *С*2 :

10 = *С*1 + 3*С*2 .

Решая полученную систему уравнений

 , находим *С*1 = 4, *С*2 = 2 .

Подставляя значения *С*1 = 4 и *С*2 = 2 в общее решение уравнения,

получим искомое частное решение данного уравнения, удовлетворяющее

заданным начальным условиям: .

**Пример 21.** Решить уравнение .

*Решение*. Находим общее решение однородного уравнения

. Его характеристическое уравнение  имеет корни , . Тогда .

Найдем частное решение  данного неоднородного уравнения. Его

правая часть есть функция . Так число 0 не является корнем

характеристического уравнения,  есть многочлен второй степени, то

есть . Отсюда находим ,  и, подставляя , ,  в данное уравнение, получаем тождество

 или .

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *х* в обеих час-

тях последнего равенства (только при этом условии оно будет тождеством)

получаем систему уравнений

 , из которой находим *А* = − 3, *В* = − 3, *С* = − 4,5.

Следовательно,  и искомым общим решением дан

ного неоднородного уравнения является .

**Пример 22.** Найти частное решение уравнения , удовлетворяющее начальным условиям , .

*Решение*. Характеристическое уравнение  имеет рав-

ные корни , поэтому .

Правая часть данного уравнения есть сумма показательной функции

 и многочлена первой степени 2*х* – 4 . Так числа −2 и 0 не являются корнями характеристического уравнения, то .

Подставляя , ,  в данное уравнение, имеем:

.

Приравнивая коэффициенты подобных членов обеих частей этого

тождества, получаем систему уравнений

 , откуда *А* = 1, *В* = 2, *С* = 0.

Следовательно,  и общим решением данного уравнения

является функция .

Используя начальные условия, определим значения постоянных *С*1

и *С*2 . Так как , то *С*1+1=1, *С*1=0.

Находим производную .

Тогда *С*1 + *С*2 – 2 + 2 = 1, *С*1 + *С*2 = 1, *С*2 = 1.

Итак,  − искомое частное решение.

**2. 9. 3. Вопросы для самоконтроля.**

1. Какое уравнение называется линейным неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка?

2. Какое уравнение называется линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка?

3. Какое уравнение называется характеристическим для линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка?

4. Какой вид имеет общее решение однородного дифференциального уравнения второго порядка в зависимости от дискриминанта характеристического уравнения?

5. Как найти общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами?

6. Какой вид имеет частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если его правая часть есть многочлен? показательная функция?

тригонометрическая функция? комбинация этих функций?

7. Назовите способ решения линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами порядка выше второго.

**2. 9. 4. Задания для самостоятельной работы.**

В задачах 1 – 3найти общее решение данных уравнений:

1. . 2. . 3. .

В задачах 4 – 6найти общее решение данных уравнений.

4. .

5. .

6. .

**2. 12. Модуль 10. Числовые и функциональные ряды.**

**2. 10. 1. Содержание модуля.**

Тема 10. 1.Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия с рядами. Ряды с положительными членами. Признаки сходимости. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Ряды с комплексными членами, методы исследования на сходимость.

Тема 10. 2. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Свойства степенных рядов.

Разложение функций в степенные ряды. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

Тема 10. 3. Тригонометрическая система функций. Ряд Фурье. Разложение функции в ряд Фурье. Формулировка условий разложимости в случае равномерной сходимости. Интеграл Фурье. Преобразование Фурье, его свойства и применение.

**2. 10. 2. Методические указания по его изучению.**

После изучения по учебникам теоретического материала разберите реше-

ние примеров 23 – 27.

**Пример 23.** Исследовать сходимость ряда .

*Решение*. Применим признак Даламбера.

Если в ряде  с положительными членами существует предел при  отношения последующего члена ряда к предыдущему, то есть

, то при  ряд сходится, при  - расходится. При  требуется дополнительное исследование (применение других признаков сходимости).

В задаче  ; ;

.

Так , по признаку Даламбера данный ряд сходится.

**Пример 24.** Исследовать сходимость ряда .

*Решение*. Члены данного знакочередующегося ряда монотонно убы-

вают по абсолютной величине:  и .

По признаку Лейбница ряд сходится.

Ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, так-

же сходится по признаку Даламбера:

.

Следовательно, данный ряд сходится абсолютно.

**Пример 25 .** Найти область сходимости ряда .

*Решение.* Находим радиус сходимости данного степенного ряда:

 = 

= .

Следовательно,  – интервал сходимости данного ряда.

Исследуем границы найденного интервала.

При  получаем числовой ряд . Так как

 =  = 1, то для этого ряда не выполняется необходимый признак сходимости, поэтому он расходится.

При  получаем числовой расходящийся знакочередующийся ряд (для него не выполняется признак Лейбница).

Следовательно, областью сходимости данного ряда является открытый интервал .

**Пример 26.**  Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом *Т=*2*π* функцию

.

*Решение*. *Рядом Фурье* для функции  (периодической с периодом 2π) называется тригонометрический ряд

, (1)

коэффициенты которого (*коэффициенты Фурье*) находятся по следующим формулам:

, , (2)

 ,  (3)

Данная функция удовлетворяет условиям теоремы о разложимости в ряд Фурье. Вычислим коэффициенты Фурье.

 .

Для вычисления последнего интеграла воспользуемся формулой ин-

тегрирования по частям.

Пусть  , . Тогда , .

Имеем 

 .





.

Итак, разложение данной функции в ряд Фурье имеет вид

.

**Пример 27.**  Разложить в ряд Фурье функцию , периодическую с периодом *Т* = 4.

*Решение*. Если функция  - периодическая с периодом , то коэффициенты ряда Фурье

 (4)

определяются по формулам:

; (5)

. (6)

По формулам (5) и (6) находим коэффициенты Фурье:

;



.



Подставляя найденные коэффициенты в формулу (4), получим сле-

дующее разложение данной функции в ряд Фурье:



.

**2. 10. 3. Вопросы для самоконтроля.**

1. Что называется числовым рядом?

2. Что называется *n* – ой частичной суммой числового ряда?

3. Что называется суммой числового ряда?

4. В чем состоит необходимый признак сходимости числового ряда?

5. Сформулируйте достаточные признаки сходимости числовых рядов с положительными членами, основанные на сравнении рядов.

6. Сформулируйте признак Даламбера сходимости рядов с положительными членами.

7. В чем заключается интегральный признак Коши сходимости рядов с положительными членами?

8. Какой ряд называется гармоническим? Выполняется ли для него необходимый признак сходимости? Сходится ли гармонический ряд?

9. Какой ряд называется знакочередующимся?

10. Сформулируйте признак Лейбница о сходимости знакочередующегося ряда.

11. Сформулируйте правило оценки остатка знакочередующегося ряда.

12. Какой ряд называется абсолютно сходящимся?

13. Какой ряд называется условно сходящимся?

14. Назовите свойства абсолютно сходящихся рядов.

15. Какой ряд называется функциональным?

16. Что называется областью сходимости функционального ряда?

17. Какой ряд называется степенным?

18. Сформулируйте теорему Абеля о сходимости степенного ряда.

19. Как найти область сходимости степенного ряда?

20. Сформулируйте теоремы о почленном дифференцировании и интегрировании степенных рядов.

21. Какой степенной ряд называется рядом Тейлора данной функции.

22. Как определяются коэффициенты ряда Тейлора?

23. Напишите формулу остаточного члена ряда Тейлора.

24. Назовите необходимый и достаточный признаки разложения функции в ряд Тейлора.

25. Какой степенной ряд называется рядом Маклорена ?

26. Как определяются коэффициенты ряда Маклорена?

27. Напишите разложения в ряд Маклорена функций *ex*, *sinx*, *cosx*,

*ln*(1 *+ x*).

28. Какой ряд называется тригонометрическим рядом Фурье?

29. Сформулируйте условия разложимости функции в ряд Фурье.

30. Напишите формулы коэффициентов Фурье для периодической функции с периодом 2π.

31. Напишите формулы коэффициентов Фурье для четных и нечетных периодических функций с периодом 2π.

32. Напишите формулы коэффициентов Фурье для функций с произвольным периодом.

33. Изложите способ разложения в ряд Фурье функций, заданных на полупериоде.

**2. 10. 4. Задания для самостоятельной работы.**

В задачах 1 – 5 исследовать сходимость числовых рядов.

1. . 2.  . 3. .

4.  . 5. .

6. Найти область сходимости степенного ряда **** .

7. Разложить в ряд Фурье периодическую с периодом *Т =* 2*π*

функцию

.

**Раздел 3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ И**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ИХ ВЫПОЛНЕНИЮ**

**3. 1. Методические указания по выполнению контрольных работ**

Основной формой обучения студента-заочника является самостоятельная работа, состоящая из изучения материала, чтения учебника, решения задач, выполнения контрольной работы. В период лабораторно-экзаменационной сессии для студентов проводятся лекции и практические занятия, носящие обзорный характер.

При изучении учебника следует воспроизводить на бумаге в форме конспекта основные моменты рассматриваемого вопроса программы, обращая особое внимание на определение основных понятий курса высшей математики, формулировки теорем, формулы.

Работа над учебником должна сопровождаться решением задач.

В соответствии с действующим учебным планом студенты изучают курс математического анализа в течение первого года обучения.

При выполнении контрольной работы следует руководствоваться следующими указаниями:

1.Контрольная работа должна выполняться в отдельной тетради (в клетку), на внешней обложке которой должны быть написаны фамилия и инициалы студента, его шифр, дата отсылки работы в институт, домашний адрес.

2.Задачи контрольной работы следует располагать в порядке возрастания их номеров. Перед решением каждой задачи нужно полностью переписать ее условие. На каждой странице тетради нужно оставлять поля шириной 3-4 см для замечаний преподавателя.

3. Решение задач следует излагать подробно, делая соответствующие ссылки на вопросы теории с указанием необходимых теорем и формул. Решение задач геометрического содержания должно сопровождаться чертежами (желательно на миллиметровой бумаге).Объяснения к решению задачи должны соответствовать обозначениям, приведенным на чертежах.

4. Контрольная работа должна выполняться ***самостоятельно***, в противном случае студент лишается возможности проверить степень своей подготовленности по изучаемой дисциплине.

5. Получив из университета прорецензированную работу, студент должен исправить отмеченные преподавателем ошибки и недочеты. Если работа не зачтена, то в кратчайший срок следует выполнить все требования рецензента и представить работу на повторное рецензирование, приложив при этом и первоначально выполненную работу.

6. В межсессионный период или во время лабораторно-экзаменационной сессии студент должен пройти на кафедре высшей математики собеседование по зачтенной контрольной работе.

7. Студент выполняет вариант контрольной работы, совпадающий с последней цифрой его учебного шифра. При этом, если предпоследняя цифра учебного шифра есть число нечетное (1, 3, 5, 7, 9) , то номера задач для соответствующего варианта даны в таблице 1. Если же предпоследняя цифра учебного шифра есть число четное (2, 4, 6, 8) или ноль, то номера задач даны в таблице 2.

Таблица 1

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  варианта | Номера задач | | | | | | | | |
| 1 | 1 | 21 | 41 | 61 | 71 | 91 | 111 | 131 | 151 |
| 2 | 2 | 22 | 42 | 62 | 72 | 92 | 112 | 132 | 152 |
| 3 | 3 | 23 | 43 | 63 | 73 | 93 | 113 | 133 | 153 |
| 4 | 4 | 24 | 44 | 64 | 74 | 94 | 114 | 134 | 154 |
| 5 | 5 | 25 | 45 | 65 | 75 | 95 | 115 | 135 | 155 |
| 6 | 6 | 26 | 46 | 66 | 76 | 96 | 116 | 136 | 156 |
| 7 | 7 | 27 | 47 | 67 | 77 | 97 | 117 | 137 | 157 |
| 8 | 8 | 28 | 48 | 68 | 78 | 98 | 118 | 138 | 158 |
| 9 | 9 | 29 | 49 | 69 | 79 | 99 | 119 | 139 | 159 |
| 0 | 10 | 30 | 50 | 70 | 80 | 100 | 120 | 140 | 160 |

Таблица 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Номер  варианта | Номера задач | | | | | | | | |
| 1 | 11 | 31 | 51 | 61 | 81 | 101 | 121 | 141 | 161 |
| 2 | 12 | 32 | 52 | 62 | 82 | 102 | 122 | 142 | 162 |
| 3 | 13 | 33 | 53 | 63 | 83 | 103 | 123 | 143 | 163 |
| 4 | 14 | 34 | 54 | 64 | 84 | 104 | 124 | 144 | 164 |
| 5 | 15 | 35 | 55 | 65 | 85 | 105 | 125 | 145 | 165 |
| 6 | 16 | 36 | 56 | 66 | 86 | 106 | 126 | 146 | 166 |
| 7 | 17 | 37 | 57 | 67 | 87 | 107 | 127 | 147 | 167 |
| 8 | 18 | 38 | 58 | 68 | 88 | 108 | 128 | 148 | 168 |
| 9 | 19 | 39 | 59 | 69 | 89 | 109 | 129 | 149 | 169 |
| 0 | 20 | 40 | 60 | 70 | 90 | 110 | 130 | 150 | 170 |

3. 2. Задачи для контрольной работы

В задачах 1 – 20 вычислить указанные пределы.

** ;  ;**

**  ; .**

** ;  ;**

**  ; .**

** ;  ;**

**  ;  .**

** ;  ;**

**  ; .**

** ;  ;**

** ; .**

** ;  ;**

** ; .**

** ;  ;**

** ;  .**

** ;  ;**

**  ; .**

** ;  ;**

** ; .**

** ;  ;**

**  ;  .**

** ;  ;**

** ; .**

** ;  ;**

** ; .**

** ; ;**

** ;  .**

** ;  ;**

**;  .**

** ;  ;**

**  ; ;**

** ;  ;**

** ; .**

** ;  ;**

**  ; .**

** ;  ;**

**  ;  ;**

** ; ;**

**  ;  .**

** ;  ;**

**  ; .**

В задачах 21 – 40 найти производные данных функций.

21. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

22. *а*) **** ; *б*) **** ;

*в*) **** .

23. *а*) **** ; *б*) **** ;

*в*) **** .

24. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

25. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

26. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) ****.

27. *а* ) ****; *б*) ****;

*в*) ****.

28. *а*) **** ; *б*) **** ;

*в*) **** .

29. *а*) ****;*б*) **** ;

*в*) **** .

30. *а)* ****;*б*) **** ;

*в*) ****.

31. *а*) **** ; *б*) **** ;

*в*) ****.

32. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

33. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

34. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

35. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

36. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

37. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

38. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

39. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

40. *а*) **** ;*б*) **** ;

*в*) **** .

В задачах 41 – 60 исследовать данные функции методами дифференциального исчисления и построить их графики. Исследование функции рекомендуется проводить по следующей схеме: 1) найти область определения функции; 2) исследовать функцию на непрерывность; 3) определить, является ли данная функция четной, нечетной; 4) найти интервалы возрастания и убывания функции и точки ее экстремума; 5) найти интервалывыпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции; 6) найти асимптоты графика функции.

41. **** .42. **** . 43. **** .

44. ** .** 45. **** . 46. **** .

47. **** .48. **** .49. **** .

50. **** .51. **** .52. **** .

53. ****. 54. **** .55. **** .

56. ****.57. **** .58. **** .

59. **** . 60. **** .

61. Из всех прямоугольников, вписанных в круг радиуса *R*, найти тот, который имеет наибольшую площадь.

62. Каковы радиус основания *R* и высота *Н* открытого цилиндрического бака данного объема *V*, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество листового металла?

63. Сечение тоннеля имеет форму прямоугольника, завершенного сверху полукругом. Периметр сечения 18 м. При каком радиусе полукруга площадь сечения будет наибольшей?

64. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, который можно вписать в эллипс .

65. Найти наибольший объем цилиндра, полная поверхность которого равна *S*.

66. Найти наибольший объем конуса, образующая которого равна *l.*

67. Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

68. Сумма двух положительных чисел равна *а*. Каковы эти числа, если сумма их кубов будет наименьшей?

69. Найти высоту цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса *R*.

70. На параболе  найти точку, наименее удаленную от прямой .

В задачах 71 – 90 вычислить неопределенные интегралы.

**** 71. *а*) ****;*б*) **** ;*в*) ****.****

72. *а*) ****;*б*) **** ; *в*) ****.****

73. *а*) ****;*б*) **** ;*в*) ****.****

74. *а*) ****;*б*) **** ;*в*) ****.****

75. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

76. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

77. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

78. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

79. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

80. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

81. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

82. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

83. *а*) ; *б*)  ; *в*) . 84. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

85. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

 86. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

87. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

88. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

89. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

90. *а*) ; *б*)  ; *в*) .

В задачах 91 – 100 вычислить площади фигуры, ограниченных указанными линиями. Сделать чертеж.

91.  92. 

93.  94. 

95.  96. 

97.  98. 

99.  100. 

В задачах 101 – 105 вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ох* фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

101. .

102. .

103. .

104. .

105.  (одна полуволна) ; *у* = 0 .

В задачах 106 – 110 вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Оу* фигуры, ограниченной указанными линиями. Сделать чертеж.

106. .

107. .

108. .

109. 

110. .

В задачах 111 – 130 функцию  исследовать на экстремум.

111. .

112. .

113. .

114. .

115. .

116. .

117. .

118. .

119.  .

120. .

121. .

122. .

123. .

124. .

125. .

126. .

127. .

128. .

129. .

130. .

В задачах 131 - 150 найти общее решение дифференциальных уравнений первого порядка.

131.  132. 

133.  134. 

135.  136. 

137.  138. 

139.  140. 

141.  142. 

143. **** 144. ****

145. **** 146. ****

147. **** 148. ****

149. **** 150. ****

В задачах 151 – 170 найти частное решение дифференциального уравнения второго порядка, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

151. **.**

152. **.**

153. **.**

154. **.**

155. **.**

156. **.**

157. **.**

158. **.**

159. **.**

160. **.**

161. **.**

162. **.**

163. **.**

164. **.**

165. **.**

166. **.**

167. **.**

168. **.**

169. ** .**

170. **.**

**Оглавление**

Раздел 1. Общин методические указания по изучению дисциплины.

1. 1. Цели и задачи дисциплины ……………………………….

1. 2. Библиографический список ………………………………

1. 3. Распределение учебного времени по модулям (разделам)

и темам дисциплины …………………………………………………………

Раздел 2. Содержание учебных модулей дисциплины и методические

указания по их изучению…………………………………………………….

Раздел 3. Задания для контрольных работ и методические указания

по их выполнению ……………………………………………………………

3. 1. Методические указания по выполнению контрольных

работ ………………………………………………………………………….

3. 2. Задания для контрольных работ …………………………