

а) найти наименьшее Тейлора I и II степени $T_1(x)$ и $T_2(x)$ где $f(x) = \frac{x^4}{x^3-1}$ в точке $x_0 = 0,5$.

Решение. По формуле Тейлора первой и второй степени име-

ют вид

$$T_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0),$$

$$T_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2.$$

Имеем

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3-1}; \quad f(x_0) = f(0,5) = -\frac{1}{14};$$

$$f'(x) = \frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2}; \quad f'(x_0) = f'(0,5) = -\frac{31}{49};$$

$$f''(x) = \frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3}; \quad f''(x_0) = f''(0,5) = -4\frac{262}{343}.$$

Следовательно,

$$T_1(x) = -\frac{31}{49}x + \frac{12}{49}; \quad T_2(x) = -2\frac{430}{343}x^2 + 1\frac{256}{343}x - \frac{120}{343}.$$

Геометрически $y = T_1(x) = -\frac{31}{49}x + \frac{12}{49}$ представляет собой касательную к графику данной функции в точке $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{14})$, а $y = T_2(x) = -2\frac{430}{343}x^2 + 1\frac{256}{343}x - \frac{120}{343}$ — параболу, имеющую с графиком функции в этой точке общую касательную и одинаковую кривизну (рис. II).

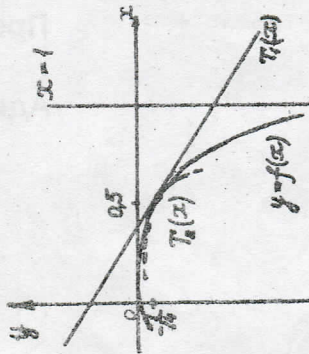


Рис. II

2) Построить разложение функции $y = f(x)$, $y = T_1(x)$ и $y = T_2(x)$ в окрестности т. x_0

Варианты заданий на индивидуальную самостоятельную работу

Вариант 1

- 1) $y = \frac{x^3 - 5x + 6}{x}$;
- 2) $y = \frac{x}{1+x^2}$; $[0; 3]$;
- 3) $y = \sqrt{x}$; $x = 82$;
- 4) $y = \frac{x^2 - 5x + 6}{x}$; $x_0 = 1$.

Вариант 2

- 1) $y = \frac{(x-2)^4}{x^3}$;
- 2) $y = x^2(8-x)$; $[0; 7]$;
- 3) $y = \cos x$; $x = 32^\circ$;
- 4) $y = \frac{(x-2)^4}{x^2}$; $x_0 = 3$.

Вариант 3

- 1) $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$;
- 2) $y = x - 2\sqrt{x+2} + 4$; $[-1.5; 2]$;
- 3) $y = \lg x$; $x = 46^\circ$;
- 4) $y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$; $x_0 = 2$.

Вариант 4

- 1) $y = \frac{3\sqrt{x}}{1+x}$;
- 2) $y = x^2 + \frac{4}{x} - 4$; $[1; 2]$;
- 3) $y = e^x$; $x = 1.8$;
- 4) $y = \frac{3\sqrt{x}}{1+x}$; $x_0 = 1$.

Вариант 5

- 1) $y = x^2 e^x$;
- 2) $y = 5 - x - \frac{1}{2x^2}$; $[0.5; 1]$;
- 3) $y = \sqrt{x}$; $x = 31$;
- 4) $y = x^2 e^{-x}$; $x_0 = 1$.

Вариант 6

- 1) $y = \frac{x^2 - 1}{x}$;
- 2) $y = x^2 \sqrt{x-1}$; $[-1; 2]$;

$$3) y = \sin x; x = 44^\circ; 4) y = \frac{x^2 - 1}{x}; x_0 = 0.5.$$

Вариант 7

$$1) y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}; 2) y = 2\sqrt{x} - x; [0, 3]; 3) y = \lg x; x = 58^\circ; 4) y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}; x_0 = 0.$$

Вариант 8

$$1) y = \frac{x^3}{x^2 - 3}; 2) y = 3 - 2x^2; [3, 7]; 3) y = \arctg x; x = 1.1; 4) y = \frac{x^3}{x^2 - 5}; x_0 = -1.$$

Вариант 9

$$1) y = \frac{x^3}{(x-2)^2}; 2) y = x^4 + 4x; [-2, 2]; 3) y = \sqrt[3]{x}; x = 254; 4) y = \frac{x^3}{(x-2)^2}; x_0 = -2.$$

Вариант 10

$$1) y = \frac{(x+1)(x+2)}{x}; 2) y = \frac{x^2}{x^4 + 4}; [-2, 3]; 3) y = \sin x; x = 62^\circ; 4) y = \frac{(x+1)(x+2)}{x}; x_0 = -1.$$

Вариант 11

$$1) y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}; 2) y = 8(x-x)^4; [-1, 4]; 3) y = \lg x; x = 28^\circ; 4) y = \frac{(x-1)^3}{(x+1)^2}; x_0 = 0.$$

Вариант 12

$$1) y = \frac{x^2(x^2+2)}{(x-1)^3}; 2) y = \frac{4x}{2+x^2}; [-2, 2]; 3) y = \arctg x; x = 0.8; 4) y = \frac{x^2(x^2+2)}{(x-1)^3}; x_0 = -1.$$

Вариант 13

$$1) y = 2x - \lg x; x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]; 2) y = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{8}{x}; [-4, 1]; 3) y = \sqrt[3]{x}; x = 26; 4) y = 2x - \lg x; x_0 = -\frac{1}{4}.$$

Вариант 14

$$1) y = \frac{1-x}{1+x^2}; 2) y = x - 4\sqrt{x+2}; [4, 9]; 3) y = \cos x; x = 58^\circ; 4) y = \frac{1-x}{1+x^2}; x_0 = 0.$$

Вариант 15

$$1) y = \frac{x^3}{x^4 - 4}; 2) y = x + \frac{16}{x} - 5; [1, 4]; 3) y = \lg x; x = 45^\circ; 4) y = \frac{x^3}{x^2 - 4}; x_0 = 1.$$

Вариант 16

$$1) y = \frac{x^3 + 4}{x^2}; 2) y = x(32 - x^3); [-1, 3]; 3) y = \sqrt{x}; x = 63; 4) y = \frac{x^3 + 4}{x^2}; x_0 = -2.$$

Вариант 17

$$1) y = x - \frac{\ln x}{x}; 2) y = \frac{1}{x} + x - 5; [1, 5]; 3) y = e^x; x = 27; 4) y = x - \frac{\ln x}{x}; x_0 = 2.$$

Вариант 18

$$1) y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}; 2) y = 2\sqrt{x} - 2x + 3; [\frac{1}{4}, 4]; 3) y = \sqrt{x}; x = 726; 4) y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 1}; x_0 = -3.$$

Вариант 19

$$1) y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}; 2) y = 4x + \frac{2}{x^2} - 5; [0.5, 2]; 3) y = \sin x; x = 31^\circ; 4) y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}; x_0 = 1.$$

Вариант 20

- 1) $y = \frac{2x^3}{4-x^2}$; 2) $y = 4\sqrt{x-1} - x - 1$; $[1; 10]$;
 3) $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 62$; 4) $y = \frac{2x^3}{4-x^2}$; $x_0 = 1$.

Вариант 21

- 1) $y = xe^{\frac{1}{x}}$; 2) $y = 8x + \frac{4}{x} - 15$; $[0.5; 2]$;
 3) $y = \sqrt{x^3 + 7x}$; $x = 0.988$; 4) $y = xe^{\frac{1}{x}}$; $x_0 = -1$.

Вариант 22

- 1) $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$; 2) $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$; $[0; 1]$;
 3) $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 27.27$; 4) $y = \sqrt[3]{6x^2 - x^3}$; $x_0 = 2$.

Вариант 23

- 1) $y = -\sqrt[3]{x^3 + 6x^2}$; 2) $y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2}$; $[0.5]$;
 3) $y = x^5$; $x = 3.003$; 4) $y = -\sqrt[3]{x^3 + 6x^2}$; $x_0 = -2$.

Вариант 24

- 1) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}$; 2) $y = x - 4\sqrt{x+2} + 8$; $[-1; 7]$;
 3) $y = \sqrt[3]{3x + \cos x}$; $x = 0.01$; 4) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{x-1}$; $x_0 = -1$.

Вариант 25

- 1) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$; 2) $y = \sin 2x - x$; $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$;
 3) $y = \sqrt[4]{2x - \sin \frac{\pi x}{2}}$; $x = 1.01$; 4) $y = \sqrt{\frac{x^3}{x-2}}$; $x_0 = 4$.

Вариант 26

- 1) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$; 2) $y = \frac{4x}{x^2 + 4}$; $[-1; 4]$;
 3) $y = \sqrt{4x-1}$; $x = 2.53$; 4) $y = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$; $x_0 = 1$.

Вариант 27

- 1) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$; 2) $y = \sqrt{2(x-1)^2(x-4)}$; $[0; 4]$;
 3) $y = \frac{1}{\sqrt{2x^3+x+1}}$; $x = 0.984$; 4) $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$; $x_0 = 0$.

Вариант 28

- 1) $y = \frac{\sqrt{x^2-31}}{x}$; 2) $y = \sin x + \cos x$; $[0, \frac{3\pi}{2}]$;
 3) $y = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$; $x = 1.508$; 4) $y = \frac{\sqrt{x^2-31}}{x}$; $x_0 = 1$.

Вариант 29

- 1) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$; 2) $y = \sqrt{x^2(x-3)}$; $[-0.5; 3.5]$;
 3) $y = \sqrt{1+x+\sin x}$; $x = 0.005$; 4) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$; $x_0 = 1$.

Вариант 30

- 1) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$; 2) $y = \sqrt[3]{2x^3(x-3)}$; $[-1; 6]$;
 3) $y = \arcsin 2x$; $x = 0.03$; 4) $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$; $x = 2$.