$$x_4^{\text{кас}} = 1,4626 - \frac{0,0004}{-3,4328} = 1,4625, \quad \text{тогда} \quad [a_4;b_4] = [1,4625;1,4655].$$

Найдем длину отрезка $[a_4;b_4]$:

$$\left|x_4^{\text{кас}} - x_4^{\text{хорд}}\right| = |1,4655 - 1,4625| = 0,003.$$

Длина отрезка меньше требуемой погрешности 0,01.

Искомый корень $x \approx 1,46$.

Задача 2. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$ и построить ее график.

Решение. Областью определения функции, как это следует из ее аналитического выражения, является вся числовая ось, кроме точки $x = 1$, т.е. область определения функции состоит из двух неограниченных интервалов $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$.

Так как область определения функции несимметрична относительно начала координат, то исследуемая функция не является ни четной, ни нечетной; она также не является периодической.

Точка $x = 1$ является для данной функции точкой разрыва 2-го рода, а бесконечные интервалы $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$ являются для нее интервалами непрерывности.

Выясним вопрос о существовании вертикальной асимптоты. Очевидно, что

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{x^4}{x^3 - 1} = -\infty; \quad \lim_{x \to 1+0} \frac{x^4}{x^3 - 1} = +\infty,$$

поэтому график исследуемой функции имеет вертикальную асимптоту $x = 1$.

Из уравнений $f(x) = 0$ и $y = f(x)$ непосредственно следует, что график функции пересекает координатные оси в точке $(0;0)$.

Исследуем поведение функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$. Имеем

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x^3 - 1} = +\infty; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{x^3 - 1} = -\infty,$$

т.е. функция $\dfrac{x^4}{x^3 - 1}$ является бесконечно большой при $x \to +\infty$ и бесконечно малой при $x \to -\infty$, поэтому горизонтальных асимптот график данной функции не имеет.

Выясним вопрос о существовании наклонных асимптот $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ графика функции при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Так как

$$k_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4}{\left(x^3-1\right)x}=1;\; b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=0;$$

$$k_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{\left(x^3-1\right)x}=1;\; b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^4}{x^3-1}-x\right)=0,$$

то график функции имеет наклонную асимптоту $y=x$ и при $x\to+\infty$, и при $x\to-\infty$.

Для нахождения точек возможного экстремума и интервалов монотонности вычислим первую производную функции и приравняем ее к нулю:

$$f'(x)=\frac{x^3\left(x^3-4\right)}{\left(x^3-1\right)^2};\quad \frac{x^3\left(x^3-4\right)}{\left(x^3-1\right)^2}=0\qquad (x\neq1).$$

Находим точки стационарности функции $x=0$ и $x=\sqrt[3]{4}\approx1{,}587$.

Таким образом, критическими по первой производной (с учетом точки $x=1$, где $f'(x)$ не существует) точками для $f(x)$ являются: $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=\sqrt[3]{4}$. Они разбивают область определения функции на четыре интервала: $(-\infty;0)$; $(0;1)$; $\left(1;\sqrt[3]{4}\right)$ и $\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)$, на каждом из которых $f'(x)$ сохраняет знак.

Так как $f'(x)>0$ в интервалах $(-\infty;0)$, $\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)$ и $f'(x)<0$ в интервалах $(0;1)$, $\left(1;\sqrt[3]{4}\right)$, то функция $f(x)$ монотонно возрастает в интервалах $(-\infty;0)$, $\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)$ и монотонно убывает в интервалах $(0;1)$, $\left(1;\sqrt[3]{4}\right)$.

При переходе x через точку $x_1=0$ слева направо $f'(x)$ меняет знак с «+» на «–», при переходе x через точку $x_3=\sqrt[3]{4}$ слева направо $f'(x)$ меняет знак с «–»

на «+». Следовательно, точка $x_1=0$ является точкой максимума, причем максимальное значение функции $f(0)=0$, а точка $x_3=\sqrt[3]{4}$ является точкой минимума, причем минимальное значение функции $f\left(\sqrt[3]{4}\right)=\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$.

Результаты сводим в табл.2.

Таблица 2

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$\left(1;\sqrt[3]{4}\right)$	$\sqrt[3]{4}$	$\left(\sqrt[3]{4};+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	–	Не существует	–	0	+
$f(x)$	$-\infty\nearrow0$	0 max	$0\searrow-\infty$	Не определена	$+\infty\searrow\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$	$\frac{4}{3}\sqrt[3]{4}$	$\frac{4}{3}\nearrow+\infty$

В нижней строке табл.2 символ $-\infty\nearrow0$ означает монотонное возрастание от $-\infty$ до 0, а символ $0\searrow-\infty$ – монотонное убывание значений функции от 0 до $-\infty$; для других интервалов – аналогично.

Для нахождения возможных точек перегиба, интервалов выпуклости и вогнутости вычислим вторую производную функции и приравняем ее нулю:

$$f''(x)=\frac{6x^2\left(x^3+2\right)}{\left(x^3-1\right)^3};\qquad \frac{6x^2\left(x^3+2\right)}{\left(x^3-1\right)^3}=0,\; x\neq1.$$

Отсюда находим $x=0$ и $x=-\sqrt[3]{2}$ – точки стационарности $f'(x)$. Таким образом, критическими по второй производной (с учетом точки $x=1$, где $f''(x)$ не существует) точками для $f(x)$ являются: $x_1=-\sqrt[3]{2}$, $x_2=0$, $x_3=1$. Они разбивают область определения функции на четыре интервала $\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right)$, $\left(-\sqrt[3]{2};0\right)$, $(0;1)$ и $(1;+\infty)$, в которых $f''(x)$ сохраняет знак.

Так как $f''(x)>0$ в интервалах $\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right)$, $(1;+\infty)$ и $f''(x)<0$ в интервалах $\left(-\sqrt[3]{2};0\right)$, $(0;1)$, то функция $f(x)$ вогнута в интервалах $\left(-\infty;-\sqrt[3]{2}\right)$, $(1;+\infty)$ и выпукла в интервалах $\left(-\sqrt[3]{2};0\right)$, $(0;1)$.

При переходе x через точку $x_1 = -\sqrt[3]{2} \approx -1{,}26$ $f''(x)$ меняет знак с «+» на «–», при переходе через точку $x_2 = 0$ $f''(x)$ знак не меняет. Следовательно, точка $x_1 = -\sqrt[3]{2}$ является точкой перегиба, а точка $x_2 = 0$ не является точкой перегиба функции $f(x)$. Значение функции в точке перегиба $f\left(-\sqrt[3]{2}\right) = -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3} \approx -0{,}84$.

Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке $\left(-\sqrt[3]{2}; -\frac{2\sqrt[3]{2}}{3}\right)$ (тангенс угла α между касательной и осью Ox) есть $\operatorname{tg}\alpha = f'(x_1) = f'\left(-\sqrt[3]{2}\right) = 1\frac{1}{3} \approx 1{,}33$.

Результаты сводим в табл.3.

Таблица 3

x	$\left(-\infty; -\sqrt[3]{2}\right)$	$-\sqrt[3]{2}$	$\left(-\sqrt[3]{2}; 0\right)$	0	$(0;1)$	1	$(1; +\infty)$
$f''(x)$	+	0	–	0	–	Не существует	+
$f(x)$	$\cup$	$-\frac{2}{3}\sqrt[3]{2}$	$\cap$	0	$\cap$	Не определена	$\cup$

В нижней строке табл.3 символ $\cup$ означает вогнутость графика функции, а символ $\cap$ означает выпуклость графика функции на соответствующем интервале.

Принимая во внимание все полученные результаты, строим эскиз графика исследуемой функции (рис. 17).

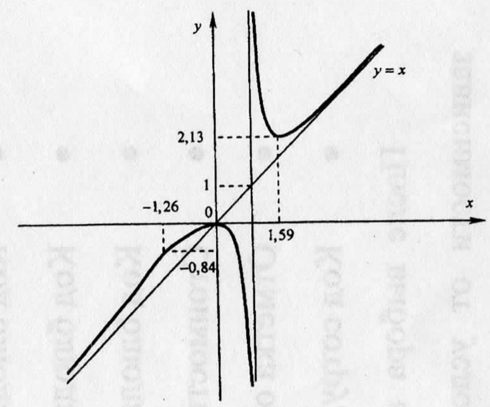

Рис. 17

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin x^2$ на отрезке $\left[-\sqrt{\pi}; \frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right]$.

Решение. Так как функция $y = \sin x^2$ дифференцируема на интервале $\left[-\sqrt{\pi}; \frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right]$, то критическими по первой производной будут только точки стационарности функции на этом интервале. Находим эти точки:

$$f'(x) = 2x\cos x^2;\ 2x\cos x^2 = 0;\ x_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}};\ x_2 = -\sqrt{\frac{\pi}{2}};\ x_3 = 0.$$

Вычисляем значения функции в найденных точках стационарности функции и на концах отрезка $\left[-\sqrt{\pi}; \frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right]$:

$$f\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1;\ f\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 1;\ f(0) = 0;\ f\left(-\sqrt{\pi}\right) = 0;\ f\left(\sqrt{\frac{5\pi}{4}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение рассматриваемой функции на отрезке $\left[-\sqrt{\pi}; \frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right]$ равно 1 и достигается в двух внутренних точках $x_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$,

$x_2=-\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ отрезка $\left[-\sqrt{\pi};\frac{\sqrt{5\pi}}{2}\right]$, а наименьшее значение ее равно $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и достигается на правом конце этого отрезка.

Итак, $y_{\text{наиб}}\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=y_{\text{наиб}}\left(-\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right)=1$, $y_{\text{наим}}\left(\sqrt{\frac{5\pi}{4}}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Задача 4. Вычислить приближенное значение функции $y=\text{tg}x$ при $x=44°52'$.

Решение. Для вычисления $\text{tg}44°52'$ воспользуемся приближенным равенством

$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.$$

Представим $44°52'$ как $45°-8'$ и переведем градусную меру в радианную: $45°-8'=\left(\frac{\pi}{4}-0,002327\right)$рад. Имеем:

$$x_0=\frac{\pi}{4};\ \Delta x=-0,002327;\ f(x_0)=\text{tg}x_0=\text{tg}\frac{\pi}{4}=1;$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{\cos^2 x_0}=2;\ f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=\text{tg}x_0+\frac{1}{\cos^2 x_0}\Delta x=0,995346.$$

Следовательно, $\text{tg}x=0,995346$.

Задача 5. Найдем полиномы Тейлора первой и второй степени $T_1(x)$ и $T_2(x)$ для функции $y=\frac{x^4}{x^3-1}$ (см.задачу 2) в точке $x_0=0,5$; построим в окрестности этой точки фрагменты графиков данной функции и аппроксимирующих ее полиномов $y=T_1(x)$ и $y=T_2(x)$.

Решение. Полиномы Тейлора первой и второй степени имеют вид:

$$f(x)\approx T_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0);$$

$$f(x)\approx T_2(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2.$$

Имеем:

$$f(x)=\frac{x^4}{x^3-1};\ f(x_0)=f(0,5)=-\frac{1}{14};$$

$$f'(x)=\frac{x^3(x^3-4)}{(x^3-1)^2};\ f'(x_0)=f'(0,5)=-\frac{31}{49};$$

$$f''(x)=\frac{6x^2(x^3+2)}{(x^3-1)^3};\ f''(x_0)=f''(0,5)=-4\frac{120}{343}.$$

Следовательно:

$$T_1=-\frac{31}{49}x+\frac{12}{49};\ T_2(x)=-2\frac{130}{343}x^2+1\frac{256}{343}x-\frac{120}{343}\ \text{(рис.18)}.$$

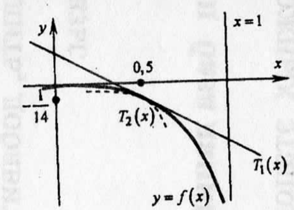

Рис. 18

Геометрически $y=T_1(x)=-\frac{31}{49}x+\frac{12}{49}$ представляет собой касательную к графику данной функции в точке $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{14}\right)$, а $y=T_2(x)=-2\frac{130}{343}x^2+1\frac{256}{343}x-\frac{120}{343}$ параболу, имеющую с графиком функции в этой точке общую касательную и одинаковую кривизну.